BULLETIN DE LA S. M. F.

COLETTE SCHOELLER

Groupes affines, commutatifs, unipotents sur un corps non parfait

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 241-300

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__241_0>

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 241 à 300.

GROUPES AFFINES, COMMUTATIFS, UNIPOTENTS SUR UN CORPS NON PARFAIT

PAR

COLETTE SCHOELLER

Table des matières

Index des notations

$\mathcal{B}$	Ensemble fixé identifié à une p-base de k (1.4 et introd. du chap. 2).
$\mathcal{B}_\omega$	Partie finie de $\mathcal{B}$ (introd. du chap. 9).
B^α	Monôme formé avec des éléments de $\mathcal{B}$ (1.4).
$\mathcal{C}(k)$	Anneau de Cohen de k (3.2.3).
$\mathcal{C}_{n+1}(k)$	Anneau de Cohen de hauteur $n+1$ de k (3.2.1).
$\mathcal{C}^m(k)$	(3.4).
$\mathcal{C}_n^\omega(k)$	(9.3.3).
$\mathcal{D}$	Droite affine (introd. du chap. 1).

$D^{\mathcal{B}}$	Anneau intervenant dans le théorème de structure (5.1.1 et introd. du chap. 9).
$D_n^{\mathcal{B}}$	Quotient de $D^{\mathcal{B}}$ (5.3 et 10.1).
D_n^{ω}	(10.1).
e_n	Suite exacte $0 \to W_n \to W_{n+1} \to \mathrm{Ga} \to 0$ (1.2).
F	Endomorphisme de $W(k)$ ou de $W_n(k)$ (3.7).
$\mathcal{F}$	Endomorphisme de $\mathcal{J}_{n,k}$ (5.4.2) ou de $\mathcal{C}(k)$ (3.7); désigne aussi un élément de $D^{\mathcal{B}}$ (5.1).
$\mathcal{G}_{n+1}$	(2.6.1).
g_0, g_α, g_{n+1}	(2.2).
G	Groupe affine commutatif unipotent.
Ga	Foncteur en anneaux $\mathrm{Ga}(R) = R$, ou foncteur en groupes sous-jacent.
$\mathbf{Gr}_k$	Catégorie des k-groupes affines commutatifs unipotents (1.3).
I, I^n, $I(n)$	Ensembles d'indices liés à $\mathcal{B}$ (1.4 et 2.4).
I_ω^n, $I_\omega(n)$	Ensembles d'indices liés à $\mathcal{B}_\omega$ (introd. du chap 9 et 9.1.1).
$I_{n+1} = \mathbf{Z}[\mathcal{B}][\mathcal{X}(n)]$	Algèbre associée au schéma affine $\mathcal{J}_{n+1}^{\mathcal{B}}$, avec card $\mathcal{B}$ fini (2.5.2).
$\mathcal{J}_{n+1}$, $\mathcal{J}_{n+1}^{\mathcal{B}}$	$\mathcal{B}$-foncteur de Witt de hauteur $n+1$ (2.2).
$\mathcal{J}_{n+1}^{\omega}$	(9.1.1).
k	Corps non parfait de caractéristique p, de p-base $\mathcal{B}$ (1.3 et chap. 3).
k^{p^n}	Image de k par l'endomorphisme $x \to x^{p^n}$ (1.3).
$K[F]$	Anneau des polynômes additifs en F avec $Fx = x^pF$ (4.2.1).
$\mathfrak{L}$	(7.3).
p	Nombre premier; caractéristique de k.
P_m, $P_{m,\beta}$	$\mathcal{B}$-polynômes de Witt (7.2).
q_{n+1}	Rétraction du monomorphisme canonique $\mathcal{J}_{n+1} \to \prod_n W_{n+1}$ (2.6).
R	Algèbre sur $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$ ou sur k (en général).
$\mathcal{R}_n$; $\mathcal{R}_n^{\omega}$	(5.4.3 et 9.3.4).
$\mathfrak{R}$	Projection canonique de W_{n+1} sur W_n (1.2).
$S^{(m)}$	Projecteur de $\mathcal{C}(k)$ sur $\mathcal{C}(k^{p^m})$ (3.6 et 9.3.2).
$\mathcal{T}$	Foncteur de la catégorie des modèles (k-modèles...) dans celle des ensembles (groupes...).

$\mathfrak{C}(p^n)$	(1.3).
$\mathfrak{T}$	Translation (1.2).
V	Endomorphisme de W ou de W_{n+1} (1.2).
$\mathcal{V}$	Endomorphisme de $\mathcal{I}_{n,k}$ (2.7) ou de $\mathcal{C}(k)$ (3.8); désigne aussi un élément de $D^{\mathcal{B}}$ (5.1).
$\mathfrak{B}_G$	Morphisme de décalage (1.3).
W, W_{n+1}	Foncteurs de Witt (1.2).
$\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$	Algèbre symétrique de $\mathcal{B}$ à coefficients entiers (1.4).
$\mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$	(1.4 et introd. du chap. 2).
α, β, γ	Éléments de I^n (1.4).
(r, α)	Élément de $I(n)$ (2.4).
$\xi(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')$	(1.1).
π_n	Projection canonique de $\mathcal{C}(k)$ sur $\mathcal{C}_n(k)$ (3.2.3).
ρ_n	(2.9).
σ	Section de π_0.
τ	Monomorphisme canonique de $\mathcal{I}_n$ dans $\mathcal{I}_{n+1}$ (2.8.1).
$\tau^{n'-n}_{\omega', \omega}$, $\tau^{n'-n}_{\omega}$	(9.1.1).
ω, ω', ω''	Éléments de Ω.
Ω	Ensemble d'indices pour les parties finies de $\mathcal{B}$ (introd. du chap. 9).
$[x]$	Image de $x \in R$ par la section de Teichmuller : $[x] = (x, 0, \ldots) \in W(R)$, ou $[x] = (x, 0, \ldots, 0) \in W_n(R)$ (1.2).
$\Pi_{K' \mid K}$	Restriction de Weil associée à l'extension des scalaires $K \to K'$ (1.1).
Π_n	(introd. du chap. 2).
$\Pi_n W_m$	(introd. du chap. 2).

Introduction

Soient k un corps de caractéristique p, non nulle, et $\mathbf{Gr}_k$ la catégorie des k-groupes affines, commutatifs, unipotents; lorsque k est parfait, on connaît la structure de la catégorie $\mathbf{Gr}_k$ et le rôle joué par la famille $\{ W_{n,k};\ n \in \mathbf{N}^* \}$ des k-groupes de Witt. L'un des arguments essentiels de la démonstration du théorème de structure est la propriété suivante : Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $W_{n,k}$ est un cogénérateur injectif de la sous-catégorie pleine $\mathbf{Gr}_{n,k}$ de $\mathbf{Gr}_k$ formée des k-groupes algébriques annulés par la puissance n-ième du décalage.

Lorsque k n'est pas parfait, le k-groupe de Witt $W_{n,k}$ n'est plus un cogénérateur injectif de $\mathbf{Gr}_{n,k}$, du moins pour $n \geq 2$. Cependant, *dans le cas où la dimension de k sur k^p est finie, il est encore possible de construire une famille* $\{ \mathcal{J}_{n,k} ; n \in \mathbf{N}^* \}$ possédant la propriété ci-dessus : c'est ce que nous montrons dans les chapitres 2 et 4. On aboutit alors à un théorème de structure analogue à celui qui est connu sur un corps parfait (chap. 5 et 6).

Les schémas $\mathcal{J}_{n,k}$ sont en fait des schémas en anneaux; *ils permettent* (*comme les schémas de Witt dans le cas d'un corps de base parfait*) *de construire l'anneau de Cohen de k*, et d'en retrouver les propriétés essentielles (chap. 2, 7 et 8).

Les derniers chapitres sont consacrés à l'étude du cas où la dimension de k sur k^p est infinie.

Bien que l'anneau de Cohen $\mathcal{C}(k)$ de k n'y soit pas explicitement décrit, on retrouve dans l'article de O. Teichmüller [6] et dans le livre de M. Nagata [5], l'idée de la construction faite ici au chapitre 3. L'existence de sections multiplicatives pour la projection canonique $\mathcal{C}(k) \to k$ (*cf.* chap. 8) a été prouvée par I. Kaplansky [4] par une méthode un peu différente. On peut trouver dans [2] (chap. 0, § 21), les proprétés des différentielles utilisées au chapitre 8.

L'Ouvrage de référence essentiel reste cependant le livre de M. Demazure et P. Gabriel [1]; de larges emprunts ont été faits, notamment, au chapitre V, qui traite du cas où le corps de base est parfait.

Je ne saurais trop remercier P. Gabriel dont les conseils m'ont aidée à mener à bien cette étude; ses suggestions m'ont en particulier permis d'améliorer grandement l'exposé de résultats parfois très techniques. Je remercie aussi P. Cartier qui a bien voulu lire une première ébauche de mon manuscrit et me faire quelques remarques fort utiles.

1. Généralités

Nous commençons par rappeler divers résultats de géométrie algébrique que nous utiliserons constamment; le lecteur pourra en trouver les démonstrations dans [1]. Nous adoptons les conventions de [1]; en particulier, la catégorie $\mathbf{M}$ des *modèles* est la catégorie des anneaux (commutatifs, unifères) dont l'ensemble sous-jacent est un élément d'un univers $\mathbf{U}$ fixé. Si K est un modèle, $\mathbf{M}_K$ est la catégorie des K-algèbres commutatives, unifères, dont l'anneau sous-jacent est un modèle; nous appellerons simplement « *K-algèbres* » les objets de $\mathbf{M}_K$.

On note $\mathbf{M}_K\,\mathbf{E}$ la catégorie des « *K-foncteurs* » : ce sont les foncteurs de $\mathbf{M}_K$ dans la catégorie $\mathbf{E}$ des ensembles (i. e. des éléments d'un univers $\mathbf{V}$ fixé tel que $\mathbf{N} \in \mathbf{U}$ et $\mathbf{U} \in \mathbf{V}$). Soit $\mathcal{X}$ un K-foncteur; si, pour tout

K-modèle R, on munit $\mathfrak{G}(R)$ d'une structure de groupe (resp. d'anneau) dépendant fonctoriellement de R, on obtient un K-foncteur en groupes (resp. en anneaux). Par exemple, à partir de la *droite affine* $\mathcal{O}$ (i. e. du foncteur qui à tout modèle R associe l'ensemble sous-jacent à R), on forme le foncteur en groupes Ga^+ qui à tout modèle R associe le groupe additif sous-jacent à R, et le foncteur en anneaux Ga tel que $\mathrm{Ga}(R) = R$. Par abus de notations, on écrira Ga au lieu de Ga^+.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie, si c est un objet de $\mathbf{C}$, on écrit $c \in \mathbf{C}$; si $a, b \in \mathbf{C}$, on note $\mathbf{C}(a, b)$ la classe des morphismes de a dans b.

1.1. *Restriction de Weil.* — Soit $\varphi : K \to K'$ un morphisme de modèles, on note

$$?_{K'} : \quad \mathbf{M}_K \mathbf{E} \to \mathbf{M}_{K'} \mathbf{E}$$

le foncteur « extension des scalaires » qui lui est associé; si $\mathfrak{G} \in \mathbf{M}_K \mathbf{E}$, on écrira aussi $\mathfrak{G} \otimes_K K'$ au lieu de $\mathfrak{G}_{K'}$. Si R est une K'-algèbre, on a $\mathfrak{G}_{K'}(R) = \mathfrak{G}({}_K R)$, où ${}_K R$ désigne la K-algèbre sous-jacente à R.

Le foncteur extension des scalaires $?_{K'}$ possède un *adjoint à droite* appelé « *restriction de Weil* », nous le notons

$$\textstyle\prod_{K' \mid K} ? : \quad \mathbf{M}_{K'} \mathbf{E} \to \mathbf{M}_K \mathbf{E}.$$

Si $\mathfrak{G}' \in \mathbf{M}_{K'} \mathbf{E}$, on a

$$(\textstyle\prod_{K' \mid K} \mathfrak{G}')(R) = \mathfrak{G}'(R \otimes_K K') \quad \text{pour tout } R \in \mathbf{M}_K.$$

Rappelons que, si $\mathfrak{G} \in \mathbf{M}_K \mathbf{E}$ et $\mathfrak{G}' \in \mathbf{M}_{K'} \mathbf{E}$, *la bijection canonique*

$$\xi(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}') : \quad \mathbf{M}_{K'} \mathbf{E}(\mathfrak{G}_{K'}, \mathfrak{G}') \to \mathbf{M}_K \mathbf{E}(\mathfrak{G}, \textstyle\prod_{K' \mid K} \mathfrak{G}')$$

(fonctorielle en $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}'$) admet la description suivante : au morphisme $u : \mathfrak{G}_{K'} \to \mathfrak{G}'$, $\xi(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$ associe le morphisme $u' : \mathfrak{G} \to \prod_{K' \mid K} \mathfrak{G}'$, défini sur tout $R \in \mathbf{M}_K$, comme le composé

$$\mathfrak{G}(R) \xrightarrow{\mathfrak{G}(i)} \mathfrak{G}({}_K(R \otimes_K K')) \xrightarrow{u(R \otimes_K K')} \mathfrak{G}'(R \otimes_K K'),$$

où $i : R \to R \otimes_K K'$ est l'injection canonique, et ${}_K(R \otimes_K K')$ la K-algèbre sous-jacente à $R \otimes_K K'$.

Si $\mathfrak{G}$ est un schéma affine, $\mathfrak{G}_{K'}$ en est un. Si $\varphi : K \to K'$ fait de K' un K-module *projectif de type fini*, alors $\prod_{K' \mid K} \mathfrak{G}'$ est un schéma affine lorsque $\mathfrak{G}'$ en est un ([1], I, § 1, n° 6). Une structure de foncteur en groupes sur $\mathfrak{G}$ (resp. sur $\mathfrak{G}'$) détermine évidemment une structure naturelle de foncteur en groupes sur $\mathfrak{G}_{K'}$ (resp. sur $\prod_{K' \mid K} \mathfrak{G}'$).

1.2. *Vecteurs de Witt.* — Nous désignons par W (resp. W_n) *le schéma en anneaux des vecteurs de Witt* (resp. des vecteurs de Witt de longeur n). Soient R un modèle, $x = (x_0, x_1, \ldots)$ et $y = (y_0, y_1, \ldots)$ (avec $x_i, y_i \in \mathbf{R}$,

$\forall\, i \in \mathbf{N}$) deux éléments de $W(R)$; on rappelle que les composantes s_i et m_i, $i \in \mathbf{N}$, de leur somme $s = (s_0, s_1, \ldots)$ et de leur produit $m = (m_0, m_1, \ldots)$ sont déterminées par récurrence par les formules

$$\Phi_n(s_0, s_1, \ldots, s_n) = \Phi_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) + \Phi_n(y_0, y_1, \ldots, y_n),$$
$$\Phi_n(m_0, m_1, \ldots, m_n) = \Phi_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) \times \Phi_n(y_0, y_1, \ldots, y_n),$$

où $\Phi_n \in \mathbf{Z}[X_0, X_1, \ldots]$ est le n-ième *polynôme de Witt :*

$$\Phi_n = X_0^{p^n} + p\, X_1^{p^{n-1}} + \ldots + p^n X_n, \qquad n \in \mathbf{N} \quad ([1]);\ \text{V}, \S\,1).$$

Pour tout modèle R, *la section de Teichmüller :*

$$t_R : \quad R \to W(R)$$

est l'application qui à $x \in R$ associe $t_R(x) = (x, 0, 0, \ldots)$. On a

$$t_R(x).t_R(y) = t_R(x.y)$$

pour tous x, $y \in R$. Nous appelons aussi $t_R : R \to W_{n+1}(R)$ l'application $x \mapsto (x, 0, \ldots, 0)$, et nous utiliserons la notation $t_R(x) = [x]$.

Soit $V : W_{n+1} \to W_{n+1}$ l'endomorphisme de groupe qui à tout $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in W_{n+1}(R)$ associe $V(x) = (0, x_0, \ldots, x_{n-1})$; *tout élément $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $W_{n+1}(R)$ s'écrit*

$$x = [x_0] + V[x_1] + \ldots + V^n[x_n].$$

Nous utiliserons la propriété suivante de V^r, vis-à-vis de la multiplication :

$$[y_0].V^r(x) = V^r([y_0^{p^r}].x),$$

pour tous $y_0 \in R$, $x \in W_{n+1}(R)$ et $r = 0, 1, \ldots, n$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a une suite exacte

$$e_n : \quad 0 \to W_n \xrightarrow{\mathfrak{T}} W_{n+1} \xrightarrow{\mathfrak{R}^n} \mathrm{Ga} \to 0$$

de schémas en groupes commutatifs, où $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{R}^n$ sont définis pour tout modèle R par

$$\mathfrak{T}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (0, x_0, \ldots, x_{n-1}), \quad \forall\,(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in W_n(R),$$
$$\mathfrak{R}^n(y_0, y_1, \ldots, y_n) = y_0, \quad \forall\,(y_0, \ldots, y_n) \in W_{n+1}(R).$$

1.3. *Groupes affines, commutatifs, unipotents.* — Si k est un corps de caractéristique $p \neq 0$, nous notons $\mathbf{Gr}_k$ la catégorie des k-schémas en groupes, affines, commutatifs, unipotents. [Un k-schéma en groupes affines G est dit *unipotent* si, pour tout sous-groupe fermé H, il existe un morphisme $g : H \to \mathrm{Ga}_k$ non nul ([1]; IV, § 2).] *Nous appellerons simplement k-groupes unipotents les objets de $\mathbf{Gr}_k$.* Cette catégorie est abélienne; tout k-groupe algébrique unipotent G possède une suite de composition

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G,$$

dont les quotients $G_{i+1} \mid G_i$ sont des sous-groupes fermés de Ga_k; tout k-groupe unipotent est limite projective (filtrante) de ses quotients algébriques.

Soit f^n l'endomorphisme de k tel que $f^n(x) = x^{p^n}$ pour tous $x \in k$, $n \in \mathbf{N}$; on note k^{p^n} l'image de f^n. Pour tout k-foncteur $\mathfrak{G}$, on note $\mathfrak{G}^{(p^n)}$ le foncteur déduit de $\mathfrak{G}$ par l'extension f^n des scalaires. Soit G un k-groupe unipotent, nous notons

$$\mathfrak{V}_G : \quad G^{(p)} \to G$$

le morphisme de décalage (ou Verschiebung) décrit dans ([1]; IV, § 3, 4). Nous dirons que G *est annulé par* $\mathfrak{V}^n$ si $\mathfrak{V}_G^n : G^{(p^n)} \to G$ est nul : par exemple, $W_{n,k}$ est annulé par $\mathfrak{V}^n$.

Montrons sur un exemple l'utilisation de la restriction de Weil.

Lemme. — *Si* $f^n : k \to k$ *donne à* k *une structure de* k*-espace vectoriel de dimension finie* (i. e. si $[k : k^p] < \infty$), *tout* k*-groupe unipotent* G *possède un plus grand sous-groupe annulé par* $\mathfrak{V}^n$.

Soit $\prod_{f^n}$? la restriction de Weil adjointe à l'extension des scalaires $f^n : k \to k$, et soit $\tilde{V}_G^n$ l'image de $\mathfrak{V}_G^n$ par la bijection

$$\xi(G, G) : \quad \mathbf{Gr}_k(G^{(p^n)}, G) \to \mathbf{Gr}_k(G, \textstyle\prod_{f^n} G);$$

on montre que $G_n = \operatorname{Ker} \tilde{V}_G^n$ est le sous-groupe cherché.

En effet, $\mathfrak{V}_G^n$ et $\xi(G, G)$ dépendent fonctoriellement de G; il s'ensuit que, pour tout sous-groupe $H \xrightarrow{i} G$, le carré

$$\begin{array}{ccc} G^{(p^n)} & \xrightarrow{\mathfrak{V}_G^n} & G \\ {\scriptstyle i^{(p^n)}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ H^{(p^n)} & \xrightarrow{\mathfrak{V}_H^n} & H \end{array}$$

est commutatif; de même, si l'on note $\tilde{V}_H^n$ l'image de $\mathfrak{V}_H^n$ par $\xi(H, H)$ le carré

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\tilde{V}_G^n} & \prod_{f^n} G \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \prod_{f^n} i} \\ H & \xrightarrow{\tilde{V}_H^n} & \prod_{f^n} H \end{array}$$

(dans lequel $\prod_{f^n} i$ est un monomorphisme) est commutatif. Comme ξ est une bijection qui envoie 0 sur 0, on en déduit d'une part que, si $\mathfrak{V}_H^n = 0$, on a $\tilde{V}_H^n = 0$ (et par suite H est contenu dans G_n), d'autre part que $\mathfrak{V}_{G_n}^n = 0$ (puisque $\tilde{V}_{G_n}^n = 0$); et le lemme s'ensuit.

Remarque. — Lorsque $[k : k^p]$ n'est pas fini, $\prod_{f^n} G$ n'est pas un schéma; l'image $\tilde{V}_G$ de $\mathfrak{V}_G^n$ par la bijection canonique

$$\xi\,(G,\ G):\quad \mathbf{M}_k\,\mathbf{E}\,(G^{(p^n)},\ G) \to \mathbf{M}_k\,\mathbf{E}\,(G,\ \textstyle\prod_{f^n}\ G)$$

est un morphisme de foncteurs en groupes. Le raisonnement ci-dessus montre alors que *G admet un plus grand sous-groupe $G_n \in \mathbf{Gr}_k$ annulé par $\mathfrak{V}^n$ si et seulement si* Ker $\tilde{V}_G^n$ *est un schéma; et l'on a* $G_n =$ Ker $\tilde{V}_G^n$. *C'est, en particulier, le cas si G est algébrique :* en effet, il existe alors une sous-extension *finie* $k \to k'$ de $f^n : k \to k$ telle que $\mathfrak{V}_G^n$ se factorise à travers $G \otimes_k k'$; par suite, $\tilde{V}_G^n$ se factorise à travers $\prod_{k'|k} G$, d'où un morphisme $\overline{V}_G^n : G \to \prod_{k'|k} G$ tel que Ker $\overline{V}_G^n =$ Ker $\tilde{V}_G^n$; ainsi Ker $\tilde{V}_G^n$ est un sous-groupe fermé de G, et par conséquent un schéma.

1.4. *Notations spéciales au cas où le corps de base k n'est pas parfait.* — Soit p la caractéristique de k; k^{p^n} désigne l'image de f^n, et $\mathcal{B}$ un ensemble d'éléments b de k formant une p-base de k. Les monômes

$$\textstyle\prod_{b \in \mathcal{B}}\, b^{\alpha_b},$$

où les α_b sont des entiers presque tous nuls de l'intervalle $[0,\ p - 1]$, forment une base de k sur k^p. Nous désignons par B^α un tel monôme, et par $\{ B^\alpha;\ \alpha \in I \}$ la base de k sur k^p ainsi constituée; I est l'ensemble des éléments du groupe additif $\bigoplus_{\mathcal{B}} \mathbf{Z}$ dont toutes les composantes sont dans $[0,\ p - 1]$.

Plus généralement, soit I^n l'ensemble des éléments de $\bigoplus_{\mathcal{B}} \mathbf{Z}$ dont toutes les composantes sont dans $[0,\ p^n - 1]$; tout élément α de I^n admet une écriture unique de la forme

$$\alpha = \alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n-1}\,\alpha_n, \qquad \text{avec} \quad \alpha_i \in I \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Les monômes $\{ B^\alpha = B^{\alpha_1}.(B^{\alpha_2})^p \ldots (B^{\alpha_n})^{p^{n-1}};\ \alpha \in I^n \}$ forment une base de k sur k^{p^n}.

Soit $\bar{k}$ une clôture parfaite de k; on pose $\mathcal{B}^{p^{-n}} = \{ b^{p^{-n}} \in \bar{k};\ b \in \mathcal{B} \}$ et $k^{p^{-n}} = k\,(\mathcal{B}^{p^{-n}})$. Pour tous $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in I^n$, on note $B^{p^m.\alpha}$ la puissance p^m-ième de B^α; alors l'ensemble $\{ B^{p^m.\alpha};\ \alpha \in I^n \}$ est une base de k^{p^m} sur $k^{p^{m+n}}$.

Si $\mathcal{B}$ est une p-base de k, k contient l'algèbre symétrique $\mathbf{F}_p\,[\mathcal{B}]$ de $\mathcal{B}$ à coefficients dans le corps $\mathbf{F}_p$. En composant l'inclusion $\mathbf{F}_p\,[\mathcal{B}] \to k$ avec la projection canonique $\mathbf{Z}\,[\mathcal{B}] \to \mathbf{F}_p\,[\mathcal{B}]$, on obtient sur k une structure de $\mathbf{Z}\,[\mathcal{B}]$-algèbre; nous dirons que c'est *la structure canonique de* $\mathbf{Z}\,[\mathcal{B}]$*-algèbre sur k* (déterminée par le choix de la p-base $\mathcal{B}$). Plus généralement, pour $n \in \mathbf{N}$, la p-base $\mathcal{B}^{p^{-n}}$ détermine sur $k^{p^{-n}}$ une structure de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$-algèbre, d'où une structure de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre par composition avec l'injection naturelle

$$\iota: \quad \mathbf{Z}[\mathcal{B}] \to \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$$

déterminée par $\iota(b) = (b^{p^{-n}})^{p^n}$, pour tout $b \in \mathcal{B}$; et l'on a un isomorphisme

$$k^{p^{-n}} \xrightarrow{\sim} k \otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}]} \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}].$$

Jusqu'au chapitre 9, $\mathcal{B}$ *sera un ensemble fixe; nous ne considérerons que des foncteurs au-dessus de l'algèbre* $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$; *aussi, pour simplifier les notations, écrirons-nous*

$$\mathcal{O} \text{ (resp. Ga, } W_n) \text{ au lieu de } \mathcal{O}_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}]} \quad (\text{resp. Ga}_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}]},\ W_{n,\mathbf{Z}[\mathcal{B}]}).$$

2. Définition des $\mathcal{B}$-anneaux de Witt

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble; dans tout ce chapitre, l'anneau de base est l'algèbre commutative libre $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$ à coefficients entiers engendrée par les éléments b de $\mathcal{B}$. Fixons tout d'abord quelques notations. Si R et R' sont deux $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbres, $R \otimes R'$ désignera leur produit tensoriel *au-dessus de* $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$. Soient $i_R : \mathbf{Z}[\mathcal{B}] \to R$ l'homomorphisme canonique, et b un élément de $\mathcal{B}$, nous écrirons généralement b au lieu de $i_R(b)$, et $\mathcal{B}$ au lieu de $i_R(\mathcal{B})$; si R est un corps, et si i_R induit une *bijection* de $\mathcal{B}$ sur une p-base de R, nous dirons que R *est un corps de p-base* $\mathcal{B}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$ désigne la $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre engendrée par les variables X_b, $b \in \mathcal{B}$, soumises aux relations $(X_b)^{p^n} = b$; on écrira en fait $b^{p^{-n}}$ au lieu de X_b. Nous notons $\prod_n$? la restriction de Weil $\prod_{K'|K}$? (*cf.* 1.1) dans le cas où $\iota: K \to K'$ est l'injection canonique de $K = \mathbf{Z}[\mathcal{B}]$ dans $K' = \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$. Enfin, pour simplifier l'écriture, nous désignons par $\prod_n W_m$ le foncteur en anneaux $\prod_n (W_m \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$ (avec $m \in \mathbf{N}^*$).

2.1. — Nous commencerons par donner quelques propriétés simples de $\prod_n W_{n+1}$. Le morphisme $\prod_n V^r : \prod_n W_{n+1} \to \prod_n W_{n+1}$ de foncteurs en groupes est décrit par

$$\textstyle\prod_n V^r(R) = V^r(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]) : \quad W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]) \to W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$$

pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R; aussi écrirons-nous V^r au lieu de $\prod_n V^r(R)$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. Alors, *tout élément* X *de* $\prod_n W_{n+1}(R)$ *admet une écriture unique de la forme*

2.1.1. $$X = \textstyle\sum_{r=0}^{r=n} \sum_{\alpha \in I^n} V^r [x_{r,\alpha} \otimes B^{p^{-n}.\alpha}],$$

avec $x_{r,\alpha} \in R$ *pour tout* (r, α) (notations de 1.2 et 1.4). En effet, posons $P = \prod_n W_{n+1}(R)$, munissons-le de la filtration naturelle

$$P = P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_n \supset P_{n+1} = 0,$$

où $P_r = V^r(\prod_n W_{n+1}(R))$, et raisonnons par récurrence décroissante sur r; la propriété est vraie pour tout élément X de P_{n+1}; supposons-la vraie pour tout élément de P_{r+1}, et montrons-la pour tout X dans P_r. Puisque X est dans P_r, il admet une écriture de la forme $X = V^r[x_r] + V^{r+1}(Y)$, avec $x_r \in R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$ et $Y \in \prod_n W_{n+1}(R)$ (*cf.* 1.3). Comme x_r s'écrit de manière unique sous la forme

$$x_r = \sum_{\alpha \in I^n} x_{r,\alpha} \otimes B^{p^{-n}.\alpha}, \qquad \text{avec} \quad x_{r,\alpha} \in R, \quad \forall\, \alpha \in I^n,$$

il vient

$$X = \sum_{\alpha \in I^n} V^r[x_{r,\alpha} \otimes B^{p^{-n}.\alpha}] + V^{r+1}(Y'), \qquad \text{où} \quad Y' \in \prod_n W_{n+1}(R);$$

ce qui achève la démonstration.

Nous nous proposons de définir une famille $(\mathcal{J}_n^{\mathcal{B}};\, n \in \mathbf{N}^*)$ de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-foncteurs en anneaux qui, vis-à-vis des corps de p-base $\mathcal{B}$, jouera un rôle analogue à celui des foncteurs de Witt $(W_n;\, n \in \mathbf{N}^*)$ vis-à-vis des corps parfaits de caractéristique p.

Les paragraphes 2.2 à 2.6 sont consacrés à la description de $\mathcal{J}_{n+1}^{\mathcal{B}}$ et à la démonstration de ses propriétés les plus immédiates : *pour toute* $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$*-algèbre* R, $\mathcal{J}_{n+1}^{\mathcal{B}}(R)$ *est le sous-anneau de* $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$ *engendré par* $W_{n+1}(R)$ *et les éléments* $1 \otimes b^{p^{-n}}$, $b \in \mathcal{B}$ (2.2). *C'est aussi le sous-groupe additif de* $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$ *engendré par les éléments* $V^r[x \otimes B^{p^{r-n}.\alpha}]$, *avec* $r = 0, 1, \ldots, n$ *et* $\alpha \in I^{n-r}$, $x \in R$ (2.4). *Tout élément* X *de* $\mathcal{J}_{n+1}^{\mathcal{B}}(R)$ *admet une écriture unique de la forme*

$$X = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\alpha \in I^{n-r}} V^r[x_{r,\alpha} \otimes B^{p^{r-n}.\alpha}].$$

Enfin (2.6), $\mathcal{J}_{n+1}^{\mathcal{B}}(R)$ est *facteur direct* de son propre module $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$.

2.2. — Pour tout $\alpha \in I^n$, nous appelons $g_\alpha : W_{n+1} \to \prod_n W_{n+1}$ l'image de l'homothétie $[B^{p^{-n}.\alpha}]$ par la bijection canonique

$$\mathbf{Gr}_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]}(W_{n+1} \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}], W_{n+1} \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]) \to \mathbf{Gr}_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}]}(W_{n+1}, \prod_n W_{n+1}).$$

Pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R et tout élément $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $W_{n+1}(R)$ on a

$$g_\alpha(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (a_0 \otimes 1, a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}].$$

LEMME. — *Soit* $g_{n+1} : \bigoplus_{I^n} W_{n+1} \to \prod_n W_{n+1}$ *le morphisme de composantes* g_α, $\alpha \in I^n$; *l'image* $\mathcal{J}_{n+1}^{\mathcal{B}}$ *de* g_{n+1} *dans la catégorie* $\mathbf{M}_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}]}\mathbf{E}$ *est un sous-foncteur en anneaux de* $\prod_n W_{n+1}$.

En effet, soit R une $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre; pour $\alpha = 0$, $g_\alpha(R) = g_0(R)$ est un isomorphisme de $W_{n+1}(R)$ sur le sous-anneau de $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$ formé des vecteurs de Witt de la forme $(a_0 \otimes 1, a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1)$; si α est quelconque, et si $w \in W_{n+1}(R)$, on a $g_\alpha(w) = g_0(w).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}]$. Alors l'image de $g_{n+1}(R)$ est le sous-$W_{n+1}(R)$-module de $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$ engendré par les éléments $[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}]$, $\alpha \in I^n$.

Par ailleurs, dans $W_{n+1}[R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$, on a, pour tous $\alpha, \beta \in I^n$,

$$(1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}, 0, \ldots, 0)(1 \otimes B^{p^{-n}.\beta}, 0, \ldots, 0) = (a \otimes B^{p^{-n}.\gamma}, 0, \ldots, 0),$$

où $a \in \mathbf{Z}[\mathcal{B}]$ et $\gamma \in I^n$ sont définis par l'égalité $B^\alpha . B^\beta = a^{p^n}.B^\gamma$ (γ est donc le reste de la division de $\alpha + \beta$ par p^n).

On en déduit que $\mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1}(R)$ est le sous-anneau de $\prod_n W_{n+1}(R)$ engendré par $W_{n+1}(R)$ et les éléments $[1 \otimes b^{p^{-n}}]$, $b \in \mathcal{B}$. D'où le lemme.

Nous appellerons *$\mathcal{B}$-anneau de Witt de hauteur $n+1$ de R* l'anneau $\mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1}(R)$. *Jusqu'au chapitre 9, nous garderons une base $\mathcal{B}$ fixe, et nous conviendrons d'écrire $\mathcal{J}_{n+1}$ au lieu de $\mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1}$.*

Soit $j_{n+1} : \mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1} \to \prod_n W_{n+1}$ le monomorphisme canonique; par abus de notation, nous appellerons encore g_{n+1} la factorisation $\bigoplus_{I^n} W_{n+1} \to \mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1}$ *de* g_{n+1} à travers $\mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1}$.

2.3. — Soit $\alpha = \alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n-1}\alpha_n$ un élément de I^n; pour tout $r = 0, 1, \ldots, n$, on définit à partir de α deux éléments de I^n,

$$\alpha^r = \alpha_{n-r+1} + p\,\alpha_{n-r+2} + \ldots + p^{r-1}\alpha_n$$

et

$$\alpha(n-r) = \alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n-r-1}\alpha_{n-r},$$

de sorte que l'on a

$$(B^\alpha)^{p^r} = (B^{\alpha^r})^{p^n}.B^{p^r.\alpha(n-r)}.$$

Avec ces notations, si R est une $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre, w un élément de $W_{n+1}(R)$, et α *un élément de I^n tel que* $\alpha^r \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} g_\alpha(V^r(w)) &= g_0(V^r(w)).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}] \\ &= V^r(g_0(w)).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}] \\ &= V^r\{ g_0(w).[B^{\alpha^r} \otimes B^{p^{r-n}.\alpha(n-r)}] \} \quad (cf.\ 1.2). \\ &= V^r\{ g_0(w.[B^{\alpha^r}]).[1 \otimes B^{p^{r-n}.\alpha(n-r)}] \} \\ &= V^r\{ g_0(w.[B^{\alpha^r}]) \}.[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha(n-r)}], \end{aligned}$$

ce qui conduit aux relations

2.3.1. $$g_\alpha(V^r(w)) = g_{\alpha(n-r)}(V^r(w.[B^{\alpha^r}])),$$

pour tous $\alpha \in I^n$, $r \in [0, n]$, $w \in W_{n+1}(R)$.

Nous montrons ici que ces relations sont les seules, autrement dit que le $W_{n+1}(R)$-module $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ est défini par ses générateurs $[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}]$; $\alpha \in I^n \}$ et les relations 2.3.1.

Soit $h_{r,\alpha} : W_{n+1} \to \bigoplus_{I^n} W_{n+1}$ le morphisme de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-groupes dont toutes les composantes sont nulles sauf celles de rangs α et $\alpha(n-r)$ qui envoient $w \in W_{n+1}(R)$ respectivement sur $V^r(w)$ et sur $-\ V^r(w.[B^{\alpha^r}])$; le composé $g_{n+1} \circ h_{r,\alpha}$ est nul (2.3.1).

Lemme. — *Soient J le sous-ensemble de $[1, n] \times I^n$ formé des couples (r, α) tels que $\alpha^r \neq 0$, et*

$$h : \quad \bigoplus_J W_{n+1} \to \bigoplus_{I^n} W_{n+1}$$

le morphisme de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-groupes dont la composante de rang $(r, \alpha) \in J$ est $h_{r,\alpha}$; la suite

2.3.2. $$\bigoplus_J W_{n+1} \xrightarrow{h} \bigoplus_{I^n} W_{n+1} \xrightarrow{g_{n+1}} \prod_n W_{n+1}$$

est exacte.

Comme $g_{n+1} \circ h$ est nul, on est ramené à démontrer que, pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R, on a $\operatorname{Im} h(R) \supset \operatorname{Ker} g_{n+1}(R)$. Posons

$$M = \bigoplus_J W_{n+1}(R), \qquad N = \bigoplus_{I^n} W_{n+1}(R) \qquad \text{et} \qquad P = \prod_n W_{n+1}(R).$$

On munit M, N et P de filtrations décroissantes telles que h et g_{n+1} soient des homomorphismes de groupes filtrés. Sur P, on prend la filtration naturelle $P_r = V^r(W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]))$; de même $N_r = \bigoplus_{I^n} V^r(W_{n+1}(R))$; enfin, pour filtrer M, on filtre chacun des facteurs $W_{n+1}(R)$: pour le facteur de rang (m, α), on pose

$$(W_{n+1}(R))_r = \begin{cases} W_{n+1}(R) & \text{si} \quad r \leq m, \\ V^{r-m}(W_{n+1}(R)) & \text{si} \quad r \geq m. \end{cases}$$

Supposons que la suite

2.3.3. $$\operatorname{gr} M \xrightarrow{\operatorname{gr}(h)} \operatorname{gr} N \xrightarrow{\operatorname{gr}(g_{n+1})} \operatorname{gr} P$$

des gradués associés soit exacte. Alors, sachant que $P_m = N_m = 0$ pour $m > n$, un raisonnement par récurrence décroissante sur m prouve immédiatement l'exactitude de la suite 2.3.2; d'où le lemme.

Montrons l'exactitude de 2.3.3, c'est-à-dire l'exactitude pour tout r de la suite de groupes

$$M_r/M_{r+1} \xrightarrow{\bar{h}} N_r/N_{r+1} \xrightarrow{\bar{g}} P_r/P_{r+1},$$

induite par 2.3.2.

Soit J_r le sous-ensemble de J formé des couples (m, α) avec $m \leq r$, on a

$$M_r/M_{r+1} = \bigoplus_{J_r} R^+ \qquad (R^+ \text{ est le groupe additif de } R),$$
$$N_r/N_{r+1} = \bigoplus_{I^n} R^+,$$
$$P_r/P_{r+1} = (R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])^+.$$

La composante de rang α de $\bar{g}$ envoie $x \in R$ sur $x.B^{\alpha^r} \otimes B^{p^{r-n}.\alpha(n-r)}$ (avec les notations ci-dessus), et la composante de rang (m, α) de $\bar{h}$ (avec $m \leq r$) envoie $y \in R$ sur l'élément z de $\bigoplus_{I^n} R^+$ dont les composantes sont nulles sauf celles de rangs α et $\alpha\,(n-m)$ qui valent respectivement y et $-y.B^{\alpha^m}$. On constate que $\bar{g}$ et $\bar{h}$ sont, en fait, des homomorphismes de R-modules.

Pour tout α tel que $\alpha^r \neq 0$, désignons par Y_α l'élément de N_r/N_{r+1} dont toutes les composantes sont nulles sauf celles de rang α et $\alpha\,(n-r)$ qui valent respectivement 1 et $-B^{\alpha^r}$; alors il est facile de voir que Ker $\bar{g}$ *est le R-module libre L de base* $\{ Y_\alpha;\ \alpha \in I^n,\ \alpha^r \neq 0 \}$. Précisons ce raisonnement : il est clair que $\bar{g}(Y_\alpha)$ est nul; de plus, la famille $\{ Y_\alpha;\ \alpha \in I^n,\ \alpha^r \neq 0 \}$ est libre dans $\bigoplus_{I^n} R$; le sous-module L' de $\bigoplus_{I^n} R$ formé des facteurs dont le rang α vérifie $\alpha^r = 0$ est un supplémentaire de L et la restriction de $\bar{g}$ à L' est évidemment injective, donc L est le noyau de $\bar{g}$.

Comme Y_α est l'image de 1 par $\bar{h}_{r,\alpha}$, on a Im $\bar{h} \supset$ Ker $\bar{g}$; par conséquent la suite 2.3.3 est exacte en degré r; ceci achève la démonstration de la proposition.

2.3.4. — Remarquons que l'image de $\bar{g}$ est

$$\Sigma_{\alpha \in I^{n-r}} R \otimes B^{p^{r-n}.\alpha} \xrightarrow{\sim} R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{r-n}}].$$

Par conséquent, si l'on munit $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ de la filtration induite par celle de $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$, le terme de degré r du gradué associé est isomorphe à $R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{r-n}}]$.

2.4. — Les relations 2.3.1 prouvent que tout élément X de $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ se met sous la forme

$$X = \Sigma_{r=0}^{n} \Sigma_{\alpha \in I^{n-r}} V^r[x_{r,\alpha} \otimes B^{p^{r-n}.\alpha}],$$

où les $x_{r,\alpha}$ sont des éléments de R.

Nous conviendrons de noter $I(n)$ l'ensemble des couples (r, α) avec $r \in [0, n]$ et $\alpha \in I^{n-r}$, de sorte que $I(n)$ est la réunion disjointe

$$I^n \dot{\cup} I^{n-1} \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} I \dot{\cup} \{ 0 \}.$$

Comme $V^r[x_{r,\alpha} \otimes B^{p^{r-n}.\alpha}] = g_\alpha(V^r[x_{r,\alpha}])$ pour tout $(r, \alpha) \in I(n)$, on en déduit que $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ *est le sous-groupe additif de* $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$ *engendré par les éléments de la forme* $V^r[x \otimes B^{p^{r-n}.\alpha}]$ *avec* $(r, \alpha) \in I(n)$ *et* $x \in R$.

Enfin, comme l'écriture 2.1.1 des éléments de $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$ est unique, *tout élément* X *de* $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ *admet une écriture unique de la forme*

2.4.1. $$X = \Sigma_{(r,\alpha)\in I(n)} V^r [x_{r,\alpha} \otimes B^{p^{r-n}.\alpha}],$$

où les éléments $x_{r,\alpha}$ de R, $(r, \alpha) \in I(n)$, seront appelés *composantes* de X.

2.5. — *Nous supposons dans ce paragraphe que* card $\mathcal{B}$ *est fini.* Dans ce cas, le foncteur $\prod_n W_{n+1}$ est un schéma affine, d'après 1.1. Désignons par

$$\theta: \quad \mathcal{O}^{[0,n]\times I^n} \to \textstyle\prod_n W_{n+1}$$

l'isomorphisme canonique : pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R et tout $X \in R^{[0,n]\times I^n}$ de composantes $(x_{r,\alpha};\ (r, \alpha) \in [0, n] \times I^n)$, on a

$$\theta(X) = (w_0, w_1, \ldots, w_n), \qquad \text{avec} \quad w_r = \Sigma_{\alpha\in I^n} x_{r,\alpha} \otimes B^{p^{r-n}.\alpha}, \quad \forall\, r \in [0, n].$$

Pour tout $(r, \alpha) \in I(n)$, soit $i_{r,\alpha} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^{[0,n]\times I^n}$ le morphisme dont toutes les composantes sont nulles sauf celle de rang $(r, p^r.\alpha)$ qui est l'identité; on appelle $\psi_{r,\alpha}$ le composé

$$\mathcal{O} \xrightarrow{i_{r,\alpha}} \mathcal{O}^{[0,n]\times I^n} \xrightarrow{\theta} \textstyle\prod_n W_{n+1};$$

pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R et tout x dans R, $\psi_{r,\alpha}(x) = V^r[x \otimes B^{p^{r-n}.\alpha}]$. On pose

$$\psi = \textstyle\prod_{I(n)} \psi_{r,\alpha} : \quad \mathcal{O}^{I(n)} \to (\prod_n W_{n+1})^{I(n)},$$

et l'on désigne par $\mathcal{S} : (\prod_n W_{n+1})^{I(n)} \to \prod_n W_{n+1}$ la « somme » (loi de groupe de $\prod_n W_{n+1}$ itérée). Alors les résultats de 2.4 se traduisent par la proposition suivante.

2.5.1. Proposition. — *On suppose que* card $\mathcal{B}$ *est fini. Le morphisme composé*

$$\mathcal{S} \circ \psi : \quad \mathcal{O}^{I(n)} \to \textstyle\prod_n W_{n+1}$$

de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$*-foncteurs se factorise à travers* $\mathcal{J}_{n+1}$, *et le morphisme* $\chi : \mathcal{O}^{I(n)} \to \mathcal{J}_{n+1}$ *ainsi défini est un isomorphisme.*

2.5.2. Corollaire. — *Le foncteur en anneaux* $\mathcal{J}_{n+1}$ *est un schéma algébrique affine; on a* $\mathcal{J}_{n+1} = \operatorname{Spec} I_{n+1}$, *où* $I_{n+1} = \mathbf{Z}[\mathcal{B}'][\mathcal{X}(n)]$ *est l'algèbre des polynômes à coefficients dans* $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$ *par rapport à la famille d'indéterminées* $\mathcal{X}(n) = (X_{r,\alpha};\ (r, \alpha) \in I(n))$.

L'ensemble sous-jacent à $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ s'identifie à $R^{I(n)}$, un élément X de $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ étant représenté par ses composantes $(x_{r,\alpha};\ (r, \alpha) \in I(n))$.

Il est possible de décrire « directement » les lois additive et multiplicative de $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ au moyen de ces composantes; le procédé de calcul est analogue à celui de Witt, nous le donnons au chapitre 7. Jusque là, nous considérerons $\mathcal{J}_{n+1}$ comme un sous-anneau de $\prod_n W_{n+1}$.

2.6. — Nous nous proposons de montrer que $\mathcal{J}_{n+1}$ est, en tant que foncteur en $\mathcal{J}_{n+1}$-modules, facteur direct de $\prod_n W_{n+1}$ (on ne suppose plus card $\mathcal{B}$ fini). Soit I^n_* l'ensemble des éléments

$$\alpha = \alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n-1}\,\alpha_n$$

de I^n tels que $\alpha_1 \neq 0$; pour tout $r = 1, 2, \ldots, n$, et $\alpha \in I^n_*$, on appelle $g_{r,\alpha} : W_{n+1} \to \prod_n W_{n+1}$ le morphisme composé $(\prod_n V^r) \circ g_\alpha$, et

$$g'_{n+1} : \quad \bigoplus_{[1,n]} (\bigoplus_{I^n} W_{n+1}) \to \prod_n W_{n+1}$$

le morphisme de composantes $g_{r,\alpha}$, $r \in [1, n]$, $\alpha \in I^n_*$ (rappelons que, pour $w = (w_0, w_1, \ldots, w_n) \in W_{n+1}(R)$, on a

$$g_0(w) = (w_0 \otimes 1, w_1 \otimes 1, \ldots, w_n \otimes 1)$$

et

$$g_\alpha(w) = g_0(w).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}]).$$

2.6.1. Lemme. — *Le foncteur $\mathcal{G}_{n+1}$, image du morphisme g'_{n+1} est un $\mathcal{J}_{n+1}$-module.*

Soit R une $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre. Compte tenu de 2.4, il suffit, pour démontrer le lemme, de vérifier que, pour tout Y dans $\mathcal{G}_{n+1}(R)$ de la forme $g_{r,\alpha}(w)$, avec $w \in W_{n+1}(R)$ et $\alpha = \alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n-1}\,\alpha^n \in I^n_*$, et pour tout X dans $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ de la forme $V^m[x \otimes B^{p^{m-n}.\beta}]$ avec $x \in R$ et $(m, \beta) \in I(n)$, le produit XY est dans $\mathcal{G}_{n+1}(R)$. Si l'on pose $w = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$, on a

$$g_{r,\alpha}(w) = V^r((w_0 \otimes 1, \ldots, w_n \otimes 1).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}]),$$

donc

$$\begin{aligned} XY &= V^r(g_0(w).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}]).V^m[x \otimes B^{p^{m-n}.\beta}] \\ &= V^r(g_0(w).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}].V^m[x^{p^r} \otimes B^{p^{r+m-n}.\beta}]) \\ &= V^r(g_0(w).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}].V^m[x^{p^r} \otimes 1].[1 \otimes B^{p^{r-n}.\beta}]) \\ &= V^r(g_0(w).V^m[x^{p^r} \otimes 1].[1 \otimes B^{p^{-n}(\alpha + p^r\beta)}]). \end{aligned}$$

Soient α' et α'' respectivement le quotient et le reste de la division de $\alpha + p^r\,\beta$ par p^n; comme on a $r \geq 1$, on constate que α'' s'écrit

$$\alpha''_1 + p\,\alpha''_2 + \ldots + p^{n-1}\,\alpha''_n$$

avec $\alpha''_1 = \alpha_1$. Donc α'' est dans I^n_*. Alors, si l'on pose $w' = w.B^{\alpha'}.V^m[x^{p^r}]$, on obtient

$$XY = g_{r,\alpha''}(w'),$$

ce qui prouve que XY est dans $\mathcal{G}_{n+1}(R)$. D'où le lemme.

2.6.2. — Il existe entre les éléments de $\mathcal{G}_{n+1}(R)$ des relations analogues à celles de 2.3.1; pour tout $r \in [1, n]$, $m \in [0, n]$, $\alpha \in I_*^n$ et $w \in W_{n+1}(R)$, on a

$$\begin{aligned} g_{r,\alpha}(V^m(w)) &= V^r(V^m(g_0(w)).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}]) \\ &= V^r(V^m(g_0(w).[1 \otimes B^{p^{m-n}.\alpha}])) \\ &= V^r(V^m(g_0(w).[B^{\alpha^m} \otimes B^{p^{-n}.\alpha(n-m)}])) \\ &= V^r(g_0(V^m(w.[B^{\alpha^m}])).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha(n-m)}]) \\ &= g_{r,\alpha(n-m)}(V^m(w.[B^{\alpha^m}])). \end{aligned}$$

On en déduit que tout élément X de $\mathcal{G}_{n+1}(R)$ s'écrit

$$X = \textstyle\sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^n \sum_{\alpha \in I_*^{n-m}} g_{r,\alpha}(V^m[x_{r,m,\alpha}]),$$

où les $x_{r,m,\alpha}$ sont dans R. Ceci s'écrit encore

$$X = \textstyle\sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^{n-r} \sum_{\alpha \in I_*^{n-m}} V^{r+m}([x_{r,m,\alpha} \otimes 1].[1 \otimes B^{p^{m-n}.\alpha}]).$$

Posons $s = r + m$, il vient

$$X = \textstyle\sum_{s=1}^n \sum_{m=0}^{n-s} \sum_{\alpha \in I_*^{n-m}} V^s([x_{s-m,m,\alpha} \otimes 1].[1 \otimes B^{p^{m-n}.\alpha}]).$$

On en déduit que tout élément X de $\mathcal{G}_{n+1}(R)$ a une écriture de la forme

$$X = \textstyle\sum_{(s,\alpha) \in I'(n)} V^s[x_{s,\alpha} \otimes B^{p^{-n}.\alpha}], \tag{1}$$

où $I'(n)$ désigne le sous-ensemble de $[0, n] \times I^n$ formé des couples (s, α) tels $s \in [1, n]$, $\alpha \in I^n$ et $\alpha(s) \neq 0$, et les $x_{s,\alpha}$ sont dans R.

Comme il est clair que tout élément de $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$, s'écrivant sous la forme (1), est dans $\mathcal{G}_{n+1}(R)$, *ce groupe est le sous-groupe additif de* $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$ *formé des éléments qui s'écrivent sous la forme* (1).

Remarquons enfin que $[0, n] \times I^n$ est la réunion disjointe de $I(n)$ et de $I'(n)$. Il résulte alors de 2.1 et de 2.4 que $\mathcal{G}_{n+1}(R)$ est un supplémentaire de $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ dans $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$; on a ainsi prouvé la proposition suivante.

PROPOSITION. — *Soit* $q'_{n+1} : \prod_n W_{n+1} \to Q$ *le conoyau de* g'_{n+1} *dans* la catégorie des $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$*-foncteurs en groupes;* q'_{n+1} *est un morphisme de* $\mathcal{J}_{n+1}$*-modules et* $q'_{n+1} \circ j_{n+1}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{J}_{n+1}$ *sur* Q.

Nous appellerons désormais $q_{n+1} : \prod_n W_{n+1} \to \mathcal{J}_{n+1}$ la rétraction de j_{n+1} obtenue en composant q'_{n+1} et l'inverse de $q'_{n+1} \circ j_{n+1}$.

2.7. *Définition de l'endomorphisme* $\mathcal{V}$ *de* $\mathcal{J}_{n+1}$. — Comme $V(\mathcal{G}_{n+1}(R))$ est contenu dans $\mathcal{G}_{n+1}(R)$ pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R, l'endomorphisme $\prod_n V$ du groupe additif $\prod_n W_{n+1}$ induit, par passage au quotient, un endomorphisme $\mathcal{V}$ du schéma en groupes $\mathcal{J}_{n+1}$, tel que

$$\mathcal{V} \circ q_{n+1} = q_{n+1} \circ \textstyle\prod_n V.$$

Pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\mathcal{V}^m$ est induit par V^m, et l'on a $\mathcal{V}^{n+1} = 0$.

Compte tenu de 2.4, pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R, tous $(r, \alpha) \in I(n)$ et $x \in R$, on a [en notant $\mathcal{V}_R$ au lieu de $\mathcal{V}(R)$] :

$$\mathcal{V}_R^m (V^r [x \otimes B^{p^{r-n}.\alpha}]) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } \alpha \text{ n'est pas multiple de } p^m, \\ V^{r+m} [x \otimes B^{p^{r+m-n}.\beta}] \\ \qquad \text{si} \quad \alpha = p^m.\beta, \quad \beta \in I^{n-r-m}. \end{cases}$$

Par conséquent, tout élément $X = (x_{r,\alpha};\ (r, \alpha) \in I(n))$ de $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ s'écrit aussi

$$X = \Sigma_{(r,\alpha) \in I(n)} \mathcal{V}_R^r [x_{r,\alpha} \otimes B^{p^{r-n}.\alpha}].$$

2.8. — La construction que nous venons de faire s'applique pour tout $n \in \mathbf{N}$. Pour $n = 0$, on a $\mathcal{J}_1 = \text{Ga}$. Nous étudions maintenant les liens entre ces différents foncteurs.

On pose

$$T = \Pi_n \mathfrak{T} : \quad \Pi_n W_n \to \Pi_n W_{n+1},$$

où $\mathfrak{T} : W_n \to W_{n+1}$ est la translation (1.2). L'injection canonique $\mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n+1}}] \to \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$ fournit un monomorphisme $i_n : \Pi_{n-1} W_n \to \Pi_n W_n$; alors, pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R, le composé $T \circ i_n(R)$ est l'injection naturelle de $W_n(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n+1}}])$ sur l'ensemble des éléments $(0, x_1, \ldots, x_n)$ de $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$ dont les composantes $x_i \in R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$ s'écrivent

$$x_i = \Sigma_{\alpha \in I^{n-1}} x_{i,\alpha} \otimes B^{p^{-n}.p\alpha}.$$

Soit $\alpha = \alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n-1}\alpha_n$ un élément de I^n; on désigne par $[B^{-\alpha_n}] : W_{n+1} \to W_{n+1}$ l'homothétie de rapport $[B^{-\alpha_n}]$, et l'on pose $\tau_{\alpha_n} = \mathfrak{T} \circ [B^{-\alpha_n}] : W_n \to W_{n+1}$; alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} W_n \arrow[r, "\tau_{\alpha_n}"] \arrow[d, "g_{\alpha(n-1)}"'] & W_{n+1} \arrow[d, "g_\alpha"] \\ \Pi_{n-1} W_n \arrow[r, "T \circ i_n"] & \Pi_n W_{n+1} \end{tikzcd}$$

est commutatif [rappelons que $\alpha(n-1) = \alpha_1 + p\alpha_1 + \ldots + p^{n-2}\alpha_{n-1} \in I^{n-1}$]. En effet, pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R et tout $x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in W_n(R)$, on a

$$\begin{aligned} g_\alpha \circ \tau_{\alpha_n}(x_0, \ldots, x_{n-1}) &= [1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}].\,V((x_0, \ldots, x_{n-1}, 0).[B^{-\alpha_n}]) \\ &= V((x_0, \ldots, x_{n-1}, 0).[1 \otimes B^{p^{-n+1}.\alpha}].[1 \otimes B^{-\alpha_n}]) \\ &= V((x_0, \ldots, x_{n-1}, 0).[1 \otimes B^{p^{-n+1}.\alpha(n-1)}]) \\ &= T \circ i_n \circ g_{\alpha(n-1)}(x_0, \ldots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

On en tire les deux conclusions suivantes :

2.8.1. — *Le composé* $T \circ i_n \circ j_n : \mathfrak{I}_n \to \prod_n W_{n+1}$ *se factorise à travers* $\mathfrak{I}_{n+1}$. *Nous appellerons* $\tau : \mathfrak{I}_n \to \mathfrak{I}_{n+1}$ *le monomorphisme ainsi défini.* On définit de même $\tau^m : \mathfrak{I}_n \to \mathfrak{I}_{n+m}$, $\forall\, m \in \mathbf{N}$.

Pour décrire τ, on remarque que l'application $(r, \alpha) \mapsto (r+1, \alpha)$ est une injection de $I(n-1)$ dans $I(n)$; alors, pour tout $(r, \alpha) \in I(n-1)$, toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R et tout $x \in R$, on a

$$\tau\,(\mathcal{V}_R^r\,[x \otimes B^{p^{r-(n-1)}.\alpha}]) = \mathcal{V}_R^{r+1}\,[x \otimes B^{p^{r+1-n}.\alpha}].$$

Ceci montre, en particulier, que, dans $\prod_n W_{n+1}$, *on a* $\mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}_{n+1} \cap \prod_n W_n$.

2.8.2. — Soit $\tilde{T} : \bigoplus_{I^n} W_n \to \bigoplus_{I^n} W_{n+1}$ le morphisme qui consiste à envoyer la composante de rang $\alpha = \alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n-1}\,\alpha_n$ de $\bigoplus_{I^n} W_n$ sur la composante de même rang de $\bigoplus_{I^n} W_{n+1}$ au moyen de τ_{α_n}; *alors* $g \circ \tilde{T}$ *a pour image* $\mathfrak{I}_n$ (considéré comme sous-objet de $\mathfrak{I}_{n+1}$ au moyen de τ).

2.9. Proposition. — *On a une suite exacte*

$$0 \to \mathfrak{I}_n \xrightarrow{\tau} \mathfrak{I}_{n+1} \xrightarrow{\rho_n} \prod_n \mathrm{Ga} \to 0,$$

où $\rho_n(X) = \sum_{\alpha \in I^n} x_{0,\alpha} \otimes B^{p^{-n}.\alpha}$ *pour toute* $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-*algèbre* R *et tout* $X = \{ x_{r,\alpha};\ (r, \alpha) \in I(n) \} \in \mathfrak{I}_{n+1}(R)$.

De 2.8.2, on déduit que l'épimorphisme canonique $g_{n+1} : \bigoplus_{I^n} W_{n+1} \to \mathfrak{I}_{n+1}$ induit un épimorphisme $\bigoplus_{I^n} \mathrm{Ga} \to \mathfrak{I}_{n+1}/\mathfrak{I}_n$; alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \prod_n W_n \arrow[r, "T"] & \prod_n W_{n+1} \arrow[r, "\Pi_n \mathfrak{R}"] & \prod_n \mathrm{Ga} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}_n \arrow[r, "\tau"] \arrow[u, "i_n \circ j_n"'] & \mathfrak{I}_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[u, "j_{n+1}"'] & \mathfrak{I}_{n+1}/\mathfrak{I}_n \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigotimes_{I^n} W_n \arrow[r, "\tilde{T}"] \arrow[u, "h_n"'] & \bigotimes_{I^n} W_{n+1} \arrow[r, "\oplus \mathfrak{R}^n"] \arrow[u, "g_{n+1}"'] & \bigotimes_{I^n} \mathrm{Ga} \arrow[r] \arrow[u, "\text{épi}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes (h_n est le morphisme de composantes $h_{n,\alpha}$, $\alpha \in I^n$, telles que si α s'écrit $\alpha_1 + p\,\alpha_1 + \ldots + p^{n-1}\,\alpha_n$, on ait

$$h_{n,\alpha}(w) = (x_0 \otimes 1,\ x_1 \otimes 1,\ \ldots,\ x_n \otimes 1).[B^{\alpha_n} \otimes B^{p^{1-n}.\alpha(n-1)}].$$

Comme le composé $\bigoplus_{I^n} \mathrm{Ga} \to \mathfrak{I}_{n+1}/\mathfrak{I}_n \to \prod_n \mathrm{Ga}$ est l'isomorphisme canonique défini par la donnée de la base $\{ B^{p^{-n}.\alpha};\ \alpha \in I^n \}$ de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$ sur $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$, la proposition s'en déduit immédiatement.

2.10. Proposition. — *Posons* $A = \mathbf{Z}[\mathcal{B}, \mathcal{B}^{-1}]$. *Pour tous n et m dans* $\mathbf{N}^*$ *tels que* $m \leqq n$, *on a une suite exacte de A-foncteurs en groupes :*

$$0 \to \mathfrak{I}_{n,A} \xrightarrow{\tau^{m-n}} \mathfrak{I}_{m,A} \xrightarrow{\mathfrak{U}_{n,m}} \bigoplus_{I_n} \mathfrak{I}_{m,A},$$

où $\mathfrak{U}_{n,m}$ *est le morphisme dont la composante de rang* α *est* $\mathfrak{V}^n \circ [1 \otimes B^{-p^{-m+1}.\alpha}]$ *pour tout* $\alpha \in I^n$.

En effet, pour toute A-algèbre R, le noyau de $\mathfrak{V}^n(R) : \mathfrak{I}_m(R) \to \mathfrak{I}_m(R)$ est l'ensemble des

$$X = \Sigma_{(r,\beta) \in I(m-1)} \mathfrak{V}^r [x_{r,\beta} \otimes B^{p^{r-m+1}.\beta}]$$

pour lesquels $x_{r,\beta} = 0$ pour tout (r, β) tel que $r < m - n$ et

$$\beta(n) = \beta_1 + p\,\beta_2 + \ldots + p^{n-1}\beta_n = 0$$

(on a posé $\beta = \beta_1 + p\,\beta_2 + \ldots + p^{m-2}\beta_{m-1}$). De même, si $\alpha \in I^n$, le noyau de $\mathfrak{V}^n(R) \circ [1 \otimes B^{-p^{-m+1}.\alpha}]$ est l'ensemble des

$$X = \Sigma_{(r,\beta) \in I(m-1)} \mathfrak{V}^r [x_{r,\beta} \otimes B^{p^{r-m+1}.\beta}]$$

pour lesquels $x_{r,\beta} = 0$ pour tout (r, β) tel $r < m - n$ et $\beta(n) = \alpha$.

Le noyau de $\mathfrak{U}_{n,m}(R)$ est alors formé de tous les X pour lesquels $x_{r,\beta} = 0$ si $r < m - n$; c'est bien l'image de $\mathfrak{I}_n(R)$ par τ^{m-n}.

2.10.1. Corollaire. — *Le morphisme* $\mathfrak{U}_{n,m}$ *se factorise à travers* $\bigoplus_{I^n} \mathfrak{I}_{n-m,A}$. *Soit* $\mathfrak{U}'_{n,m}$ *la factorisation; la suite*

$$0 \to \mathfrak{I}_{n,A} \xrightarrow{\tau^{m-n}} \mathfrak{I}_{m,A} \xrightarrow{\mathfrak{U}'_{n,m}} \bigoplus_{I_n} \mathfrak{I}_{m-n,A} \to 0$$

est exacte.

En effet, pour toute A-algèbre R, l'image de $\mathfrak{V}^n(R)$ est $\mathfrak{V}^n(\mathfrak{I}_m(R))$, i. e. $\mathfrak{I}_{m-n}(R)$; de même, l'image de $\mathfrak{V}^n(R) \circ [1 \otimes B^{-p^{-m+1}.\alpha}]$ est $\mathfrak{I}_{m-n}(R)$, puisque l'homothétie $[1 \otimes B^{-p^{-m+1}.\alpha}]$ est inversible.

3. $\mathcal{B}$-groupes de Witt et anneaux de Cohen

Soit k un corps non parfait de caractéristique p. (On suppose que k est un modèle !). On fixe une p-base $\mathcal{B}$ de k, et l'on munit k de la structure canonique de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre correspondante (*cf.* 1.4).

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $k^{p^{-n}} = k \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$, et l'application $x \mapsto x^{p^n}$ est l'isomorphisme canonique de $k^{p^{-n}}$ sur k.

3.1. Proposition. — *L'anneau* $\mathfrak{I}_{n+1}(k)$ *est un anneau local dont l'idéal maximal est engendré par p; son corps résiduel est isomorphe à* $k^{p^{-n}}$. *Pour tout* $r \leqq n$, *la multiplication par* p^r *induit un isomorphisme de* $\mathfrak{I}_{n+1}(k)/p\,\mathfrak{I}_{n+1}(k)$ *sur* $p^r\,\mathfrak{I}_{n+1}(k)/p^{r+1}\,\mathfrak{I}_{n+1}(k)$; *on a* $p^{n+1}\,\mathfrak{I}_{n+1}(k) = 0$.

La dernière assertion est claire, puisque $p^{n+1}\,W_{n+1}(k^{p^{-n}}) = 0$.

Nous avons vu, en 2.3, que $\mathfrak{I}_{n+1}(k)$ était muni d'une filtration décroissante naturelle

$$\mathfrak{I}_{n+1}(k) = U_0 \supset U_1 \supset \ldots \supset U_n \supset U_{n+1} = 0$$

par les idéaux U_r tels que

$$U_r = \mathcal{J}_{n+1}(k) \cap V^r(W_{n+1}(k \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])) = \mathcal{J}_{n+1-r}(k).$$

On remarque que U_r est le sous-groupe additif de $\mathcal{J}_{n+1}(k)$ engendré par les éléments $V^m[x \otimes B^{p^{m-n}.\alpha}]$ pour $m \geqq r$ et $\alpha \in I^{n-m}$, ou encore que $U_r = \mathcal{V}_k^r(\mathcal{J}_{n+1}(k))$ (*cf.* 2.7).

Il est clair que $\mathcal{J}_{n+1}(k)/\mathrm{U}_1$ s'identifie à $k \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}] = k^{p^{-n}}$.

Vérifions maintenant que, pour tout $r \leqq n$, la multiplication par p^r induit un isomorphisme, que nous noterons encore p^r,

$$p^r: \quad \mathcal{J}_{n+1}(k)/U_1 \to U_r/U_{r+1}.$$

D'après 2.3.4, U_r/U_{r+1} est isomorphe à $k^{p^{r-n}} = k \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{r-n}}]$. D'autre part, la multiplication par p^r dans $W_{n+1}(k^{p^{-n}})$ envoie l'élément $[x_0]$ sur $V^r[x_0^{p^r}]$; il s'ensuit que

$$p^r: \quad \mathcal{J}_{n+1}(k)/U_1 \xrightarrow{\sim} k \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}] \to U_r/U_{r+1} \xrightarrow{\sim} k \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{r-n}}]$$

est l'isomorphisme de $k^{p^{-n}}$ sur $k^{p^{r-n}}$ qui à x associe x^{p^r}.

On déduit de là que $U_n = U_n/U_{n+1}$ est engendré par p^n, et un raisonnement par récurrence décroissante sur r prouve que $U_r = p^r.\mathcal{J}_{n+1}(k)$. Comme p n'est pas inversible, U_1 est formé d'éléments non inversibles. Il est facile de voir que U_1 est l'ensemble des éléments non inversibles de $\mathcal{J}_{n+1}(k)$: soit x un élément dont l'image $\bar{x}$ dans $\mathcal{J}_{n+1}(k)/U_1$ est non nulle, soit y un relèvement dans $\mathcal{J}_{n+1}(k)$ de $(\bar{x})^{-1}$; on a $xy = 1 - z$ avec $z \in U_1$, par conséquent, $y(1 + z + \ldots + z^n)$ est l'inverse de x dans $\mathcal{J}_{n+1}(k)$. Ceci achève la démonstration de la proposition.

3.2. *L'anneau de Cohen de k.*

3.2.1. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\{b^{p^n}; b \in \mathcal{B}\}$ est une p-base de k^{p^n}, et l'homomorphisme $\mathbf{Z}[\mathcal{B}] \to k^{p^n}$ qui envoie b sur b^{p^n} fait de k^{p^n} une $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre. Soit $u : k^{p^n} \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}] \to k$ l'isomorphisme canonique qui envoie $x \otimes B^{p^{-n}.\alpha}$ sur $x B^\alpha$ pour tous x dans k^{p^n} et $\alpha \in I^n$; alors $W_{n+1}(u)$ identifie $W_{n+1}(k^{p^n} \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$ à $W_{n+1}(k)$, et $\mathcal{J}_{n+1}(k^{p^n})$ *s'identifie au sous-anneau de* $W_{n+1}(k)$ *engendré par* $W_{n+1}(k^{p^n})$ *et les éléments* $[b]$, $b \in \mathcal{B}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous posons $\mathcal{C}_{n+1}(k) = \mathcal{J}_{n+1}(k^{p^n})$; l'isomorphisme canonique $k \xrightarrow{\sim} k^{p^n}$ détermine un isomorphisme $\mathcal{J}_{n+1}(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{n+1}(k)$. D'après 3.1, $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ *est un anneau local, de corps résiduel k, d'idéal maximal* $p\,\mathcal{C}_{n+1}(k)$: *la multiplication par* p^r *induit l'isomorphisme* $x \mapsto x^{p^r}$ *de k sur* $k^{p^r} \xrightarrow{\sim} p^r\,\mathcal{C}_{n+1}(k)/p^{r+1}\,\mathcal{C}_{n+1}(k)$.

3.2.2. Lemme. — *La projection canonique* $\mathfrak{R} : W_{n+1}(k) \to W_n(k)$ *induit une surjection* $\pi : \mathcal{C}_{n+1}(k) \to \mathcal{C}_n(k)$.

Rappelons que $\mathfrak{R}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$; l'image de $W_{n+1}(k^{p^n})$ par $\mathfrak{R}$ est $W_n(k^{p^n})$. Puisque $\mathfrak{R}$ est un homomorphisme d'anneaux, l'image par $\mathfrak{R}$ de $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ est le sous-anneau de $W_n(k)$ engendré par $W_n(k^{p^n})$ et les éléments $[b] \in W_n(k)$, $b \in \mathcal{B}$, images des générateurs $[b] \in W_{n+1}(k)$ de $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ comme algèbre sur $W_{n+1}(k^{p^n})$. Comme $\mathcal{C}_n(k)$ est engendré par $W_n(k^{p^{n-1}})$ et les $[b] \in W_n(k)$, l'image par $\mathfrak{R}$ de $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ est contenue dans $\mathcal{C}_n(k)$, et $\mathfrak{R}$ détermine un homomorphisme d'anneaux noté $\pi : \mathcal{C}_{n+1}(k) \to \mathcal{C}_n(k)$.

Pour vérifier que π est une surjection, on utilise les filtrations habituelles :

$$W_{n+1}(k) = (V^0) \supset (V^1) \supset \ldots \supset (V^n) \supset (V^{n+1}) = 0,$$
$$W_n(k) = (V^0)' \supset (V^1)' \supset \ldots \supset (V^{n-1})' \supset (V^n)' = 0,$$

avec $(V^r) = V^r(W_{n+1}(k))$ et $(V^r)' = V^r(W_n(k))$. Ces filtrations induisent respectivement sur $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ et $\mathcal{C}_n(k)$ les filtrations par les idéaux $p^r\,\mathcal{C}_{n+1}(k) = (p^r)$ et $p^r\,\mathcal{C}_n(k) = (p^r)'$. Comme $\mathfrak{R}$ est compatible avec les filtrations, il en est de même de π; π sera une surjection si et seulement si le gradué associé est surjectif. Par passage aux gradués associés, on obtient, en degré $r < n$, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(V^r)/(V^{r+1}) \xrightarrow{\sim} k \arrow[r, "\mathrm{gr}\,\mathfrak{R} = \mathrm{Id}"] & k \xrightarrow{\sim} (V^r)'/(V^{r+1})' \\
(p^r)/(p^{r+1}) \xrightarrow{\sim} k^{p^n} \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{r-n}}] \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\mathrm{gr}\,\pi"] & (p^r)'/(p^{r+1})' \xrightarrow{\sim} k^{p^{n-1}} \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{r-n+1}}] \arrow[u, "j'"']
\end{tikzcd}$$

Comme j (resp. j') identifie $(p^r)/(p^{r+1})$ [resp. $(p^r)'/(p^{r+1})'$] à k^{p^r}, on voit que $\mathrm{gr}\,\pi$ est un isomorphisme en degré $r < n$. En degré n, on a $(p^n)' = 0$; donc $\mathrm{gr}\,\pi$ est surjectif en tous degrés.

3.2.3. Proposition. — *L'anneau* $\mathcal{C}(k) = \varprojlim \mathcal{C}_n(k)$ *est l'anneau de Cohen de* k (i. e. un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k dont l'idéal maximal est engendré par p).

Il est évident que $\mathcal{C}(k)$ est local, complet, d'idéal maximal $p\,\mathcal{C}(k)$, de corps résiduel k. De plus, p est régulier puisque la multiplication par p^r induit un isomorphisme de $\mathcal{C}(k)/p\,\mathcal{C}(k)$ sur $p^r\,\mathcal{C}(k)/p^{r+1}\,\mathcal{C}(k)$ pour tout $r \in \mathbf{N}$; d'où la proposition.

Nous appellerons $\pi_n : \mathcal{C}(k) \to \mathcal{C}_n(k)$ *la projection canonique.*

3.2.4. *Remarques.* — Par cette construction, $\mathcal{C}(k)$ s'identifie à un sous-anneau de $W(k)$; si l'on désigne par $k_0 = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} k^{p^n}$ le plus grand sous-corps parfait de k, $\mathcal{C}(k)$ contient $W(k_0)$.

D'autre part, comme $\mathcal{C}(k)$ contient les représentants multiplicatifs $[b] = (b, 0, 0, \ldots)$ des éléments b de $\mathcal{B}$ dans $W(k)$, *il contient tous les éléments* $[\mathrm{B}^\alpha]$ et $[B^{-\alpha}]$, pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in I^n$.

Afin de rendre plus « naturelle » la présentation de l'anneau $D^{\mathcal{B}}$ du chapitre 5, nous étudions maintenant quelques endomorphismes du groupe additif sous-jacent à $\mathcal{C}(k)$.

3.3. — Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on désigne par $j^m : k^{p^m} \to k$ l'injection canonique, et par $\mathcal{B}^{p^m}$ la p-base de k^{p^m} formée des b^{p^m}, $b \in \mathcal{B}$. On considère sur k^{p^m} la structure de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre définie par l'homomorphisme $\mathbf{Z}[\mathcal{B}] \to k^{p^m}$ qui envoie b sur b^{p^m}. Pour tout $n \geqq 0$, $\mathcal{C}_{n+1}(k^{p^m})$ est le sous-anneau de $W_{n+1}(k^{p^m})$ engendré par $W_{n+1}(k^{p^{m+n}})$ et les éléments $[b^{p^m}]$, $b \in \mathcal{B}$; $\mathcal{C}(k^{p^m})$ s'obtient, par passage à la limite projective, comme un sous-anneau de $W(k^{p^m})$.

3.3.1. Lemme.

(*a*) *Pour tout* $n \geqq 0$, *l'injection canonique* $J^m_{n+1} : W_{n+1}(k^{p^m}) \to W_{n+1}(k)$ *induit un homomorphisme injectif d'anneaux*

$$\mathcal{J}^m_{n+1} : \quad \mathcal{C}_{n+1}(k^{p^m}) \to \mathcal{C}_{n+1}(k);$$

(*b*) *Pour tout* $m > 0$, *les* $(\mathcal{J}^m_n)_{n>0}$ *déterminent un homomorphisme* $\mathcal{J}^m : \mathcal{C}(k^{p^m}) \to \mathcal{C}(k)$ *induisant* j^m *sur les corps résiduels :* $\mathcal{J}^m$ *est induit par* $J^m : W(k^{p^m}) \to W(k)$.

(*a*) On voit que $J^m_{n+1}(W_{n+1}(k^{p^{m+n}}))$ est contenu dans $W_{n+1}(k^{p^n})$, donc dans $\mathcal{C}_{n+1}(k)$; de même $J^m_{n+1}([b^{p^m}]) = [b^{p^m}] \in \mathcal{C}_{n+1}(k)$; d'où l'assertion (*a*).

L'assertion (*b*) est claire puisque les J^m_n « commutent » avec les projections canoniques $W_{n+1}(A) \to W_n(A)$, pour $A = k$ et $A = k^{p^m}$.

3.3.2. — Nous désignerons par $U : W(k) \to W(k^p)$ l'isomorphisme déterminé par l'isomorphisme $x \mapsto x^p$ de k sur k^p et par $\mathcal{U} : \mathcal{C}(k) \to \mathcal{C}(k^p)$ l'isomorphisme induit par U.

3.4. Proposition. — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *l'anneau* $\mathcal{C}^m(k)$, *quotient de* $\mathcal{C}(k^{p^m})[\mathcal{B}]$ *par l'idéal engendré par les éléments* $\{ b^{p^m} - (b^{p^m}, 0, 0, \dots); b \in \mathcal{B} \}$, *est un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal* (p), *de corps résiduel* k. *De plus, lorsque* card $\mathcal{B}$ *est fini, il est complet pour la topologie* (p)*-adique.*

En effet, $\mathcal{C}^m(k)$ est un $\mathcal{C}(k^{p^m})$-module libre de base $\{ B^\alpha; \alpha \in I^m \}$. Il en résulte que :

1° L'élément p, n'étant pas inversible dans $\mathcal{C}(k^{p^m})$, ne peut l'être dans $\mathcal{C}^m(k)$;

2° p, étant régulier dans $\mathcal{C}(k^{p^m})$, l'est aussi dans $\mathcal{C}^m(k)$;

3° $\mathcal{C}^m(k)$ est complet pour la topologie p-adique, lorsque card $\mathcal{B}$ est fini, puisque d'une part $\mathcal{C}(k^{p^m})$ est complet pour la topologie p-adique, d'autre part I^m est *fini*.

Il est clair que $\mathcal{C}^m(k)/(p)$ est isomorphe à $k^{p^m}(\mathcal{B}) = k$. On achève alors la démonstration en vérifiant que tout élément de $\mathcal{C}^m(k)$ non dans (p) est inversible (en effet, il existe y et z tels que $xy = 1 - pz$; alors $x^{-1} = y.\sum_n p^n z^n$, $0 \leqq n < \infty$). D'où la proposition.

3.5. Corollaire. — *L'homomorphisme G de $\mathcal{C}(k^{p^m})$-algèbres de $\mathcal{C}^m(k)$ dans $\mathcal{C}(k)$, défini par $G(b) = [b]$ pour tout $b \in \mathcal{B}$, détermine un isomorphisme $\hat{G}$ du complété $\hat{\mathcal{C}}^m(k)$ de $\mathcal{C}^m(k)$ pour la topologie (p)-adique sur $\mathcal{C}(k)$; en particulier, lorsque* card $\mathcal{B}$ *est fini, G est un isomorphisme.*

3.6. — *Nous supposons, jusqu'à la fin du chapitre, que* card $\mathcal{B}$ *est fini.*

Puisque $\mathcal{C}(k)$ est un $\mathcal{C}(k^{p^m})$-module libre de base $\{[B]^\alpha;\ \alpha \in I^m\}$ (3.5), la projection sur le premier facteur (de rang $\alpha = 0$) est une rétraction de $\mathcal{J}^m$. *Nous noterons $S^{(m)}$ le projecteur de $\mathcal{C}(k)$ correspondant.*

Pour tout $\alpha \in I^m$, la multiplication par $[B^\alpha]$ (que l'on note encore $[B^\alpha]$) est un homomorphisme de $\mathcal{C}(k^{p^m})$-modules, et la décomposition en somme directe ci-dessus se traduit par la relation

3.6.1. $$\textstyle\sum_{\alpha \in I^m} [B^\alpha] \circ S^{(m)} \circ [B^{-\alpha}] = \mathrm{Id}(\mathcal{C}(k)).$$

Nous conviendrons d'identifier $\mathcal{C}(k^{p^m})$ à son image par $\mathcal{J}^m$ chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

3.7. — Rappelons que $F : W(k) \to W(k)$ est l'endomorphisme d'anneau défini par $F(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = (a_0^p, a_1^p, \ldots, a_n^p, \ldots)$, et que V est l'endomorphisme du groupe additif $W(k)$ qui à $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ associe $(0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$. On a $VF = FV = p$ [multiplication par p dans $W(k)$]. On utilise la même notation pour les endomorphismes de $W_n(k)$ induits respectivement par F et V.

Avec les notations de 3.3.2, on a $F = J^1 \circ U$. Par conséquent, F induit *l'endomorphisme $\mathcal{F} = \mathcal{J} \circ \mathcal{U}$ de l'anneau $\mathcal{C}(k)$*; de plus l'image de $\mathcal{C}(k)$ par $\mathcal{F}^m$ est $\mathcal{C}(k^{p^m})$, et l'on a $S^{(m)} \circ \mathcal{F}^m = \mathcal{F}^m$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par abus de notation, nous désignons encore par $\mathcal{F}$ l'endomorphisme de $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ induit par $\mathcal{F}$.

3.8. — A cause des égalités $V^m \circ F^m = p^m$, et $S^{(m)} \circ \mathcal{F}^m = \mathcal{F}^m$, l'homomorphisme composé

$$V^m \circ S^{(m)} : \quad \mathcal{C}(k) \to \mathcal{C}(k^{p^m}) \to W(k)$$

se factorise à travers $\mathcal{C}(k)$. En effet, pour tout $x \in \mathcal{C}(k)$, il existe $y \in \mathcal{C}(k)$ tel que $S^{(m)}(x) = \mathcal{F}^m(y)$; alors

$$V^m \circ S^{(m)}(x) = V^m \circ \mathcal{F}^m(y) = p^m y \in \mathcal{C}(k).$$

Lemme. — *Pour tous $m, n \in \mathbf{N}$ avec $m \leqq n$, $V^m \circ S^{(m)}$ induit l'endomorphisme $\mathcal{V}^m_{k^{p^n}}$ du groupe additif $\mathcal{S}_{n+1}(k^{p^n}) = \mathcal{C}_{n+1}(k)$ (cf. 2.7).*

Il est clair que $S^{(m)}$ induit sur $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ le projecteur de $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ sur $\mathcal{C}_{n+1}(k^{p^m})$ défini par la décomposition en somme directe

$$\mathcal{C}_{n+1}(k) \stackrel{\sim}{\to} \oplus_{\alpha \in I^m} \mathcal{C}_{n+1}(k^{p^m}).[B^\alpha].$$

D'après 2.7 et 3.2.1, on peut se contenter de vérifier le lemme sur les éléments X de la forme $X = \mathcal{V}^r([x^{p^n}.B^{p^r.\alpha}])$, $(r, \alpha) \in I(n)$; $x \in k$; on écrit alors $X = V^r[x^{p^n}.B^{p^r.\alpha}] = [B^\alpha].V^r[x^{p^n}]$. On a supposé $m \leqq n$; comme $S^{(m)}$ est un homomorphisme de $\mathcal{C}_{n+1}(k^{p^m})$-modules, on a

$$S^{(m)}(X) = V^r[x^{p^n}].S^{(m)}([B^\alpha]);$$

d'où

$$S^{(m)}(X) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha \text{ n'est pas multiple de } p^m, \\ X & \text{si} \quad \alpha = p^m.\beta \quad \text{avec} \quad \beta \in I^{n-m-r}. \end{cases}$$

Par suite :

$$V^m \circ S^{(m)}(X) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \alpha \text{ n'est pas multiple de } p^m, \\ V^{r+m}[x^{p^n}.B^{p^{r+m}.\beta}] \qquad \text{si} \quad \alpha = p^m.\beta. \end{cases}$$

Ce sont bien des valeurs prises par $\mathcal{V}^m_{k^{p^n}}(X)$ (*cf.* 2.7).

On appellera encore $\mathcal{V}^m$ l'endomorphisme de $\mathcal{C}(k)$ induit par $V^m \circ S^{(m)}$.

3.9. *Relations entre $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$ et les homothéties de $\mathcal{C}(k)$.* — On notera toujours X l'homothétie de $\mathcal{C}(k)$ définie par l'élément X de $\mathcal{C}(k)$. Les relations suivantes sont vérifiées, pour tout $X \in \mathcal{C}(k)$, et tout $n \in \mathbf{N}$.

3.9.1. $$\mathcal{F} \circ X = \mathcal{F}(X) \circ \mathcal{F};$$

3.9.2. $$X \circ \mathcal{V} = \mathcal{V} \circ \mathcal{F}(X);$$

3.9.3. $$\mathcal{V} \circ \mathcal{F} = p;$$

3.9.4. $$\mathcal{V}^n \circ X \circ \mathcal{F}^n = \mathcal{V}^n \circ S^{(n)}(X) \circ \mathcal{F}^n;$$

3.9.5. $$\Sigma_{\alpha \in I^n}[B^\alpha] \circ \mathcal{F}^n \circ \mathcal{V}^n \circ [B^{-\alpha}] = p^n.$$

Comme $\mathcal{F}$ est un homomorphisme d'anneaux, la relation 3.9.1 est claire. Pour vérifier la relation 3.9.2, on la projette sur $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ pour tout n. Le groupe additif $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ est facteur direct de $W_{n+1}(k)$ [on a défini, en 2.6, la rétraction $q_{n+1} : W_{n+1}(k) \to \mathcal{C}_{n+1}(k)$ de j_{n+1}]; par définition (2.7), $\mathcal{V}_{k^{p^n}}$ est l'unique endomorphisme de $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ tel que $q_{n+1} \circ V = \mathcal{V}_{k^{p^n}} \circ q_{n+1}$. Soit X un élément de $\mathcal{C}_{n+1}(k)$; on a

$$q_{n+1}(F(X)) = \mathcal{F}(q_{n+1}(X)).$$

Alors, puisque q_{n+1} est un homomorphisme de $\mathcal{C}_{n+1}(k)$-modules, la relation $X \circ V = V \circ F(X)$, valable dans l'anneau des endomorphismes de $W_{n+1}(k)$, implique la relation $X \circ \mathcal{V}_{k^{p^n}} = \mathcal{V}_{k^{p^n}} \circ \mathcal{F}(X)$.

La relation 3.9.3 résulte des égalités $V \circ S^{(1)} = \mathcal{V}$ et $S^{(1)} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}$, et de la relation $V \circ F = p$ dans l'anneau des endomorphismes de $W(k)$.

Démontrons 3.9.4 : on remarque d'abord, en utilisant l'écriture $\mathcal{V}^n = V^n \circ S^{(n)}$, que $\mathcal{V}^n \circ S^{(n)} = \mathcal{V}^n$ ($S^{(n)}$ est un projecteur !). Soit y un élément de $\mathcal{C}(k)$, on écrit

$$(\mathcal{V}^n \circ S^{(n)}(X) \circ \mathcal{F}^n)(y) = \mathcal{V}^n (S^{(n)}(X) . \mathcal{F}^n(y));$$

$\mathcal{F}^n(y)$ étant dans $\mathcal{C}(k^{p^n})$ et $S^{(n)}$ étant un homomorphisme de $\mathcal{C}(k^{p^n})$ modules, on a

$$S^{(n)}(X) . \mathcal{F}^n(y) = S^{(n)}(X . \mathcal{F}^n(y));$$

d'où

$$\begin{aligned}(\mathcal{V}^n \circ S^{(n)}(X) \circ \mathcal{F}^n)(y) &= (\mathcal{V}^n \circ S^{(n)})(X . \mathcal{F}^n(y)) \\ &= \mathcal{V}^n (X . \mathcal{F}^n(y)) = (\mathcal{V}^n \circ X \circ \mathcal{F}^n)(y).\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Pour la dernière relation, on écrit $\mathcal{F}^n \circ \mathcal{V}^n = \mathcal{F}^n \circ V^n \circ S^{(n)}$; comme $F^n \circ V^n = p^n$ dans l'anneau des endomorphismes de $W(k)$, il vient

$$\Sigma_{\alpha \in I^n} [B^\alpha] \circ \mathcal{F}^n \circ \mathcal{V}^n \circ [B^{-\alpha}] = p^n \circ (\Sigma_{I^n} [B^\alpha] \circ S^{(n)} \circ [B^{-\alpha}]);$$

la relation 3.9.5 se déduit alors de 3.6.1.

4. **Extensions de $\mathcal{B}$-groupes de Witt : cas où** card $\mathcal{B}$ **est fini**

Les hypothèses sur le corps k sont les mêmes qu'au chapitre 3. *On suppose de plus que la dimension de k sur k^p est finie.* On note $\mathbf{Gr}_k$ la catégorie des k-groupes (affines, commutatifs, unipotents); si H, $G \in \mathbf{Gr}_k$, $\mathrm{Ext}^1_k(H, G)$ est le groupe abélien des extensions de Yoneda de longueur 1 de G par H, dans $\mathbf{Gr}_k$.

On note $\mathcal{J}_{n,k}$ le k-groupe unipotent $\mathcal{J}_n \otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}]} k$, et l'on identifie $\mathcal{J}_{n,k}$ à un sous-groupe de $\mathcal{J}_{n+1,k}$ au moyen du monomorphisme $\tau_k = \tau \otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}]} k$. Par abus de notation, nous écrirons τ, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}$, g_{n+1}, ..., au lieu de τ_k, $\mathfrak{R}_k$, $\mathfrak{T}_k$, $g_{n+1,k}$, ...

4.1. Proposition. — *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{J}_{n,k}$ est le plus grand sous-groupe de $\mathcal{J}_{n+1,k}$ annulé par $\mathfrak{V}^n$.*

Puisque $\mathcal{J}_{n,k}$ est un quotient de $\bigoplus_{I^{n-1}} W_{n,k}$, on a $\mathfrak{V}^n_{\mathcal{J}_{n,k}} = 0$. Soit $\overline{\mathfrak{V}} : (\mathcal{J}_{n+1,k}/\mathcal{J}_{n,k})^{(p^n)} \to \mathcal{J}_{n+1,k}$, la factorisation de $\mathfrak{V}^n_{\mathcal{J}_{n+1,k}}$; nous allons « calculer » $\overline{\mathfrak{V}}$. D'après 2.9, la projection canonique

$$g_{n+1} : \quad \bigoplus_{I^n} W_{n+1,k} \to \mathcal{J}_{n+1,k}$$

induit l'isomorphisme naturel $\bigoplus_{I^n} \mathrm{Ga}_k \xrightarrow{\sim} (\prod_n \mathrm{Ga})_k$; nous identifions $\mathfrak{I}_{n+1,k}/\mathfrak{I}_{n,k}$ et $\bigoplus_{I^n} \mathrm{Ga}_k$ par cet isomorphisme. D'un autre côté, on a $W^{(p^n)}_{n+1,k} = W_{n+1,k}$ et

$$\mathfrak{V}^n_{\mathrm{W}_{n+1,k}} = \mathfrak{T}^n \circ \mathfrak{R}^n : \quad W_{n+1,k} \to \mathrm{Ga}_k \to W_{n+1,k};$$

alors l'égalité

$$\mathfrak{V}^n_{\mathfrak{I}_{n+1,k}} \circ g^{(p^n)}_{n+1} = g_{n+1} \circ \mathfrak{V}^n_{\bigoplus_{I^n} \mathrm{W}_{n+1,k}}$$

nous donne

$$\overline{V} = g_{n+1} \circ (\bigoplus_{I^n} \mathfrak{T}^n) : \quad \bigotimes_{I^n} \mathrm{Ga}_k \to \mathfrak{I}_{n+1,k}.$$

On montre alors facilement, comme en 2.8.2, que $g_{n+1} \circ (\bigoplus_{I^n} \mathfrak{T}^n)$ se factorise à travers $\tau^n : \mathrm{Ga}_k \to \mathfrak{I}_{n+1,k}$, de sorte que $\overline{\mathfrak{V}} = \tau^n \circ u$, où $u : \bigoplus_{I^n} \mathrm{Ga}_k \to \mathrm{Ga}_k$ est le morphisme dont la composante de rang α est l'homothétie $B^\alpha : \mathrm{Ga}_k \to \mathrm{Ga}_k$, pour tout $\alpha \in I^n$.

D'après 1.3, $\mathfrak{I}_{n,k}$ est le plus grand sous-groupe de $\mathfrak{I}_{n+1,k}$ annulé par $\mathfrak{V}^n$ si et seulement si $\tilde{V}^n_{\mathfrak{I}_{n+1,k}} : \mathfrak{I}_{n+1,k} \to \prod_{f^n} \mathfrak{I}_{n+1,k}$ a pour noyau $\mathfrak{I}_{n,k}$. Puisque $\mathfrak{V}^n_{\mathfrak{I}_{n+1,k}}$ se décompose en $\tau^n \circ u \circ \rho^{(p^n)}_n$, on a l'égalité

$$\tilde{V}^n_{\mathfrak{I}_{n+1,k}} = (\prod_{f^n} \tau^n) \circ \tilde{u} \circ \rho_n$$

où $\tilde{u}$ est l'image de u par la bijection canonique

$$\mathbf{Gr}_k (\bigoplus_{I^n} \mathrm{Ga}_k, \mathrm{Ga}_k) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Gr}_k (\bigoplus_{I^n} \mathrm{Ga}_k, \prod_{f^n} \mathrm{Ga}_k).$$

D'après la description de u, $\tilde{u}$ est l'isomorphisme canonique déterminé par la base $\{ \mathrm{B}^\alpha ; \alpha \in I^n \}$ du k-espace vectoriel k pour la structure donnée par $f^n : k \to k$. Comme τ^n est un monomorphisme, $\prod_{f_n} \tau^n$ est un monomorphisme et la factorisation de $\tilde{V}^n_{\mathfrak{I}_{n+1,k}}$ à travers ρ_n est un monomorphisme. Ceci achève la démonstration de la proposition.

4.2. — Rappelons que si K est un corps de caractéristique $p \neq 0$, quelconque, $\mathbf{Gr}_K (\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K)$ s'identifie à l'anneau $K[F]$ des polynômes additifs à une indéterminée F telle que $F\,a = a^p\,F$ pour tout $a \in K$ ([1]; II, § 3, 4.4). Tout élément de $K[F]$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n F^n$, où les a_n sont des éléments de K presque tous nuls.

4.2.1. — Pour tout K-groupe unipotent G, $\mathrm{Ext}^1_K (\mathrm{Ga}_K, G)$ [resp. $\mathrm{Ext}^1_K (G, \mathrm{Ga}_K)$] est muni d'une structure naturelle de $K[F]$-module à droite (resp. à gauche). En particulier, d'après [1] (V, § 1, 2.2) $\mathrm{Ext}^1_K (\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K)$ est le $K[F]$-module à gauche libre engendré par la classe $e_{1,K}$ de la suite exacte

$$e_{1,K} : \quad 0 \to \mathrm{Ga}_K \xrightarrow{\mathfrak{T}} W_{2,K} \xrightarrow{\mathfrak{R}} \mathrm{Ga}_K \to 0.$$

[nous utilisons la même notation pour désigner une suite exacte et sa classe dans $\mathrm{Ext}^1_K (?, ?)$].

La structure de $K[F]$*-module à droite sur* $\mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K)$ *est alors définie par les relations*

$$e_{1,K}.F = F.e_{1,K},$$
$$e_{1,K}.a = a^p.e_{1,K}, \quad \forall\, a \in K.$$

Par conséquent, l'homomorphisme de $K[F]$-modules à gauche de $\mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K)$ dans $K[F]$, qui envoie $e_{1,K}$ sur F, *est un isomorphisme de* $\mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K)$ sur l'idéal $K[F].F$ (qui est aussi l'idéal bilatère engendré par F), *pour les structures de* $K[F]$*-modules à gauche et à droite.*

Enfin, si $K \to K'$ est une extension du corps K, les homomorphismes naturels

$$\mathbf{Gr}_K(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K) \to \mathbf{Gr}_{K'}(\mathrm{Ga}_{K'}, \mathrm{Ga}_{K'})$$

et

$$\mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K) \to \mathrm{Ext}^1_{K'}(\mathrm{Ga}_{K'}, \mathrm{Ga}_{K'}),$$

identifient respectivement $\mathbf{Gr}_K(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K)$ au sous-anneau de $K'[F]$ formé des polynômes $\sum_{n\geq 0} a_n F^n$ à coefficients dans K, et $\mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K)$ au sous-groupe additif de $K'[F].F$ formé des polynômes $\sum_{n\geq 1} a_n F^n$ à coefficients dans K, i. e. au sous-$K[F]$-module à gauche libre engendré par F.

4.2.2. Lemme. — *Pour tout corps* K *de caractéristique* $p \neq 0$, *pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$ *et tout monomorphisme* $i : H \to \mathrm{Ga}_K$, *l'homomorphisme*

$$i_n^* : \quad \mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Ga}_K, W_{n,K}) \to \mathrm{Ext}^1_K(H, W_{n,K}),$$

de groupes déterminé par i, *est surjectif.*

La propriété est vraie pour $n = 1$ ([1]; V, § 1, 2.2). Supposons-la vérifiée pour n, et montrons-la pour $n + 1$: on part de la suite exacte

$$e_{n,K} : \quad 0 \to W_{n,K} \xrightarrow{\mathfrak{T}} W_{n+1,K} \xrightarrow{\mathfrak{R}^n} \mathrm{Ga}_K \to 0$$

pour obtenir le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Ga}_K, W_{n,K}) \arrow[r, "\mathfrak{T}_*"] \arrow[d, "i_n^*"'] & \mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Ga}_K, W_{n+1,K}) \arrow[r, "\mathfrak{R}^n_*"] \arrow[d, "i_{n+1}^*"'] & \mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K) \arrow[r] \arrow[d, "i_1^*"'] & 0 \\
\mathrm{Ext}^1_K(H, W_{n,K}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_K(H, W_{n+1,K}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_K(H, \mathrm{Ga}_K) \arrow[d] & \\
0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme est exact [$\mathfrak{R}^n_*$ est bien surjectif : en effet, lorsque x_j, $j \in J$, décrit une base de K sur K^p, les $\mathfrak{R}^n_*(x_j.e_{n+1,K}) = x_j.e_{1,K}$, $j \in J$, décrivent une base du $K[F]$-module à droite libre $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K) \xrightarrow{\sim} (F)$]. Il en résulte que i_{n+1}^* est surjectif (chasse au lion).

4.2.3. — *Lorsque K est parfait,* on a, de plus, le résultat suivant : l'homomorphisme $\mathfrak{R}_*^{n-1} : \mathrm{Ext}_K^1(\mathrm{Ga}_K, W_{n,K}) \to \mathrm{Ext}_K^1(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K)$ est un isomorphisme de $K[F]$-modules à droite, de sorte que $\mathrm{Ext}_K^1(\mathrm{Ga}_K, W_{n,K})$ est libre et engendré par la classe $e_{n,K}$ de la suite

$$0 \to W_{n,K} \xrightarrow{\mathfrak{T}} W_{n+1,K} \xrightarrow{\mathfrak{R}^n} \mathrm{Ga}_K \to 0.$$

4.3. — *Lorsque K n'est pas parfait,* on fait appel à une propriété plus complexe.

PROPOSITION. — *Pour toute suite exacte $e : 0 \to W_{n,K} \to E \to H \to 0$ de K-groupes, dans laquelle H est un sous-groupe de Ga_K, il existe un morphisme φ de $\mathbf{Gr}_{K^{p^{-1}}}\left(H \otimes_K K^{p^{-1}}, \mathrm{Ga}_{K^{p^{-1}}}\right)$ tel que la suite $e \otimes_K K^{p^{-1}}$ obtenue par extension des scalaires soit l'image réciproque par φ de $e_{n,K^{p^{-1}}}$.*

Pour alléger l'écriture, nous posons $K' = K^{p^{-1}}$ dans cette démonstration.

Supposons $H = \mathrm{Ga}_K$; la proposition équivaut à dire que l'image de l'homomorphisme naturel $j_n : \mathrm{Ext}_K^1(\mathrm{Ga}_K, W_{n,K}) \to \mathrm{Ext}_{K'}^1(\mathrm{Ga}_{K'}, W_{n,K'})$ est le $K'[F]$-module à droite engendré par $e_{n,K'}$ (nous verrons que ce module est libre). Cette propriété est vraie pour $n = 1$, d'après 4.2.1. Supposons-la vraie pour n, et montrons-la pour $n+1$. On utilise le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes [on a posé $\mathfrak{T}' = (\mathfrak{T}_{K'})_*$ et $\mathfrak{R}' = (\mathfrak{R}_{K'}^n)_*$];

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ext}_K^1(\mathrm{Ga}_K, W_{n,K}) \arrow[r, "\mathfrak{T}_*"] \arrow[d, "j_n"] & \mathrm{Ext}_K^1(\mathrm{Ga}_K, W_{n+1,K}) \arrow[r, "\mathfrak{R}_*^n"] \arrow[d, "j_{n+1}"] & \mathrm{Ext}_K^1(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K) \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "s"] \arrow[d, "j_1"] \arrow[dl, dashed, "u"'] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{K'}(\mathrm{Ga}_{K'}, \mathrm{Ga}_{K'}) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Ext}_{K'}^1(\mathrm{Ga}_{K'}, W_{n,K'}) \arrow[r, "\mathfrak{T}'"] & \mathrm{Ext}_{K'}^1(\mathrm{Ga}_{K'}, W_{n+1,K'}) \arrow[r, "\mathfrak{R}'"] & \mathrm{Ext}_{K'}^1(\mathrm{Ga}_{K'}, \mathrm{Ga}_{K'}) \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "s'"] & 0
\end{tikzcd}$$

L'hypothèse de récurrence indique que $\mathrm{Im}(j_n) = \mathrm{Im}(\delta)$, donc $\mathfrak{T}' \circ j_n = 0$, et par suite $j_{n+1} \circ \mathfrak{T}_* = 0$. Il s'ensuit qu'il existe un homomorphisme u tel que $u \circ \mathfrak{R}_*^n = j_{n+1}$. Soit $(x_j)_{j \in J}$ une base de K sur K^p contenant 1; le $K[F]$-module à droite $\mathrm{Ext}_K^1(\mathrm{Ga}_K, \mathrm{Ga}_K)$ est libre de base $(x_j . e_{1,K})_{j \in J}$. On définit une section s de $\mathfrak{R}_*^n$ et une section s' de $\mathfrak{R}'$, en posant

$$s(x_j . e_{1,K}) = x_j . e_{n+1,K}, \quad \text{pour tout } j \in J,$$

et

$$s'(x_j^{p^{-1}} . e_{1,K'}) = x_j^{p^{-1}} . e_{n+1,K'}, \quad \text{pour tout } j \in J.$$

On a alors $j_{n+1} \circ s = s' \circ j_1$; d'où

$$\mathrm{Im}(j_{n+1}) = \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(j_{n+1} \circ s) = \mathrm{Im}(s' \circ j_1).$$

Comme $\mathrm{Im}(j_1)$ est le $K'[F]$-module à droite libre engendré par $e_{1,K'}$, il s'ensuit que $\mathrm{Im}(j_{n+1})$ est le $K'[F]$-module à droite libre engendré par $e_{n+1,K'}$,

C. Q. F. D.

Supposons que H est un sous-groupe propre de Ga_K; soit $i : H \to \mathrm{Ga}_K$ le monomorphisme définissant H. D'après 4.2.2, il existe une extension ε de Ga_K par $W_{n,K}$ telle que $e = \varepsilon . i$. Nous venons de voir que $\varepsilon \otimes_K K'$ s'écrit

$$\varepsilon \otimes_K K' = e_{n,k'} . \psi, \qquad \text{avec} \quad \psi \in \mathbf{Gr}_{K'}(\mathrm{Ga}_{K'}, \mathrm{Ga}_{K'}).$$

On en déduit l'égalité

$$e \otimes_K K' = e_{n,K'} . \varphi,$$

avec $\varphi = \psi \circ (i \otimes_K K')$ $\mathbf{Gr}_{K'}(H \otimes_K K', \mathrm{Ga}_{K'})$. D'où la proposition.

4.4. — Revenons à l'étude des groupes $\mathcal{J}_{n,k}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{J}_{n,k}$ est un sous-groupe de $(\Pi_n W_{n+1})_k$; nous utiliserons l'égalité

$$(\Pi_n W_m)_k = \Pi_{k^{p^{-n}}|k}\left(W_{m,k^{p^{-n}}}\right), \quad \text{pour tous } n \text{ et } m \text{ dans } \mathbf{N}^*,$$

et les propriétés de la restriction de Weil pour démontrer la proposition suivante.

Proposition. — *Soit* H *un sous-groupe de* Ga_K *et*

$$e : \quad 0 \to \mathcal{J}_{n,k} \to E \to H \to 0$$

une suite exacte de k-groupes, alors il existe un morphisme $\psi : E \to \mathcal{J}_{n+1,k}$ *induisant l'identité sur* $\mathcal{J}_{n,k}$.

Pour tous m et m' dans $\mathbf{N}^*$, et tout $G \in \mathbf{Gr}_k$, on note

$$\xi_m\left(G, W_{m',k^{p^{-m}}}\right) : \quad \mathbf{Gr}_{k^{p^{-m}}}\left(G \otimes_k k^{p^{-m}}, W_{m',k^{p^{-m}}}\right) \to \mathbf{Gr}_k(G, (\Pi_m W_{m'})_k)$$

la bijection canonique (1.1).

Soit $u : \mathcal{J}_{n,k} \otimes_k k^{p^{1-n}} \to W_{n,k^{p^{1-n}}}$ le morphisme dont l'image par $\xi_{n-1}\left(\mathcal{J}_{n,k}, W_{n,k^{p^{1-n}}}\right)$ est l'injection canonique $j_{n,k} : \mathcal{J}_{n,k} \to (\Pi_{n-1} W_n)_{k^{p^{1-n}}}$; on considère l'image directe

$$e' : \quad 0 \to W_{n,k^{p^{1-n}}} \to E' \to H \otimes_k k^{p^{1-n}} \to 0$$

de $e \otimes_k k^{p^{1-n}}$ par u : on a en particulier un morphisme $h : E \otimes_k k^{p^{1-n}} \to E'$ induisant u.

Appliquant la proposition 4.3 à $K = k^{p^{1-n}}$, on obtient un morphisme

$$\varphi : \quad H \otimes_k k^{p^{-n}} \to \mathrm{Ga}_{k^{p^{-n}}}$$

tel que $e' \otimes_{k^{p^{1-n}}} k^{p^{-n}}$ soit l'image réciproque de $e_{n,k^{p^{-n}}}$ par φ. D'où un morphisme

$$\chi : \quad E' \otimes_k k^{p^{-n}} \to W_{n+1, k^{p^{-n}}}$$

induisant l'identité de $W_{n, k^{p^{1-n}}}$. Alors, le composé

$$\chi' = \chi \circ \left(h \otimes_{k^{p^{1-n}}} k^{p^{-n}}\right) : \quad E \otimes_k k^{p^{-n}} \to W_{n+1, k^{p^{-n}}}$$

induit le morphisme

$$u' = u \otimes_{k^{p^{1-n}}} k^{p^{-n}} : \quad \mathcal{J}_{n, k^{p^{-n}}} \to W_{n, k^{p^{-n}}}.$$

A cause de la définition de u, l'image de u' par la bijection $\xi_n \left(E, W_{n+1, k^{p^{-n}}}\right)$ est le monomorphisme canonique (*cf.* 2.8) :

$$i_{n,k} \circ j_{n,k} : \quad \mathcal{J}_{n,k} \to (\textstyle\prod_n W_n)_{k^{p^{-n}}}.$$

Par conséquent, l'image de χ' par $\xi_n \left(E, W_{n+1, k^{p^{-n}}}\right)$ est un morphisme $\psi' : E \to (\prod_n W_{n+1})_{k^{p^{-n}}}$ induisant $i_{n,k} \circ j_{n,k}$.

On achève alors la démonstration de la proposition en posant

$$\psi = q_{n+1} \circ \psi',$$

où $q_{n+1} : (\prod_n W_{n+1})_k \to \mathcal{J}_{n+1,k}$ est la rétraction de $j_{n+1,k}$ définie au paragraphe 2.6.2.

4.5. Corollaire. — *Avec les notations de la proposition* 4.4, *si* E *est annulé par* $\mathfrak{V}^n$, *alors la suite e est scindée.*

Avec cette nouvelle hypothèse, tout morphisme de E dans $\mathcal{J}_{n+1,k}$ se factorise à travers $\mathcal{J}_{n,k}$ (4.1). En particulier, la factorisation $\psi'' : E \to \mathcal{J}_{n,k}$ de ψ est une rétraction du monomorphisme $\mathcal{J}_{n,k} \to E$.

4.6. Corollaire. — *Soient*

$$0 \to G \xrightarrow{i} G' \xrightarrow{u} \mathrm{Ga}$$

une suite exacte de k-groupes unipotents et $f : G \to \mathcal{J}_{n,k}$ *un morphisme; alors il existe un morphisme* $g : G' \to \mathcal{J}_{n+1,k}$ *tel que* $\tau f = gi$.

Soit H l'image de u; on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Gr}_k (G', \mathcal{J}_{n+1,k}) \arrow[r, "?\, i"] & \mathbf{Gr}_k (G, \mathcal{J}_{n+1,k}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_k (H, \mathcal{J}_{n+1,k}) \\
& \mathbf{Gr}_k (G, \mathcal{J}_{n,k}) \arrow[r] \arrow[u, "\tau ?"'] & \mathrm{Ext}^1_k (H, \mathcal{J}_{n,k}) \arrow[u, "\tau_*"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel $\tau_* = 0$ d'après la proposition 4.4. La première ligne est exacte et le corollaire s'ensuit.

4.7. Proposition. — *Pour tout k-groupe algébrique unipotent G, il existe des entiers n, r, $s \in \mathbf{N}$ et une suite exacte,*

$$0 \to G \to \mathcal{W}^r_{n,k} \to \mathcal{W}^s_{n,k}.$$

Montrons d'abord qu'il existe n et r et un monomorphisme $i : G \to \mathcal{W}^r_{n,k}$. On raisonne par récurrence noethérienne en supposant que cette assertion est vraie pour tout sous-groupe de G distinct de G. Soient $f : G \to \mathrm{Ga}_k$ un morphisme non nul (1.3), et $j : \mathrm{Ker}\, f \to \mathcal{W}^q_{m,k}$ un monomorphisme. Alors, d'après 4.6, il existe un morphisme $J : G \to \mathcal{W}^q_{m+1,k}$ induisant j. On peut prendre pour i le monomorphisme $G \to \mathcal{W}^q_{m+1,k} \times \mathcal{W}_{m+1,k}$ de composantes J et $\tau^m f$.

Considérant alors un monomorphisme $i : G \to \mathcal{W}^r_{n,k}$, on applique ce qui précède à son conoyau, et l'on obtient une suite exacte

$$0 \to G \xrightarrow{i} \mathcal{W}^r_{n,k} \xrightarrow{u} \mathcal{W}^s_{m,k}.$$

Si $m < n$, on remplace u par $\tau^{n-m} u$; si $m > n$, on remplace u par un morphisme $v : \mathcal{W}^r_{n,k} \to \mathcal{W}^s_{n,k}$ tel que $u = \tau^{m-n} u'$ (4.1); ceci achève la démonstration.

5. L'anneau des endomorphismes de $\mathcal{W}_{n,k}$

Les hypothèses sur le corps k sont celles du chapitre 4.

5.1. — Soit $X \in \mathcal{C}(k)$, nous noterons désormais ${}^{F^r}X$ l'élément de $\mathcal{C}(k)$ image de X par $\mathcal{F}^r$ (3.7); en particulier, pour tout n et tout $\alpha \in I^n$, on a ${}^{F^r}[B^\alpha] = [B^{p^r \cdot \alpha}]$. L'endomorphisme $S^{(n)}$ de $\mathcal{C}(k)$ utilisé ici a été défini en 3.6.

5.1.1. — *Nous appelons $D^{\mathcal{B}}$ l'anneau engendré par $\mathcal{C}(k)$ et les deux indéterminées $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$ sousmises aux relations*

(i) $$\mathcal{F} X = {}^F X \mathcal{F},$$

(ii) $$X \mathcal{V} = \mathcal{V}\, {}^F X,$$

(iii) $$\mathcal{V}\mathcal{F} = p,$$

(iv) $$\mathcal{V}^n X \mathcal{F}^n = \mathcal{V}^n . S^{(n)}(X) . \mathcal{F}^n,$$

(v) $$\Sigma_{\alpha \in I^n} [B^\alpha]\, \mathcal{F}^n \mathcal{V}^n [B^{-\alpha}] = p^n,$$

pour tous $X \in \mathcal{C}(k)$ et $n \in \mathbf{N}$.

L'étude faite au chapitre 3 montre que *l'on a un homomorphisme naturel de $D^{\mathcal{B}}$ dans l'anneau des endomorphismes du groupe additif de $\mathcal{C}(k)$* qui à $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$ et $X \in \mathcal{C}(k)$ associe respectivement les endomorphismes $\mathcal{F}$ (3.7), $\mathcal{V}$ (3.8), et l'homothétie définie par X.

5.1.2. — Nous avons vu que, si $X \in \mathcal{C}(k^{p^n})$, on a $S^{(n)}(X) = X$, et il existe un élément Y de $\mathcal{C}(k)$ tel que $X = {}^{F^n}Y$; utilisant les relations (i) et (iii), on en déduit que $\mathcal{V}^n X \mathcal{F}^n = p^n Y$. Ainsi, lorsque dans un monôme de $D^{\mathcal{B}}$ se présente un groupement de la forme $\mathcal{V}^r X \mathcal{F}^s$, on peut toujours, grâce à la relation (iv), le réduire à l'une ou l'autre des formes $Y \mathcal{F}^{s-r}$ ou $\mathcal{V}^{r-s}\, Y$ avec $Y \in \mathcal{C}(k)$ (Y pouvant être nul).

On vérifie alors aisément que tout élément U de $D^{\mathcal{B}}$ est une somme finie de monômes du type $X \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s Y$ avec $r \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{N}$, $X \in \mathcal{C}(k)$, et $Y \in \mathcal{C}(k)$.

5.2. Lemme. — *Soit $\sigma : k \to \mathcal{C}(k)$ une section de la projection canonique; tout élément U de $D^{\mathcal{B}}$ admet une écriture de la forme*

$$U = \Sigma_{r \in \mathbf{N}, s < n, \alpha \in I^s} (x_{r,s,\alpha})\, \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s [B^\alpha] + U_n,$$

où $U_n \in (\mathcal{V}^n)$ (idéal bilatère engendré par $\mathcal{V}^n$), les $x_{r,s,\alpha}$ étant des éléments de k presque tous nuls.

Tout élément U de $D^{\mathcal{B}}$ est somme finie d'éléments de la forme $X \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s Y$. Utilisant la décomposition en somme directe

$$\mathcal{C}(k) = \bigoplus_{\alpha \in I^s} \mathcal{C}(k^{p^s})\, [B^\alpha]$$

de 3.5, on écrit $Y = \Sigma_{\alpha \in I^s} Y_\alpha [B^\alpha]$ avec $Y_\alpha \in \mathcal{C}(k^{p^s})$.

Alors il existe des éléments $y_\alpha \in \mathcal{C}(k)$, $\alpha \in I^s$, tels que $Y_\alpha = {}^{F^s}(y_\alpha)$; d'où

$$\mathcal{F}^r \mathcal{V}^s\, Y_\alpha = \mathcal{F}^r\, y_\alpha\, \mathcal{V}^s = {}^{F^r}(y_\alpha)\, \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s;$$

il s'ensuit que

$$X \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s\, Y = \Sigma_{\alpha \in I^s} X_\alpha \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s [B^\alpha], \qquad \text{avec} \quad X_\alpha = X.{}^{F^r}(y_\alpha).$$

On en déduit que *tout élément U de $D^{\mathcal{B}}$ admet une écriture de la forme*

5.2.1. $$U = \Sigma_{r \in \mathbf{N}, s \in \mathbf{N}, \alpha \in I^s} X_{r,s,\alpha}\, \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s [B^\alpha],$$

où les $X_{r,s,\alpha}$ sont des éléments de $\mathcal{C}(k)$ presque tous nuls.

Pour démontrer le lemme, on peut donc se restreindre au cas où $U = X \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s [B^\alpha]$, $\alpha \in I^s$, et faire un raisonnement par récurrence décroissante sur s : si $s \geqq n$, on a $U \in (\mathcal{V}^n)$, et le lemme est vérifié pour U; si $s < n$, on appelle x la projection canonique de X sur k, et l'on a $X = \sigma(x) + p X'$, d'où $U = \sigma(x) \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s [B^\alpha] + p X' \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s [B^\alpha]$. Il suffit alors de vérifier que $U' = p X' \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s [B^\alpha]$ est somme de monômes de types $X_{r',s'}\,\mathcal{F}^{r'}\,\mathcal{V}^{s'}\,[B^{\alpha}]$ avec $s' > s$. Utilisant successivement les relations (v), (i) et (ii), on obtient

$$\mathcal{F}^r\, p\, \mathcal{V}^s = \Sigma_{\beta\in I}\,\mathcal{F}^r\,[B^{\beta}]\,\mathcal{F}\mathcal{V}\,[B^{-\beta}]\,\mathcal{V}^s = \Sigma_{\beta\in I}\,[B^{\beta.p^r}]\,\mathcal{F}^{r+1}\,\mathcal{V}^{s+1}\,[B^{-\beta.p^s}].$$

On peut donc écrire $U' = \Sigma_{\beta\in I}\, X_\beta\,\mathcal{F}^{r+1}\,\mathcal{V}^{s+1}\, Y_\beta$, avec X_β et $Y_\beta \in \mathcal{C}(k)$. Enfin, utilisant le calcul qui a conduit à 5.2.1, on constate que U' a une écriture de la forme $\Sigma_{\gamma\in I^{s+1}}\, X_\gamma\,\mathcal{F}^{r+1}\,\mathcal{V}^{s+1}\,[B^{\gamma}]$; ceci achève la démonstration.

5.2.2. *Remarque.* — L'élément U_n de la formule 5.2 peut s'écrire comme somme finie de monômes de type $X\,\mathcal{F}^r\,\mathcal{V}^s\,[B^{\alpha}]$, $s \geqq n$, $r\in \mathbf{N}$, $\alpha \in I^s$; cela résulte de la démonstration du lemme. Par ailleurs, si, pour tout élément $\alpha = \alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n+i-1}\,\alpha_{n+i}$ de I^{n+i}, on pose

$$\alpha(n) = \alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n-1}\,\alpha_n \qquad \text{et} \qquad M = B^{\alpha_{n+1}+p\,\alpha_{n+2}+\ldots+p^{i-1}\alpha_{n+i}},$$

on a

$$\mathcal{F}^r\,\mathcal{V}^{n+i}\,[B^{\alpha}] = \mathcal{F}^r\,\mathcal{V}^{n+i}\,[B^{\alpha(n)}]\,[M^{p^n}].$$

Comme $[M^{p^n}] = {}^{F^n}[M]$ on a, d'après (ii) :

$$\mathcal{F}^r\,\mathcal{V}^{n+i}\,[\mathrm{B}^{\alpha}] = \mathcal{F}^r\,\mathcal{V}^{i}\,[\mathrm{M}]\,\mathcal{V}^n\,[\mathrm{B}^{\alpha(n)}].$$

Ceci prouve que l'élément U_n appartient à l'idéal à gauche de $D^{\mathcal{B}}$ engendré par les $\mathcal{V}^n\,[B^{\beta}]$, $\beta\in I^n$.

5.2.3. *Remarque.* — On peut remplacer, dans le lemme 5.2, la famille $\{\,[B^{\alpha}];\ \alpha\in I^s\,\}$ par n'importe quelle base de $\mathcal{C}(k)$ sur $\mathcal{C}(k^{p^s})$, en particulier par $\{[B^{-\alpha}];\ \alpha\in I^s\,\}$ (*cf.* 3.6).

La remarque 5.2.2 reste encore valable si l'on remplace les $[B^{\alpha}]$, $\alpha\in I^s$, par les $[B^{-\alpha}]$, $\alpha \in I^s$ (elle ne s'appliquerait pas si l'on choisissait n'importe quelle base !).

5.3. — Pour tout entier n positif, nous désignons par $D^{\mathcal{B}}_n$ l'anneau engendré par $\mathcal{C}_n(k)$ et les deux indéterminées $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$ soumises aux relations notées encore (i) à (v), déduites des précédentes de la manière évidente, et à la relation

(vi) $$\mathcal{V}^n = 0.$$

On a une projection naturelle $P_n : D^{\mathcal{B}} \to D^{\mathcal{B}}_n$ qui envoie respectivement $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$ et $X\in\mathcal{C}(k)$ sur $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$ et $\pi_n(\mathrm{X})$ (3.2.3).

Pour $n = 1$, nous écrivons F au lieu de $\mathcal{F}$; $D^{\mathcal{B}}_1$ s'identifie alors à l'anneau $k[F]$ déjà utilisé.

Proposition. — *Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose $(\mathcal{V}^n) = D^{\mathcal{B}}\,\mathcal{V}^n\,D^{\mathcal{B}}$, de sorte que P^n induit un isomorphisme de $D^{\mathcal{B}}/(\mathcal{V}^n)$ sur $D^{\mathcal{B}}_n$; alors :*

(*a*) *en tant que $D^{\mathcal{B}}$-module à gauche, $(\mathcal{V}^n)$ est engendré par la famille $\{\,\mathcal{V}^n\,[B^{\alpha}];\ \alpha\in I^n\,\}$, et l'on a $(\mathcal{V}).(\mathcal{V}^n) = (\mathcal{V}^{n+1})$ pour tout $n\in\mathbf{N}$;*

(*b*) *la structure naturelle de* $D^{\mathcal{B}}_{n+1}$*-module à gauche induit sur l'idéal bilatère* $D^{\mathcal{B}}_{n+1}\, \mathcal{V}^n D^{\mathcal{B}}_{n+1}$ *une structure de* $k[F]$*-module à gauche libre de base* $\{\mathcal{V}^n [B^\alpha];\ \alpha \in I^n\}$;

(*c*) *l'écriture du lemme* 5.2 *est unique pour une section* σ *fixée.*

Pour $n = 0$, la proposition est évidente. Nous ferons une démonstration par récurrence sur n.

Pour cela, nous aurons besoin de faire apparaître dans l'écriture du lemme 5.2, les termes « de plus bas degré en $\mathcal{V}$ ». Soient U un élément de $D^{\mathcal{B}}$ et

$$\Sigma_{r \in \mathbf{N},\, s<n,\, \alpha \in I^s}\, \sigma(x_{r,s,\alpha})\, \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s [B^\alpha] + U_n$$

une écriture de U. Soit s_0 le plus petit des s tels que l'un au moins des $x_{r,s,\alpha}$, $r \in \mathbf{N}$, $\alpha \in I^s$, soit non nul. On peut écrire U sous la forme

5.3.1. $U = \Sigma_{r \in \mathbf{N}, \alpha \in I^{s_0}}\, \sigma(x_{r,s_0,\alpha})\, \mathcal{F}^r \mathcal{V}^{s_0} [B^\alpha] + \Sigma_{\beta \in I^{s_0+1}}\, U_\beta\, \mathcal{V}^{s_0+1} [B^\beta]$

avec $U_\beta \in D^{\mathcal{B}}$, $\forall\ \beta \in I^{s_0+1}$ (remarque 5.2.2).

Supposons (*b*) *vérifiée pour tous les entiers* $s < n$, *et démontrons la proposition pour tous les entiers* $m \leqq n$.

(*a*) On montre que, dans l'écriture 5.3.1, si U est dans $(\mathcal{V}^m)$, avec $m \leqq n$, alors on a $s_0 \geqq m$, en effet, si l'on supposait $s_0 < m$,

$$P_{s_0+1}(U) = \Sigma_{r \in \mathbf{N}, \alpha \in I^{s_0}}\, \pi_{s_0+1}((x_{r,s_0,\alpha}))\, \mathcal{F}^r \mathcal{V}^{s_0} [B^\alpha]$$

serait nul puisque U est dans $\operatorname{Ker} P_m$. Utilisant alors l'assertion (*b*) pour $D^{\mathcal{B}}_{s_0+1}$ (on a supposé $s_0 < m \leqq n$), on pourrait écrire

$$P_{s_0+1}(U) = \Sigma_{r,\alpha}\, x_{r,s_0,\alpha}\, \mathcal{F}^r \mathcal{V}^{s_0} [B^\alpha],$$

et conclure que les $x_{r,s_0,\alpha}$ sont tous nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il est alors facile, par un calcul analogue à celui de 5.2.2, de montrer que si $U \in (\mathcal{V}^m)$, avec $m \leqq n$, il appartient à l'idéal à gauche engendré par les $\mathcal{V}^m [B^\alpha]$, $\alpha \in I^m$; ce qui prouve la première partie de (*a*).

On vérifie ensuite que, pour $m \leqq n$, $(\mathcal{V}).(\mathcal{V}^m)$ est contenu dans $(\mathcal{V}^{m+1})$, donc lui est égal. En effet, $(\mathcal{V})$ est engendré par les $\mathcal{V}[B^\beta]$, $\beta \in I$, et tout élément U de $(\mathcal{V}^m)$ est congru modulo $(\mathcal{V}^{m+1})$ à un élément de la forme

$$\Sigma_{r \in \mathbf{N}, \alpha \in I^m}\, x_{r,m,\alpha}\, \mathcal{F}^r \mathcal{V}^m [B^\alpha];$$

on est donc ramené à prouver que tout produit $U_r = \mathcal{V} X \mathcal{F}^r \mathcal{V}^m$, avec $X \in \mathcal{C}(k)$, est dans $(\mathcal{V}^{m+1})$. Ceci est clair : pour $r = 0$, on a

$$U_r = \mathcal{V}^{m+1}.{}^{F^n}X;$$

pour $r \geq 1$, on a, d'après la relation (iv), $U_r = \mathcal{V}.S^{(1)}(X).\mathcal{F}^r \mathcal{V}^m$; en posant $S^{(1)}(X) = {}^F Y$ (5.1.2), on en déduit

$$U_r = \mathcal{V}.{}^F Y.\mathcal{F}^r.\mathcal{V}^m = p\, Y\, \mathcal{F}^{r-1}\, \mathcal{V}^m = Y\, \mathcal{F}^{r-1}\, \mathcal{V}^{m+1}\, \mathcal{F};$$

ceci achève la démonstration.

(*b*) On sait maintenant que $(\mathcal{V})$ annule l'idéal bilatère $D^{\mathcal{B}}_{n+1}\, \mathcal{V}^n\, D^{\mathcal{B}}_{n+1}$. Comme $D^{\mathcal{B}}_1 = k[F] = D^{\mathcal{B}}/(\mathcal{V})$, on en déduit une structure de $k[F]$-module à gauche sur $D^{\mathcal{B}}_{n+1}\, \mathcal{V}^n\, D^{\mathcal{B}}_{n+1}$. D'après (*a*), ce module est engendré par les $\mathcal{V}^n[B^\alpha]$, $\alpha \in I^n$; il reste à prouver que cette famille est libre. Soit

$$\Sigma_{\alpha \in I^n}\, Q_\alpha(F).\mathcal{V}^n[B^\alpha] = 0$$

une relation dans laquelle les $Q_\alpha(F)$ sont des polynômes de $k[F]$. Si cette relation est vraie dans $D^{\mathcal{B}}_{n+1}$, elle est *a fortiori* vraie dans l'anneau des endomorphismes du groupe additif $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ (5.1). Cela nous suffit pour prouver que $Q_\beta = 0$ pour tout $\beta \in I^n$. En effet, soit $X_\beta = [\xi\, B^{-\beta}] \in \mathcal{C}_{n+1}(k)$, avec $\xi \in k^{p^n}$; d'après 2.7, on a

$$(\mathcal{V}^n_0[B^\alpha])(X_\beta) = \begin{cases} (0, 0, \ldots, 0, \xi) & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta; \end{cases}$$

on en déduit l'égalité

$$(\Sigma_{\alpha \in I^n}\, Q_\alpha(F) \circ \mathcal{V}^n \circ [B^\alpha])(X_\beta) = Q_\beta(F)((0, 0, \ldots, 0, \xi)).$$

Par hypothèse, l'élément ainsi obtenu est nul quel que soit $\xi \in k^{p^n}$. Posons

$$Q_\beta(F) = \Sigma_{i \leq \mathbf{N}}\, a_i\, F^i, \qquad a_i \in k;$$

il vient

$$0 = Q_\beta(F)(0, 0, \ldots, 0, \xi) = \Sigma_{i \leq \mathbf{N}}(0, \ldots, 0, a_i^{p^n}\, \xi^{p^i}).$$

Alors, *puisque* k^{p^n} *est infini* (k n'est pas parfait !), le polynôme $\Sigma_{i \leq \mathbf{N}}\, a_i^{p^n}\, T^{p^i} \in k[T]$, qui s'annule pour une infinité de valeurs de la variable T, est nul. Ceci achève la démonstration de (*b*) pour n.

(*c*) En supposant cette assertion vraie pour $m < n$, on la démontre aisément pour n grâce à (*b*).

5.3.2. Corollaire. — *Les assertions* (*a*), (*b*), (*c*) *restent vraies lorsqu'on y remplace* B^α *par* $B^{-\alpha}$ *pour tout* $\alpha \in I^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Utiliser la remarque 5.2.3.

5.3.3. Corollaire. — *Pour tout* n, $D^{\mathcal{B}}_n$ *est un anneau noethérien à gauche.*

C'est vrai pour $n = 1$ puisque $k[F]$ est principal à gauche (utiliser la division euclidienne). Un raisonnement par récurrence faisant intervenir (*c*) donne le corollaire.

5.4. — Dans ce numéro, nous définissons, pour tout n, *une opération de l'anneau* $D^{\mathcal{B}}$ *sur le schéma en groupes* $\mathcal{J}_{n+1,k}$ *compatible avec le morphisme* $\tau : \mathcal{J}_{n,k} \to \mathcal{J}_{n+1,k}$.

5.4.1. — On fait opérer $\mathcal{C}(k)$ de la manière suivante : on utilise l'isomorphisme $\mathcal{U}_{n+1}^{-n} : \mathcal{C}_{n+1}(k) = \mathcal{J}_{n+1}(k^{p^n}) \to \mathcal{J}_{n+1}(k)$ défini par

$$\mathcal{U}_{n+1}^{-n}(\mathcal{V}^r([x^{p^n} B^{\alpha}])) = \mathcal{V}^r([x \otimes B^{p^{-n}} \cdot \alpha])$$

pour tous $r = 0, 1, \ldots, n$, $x \in k$ et $\alpha \in I^n$. Pour toute k-algèbre R, on appelle $u_R : \mathcal{J}_{n+1}(k) \to \mathcal{J}_{n+1}(R)$ l'injection canonique, et $X_R^{(p^{-n})}$ l'image de l'élément X de $\mathcal{C}(k)$ par le composé $u_R \circ \mathcal{U}_{n+1}^{-n} \circ \pi_{n+1} : \mathcal{C}(k) \to \mathcal{J}_{n+1}(R)$. Alors, en notant $(Y, Y') \mapsto Y . Y'$ la multiplication dans $\mathcal{J}_{n+1}(R)$, on définit une opération de $\mathcal{C}(k)$ sur $\mathcal{J}_{n+1}(R)$ en posant

$$X_R(Y) = (X_R^{(p^{-n})}) . Y, \quad \forall\, X \in \mathcal{C}(k), \quad Y \in \mathcal{J}_{n+1}(R).$$

5.4.2. — L'endomorphisme

$$F_R : \quad W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]) \to W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$$

d'anneaux, qui à $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ associe $(a_0^p, a_1^p, \ldots, a_n^p)$, induit un endomorphisme $\mathcal{F}_R$ de $\mathcal{J}_{n+1}(R)$; en effet, on a $F_R(W_{n+1}(R)) \subset W_{n+1}(R)$ et $F_R([1 \otimes B^{p^{-n}} \cdot \alpha]) = [B^{\alpha_n} \otimes B^{p^{1-n}} \cdot \alpha(n-1)]$ pour tout

$$\alpha = \alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n-1}\,\alpha_n = \alpha\,(n-1) + p^{n-1}\,\alpha_n \in I^n.$$

On peut définir $\mathcal{F}_R$ directement par les formules

$$\mathcal{F}_R(\mathcal{V}_R^r([x \otimes B^{p^r \cdot \beta}])) = \mathcal{V}_R^r([x^p B^{\beta_{n-r}} \otimes B^{p^{r+1} \cdot \beta(n-r-1)}])$$

pour tous $x \in R$, $(r, \beta) \in I(n)$, avec

$$\beta = \beta_1 + p\,\beta_2 + \ldots + p^{n-r-1}\,\beta_{n-r} = \beta\,(n-r-1) + p^{n-r-1}\,\beta_{n-r}.$$

5.4.3. — Ces constructions sont fonctorielles en R, et l'on définit une application

$$\mathcal{R}_{n+1} : \quad D^{\mathcal{B}} \to \operatorname{End} \mathcal{J}_{n+1,k}$$

en posant, pour tout $X \in \mathcal{C}(k)$ et toute k-algèbre R, $\mathcal{R}_{n+1}(X)(R) = X_R$, $\mathcal{R}_{n+1}(\mathcal{F}^m)(R) = \mathcal{F}_R^m$ et $\mathcal{R}_{n+1}(\mathcal{V}^m)(R) = \mathcal{V}_R^m$, où $\mathcal{V}_R$ est l'endomorphisme défini en 2.7.

LEMME. — *L'application* $\mathcal{R}_{n+1} : D^{\mathcal{B}} \to \operatorname{End} \mathcal{J}_{n+1,k}$ *est un homomorphisme d'anneaux.*

En utilisant 3.9 et l'isomorphisme canonique $\mathcal{C}_{n+1}(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}_{n+1}(k)$, on voit que les endomorphismes X_k, $\mathcal{F}_k$ et $\mathcal{V}_k$ sont liés par les relations (i) à (v). Nous allons en déduire qu'il en est de même pour les X_R, $\mathcal{F}_R$, $\mathcal{V}_R$ pour toute k-algèbre R, ce qui prouvera le lemme.

Puisque $\mathcal{R}_{n+1}(X)$, $\mathcal{R}_{n+1}(\mathcal{F})$, $\mathcal{R}_{n+1}(\mathcal{V})$ sont des endomorphismes du groupe $\mathcal{J}_{n+1,k}$, toute relation entre eux se traduit par l'annulation d'un endomorphisme $\mathcal{L}$ de $\mathcal{J}_{n+1,k}$. Par dualité, il correspond à $\mathcal{L}$ un endomorphisme P de la bigèbre $I_{n+1,k} = k[\mathcal{X}(n)]$, où $\mathcal{X}(n)$ désigne l'ensemble des variables $\{X_{r,\alpha};\ (r, \alpha) \in I(n)\}$ (2.5).

On est ramené à montrer que P est nul si et seulement si $\mathcal{L}(k) = 0$. L'endomorphisme P est défini par une famille $\{P_{r,\alpha};\ (r, \alpha) \in I(n)\}$ de polynômes à coefficients dans k, par rapport aux indéterminées $X_{s,\beta}$, $(s, \beta) \in I(n)$. Alors $\mathcal{L}(k)$ est nul si et seulement si, pour tout $(r, \alpha) \in I(n)$, $P_{r,\alpha}$ s'annule chaque fois que l'on remplace les indéterminées $X_{s,\beta}$ par des éléments $x_{s,\beta}$ quelconques de k. Comme k n'est pas parfait, il est *infini*, et la dernière assertion implique que les $P_{r,\alpha}$ sont tous nuls, donc $P = 0$.

C. Q. F. D.

5.5. Lemme. — *Le morphisme $\tau : \mathcal{J}_{n,k} \to \mathcal{J}_{n+1,k}$ est compatible avec les opérations $\mathcal{R}_n$ et $\mathcal{R}_{n+1}$ de $D^{\mathcal{B}}$ respectivement sur $\mathcal{J}_n$ et $\mathcal{J}_{n+1}$.*

Il est évident que $\tau \circ \mathcal{V} = \mathcal{V} \circ \tau$ (*cf.* 2.8). Il reste à prouver que

$$\tau \circ \mathcal{R}_n(\mathcal{F}) = \mathcal{R}_{n+1}(\mathcal{F}) \circ \tau \qquad \text{et} \qquad \tau \circ \mathcal{R}_n(X) = \mathcal{R}_{n+1}(X) \circ \tau$$

pour tout X dans $\mathcal{C}(k)$. Par un raisonnement analogue au précédent, on est ramené à prouver les égalités

$$\tau \circ \mathcal{R}_n(\mathcal{F})(k) = \mathcal{R}_{n+1}(\mathcal{F}) \circ \tau(k) \qquad \text{et} \qquad \tau \circ \mathcal{R}_n(X)(k) = \mathcal{R}_{n+1}(X) \circ \tau(k)$$

[comme homomorphismes de $\mathcal{J}_n(k)$ dans $\mathcal{J}_{n+1}(k)$].

Soit $i : W_n(k^{p^{1-n}}) \to W_n(k^{p^{-n}})$ l'injection canonique; si l'on considère $\mathcal{J}_{n+1}(k)$ [resp. $\mathcal{J}_n(k)$] comme sous-anneau de $W_{n+1}(k^{p^{-n}})$ [resp. de $W_n(k^{p^{1-n}})$] on rappelle que :

(*a*) $\mathcal{R}_n(\mathcal{F})(k)$ est induit par l'endomorphisme F de $W_n(k^{p^{1-n}})$;

(*b*) $\tau(k)$ est induit par $\mathfrak{T} \circ i$, où $\mathfrak{T} : W_n(k^{p^{1-n}}) \to W_{n+1}(k^{p^{-n}})$ est la translation (2.8).

Comme F « commute » avec i et $\mathfrak{T}$, on a $\mathfrak{T} \circ i \circ F = F \circ \mathfrak{T} \circ i$ ce qui prouve la première égalité.

D'un autre côté, si $U_n^{(m)} : W_n(k^{p^r}) \to W_n(k^{p^{r+m}})$, $m \in \mathbf{Z}$, est l'isomorphisme canonique $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \mapsto (a_0^{p^m}, \ldots, a_{n-1}^{p^m})$, l'isomorphisme canonique $\mathcal{U}_{n-1}^{-n} : \mathcal{C}_{n+1}(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}_{n+1}(k)$ (5.4.1) est induit par

$$U_{n+1}^{(-n)} : \quad W_{n+1}(k) \to W_{n+1}(k^{p^{-n}}).$$

Le diagramme ci-dessous, dans lequel $\mathfrak{R}$ désigne la projection canonique, est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
W_{n+1}(k) \arrow[rr, "U_{n+1}^{(-n)}"] \arrow[d, "\mathfrak{R}"'] & & W_{n+1}(k^{p^{-n}}) \arrow[d, "\mathfrak{R}"'] \\
W_n(k) \arrow[r, "U_n^{(1-n)}"] & W_n(k^{p^{1-n}}) \arrow[r, "U_n^{(-1)}"] & W_n(k^{p^{-n}})
\end{tikzcd}$$

Alors, pour tout $X \in \mathcal{C}(k)$, $x = \mathcal{U}_{n+1}^{-n} \circ \pi_{n+1}(X)$ est dans $\mathfrak{I}_{n+1}(k)$, donc dans $W_{n+1}(k^{p^{-n}})$, et l'on a $\mathcal{U}_n^{(1-n)} \circ \pi_n(X) = U_n^{(-1)}(\mathfrak{R}(x))$.

Rappelons que les homomorphismes $\mathfrak{T}$, F, $\mathfrak{R}$, i et U_n de groupes de Witt sont liés par les relations

$$(\bigstar) \quad w.(\mathfrak{T}\, W') = \mathfrak{T}((F\, \mathcal{R}\, w).w'), \quad \forall\, w \in W_{n+1}(k^{p^{-n}}), \quad w' \in W_n(k^{p^{-n}}),$$

$$(\bigstar\bigstar) \qquad\qquad i \circ U_n = F.$$

Alors, pour tout $Y \in \mathfrak{I}_n(k)$, la relation $(\bigstar)$ nous donne, avec les notations de 5.4.1,

$$X_k^{(p^n)}.\tau(Y) = x.\,\tau(Y) = x.(\mathfrak{T} \circ i(Y)) = \mathfrak{T}(F\, \mathcal{R}(x).i(Y)),$$

la relation $(\bigstar\bigstar)$ nous donne

$$\begin{aligned}\tau(X_k^{(p^{1-n})}.Y) &= \tau\{U_n^{(1)}(\mathfrak{R}(x)).Y\} = \mathfrak{T} \circ i\{U_n^{(1)}(\mathfrak{R}(x)).Y\} \\ &= \mathfrak{T}\{i \circ U_n^{(1)}(\mathfrak{R}(x)).i(Y)\} = \mathfrak{T}\{F\, \mathfrak{R}(x).i(Y)\}.\end{aligned}$$

Ceci prouve la deuxième égalité : $\tau \circ \mathcal{R}_n(X)(k) = \mathcal{R}_{n+1}(X) \circ \tau(k)$, et achève la démonstration du lemme.

5.6. — Comme $\mathcal{V}_R^n : \mathfrak{I}_n(R) \to \mathfrak{I}_n(R)$ est nul pour toute k-algèbre R, $\mathcal{R}_n$ se factorise à travers $D_n^{\mathcal{B}}$.

Proposition. — *L'homomorphisme $\overline{\mathcal{R}}_n : D_n^{\mathcal{B}} \to \mathbf{Gr}_k(\mathfrak{I}_{n,k}, \mathfrak{I}_{n,k})$, induit par $\mathcal{R}_n$, est un isomorphisme d'anneaux.*

La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$, $\overline{\mathcal{R}}_1 : D_1^{\mathcal{B}} = k[F] \to \mathbf{Gr}_k(\mathrm{Ga}_k, \mathrm{Ga}_k)$ est l'isomorphisme déjà utilisé.

Supposons que $\overline{\mathcal{R}}_n$ soit un isomorphisme, et montrons qu'il en est de même de $\overline{\mathcal{R}}_{n+1}$. On considère le diagramme de $D_{n+1}^{\mathcal{B}}$-modules à gauche

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Gr}_k(\mathrm{Ga}_k^{I^n}, \mathfrak{I}_{n+1,k}) \arrow[r, "?\rho"] & \mathbf{Gr}_k(\mathfrak{I}_{n+1,k}, \mathfrak{I}_{n+1,k}) \arrow[r, "?\tau"] & \mathbf{Gr}_k(\mathfrak{I}_{n,k}, \mathfrak{I}_{n+1,k}) \arrow[r] & 0 \\
 & & & \mathbf{Gr}_k(\mathfrak{I}_{n,k}, \mathfrak{I}_{n,k}) \arrow[u, "\tau?"] & \\
0 \arrow[r] & (\mathcal{V}^n) \arrow[r] \arrow[uu, dotted, "v"] & D_{n+1}^{\mathcal{B}'} \arrow[r] \arrow[uu, "\overline{\mathcal{R}}_{n+1}"'] & D_n^{\mathcal{B}} \arrow[r] \arrow[u, "\overline{\mathcal{R}}_n"] & 0
\end{tikzcd}$$

Il est commutatif (5.5), et ses lignes sont exactes [? τ est surjective puisque τ ? est bijective (4.1) ainsi que $\overline{\mathcal{R}}_n$, par hypothèse de récurrence]. Par conséquent, $\overline{\mathcal{R}}_{n+1}$ est un isomorphisme si et seulement si l'homomorphisme induit v est bijectif.

D'après 4.1, $\mathbf{Gr}_k(\mathrm{Ga}_k, \mathcal{J}_{n+1,k})$ est le $k[F]$-module à droite libre engendré par $\tau^n : \mathrm{Ga}_k \to \mathcal{J}_{n+1,k}$. Comme τ^n est compatible avec les opérations $\mathcal{R}_{n+1}$ et $\mathcal{R}_1$ de $D^{\mathcal{B}}$ respectivement sur $\mathcal{J}_{n+1,k}$ et Ga_k, si l'on identifie $\mathbf{Gr}_k(\mathrm{Ga}_k, \mathrm{Ga}_k)$ à $\mathbf{Gr}_k(\mathrm{Ga}_k, \mathcal{J}_{n+1,k})$ au moyen de τ^n ?, la structure naturelle de $D^{\mathcal{B}}_{n+1}$-module à gauche sur $\mathbf{Gr}_k(\mathrm{Ga}_k, \mathcal{J}_{n+1,k})$ correspond à la structure naturelle de $k[F]$-module à gauche de $\mathbf{Gr}_k(\mathrm{Ga}_k, \mathrm{Ga}_k)$.

Ainsi, le module à gauche $\mathbf{Gr}_k(\mathrm{Ga}_k^{I^n}, \mathcal{J}_{n+1,k})$ sur $D^{\mathcal{B}}_{n+1}$ est, en fait, un $k[F]$-module à gauche libre de base $\{\tau^n \circ p_\alpha ; \alpha \in I^n\}$ (on appelle $p_\alpha : \mathrm{Ga}_k^{I^n} \to \mathrm{Ga}_k$ la projection canonique sur le facteur de rang α).

Comme les $\mathcal{V}^n[B^{-\alpha}]$ forment une base du $k[F]$-module à gauche $(\mathcal{V}^n)$ (5.3.1), on montre que v est un isomorphisme en prouvant l'égalité

$$\overline{\mathcal{R}}_{n+1}(\mathcal{V}^n[B^{-\alpha}]) = \tau^n \circ p_\alpha \circ \rho \quad \text{pour tout } \alpha \in I^n.$$

On le fait en regardant les valeurs pour toute k-algèbre R, et l'on est ramené à vérifier que

$$\tau^n \circ p_\alpha \circ \rho\,(X) = \mathcal{V}^n_R([1 \otimes B^{p^{-n}\cdot\alpha}].X)$$

pour tout $X = [x \otimes B^{p^{-n}\cdot\beta}] \in \mathcal{J}_{n+1}(R)$ avec $x \in R$, $\beta \in I^n$.

Le premier membre est nul si $\beta \neq \alpha$; il vaut $\mathcal{V}^n_R([x \otimes 1])$ si $\beta = \alpha$. Le second membre prend évidemment la même valeur. Ceci achève la démonstration de la proposition.

6. Le théorème de structure : cas où card $\mathcal{B}$ est fini

Les résultats acquis dans les chapitres précédents permettent d'envisager un théorème de structure dont l'énoncé et la démonstration seront semblables à ce qui est fait dans ([1], V; § 1) sur un corps de base parfait. Les hypothèses sur k sont celles du chapitre 4.

6.1. — Considérons le système inductif

$$\mathcal{J}_{1,k} \xrightarrow{\tau} \mathcal{J}_{2,k} \to \cdots \to \mathcal{J}_{n,k} \xrightarrow{\tau} \mathcal{J}_{n+1,k} \to \cdots.$$

Soit G un k-groupe (affine, unipotent, commutatif); les morphismes de transition τ étant compatibles avec les opérations de $D^{\mathcal{B}}$ sur les $\mathcal{J}_{n,k}$, *on définit un $D^{\mathcal{B}}$-module à gauche $M(G)$ en posant*

$$M(G) = \varinjlim_n \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}_{n,k}).$$

Puisque les morphismes τ sont des monomorphismes, les homomorphismes du système inductif $\mathbf{Gr}_k(G, \mathfrak{I}_{n,k})$ sont injectifs; nous identifierons donc $\mathbf{Gr}_k(G, \mathfrak{I}_{n,k})$ à son image canonique dans $M(G)$. Si $f: G \to G'$ est un morphisme de k-groupes unipotents, on pose

$$\varinjlim_n \mathbf{Gr}_k(f, \mathfrak{I}_{n,k}) = M(f): \quad M(G) \to M(G');$$

c'est un homomorphisme de modules à gauche sur $D^{\mathcal{B}}$.

Dans la suite nous écrirons « $D^{\mathcal{B}}$-module » au lieu de « $D^{\mathcal{B}}$-module à gauche ».

6.2. — D'après 5.5, l'application composée

$$D^{\mathcal{B}}/(\mathcal{V}^n) \overset{\overline{\mathcal{R}}_n}{\to} \mathbf{Gr}_k(\mathfrak{I}_{n,k}, \mathfrak{I}_{n,k}) \overset{\text{can}}{\to} M(\mathfrak{I}_{n,k})$$

est un isomorphisme de $D^{\mathcal{B}}$-modules, et l'on a un carré commutatif,

$$\begin{array}{ccc} D^{\mathcal{B}}/(\mathcal{V}^{n+1}) & \xrightarrow{\sim} & M(\mathfrak{I}_{n+1,k}) \\ {\scriptstyle\text{can}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle M(\tau)} \\ D^{\mathcal{B}}/(\mathcal{V}^n) & \xrightarrow{\sim} & M(\mathfrak{I}_{n,k}) \end{array}$$

Si le k-groupe G est algébrique, il existe un entier n tel que $\mathfrak{V}_G^n = 0$. D'après 4.1, l'application τ^{r-n} ? : $\mathbf{Gr}_k(G, \mathfrak{I}_{n,k}) \to \mathbf{Gr}_k(G, \mathfrak{I}_{r,k})$ est donc bijective pour $r \geqq n$, et l'on a $M(G) = \mathbf{Gr}_k(G, \mathfrak{I}_{n,k})$.

De façon générale, la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{I}_{n,k} \xrightarrow{\tau^{r-n}} \mathfrak{I}_{r,k} \overset{\mathfrak{U}_n}{\to} \bigoplus_{I^n} \mathfrak{I}_{r,k},$$

décrite en 2.10, montre que $\mathbf{Gr}_k(G, \mathfrak{I}_{n,k})$ est l'ensemble des $m \in M(G)$ tels que $\mathcal{V}^n[B^{-\alpha}]\, m = 0$ pour tous $\alpha \in I^n$. Comme l'idéal bilatère $(\mathcal{V}^n)$ de $D^{\mathcal{B}}$ engendré par $\mathcal{V}^n$ est, en tant que $D^{\mathcal{B}}$-module à gauche, engendré par les $\mathcal{V}^n[B^{-\alpha}]$, $\alpha \in I^n$ (*cf.* 5.3.2), on peut aussi dire que $\mathbf{Gr}_k(G, \mathfrak{I}_{n,k})$ *est l'ensemble des* $m \in M(G)$ *tel que* $(\mathcal{V}^n).m = 0$.

Par conséquent, pour tout $G \in \mathbf{Gr}_k$, le $D^{\mathcal{B}}$-module $M(G)$ est *effaçable*, i. e. tel que, *pour tout* $m \in M(G)$, *on a* $(\mathcal{V}^n).m = 0$ *pour* n *assez grand.*

6.3. Théorème. — *Le foncteur* M *est une antiéquivalence de la catégorie* $\mathbf{Gr}_k$ *des k-groupes affines, unipotents, commutatifs, sur la catégorie des* $D^{\mathcal{B}}$*-modules effaçables.*

Nous nous contentons ici de « copier » la démonstration faite dans [1] sur un corps de base parfait.

(*a*) Si le k-groupe unipotent G est la limite d'un système projectif filtrant (G_i), l'application canonique $\varinjlim M(G_i) \to M(G)$ est bijective.

(*b*) Il est clair que M est exact à gauche; prouvons qu'il est *exact.*

Soit $j : H \to G$ un monomorphisme de k-groupes, pour prouver que $M(j) : M(G) \to M(H)$ est surjectif, *on suppose d'abord G algébrique.* Dans ce cas, on choisit une suite de composition

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_r = G$$

telle que H_i/H_{i-1} soit isomorphe à un sous-groupe de Ga_k pour $i = 1, \ldots, r$ (1.3). Alors, d'après 4.6, pour tout $f \in \mathbf{Gr}_k(H, \mathcal{J}_{n,k})$, il existe $g \in \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}_{n+r,k})$ tel que $\tau^r f = gj$, donc $M(j)$ est surjectif. *Si G n'est pas algébrique,* il est égal à la limite projective du système projectif filtrant de ses quotients algébriques G/G_i; on a alors

$$H = \varprojlim H/j^{-1}(G_i),$$

et $M(j)$ s'identifie, d'après (a), à la limite inductive des applications $M(G/G_i) \to M(H/j^{-1}(G_i))$. Comme ces dernières sont surjectives, il en est de même de leur limite inductive.

(c) Prouvons que *M est pleinement fidèle.* Soient H et G deux k-groupes unipotents; montrons que l'application canonique

$$\Phi(H) : \quad \mathbf{Gr}_k(G, H) \to \mathbf{Mod}_{D\mathcal{B}}(M(H), M(G))$$

est bijective.

Supposons d'abord $H = \mathcal{J}_{n,k}$: si l'on identifie $\mathbf{Gr}_k(\mathcal{J}_{n,k}, \mathcal{J}_{n,k})$ à $D\mathcal{B}/(\mathcal{V}^n)$, et $\mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}_{n,k})$ à l'ensemble des éléments de $M(G)$ annulés par $(\mathcal{V}^n)$ (6.2), $\Phi(\mathcal{J}_{n,k})$ est la bijection qui associe à $m : G \to \mathcal{J}_{n,k}$ l'homomorphisme $x \mapsto x.m$ de $D\mathcal{B}/(\mathcal{V}^n)$ dans $M(G)$.

Supposons maintenant H algébrique : il existe (4.7) une suite exacte

$$0 \to H \to \mathcal{J}^r_{n,k} \to \mathcal{J}^s_{n,k}$$

qui conduit au diagramme commutatif ci-dessous, dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathbf{Gr}_k(G, H) & \longrightarrow & \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}^r_{n,k}) & \longrightarrow & \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}^s_{n,k}) \\
& \downarrow{\scriptstyle \Phi(H)} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi(\mathcal{J}^r_{n,k})} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi(\mathcal{J}^s_{n,k})} \\
0 \longrightarrow & \mathbf{Mod}_{D\mathcal{B}}(M(H), M(G)) & \longrightarrow & \mathbf{Mod}_{D\mathcal{B}}(M(\mathcal{J}^r_{n,k}), M(G)) & \longrightarrow & \mathbf{Mod}_{D\mathcal{B}}(M(\mathcal{J}^s_{n,k}), M(G))
\end{array}$$

Comme $\Phi(\mathcal{J}^r_{n,k})$ et $\Phi(\mathcal{J}^s_{n,k})$ sont des bijections il en est de même de $\Phi(H)$.

Dans le cas général, H est limite du système projectif filtrant de ses quotients algébriques H_i, et l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Gr}_k(G, H) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim \mathbf{Gr}_k(G, H_i) \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi(H)} & & \downarrow{\scriptstyle \varprojlim \Phi(H_i)}\ \wr \\
\mathbf{Mod}_{D\mathcal{B}}(M(G), M(H)) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim \mathbf{Mod}_{D\mathcal{B}}(M(G), M(H_i))
\end{array}$$

donc $\Phi(H)$ est bijectif.

(d) Il reste à montrer que tout $D^{\mathcal{B}}$-module effaçable N est isomorphe à l'image par M d'un k-groupe unipotent. Si N *est de type fini*, il existe n tel que $(\mathcal{V}^n)\,N = 0$, et comme $D^{\mathcal{B}}_n \xrightarrow{\sim} D^{\mathcal{B}}/(\mathcal{V}^n)$ est noethérien à gauche (5.3.3), il existe une suite exacte

$$(D^{\mathcal{B}}_n)^s \xrightarrow{\varphi} (D^{\mathcal{B}}_n)^s \xrightarrow{\Psi} N \to 0.$$

D'après (c), φ est de la forme $M\,(f)$, où $f : \mathcal{J}^r_{n,k} \to \mathcal{J}^s_{n,k}$ est un morphisme de k-groupes; comme M est exact, N est isomorphe à $M\,(\mathrm{Ker}\, f)$. *Dans le cas général*, N est la limite filtrante de ses sous-modules $\{ N_i ; i \in J \}$ de type fini. Pour chaque i, il existe un k-groupe G_i et un isomorphisme $u_i : \ N_i \xrightarrow{\sim} M\,(G_i)$: d'après (c), pour chaque homomorphisme de transition $f_{ji} : N_i \to N_j$, il existe un unique morphisme $u_{ji} : \ G_j \to G_i$ tel que $u_j \circ f_{ji} = M\,(u_{ji}) \circ u_i$. Les G_i et les u_{ji} forment un système projectif filtrant; soit G la limite de ce système projectif, alors $M\,(G)$ est isomorphe à la limite du système inductif $(M\,(G_i),\, M\,(u_{ji}))$, donc à N.

6.4. Corollaire. — *Si $G \in \mathbf{Gr}_k$, G est algébrique (resp. fini) si et seulement si $M\,(G)$ est de type fini (resp. de longueur finie).*

Une antiéquivalence échange, en effet, objets artiniens (ici les k-groupes unipotents algébriques) et objets noethériens (ici les modules de type fini); elle échange aussi les objets de longueur finie.

6.5. Corollaire. — *Le k-groupe $\mathcal{J}_{n,k}$ est un cogénérateur injectif de la sous-catégorie pleine $\mathbf{Gr}_{n,k}$ de $\mathbf{Gr}_k$ formée des k-groupes unipotents algébriques annulés par $\mathfrak{V}^n$.*

En effet, d'après 4.7 et 4.1, $G \in \mathbf{Gr}_{n,k}$ si et seulement si il existe une suite exacte

$$0 \to G \to \mathcal{J}^r_{n,k} \to \mathcal{J}^s_{n,k}.$$

Alors, M définit une antiéquivalence entre $\mathbf{Gr}_{n,k}$ et la catégorie des $D^{\mathcal{B}}$-modules annulés par $(\mathcal{V}^n)$; et le corollaire s'ensuit.

6.6. Proposition. — *Soit $h : k \to K$ une extension de k telle que l'image par h de $\mathcal{B}$ soit une p-base de K, et soit $\mathcal{H} : \mathcal{C}\,(k) \to \mathcal{C}\,(K)$ l'homomorphisme canonique induisant h. Alors si $G \in \mathbf{Gr}_k$, on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathcal{C}\,(K) \otimes_{\mathcal{C}(k)} M\,(G) \xrightarrow{\sim} M\,(G \otimes_k K).$$

Précisons que, si l'on note $h^{p^n} : k^{p^n} \to K^{p^n}$ l'homomorphisme qui à $x^{p^n} \in k^{p^n}$ associe $(h\,(x))^{p^n}$, $\mathcal{H}$ est déterminé par les homomorphismes

$$\mathcal{J}_{n+1}\,(h^{p^n}) : \quad \mathcal{J}_{n+1}\,(k^{p^n}) \to \mathcal{J}_{n+1}\,(K^{p^n}).$$

La démonstration de [1] (V, § 1, 4.9) s'adapte immédiatement, nous ne la reproduisons pas ici.

7. Une autre définition des $\mathcal{B}$-groupes de Witt

Les notations sont celles du chapitre 2. On suppose card $\mathcal{B}$ fini.

Nous nous proposons de définir « directement » la structure de schéma en anneaux sur $\mathcal{O}^{I(n)}$ déterminée par l'isomorphisme

$$\chi : \quad \mathcal{O}^{I(n)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{n+1},$$

factorisation de $\mathcal{S} \circ \Psi : \mathcal{O}^{I(n)} \to \prod_n W_{n+1}$ à travers $\mathcal{I}_{n+1}$ (*cf.* 2.5).

Rappelons que, pour tout $m = 0, 1, \ldots, n$, le morphisme

$$\Phi_m : \quad W_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{n+1} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ga}$$

de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-schémas, défini par le polynôme de Witt,

$$\Phi_m = X_0^{p^m} + p\, X_1^{p^{m-1}} + \ldots + p^m X_m,$$

est un morphisme de foncteurs en anneaux. Pour tout $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R, $\Phi_m(R)$ associe au vecteur de Witt $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ la m-ième composante fantôme $a_0^{p^m} + pa_1^{p^{m-1}} + \ldots + p^m a_m \in R$ de a.

7.1. — En appliquant à Φ_m la restriction de Weil $\prod_n$?, on obtient le morphisme

$$\textstyle\prod_n \Phi_m : \quad \prod_n W_{n+1} \to \prod_n \mathrm{Ga}$$

de schémas en anneaux, qui à tout $w \in W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$, écrit sous la forme $w = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, associe

$$x_0^{p^m} + px_1^{p^{m-1}} + \ldots + p^m x_m \in R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}],$$

pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R.

Lemme. — *Pour tout $m \leq n$, le morphisme composé*

$$P'_m = \textstyle\prod_n \Phi_m \circ \mathcal{S} \circ \Psi : \quad \mathcal{O}^{I(n)} \to \prod_n \mathrm{Ga}$$

se factorise à travers le monomorphisme canonique $\prod_{n-m} \mathrm{Ga} \to \prod_n \mathrm{Ga}$.

En effet, pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R, l'image $\mathcal{I}_{n+1}(R)$ de $\mathcal{S} \circ \Psi$ (*cf.* 2.5.1) est le sous-anneau de $W_{n+1}(R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}])$ engendré par $W_{n+1}(R)$ et les éléments $[1 \otimes b^{p^{m-n}}]$, $b \in \mathcal{B}$. L'image de $W_{n+1}(R)$ par $\prod_n \Phi_m$ est contenue dans l'image canonique $R \otimes 1$ de R dans $R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$; de plus, $\prod_n \Phi_m([1 \otimes b^{p^{-n}}]) = 1 \otimes b^{p^{-n}}$; comme $\prod_n \Phi_m$ est un homomorphisme d'anneaux, l'image de P'_m est contenue dans le sous-anneau $R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{m-n}}]$ de $R \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]$; d'où le lemme.

7.2. — Soit $P_m : \mathcal{O}^{I(n)} \to \prod_{n-m} \mathrm{Ga}$ le morphisme factorisant P'_m. Pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre R et tout $x = (x_{r,\alpha}; (r, \alpha) \in I(n)) \in R^{I(n)}$, on a, en appliquant la définition de $\mathfrak{S} \circ \Psi$,

$$P'_m(x) = \Sigma_{(r,\alpha)\in I(n), r\leq m} p^r x_{r,\alpha}^{p^{m-r}} \otimes B^{p^{m-n}.\alpha}.$$

Rappelons que si $(r, \alpha) \in I(n)$, on a $r \in [0, n]$ et $\alpha \in I^{n-r}$; pour

$$\alpha = \alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n-r-1}\,\alpha_{n-r} \qquad \text{et} \qquad m \geq r,$$

on note $\alpha(n-m)$ l'élément $\alpha_1 + p\,\alpha_2 + \ldots + p^{n-m-1}\,\alpha_{n-m}$ de I^{n-m}, et α^m l'élément $\alpha_{n-m+1} + p\,\alpha_{n-m+2} + \ldots + p^{m-r-1}\,\alpha_{n-r}$ de I^{m-r}. Alors on a, en désignant encore par $\mathcal{B}$ l'image de $\mathcal{B} \subset \mathbf{Z}[\mathcal{B}]$ par le morphisme structural $\mathbf{Z}[\mathcal{B}] \to R$,

$$P_m(x) = \Sigma_{(r,\alpha)\in I(n), r\leq n} p^r x_{r,\alpha}^{m-r} B^{\alpha^m} \otimes B^{p^{m-n}.\alpha(n-m)}.$$

Rappelons que I_{n+1} est l'anneau de polynômes $\mathbf{Z}[\mathcal{B}][\mathfrak{X}(n)]$, où $\mathfrak{X}(n)$ représente l'ensemble des variables $\{X_{r,\alpha} : (r, \alpha) \in I(n)\}$ (2.5.2). *L'écriture ci-dessus prouve que* $P_m : \mathcal{D}^{I(n)} \to \mathrm{D}^{I^{n-m}}$ *est le morphisme de schémas dont la composante* $P_{m,\beta} : \mathcal{D}^{I(n)} \to \mathcal{D}$ *de rang* $\beta \in I^{n-m}$ *est décrite par le polynôme*

$$P_{m,\beta} = \Sigma_{(r,\gamma)\in I(m)} p^r B^{\gamma} X_{r,\beta+p^{n-m}.\gamma}^{p^{m-r}}$$

de I_{n+1} [pour obtenir $P_{m,\beta}$, on ne considère dans $P_m(x)$ que les termes pour lesquels $\alpha(n-m) = \beta$; les indices (r, α), qui interviennent dans cette somme, sont ceux qui vérifient $r \leq m$ et $\alpha = \beta + p^{n-m}\,\alpha^m$, où α^m parcourt I^{m-r}; en posant $\gamma = \alpha^m$, on aboutit à la somme ci-dessus].

Lorsqu'on considère sur $\mathcal{D}^{I(n)}$ la structure de foncteur en anneaux déduite par transport de structure au moyen de $\mathfrak{S} \circ \Psi$, *les* $P_m : \mathcal{D}^{I(n)} \to \coprod_{n-m}$ Ga *sont des morphismes de foncteurs en anneaux pour* $m = 0, 1, \ldots, n$. De plus, comme le groupe additif $\coprod_{n-m}$ Ga est isomorphe à $\bigoplus^{I^{n-m}}$ Ga, *les* $P_{m,\beta}$, *pour* $(m, \beta) \in I(n)$, *sont des morphismes de foncteurs en groupes pour les groupes additifs sous-jacents à* $\mathcal{D}^{I(n)}$ *et* Ga.

7.3. — On constate que, pour tout $(m, \beta) \in I(n)$, la variable $X_{m,\beta}$ intervient dans $P_{m,\beta}$ avec pour seul coefficient p^m. On en déduit, en raisonnant par récurrence sur m, que $X_{m,\beta} \in \mathbf{Z}[\mathcal{B}; p^{-1}; P(n)]$, où $P(n)$ désigne l'ensemble des polynômes $P_{r,\alpha}$, $(r, \alpha) \in I(n)$.

Il s'ensuit que si $\mathfrak{T} : \mathcal{D}^{I(n)} \to \mathcal{D}^{I(n)}$ est le morphisme dont la composante de rang (m, β) est $P_{m,\beta}$, $\forall\,(m, \beta) \in I(n)$, *le morphisme*

$$\mathfrak{T} \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}, p^{-1}] : \quad \mathcal{D}^{I(n)} \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}, p^{-1}] \to \mathcal{D}^{I(n)} \otimes \mathbf{Z}[\mathcal{B}, p^{-1}]$$

est un isomorphisme.

Remarquons que le schéma $\mathcal{D}^{I(n)}$ se décompose en

$$\mathcal{D}^{I^n} \times \mathcal{D}^{I^{n-1}} \times \ldots \times \mathcal{D}^{I} \times \mathcal{D},$$

et que $\mathfrak{T}$ *peut encore être considéré comme le morphisme dont la composante* $\mathcal{O}^{I(n)} \to \mathcal{O}^{I^{n-r}}$ *de rang r pour cette décomposition est* P_r.

Nous noterons désormais $\mathcal{C} \to \mathcal{C}[p^{-1}]$ le foncteur extension des scalaires associé à l'homomorphisme $\mathbf{Z}[\mathcal{B}] \to \mathbf{Z}[\mathcal{B}, p^{-1}]$.

PROPOSITION. — *Il y a sur* $\mathcal{O}^{I(n)}$ *une structure de schéma en anneaux, et une seule, telle que, pour tout m,* $P_m : \mathcal{O}^{I(n)} \to \prod_{n-m} \mathrm{Ga}$ *soit un morphisme de* $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$*-foncteurs en anneaux.*

Nous avons déjà décrit une telle structure, il reste à en prouver l'unicité, ce qui se fait en passant à $\mathcal{O}^{I(n)}[p^{-1}]$. En effet, supposons $\mathcal{O}^{I(n)}$ muni d'une structure de schéma en anneaux telle que P_m soit un morphisme de foncteurs en anneaux pour tout m (nous notons $\sigma : \mathcal{O}^{I(n)} \times \mathcal{O}^{I(n)} \to \mathcal{O}^{I(n)}$ et $\mu : \mathcal{O}^{I(n)} \times \mathcal{O}^{I(n)} \to \mathcal{O}^{I(n)}$ la somme et le produit); alors

$$\mathfrak{T} : \quad \mathcal{O}^{I(n)} \to \mathcal{O}^{I(n)} = \textstyle\prod_n \mathrm{Ga} \times \prod_{n-1} \mathrm{Ga} \times \ldots \times \mathrm{Ga}$$

est un morphisme de foncteurs en anneaux; il en est donc de même de $\mathfrak{T}[p^{-1}]$ pour les structures de foncteurs en anneaux sur $\mathcal{O}^{I(n)}[p^{-1}]$ obtenues par extension des scalaires. Comme $\mathfrak{T}[p^{-1}]$ est un isomorphisme de schémas, il n'y a qu'une seule structure de foncteur en anneaux sur $\mathcal{O}^{I(n)}[p^{-1}]$ déduite, par transport de structure, de la structure produit

$$(\textstyle\prod_n \mathrm{Ga} \times \prod_{n-1} \mathrm{Ga} \times \ldots \times \mathrm{Ga})[p^{-1}]$$
$$\xrightarrow{\sim} (\textstyle\prod_n \mathrm{Ga}[p^{-1}])(\prod_{n-1} \mathrm{Ga}[p^{-1}]) \times \ldots \times (\mathrm{Ga}[p^{-1}]);$$

les morphismes $\sigma[p^{-1}]$ et $\mu[p^{-1}]$ sont donc uniques, ce qui assure l'unicité de σ et μ.

Nous identifions désormais le schéma en anneaux ci-dessus avec $\mathcal{J}_{n+1}$.

7.3.1. *Remarque.* — Il est possible, par des méthodes analogues à celles utilisées dans le *calcul de Witt* ([1]; V, § 1.1), de prouver cette proposition en oubliant que l'on connaît sur $\mathcal{O}^{I(n)}$ une structure de schéma en anneaux qui convient; on n'utilise alors que les propriétés des polynômes P_m. Nous avons préféré commencer par une présentation moins formelle de $\mathcal{J}_n$ qui donnait immédiatement accès aux propriétés conduisant au théorème de structure du chapitre 6. La nouvelle description donnée ici nous permettra par contre de compléter au chapitre suivant l'étude des propriétés de l'anneau de Cohen $\mathcal{C}(k)$ d'un corps k de p-base $\mathcal{B}$.

7.3.2. *Remarque.* — Les coefficients des polynômes P_m, qui sont dans $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$, dépendent effectivement de $\mathcal{B}$; lorsque nous aurons à effectuer des changements de base nous écrirons donc $P_m^{\mathcal{B}}$ au lieu de P_m.

8. Structure des anneaux locaux complets

Les hypothèses sur le corps k sont les mêmes qu'au chapitre 3. Nous commencerons par prouver l'existence de sections « multiplicatives » pour la projection canonique $\pi_1 : \mathcal{C}(k) \to k$, i. e. d'applications $s : k \to \mathcal{C}(k)$ telles que $\pi_1 \circ s(x) = x$ et $s(x.y) = s(x).s(y)$ pour tous x et y dans k.

8.1. Lemme. — *Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel k, tel que $\mathfrak{m}^{n+1} = 0$; si s et s' sont deux sections multiplicatives de la projection canonique $A \to k$, alors $s(x) = s'(x)$ pour tout $x \in k^{p^n}$.*

Nous prouvons plus loin l'existence de sections multiplicatives.

Désignons par A^* le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A, et par Q_r $(r = 1, 2, \ldots, n+1)$ le noyau de l'application canonique $A^* \to (A/\mathfrak{m}^r)^*$. Pour tous x et y dans $\mathfrak{m}^r$, $1 + x$ et $1 + y$ sont dans Q_r, et l'on a $(1 + x)(1 + y)(1 + x + y)^{-1} \in Q_{r+1}$; ceci montre que l'application $1 + x \mapsto x + \mathfrak{m}^{r+1}$ induit un isomorphisme de groupes

$$Q_r/Q_{r+1} \to \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}.$$

Il s'ensuit que Q_r/Q_{r+i} est annulé par p^i, en particulier $Q_r/Q_{n+1} = Q_r$ est annulé par p^{n+1-r}.

De l'exactitude de la suite

$$1 \to Q_1 \to A^* \to A^*/Q_1 \xrightarrow{\sim} k^* \to 0,$$

on déduit que l'homomorphisme qui, à $x \in k^*$, associe $s(x).(s'(x))^{-1} \in A^*$, se factorise à travers Q_1, d'où un homomorphisme $f : k^* \to Q_1$ de groupes abéliens. Comme $p^n Q_1 = 0$, on a $f(x^{p^n}) = 1$ pour tout $x \in k^*$; donc s et s' coïncident sur k^{p^n}.

C. Q. F. D.

8.2. Proposition. — *Il existe des applications $s : k \to \mathcal{C}(k)$ telles que $\pi_1 \circ s(x) = x$ et $s(x.y) = s(x).s(y)$ pour tous x et y dans k.*

Comme $\mathcal{C}(k)$ est plongé dans $W(k)$ (3.2.4), toute section multiplicative $s : k \to \mathcal{C}(k)$, à supposer qu'il en existe, peut être considérée comme une section multiplicative de la projection canonique $W(k) \to k$. Pour obtenir une telle section, il suffira donc de modifier la section de Teichmüller $t : x \mapsto [x]$ [qui est multiplicative (1.2)] par un homomorphisme $\sigma : k^* \to \operatorname{Ker}\{W(k)^* \to k^*\}$ de groupes multiplicatifs tel que $t(x).\sigma(x) \in \mathcal{C}(k)$, $\forall\, x \in k^*$.

(*a*) Nous utilisons cette idée et le lemme 8.1 pour montrer d'abord *l'existence de sections multiplicatives pour la projection canonique $\mathcal{C}_{n+1}(k) \to k$*, [$\mathcal{C}_{n+1}(k)$ est identifié à un sous-anneau de $W_{n+1}(k)$]. On applique le lemme 8.1 à $A = W_{n+1}(k)$: on pose $U_r = \mathrm{Ker}\,(W(k)^* \to W_r(k)^*)$ pour $r = 1, 2, \ldots$, et l'on est ramené à trouver un homomorphisme $f' : k^*/(k^{p^n})^* \to U_1/U_{n+1}$ tel que, f désignant le composé

$$k^* \xrightarrow{\text{can}} k^*/(k^{p^n})^* \xrightarrow{f'} U_1/U_{n+1},$$

on ait $t(x).f(x) \in \mathcal{C}_{n+1}(k)$ pour tout x dans k.

Le groupe abélien $k^*/(k^{p^n})^*$ est annulé par p^n, il est donc somme directe de groupes cycliques [3]. Plus précisément, soit $\{\varepsilon_j; j \in J\}$ une base de $k^*/(k^p)^*$ comme espace vectoriel sur $\mathbf{F}_p$, et soit $\{x_j; j \in J\}$ un relèvement dans k^* des ε_j; alors *$k^*/(k^{p^n})^*$ est un $\mathbf{Z}/p^n\,\mathbf{Z}$ module libre ayant pour base la projection canonique $\{\bar{x}_j; j \in J\}$ de $\{x_j; j \in J\}$ dans $k^*/(k^{p^n})^*$.*

Comme U_1/U_{n+1} est annulé par p^n, pour définir $f : k^* \to U_1/U_{n+1}$ il suffit de se donner les images $f(x_j) = f'(\bar{x}_j)$ des x_j de manière à avoir $t(x_j).f(x_j) \in \mathcal{C}_{n+1}(k)$ pour tout $j \in J$. Soit $x_j = \sum_{\alpha \in I^n} \xi_\alpha^{p^n} B^\alpha$ la décomposition de x_j sur la base $\{B^\alpha; \alpha \in I^n\}$ de k sur k^{p^n}; il existe un élément y de $W_{n+1}(k)$ tel que

$$t(x_j) = [x_j] = \sum_{\alpha \in I^n} [\xi_\alpha^{p^n} B^\alpha] + V(y).$$

L'élément $u_j = \sum_{\alpha \in I^n} [\xi_\alpha^{p^n} B^\alpha]$ est *un élément inversible* de $\mathcal{C}_{n+1}(k)$, donc $t(x_j) = u_j.(1 + V(y).u_j^{-1})$, avec $1 + V(y).u_j^{-1} \in U_1/U_{n+1}$. Il suffit de poser $f(x_j) = (1 + V(y).u_j^{-1})^{-1}$ pour avoir

$$t(x_j).f(x_j) = u_j \in \mathcal{C}_{n+1}(k).$$

On définit alors un homomorphisme $\sigma_{n+1}^* : k^* \to (\mathcal{C}_{n+1}(k))^*$ en se donnant ses valeurs sur $(k^{p^n})^*$ et sur $\{x_j; j \in J\}$: on pose $\sigma_{n+1}^*(x) = x$ pour tout $x \in k^{p^n}$ et $\sigma_{n+1}^*(x_j) = u_j$ pour $j \in J$. *L'application $\sigma_{n+1} : k \to \mathcal{C}_{n+1}(k)$, définie par $\sigma_{n+1}(x) = \sigma_{n+1}^*(x)$ pour $x \in k^*$ et $\sigma_{n+1}(0) = 0$, est une section multiplicative de la projection canonique $\mathcal{C}_{n+1}(k) \to k$.*

Pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, soit U'_r le groupe multiplicatif formé des éléments de $\mathcal{C}_r(k)$ qui s'écrivent $1 + p^r y$, $y \in \mathcal{C}_{n+1}(k)$; *toute autre section multiplicative $\sigma'_{n+1} : k \to \mathcal{C}_{n+1}(k)$ s'obtient en « multipliant » σ_{n+1} par un homomorphisme $v : k^* \to U'_1/U'_{n+1}$ de groupes tel que $v((k^{p^n})^*) = 1$* [autrement dit, v est défini par la donnée d'une famille $\{v(x_j); j \in J\}$ *quelconque* d'éléments de U'_1/U'_{n+1}].

(b) Fixons la base $\{x_j; j \in J\}$; on constate que, si $\pi : \mathcal{C}_{n+1}(k) \to \mathcal{C}_n(k)$ est la projection canonique, $\pi \circ \sigma_{n+1}$ n'est pas égal à σ_n. Cependant, *pour toute section multiplicative $s_n : k \to \mathcal{C}_n(k)$, il est possible de trouver une section multiplicative $s_{n+1} : k \to \mathcal{C}_{n+1}(k)$ telle que $\pi \circ s_{n+1} = s_n$* : en effet, $\pi \circ \sigma_{n+1}$ est une section multiplicative de $\mathcal{C}_n(k) \to k$, par conséquent, il existe un homomorphisme $u : k^* \to U'_1/U'_n$ tel que $s_n = (\pi \circ \sigma_{n+1}).u$. On a $u(x^{p^{n-1}}) = 1$ pour tout x dans $(k^{p^n})^*$, et u est déterminé par les $u(x_j)$, $j \in J$. Pour tout $j \in J$, soit $v(x_j)$ un relèvement de $u(x_j)$ dans U'_1/U'_{n+1}, et $v : k^* \to U'_1/U'_{n+1}$ l'homomorphisme égal à 1 sur $(k^{p^n})^*$ défini par les $v(x_j)$, alors la section $s_{n+1} = \sigma_{n+1} . v$ est telle que $\pi \circ s_{n+1} = s_n$.

Pour obtenir une section multiplicative s de la projection canonique $\mathcal{C}(k) \to k$, on construit alors les s_n de proche en proche à partir de $s_1 = \mathrm{Id}(k) : k \to \mathcal{C}_1(k)$. Il est clair, d'après cette construction, que la section s n'est pas unique [par exemple, pour $s_2 : k \to \mathcal{C}_2(k)$ on peut prendre n'importe quelle section multiplicative de $\mathcal{C}_2(k) \to k$!].

8.3. — Utilisant les résultats du chapitre 7, *nous nous proposons d'obtenir un théorème analogue à celui de Teichmüller-Witt* ([1]; V, § 4, 2.1), *pour les anneaux locaux complets de corps résiduel k dans le cas où $[k : k^p]$ est finie.* Il est possible d'étendre ces résultats au cas où $[k : k^p]$ n'est pas finie.

Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel k; pour tout $b \in \mathcal{B}$, on choisit un relèvement $\tilde{b}$ de b dans A; l'homomorphisme de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$ dans A qui envoie b sur $\tilde{b}$ pour tout $b \in \mathcal{B}$, détermine sur A, une structure de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbre telle que la projection canonique $\varpi : A \to k$ soit un homomorphisme de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$-algèbres.

On convient ici d'identifier $\mathcal{D}^{I(n)}$, muni de la structure de foncteur en anneaux décrite en 7.3, à $\mathcal{J}_{n+1}$ au moyen de l'isomorphisme χ.

D'après 7.2, l'application

$$P_n(A) : \quad \mathcal{J}_{n+1}(A) \to A$$

est un homomorphisme d'anneaux; à tout élément $x = (x_{r,\alpha};\ (r, \alpha) \in I(n))$, il associe

$$P_n(A)(x) = \Sigma_{(r,\alpha) \in I(n)}\, p^r\, x_{r,\alpha}^{p^{n-r}}\, \tilde{B}^\alpha$$

(on convient de noter $\tilde{B}^\alpha$ l'image canonique de B^α par l'homomorphisme $\mathbf{Z}[\mathcal{B}] \to A$ défini par $b \mapsto \tilde{b}$).

Soit $\mathcal{J}_{n+1}(\mathfrak{m})$ le noyau de $\mathcal{J}_{n+1}(\varpi) : \mathcal{J}_{n+1}(A) \to \mathcal{J}_{n+1}(k)$; il est formé des éléments $x = (x_{r,\alpha}\ ;\ (r, \alpha) \in I(n))$ de $\mathcal{J}_{n+1}(A)$ dont toutes les composantes sont dans $\mathfrak{m}$.

Comme $p \in \mathfrak{m}$, la formule ci-dessus montre que l'image de $\mathcal{J}_{n+1}(\mathfrak{m})$ par $P_n(A)$ est contenue dans $\mathfrak{m}^{n+1}$. On a donc un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}_{n+1}(\mathrm{A}) \arrow[r, "P_n(A)"] \arrow[d, "\mathcal{J}_{n+1}(\varpi)"'] & \mathrm{A} \arrow[d, "\mathrm{can}"] \\
\mathcal{J}_{n+1}(k) \arrow[r, "\tilde{\varphi}_n"] & A/\mathfrak{m}^{n+1}
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{\varphi}_n$ est induit par $P_n(A)$.

Il est clair que $\tilde{\varphi}_n$ est un homomorphisme local; il induit sur les corps résiduels l'isomorphisme $k^{p^{-n}} \xrightarrow{\sim} k$ qui à x associe x^{p^n}. En composant $\tilde{\varphi}_n$

avec l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{J}_{n+1}(k^{p^n}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}_{n+1}(k),$$

on obtient un homomorphisme

$$\tilde{c}_n : \quad \mathcal{J}_{n+1}(k^{p^n}) \to A/\mathfrak{m}^{n+1},$$

induisant l'identité sur le corps résiduel commun.

8.4. Théorème. — *Soit A un anneau local complet de corps résiduel k tel que $[k : k^p]$ soit fini, et $\varpi : A \to k$ la projection canonique. Pour toute famille $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b};\ b \in \mathcal{B}\}$ d'éléments $\tilde{b}$ de A tels que $\varpi(\tilde{b}) = b$, il existe un unique homomorphisme $\tilde{c} : \mathcal{C}(k) \to A$ d'anneaux tel que $\tilde{c}([b]) = \tilde{b}$ pour tout $b \in \mathcal{B}$, et $\varpi \circ \tilde{c} = \pi_1 : \mathcal{C}(k) \to k$.*

Avec les notations du paragraphe précédent, les $\tilde{c}_n : \mathcal{J}_{n+1}(k^{p^n}) \to A/\mathfrak{m}^{n+1}$ définissent un homomorphisme $\tilde{c}$ d'anneaux de $\mathcal{C}(k)$ dans $A = \varprojlim A/\mathfrak{m}^{n+1}$ qui répond aux conditions du théorème.

Unicité. — Soit $c' : \mathcal{C}(k) \to A$ un autre homomorphisme d'anneaux tel que $c'(b) = \tilde{c}(b) = \tilde{b}$, $\forall\, b \in \mathcal{B}$, et $\varpi \circ c' = \pi_1$; on montre que $c' = \tilde{c}$ en vérifiant que les homomorphismes induits c'_{n+1} et $\tilde{c}_{n+1}$ de $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ dans $A/\mathfrak{m}^{n+1}$ coïncident pour tout $n \in \mathbf{N}$. Procédons par récurrence sur n : on a $c'_1 = \tilde{c}_1 = \mathrm{Id}(k)$. Supposons que $c'_n = \tilde{c}_n$, alors

$$c'_{n+1} - \tilde{c}_{n+1} : \quad \mathcal{C}_{n+1}(k) \to A/\mathfrak{m}^{n+1}$$

se factorise à travers l'idéal $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ de $A/\mathfrak{m}^{n+1}$. Comme, de plus, $p.(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = 0$, $c'_{n+1} - \tilde{c}_{n+1}$ se factorise à travers $k = \mathcal{C}_{n+1}(k)/p.\mathcal{C}_{n+1}(k)$. Finalement, il existe une application

$$D : \quad k \to \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$$

telle que $c'_{n+1} - \tilde{c}_{n+1}$ soit le composé

$$\mathcal{C}_{n+1}(k) \xrightarrow{\pi_1} k \xrightarrow{D} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \hookrightarrow A/\mathfrak{m}^{n+1}.$$

Pour tous x et y dans k, soient X et Y dans $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ tels que $\pi_1(X) = x$, et $\pi_1(Y) = y$; on a

$$\begin{aligned} D(x.y) &= c'_{n+1}(X).c'_{n+1}(Y) - \tilde{c}_{n+1}(X).\tilde{c}_{n+1}(Y) \\ &= c'_{n+1}(X).D(Y) + \tilde{c}_{n+1}(Y).D(X). \end{aligned}$$

Comme $c'_{n+1}(X).D(Y) = x.D(Y)$ (pour la structure naturelle d'espace vectoriel sur k de $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$), on a $D(x.y) = x\,D(y) + y\,D(x)$. Alors D est une dérivation de k dans le k-espace vectoriel $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$.

Une telle dérivation est déterminée par ses valeurs $D(b)$ $(b \in \mathcal{B})$ sur la p-base $\mathcal{B}$ de k ([2]; chap. 0, § 21, 2.3). Comme $c'_{n+1}([b]) = \tilde{c}_{n+1}([b]) = \tilde{b}$, on a $D(b) = 0$ pour tout $b \in \mathcal{B}$, donc $D = 0$.

C. Q. F. D.

8.5. Corollaire. — *Avec les hypothèses du théorème, il existe des applications* $\sigma : k \to A$ *telles que* $\bar{\omega} \circ \sigma(x) = x$ *et* $\sigma(x.y) = \sigma(x).\sigma(y)$ *pour tous* x *et* y *dans* k.

Il suffit de prendre $\tilde{c} \circ s$, où $s : k \to \mathcal{C}(k)$ est une section multiplicative de π_1 (*cf.* 8.2). Mais, si l'on compare la construction de s avec la construction de $\tilde{c}$, on constate qu'il y a, en général, « beaucoup plus » de sections multiplicatives que d'homomorphismes d'anneaux de $\mathcal{C}(k)$ dans A induisant l'identité sur le corps résiduel commun : en effet, la donnée d'un relèvement d'une p-base $\mathcal{B}$ de k dans A ne détermine pas une section multiplicative unique.

9. Étude des $\mathcal{B}$ foncteurs de Witt lorsque card $(\mathcal{B})$ n'est pas fini

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{B}$ désigne un ensemble infini, et $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$ l'algèbre symétrique de l'ensemble $\mathcal{B}$, à coefficients entiers. On considère l'ensemble $\{\mathcal{B}_\omega ; \omega \in \Omega\}$ des parties *finies* $\mathcal{B}_\omega$ de $\mathcal{B}$; $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$ est la limite inductive de ses sous-algèbres $\mathbf{Z}[\mathcal{B}_\omega]$, $\omega \in \Omega$.

Les notations sont celles de 1.4. Pour tout $\omega \in \Omega$, on appelle I^n_ω l'ensemble sous-jacent au groupe $\bigoplus_{\mathcal{B}_\omega} (\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$.

Comme en 1.4, on appelle I^n (resp. I^n_ω) l'ensemble des éléments du groupe $\bigoplus_{\mathcal{B}} \mathbf{Z}$ (resp. $\bigoplus_{\mathcal{B}_\omega} \mathbf{Z}$) dont toutes les composantes sont inférieures à p^n. Pour tout $\mathcal{B}_{\omega'}$ contenant $\mathcal{B}_\omega$, on a les inclusions naturelles $I^n_\omega \subset I^n_{\omega'} \subset I^n$, de plus $I^n = \bigcup_{\omega \in \Omega} I^n_\omega$.

9.1. *Propriétés des* $\mathcal{B}_\omega$*-groupes de Witt.*

9.1.1. — Pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous notons $\mathcal{J}^\omega_{n+1}$ (au lieu de $\mathcal{J}^{\mathcal{B}_\omega}_{n+1}$) le $\mathcal{B}_\omega$-schéma de Witt de hauteur $n+1$ (*cf.* chap. 2). On remarque que, si $\mathcal{B}_{\omega'} \supset \mathcal{B}_\omega$, $\mathcal{J}^\omega_{n+1} \oplus \mathbf{Z}[\mathcal{B}_{\omega'}]$ est un sous-schéma en anneaux de $\mathcal{J}^{\omega'}_{n+1}$: pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}_{\omega'}]$-algèbre R, $\mathcal{J}^\omega_{n+1}(R)$ est le sous-anneau de $\mathcal{J}^{\omega'}_{n+1}(R)$ engendré par $W_{n+1}(R)$ et les $[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}]$, $\alpha \in I^n_\omega$.

Le foncteur $\mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1}$ *n'est pas un schéma affine* (du moins pour $n \geqq 1$), *mais les inclusions naturelles déterminent un isomorphisme de* $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$*-foncteurs :*

$$\varinjlim_{\Omega} \mathcal{J}^\omega_{n+1,\mathbf{Z}[\mathcal{B}]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1}.$$

Pour tous $n, n' \in \mathbf{N}$ et $\omega, \omega' \in \Omega$ tels que $n' > n$ et $\mathcal{B}_{\omega'} \supset \mathcal{B}_{\omega}$, on convient de noter

$$\tau_{\omega'}^{n'-n} : \quad \mathcal{J}_{n}^{\omega'} \to \mathcal{J}_{n'}^{\omega'}$$

et

$$\tau_{\omega',\omega}^{n'-n} : \quad \mathcal{J}_{n,\mathbf{Z}[\mathcal{B}_{\omega'}]}^{\omega} \to \mathcal{J}_{n'}^{\omega'}$$

les monomorphismes canoniques de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}_{\omega'}]$-groupes.

Enfin, on note $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{V}_{\omega}$) l'endomorphisme de $\mathcal{J}_{n+1}^{\mathcal{B}}$ (resp. $\mathcal{J}_{n+1}^{\omega}$) défini en 2.7. Il est évident que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathcal{V}$ induit $\mathcal{V}_{\omega, \mathbf{Z}[\mathcal{B}]}$ et que les $\mathcal{V}_{\omega}$ « commutent » avec les translations $\tau_{\omega',\omega}^{n'-n}$. Pour toute extension A de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}]$, on écrira encore $\mathcal{V}_{\omega}$ au lieu de $\mathcal{V}_{\omega, A}$.

Soit $I_{\omega',\omega}^{n}$ le complémentaire de I_{ω}^{n} dans $I_{\omega'}^{n}$; les inclusions $I_{\omega}^{m} \to I_{\omega'}^{m}$ pour $m = 0, 1, \ldots, n$ déterminent une inclusion de $I_{\omega}(n)$ dans $I_{\omega'}(n)$; on désigne par $I_{\omega',\omega}(n)$ le complémentaire de $I_{\omega}(n)$ dans $I_{\omega'}(n)$. Rappelons enfin qu'un élément de $I_{\omega'}(n)$ est repéré par un couple (m, α), où $m = 0, 1, \ldots, n$ et $\alpha \in I_{\omega'}^{n-m}$.

Pour la démonstration du théorème de structure, nous aurons besoin de raffiner le résultat de la proposition 2.10 que l'on remplacera par la suivante :

9.1.2. PROPOSITION. — *On pose* $A_{\omega'} = \mathbf{Z}[\mathcal{B}_{\omega'}, \mathcal{B}_{\omega'}^{-1}]$. *Pour tout* $n \in N$ *et* $\omega \in \Omega$ *tel que* $B_{\omega} \subset B_{\omega'}$, *on a une suite exacte de* $A_{\omega'}$-*groupes*

$$0 \to \mathcal{J}_{n+1, A_{\omega'}}^{\omega} \xrightarrow{\tau_{\omega',\omega}^{0}} \mathcal{J}_{n+1, A_{\omega'}}^{\omega'} \xrightarrow{\mathfrak{U}_{n}^{\omega',\omega}} \bigoplus\nolimits_{I_{\omega',\omega}(n)} \mathcal{J}_{n+1, A_{\omega'}}^{\omega'},$$

où $\mathfrak{U}_{n}^{\omega'\omega}$ *est le morphisme dont la composante de rang* $(n-r, \alpha)$ *est* $\mathcal{V}_{\omega'}^{r}\,[1 \otimes B^{-p^{-n}.\alpha}]$, *pour tout* $(n-r, \alpha) \in I_{\omega',\omega}(n)$.

Pour toute $A_{\omega'}$-algèbre R, le noyau de $\mathcal{V}_{\omega'}^{r}$ est formé des

$$X = \Sigma_{(m,\beta) \in I_{\omega'}(n)} \mathcal{V}_{\omega'}^{m}([x_{m,\beta} \otimes B^{p^{m-n}.\beta}])$$

pour lesquels $x_{m,\beta} = 0$ pour tout (m, β) tel que $m \leq n - r$ et $\beta(r) = 0$ [on rappelle que, si $\beta = \beta_1 + p\,\beta_2 + \ldots + p^{n-m-1}\beta_{n-m}$ et si $r \leq n - m$, on a $\beta(r) = \beta_1 + p\,\beta_2 + \ldots + p^{r-1}\beta_r$]. Alors, le noyau de $\mathcal{V}_{\omega'}^{r} \circ [1 \otimes B^{-p^{-n}.\alpha}]$ (avec $\alpha \in I_{\omega',\omega}^{r}$) est formé des X pour lesquels $x_{m,\beta} = 0$ pour tout (m, β) tel que $m \leq n - r$ et $\beta(r) = \alpha$. Par conséquent, le noyau de $\mathfrak{U}_{n}^{\omega',\omega}$ est formé des X pour lesquels

$$x_{m,\beta} = 0, \quad \forall\, (m, \beta) \in I_{\omega',\omega}(n).$$

Il est clair que ce noyau est confondu avec $\mathcal{J}_{n+1}^{\omega}(R)$, qui est formé des éléments X de $\mathcal{J}_{n+1}^{\omega'}(R)$ s'écrivant

$$X = \Sigma_{(m,\beta) \in I_{\omega}(n)} \mathcal{V}_{\omega'}^{m}([x_{m,\beta} \otimes B^{p^{m-n}.\beta}]).$$

9.1.3. Corollaire. — *Pour tous* n, $m \in \mathbf{N}$ *et* ω, $\omega' \in \Omega$ *tels que* $m \geqq n$ *et* $\mathcal{B}_{\omega'} \supset \mathcal{B}_{\omega}$, *on a une suite exacte de* $A_{\omega'}$*-groupes*

$$0 \to \mathcal{T}^{\omega}_{n, A_{\omega'}} \xrightarrow{\tau^{m-n}_{\omega', \omega}} \mathcal{T}^{\omega'}_{m, A_{\omega'}} \xrightarrow{\mathfrak{U}^{\omega', \omega}_{n, m}} \bigoplus_{J^n_{\omega', \omega}} \mathcal{T}^{\omega'}_{m, A_{\omega'}}$$

où, utilisant l'inclusion naturelle $I_{\omega'}(n-1) \subset I_{\omega'}(n)$ (2.8.1), *on appelle* $J_{\omega', \omega}(n)$ *le sous-ensemble* $I^n_{\omega'} \dot{\cup} I_{\omega', \omega}(n-1)$ *de* $I_{\omega'}(n)$, *et où* $\mathfrak{U}^{\omega', \omega}_{n, m}$ *est le morphisme dont la composante de rang* $(n-r, \alpha)$ *est* $\mathcal{V}^r_{\omega'} \circ [1 \otimes B^{-p^{-m+1}.\alpha}]$ *pour tout* $(n-r, \alpha) \in J_{\omega', \omega}(n)$.

Il suffit d'utiliser la suite exacte

$$0 \to \mathcal{T}^{\omega'}_{n} \to \mathcal{T}^{\omega'}_{m} \xrightarrow{\mathfrak{U}^{\omega'}_{n, m}} \bigoplus_{I^n_{\omega'}} \mathcal{T}^{\omega'}_{m}$$

donnée par la proposition 2.10, et la proposition ci-dessus au cran $n-1$.

9.2. *Extensions de* $\mathcal{B}$*-groupes de Witt sur un corps* k *de p-base* $\mathcal{B}$. — Nous nous proposons d'étudier les propriétés des k-groupes $\mathcal{T}^{\omega}_{n, k}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $\omega \in \Omega$, k étant muni de sa structure naturelle de $\mathbf{Z}[\mathcal{B}_{\omega}]$-algèbre pour tout $\omega \in \Omega$.

Rappelons la définition de $\mathcal{T}^{\omega}_{n+1}$: c'est l'image du morphisme

$$g^{\omega}_{n+1} : \quad \bigoplus_{I^n_{\omega}} W_{n+1, A} \to \Pi_{A' \mid A} W_{n+1, A'}$$

(avec $A = \mathbf{Z}[\mathcal{B}_{\omega}]$ et $A' = \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}_{\omega}]$) dont la composante g_{α}, de rang α, est pour tout $\alpha \in I^n_{\omega}$, le morphisme qui, pour toute $\mathbf{Z}[\mathcal{B}_{\omega}]$-algèbre R et tout $w = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in W(R)$, associe à w l'élément $(x_0 \otimes 1, x_1 \otimes 1, \ldots, x_n \otimes 1).[1 \otimes B^{p^{-n}.\alpha}]$. Lorsqu'on étend les scalaires à k, on remarque que, pour toute k-algèbre R,

$$(\Pi_{A' \mid A} W_{n+1, A'})_k (R) = W_{n+1}(R \otimes_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}_{\omega}]} \mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}_{\omega}]) = W_{n+1}(R \otimes_k K_n),$$

où $K_n = k(\mathcal{B}^{p^{-n}}_{\omega})$; par conséquent $\mathcal{T}^{\omega}_{n+1, k}$ est l'image du morphisme

$$g^{\omega}_{n+1, k} : \quad \bigoplus_{I^n_{\omega}} W_{n+1, k} \to \Pi_{K_n \mid k} W_{n+1, K_n} = (\Pi_{A' \mid A} W_{n+1, A'})_k.$$

9.2.1. Proposition. — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{T}^{\omega}_{n, k}$ *est le plus grand sous-groupe de* $\mathcal{V}^{\omega}_{n+1, k}$ *annulé par* $\mathfrak{V}^n$.

Compte tenu de la remarque de 1.3, il suffit de montrer que $\mathcal{T}^{\omega}_{n, k} = \operatorname{Ker} \tilde{V}^n$, où $\tilde{V}^n : \mathcal{T}^{\omega}_{n+1, k} \to \Pi_{f_n} (\mathcal{T}^{\omega}_{n+1, k})^{(p^n)}$ est le morphisme de foncteurs en groupes, image de $\mathfrak{V}^n : (\mathcal{T}^{\omega}_{n+1, k})^{(p^n)} \to \mathcal{T}^{\omega}_{n+1, k}$ par la bijection canonique $\xi(\mathcal{T}^{\omega}_{n+1, k}, \mathcal{T}^{\omega}_{n+1, k})$.

On reprend le raisonnement de 4.1, en remplaçant $\mathcal{T}_{n, k}$ (resp. $\mathcal{T}_{n+1, k}$; $\Pi_n W_{n+1}$) par $\mathcal{T}^{\omega}_{n, k}$ (resp. $\mathcal{T}^{\omega}_{n+1, k}$; $\Pi_{k \mid K} W_{n+1, K}$). Nous nous contentons de donner les points essentiels de la démonstration : $\mathfrak{V}^n$ est nul sur $(\mathcal{T}^{\omega}_{n, k})^{(p^n)}$ donc se factorise à travers $(\mathcal{T}^{\omega}_{n+1, k}/\mathcal{T}^{\omega}_{n, k})^{(p^n)} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{I^n_{\omega}} \mathrm{Ga}_k$; on obtient ainsi un morphisme $\overline{\mathfrak{V}} : \bigoplus_{I^n_{\omega}} \mathrm{Ga}_k \to \mathcal{T}^{\omega}_{n+1, k}$, et l'on montre que $\overline{\mathfrak{V}} = \tau^n_{\omega} \circ u$, où $u : \bigoplus_{I_\omega^n} \mathrm{Ga}_k \to \mathrm{Ga}_k$ est le morphisme dont la composante de rang α est l'homothétie B^α, pour tout $\alpha \in I_\omega^n$.

Il en résulte que $\tilde{V} = (\prod_{f^n} \tau_\omega^n) \circ \tilde{u} \circ \rho_n^\omega$, où ρ_n^ω est la projection canonique de $\mathcal{J}_{n+1,k}^\omega$ sur $\bigoplus_{I_\omega^n} \mathrm{Ga}_k$ et $\tilde{u} : \bigoplus_{I_\omega^n} \mathrm{Ga}_k \to \prod_{f^n} \mathrm{Ga}_k \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{I^n} \mathrm{Ga}_k$ le monomorphisme canonique déterminé par l'inclusion $\mathrm{I}_\omega^n \subset I^n$. Donc $\operatorname{Ker} \tilde{V} = \operatorname{Ker} \rho_n^\omega$.

C. Q. F. D.

9.2.2. — Nous conservons la notation $K_n = k(\mathcal{B}_\omega^{p^{-n}})$, pour tout n, de sorte que l'on a un isomorphisme de $K_{n-1}^{p^{-1}}$ sur

$$k\,(\mathcal{B}_\omega^{p^{-n}}) \otimes_k k^{p^{-1}} = K_n \otimes_k k^{p^{-1}}.$$

Lemme. — *Pour toute suite exacte*

$$e: \quad 0 \to W_{n,K_{n-1}} \to E \to H \to 0$$

de K_{n-1}-groupes dans laquelle H est un sous-groupe de $\mathrm{Ga}_{K_{n-1}}$, il existe $\mathcal{B}_{\omega'} \in \Omega$, avec $\mathcal{B}_{\omega'} \supset \mathcal{B}_\omega$, et un morphisme $\varphi_{\omega'} \in \mathbf{Gr}_{K'_n}$ $(\mathrm{H} \otimes K'_n, \mathrm{Ga}_{K'_n})$ où $K'_n = k(\mathcal{B}_{\omega'}^{p^{-n}})$, tels que la suite $e_{K'_n} = e \otimes_{K_{n-1}} K'_n$ soit l'image réciproque de e_{n,K'_n} par $\varphi_{\omega'}$.

Rappelons que e_{n,K'_n} est la suite

$$0 \to W_{n,K'_n} \xrightarrow{\mathfrak{T}} W_{n+1,K'_n} \xrightarrow{\mathfrak{R}^n} \mathrm{Ga}_{K'_n} \to 0.$$

Il s'agit de raffiner, par ce lemme, le résultat de la proposition 4.3.

Supposons $\mathrm{H} = \mathrm{Ga}_{K_{n-1}}$: d'après 4.3, il existe un morphisme $\varphi \in \mathbf{Gr}_{K_{n-1}^{p^{-1}}}\left(\mathrm{Ga}_{K_{n-1}^{p^{-1}}}, \mathrm{Ga}_{K_{n-1}^{p^{-1}}}\right)$ tel que $e \otimes_{K_{n-1}} K_{n-1}^{p^{-1}}$ soit l'image réciproque par φ de $e_{n,K_{n-1}^{p^{-1}}}$; ce morphisme est représenté par un élément $\Phi = \Sigma_{i=0}^N a_i F^i$ de $K_{n-1}^{p^{-1}}[F]$ $(a_i \in K_{n-1}^{p^{-1}}, \ \forall\, i)$; comme $K_{n-1}^{p^{-1}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_n \otimes_k k^{p^{-1}}$, on a, pour chacun des a_i, une écriture $a_i = \Sigma_{\alpha \in I}\, a_{i,\alpha} \otimes B^{p^{-1}.\alpha}$, où les $a_{i,\alpha}$ sont des éléments presque tous nuls de K_n. Il existe donc un $\mathcal{B}'_\omega \in \Omega$ tel que $a_i \in K'' = K_n \otimes_k k\,(\mathcal{B}_{\omega'}^{p^{-1}})$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, N$; alors $\Phi \in K''\,[F]$, autrement dit, il existe $\varphi' \in \mathbf{Gr}_{K''}\,(\mathrm{Ga}_{K''}, \mathrm{Ga}_{K''})$ tel que $\varphi = \varphi' \otimes_{K''} K_{n-1}^{p^{-1}}$. On peut supposer $\mathcal{B}_\omega \subset \mathcal{B}_{\omega'}$ de sorte que K'' est contenu dans $K'_n = k\,(\mathcal{B}_{\omega'}^{p^{-n}})$; alors le morphisme $\varphi_{\omega'} = \varphi' \otimes_{K''} K'_n$ possède la propriété voulue.

Si H est un sous-groupe propre de $\mathrm{Ga}_{K_{n-1}}$ on procéde comme en 4.3. Soit $i : H \to \mathrm{Ga}_{K_{n-1}}$ le monomorphisme définissant H ; il existe $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^1\,(\mathrm{W}_{n,K_{n-1}}, \mathrm{Ga}_{K_{n-1}})$ tel que $e = \varepsilon\, i$; il existe ω' et

$$\Psi_{\omega'} \in \mathbf{Gr}_{K'_n}\,(\mathrm{Ga}_{K'_n}, \mathrm{Ga}_{K'_n})$$

tels que $\varepsilon \otimes_{K_{n-1}} K'_n = e_{1,K'_n} . \Psi_{\omega'}$, et l'on pose $\varphi_{\omega'} = \Psi_{\omega'} \circ (i \otimes_{K_{n-1}} K'_n)$.

9.2.3. Proposition. — *Soient H un sous-groupe de* Ga_k *et*

$$e: \quad 0 \to \mathcal{J}^{\omega}_{n,k} \to E \to H \to 0$$

une suite exacte de k-groupes; alors il existe un $\mathcal{B}_{\omega'} \in \Omega$, *tel que* $\mathcal{B}_{\omega'} \supset \mathcal{B}_{\omega}$, *et un morphisme* $\Psi : E \to \mathcal{J}^{\omega'}_{n+1,k}$ *induisant l'identité sur* $\mathcal{J}^{\omega}_{n,k}$.

Il suffit de reprendre le raisonnement fait en 4.4, *mutatis mutandis* : on remplace $k^{p^{1-n}}$ par $K_{n-1} = k(\mathcal{B}^{p^{1-n}}_{\omega})$, Π_{n-1} ? par $\Pi_{K_{n-1}|k}$?, $k^{p^{-n}}$ par $K'_n = k(\mathcal{B}^{p^{1-n}}_{\omega'})$ (où ω' est donné par le lemme ci-dessus) et Π_n ? par $\Pi_{K'_n|k}$?.

9.2.4. Corollaire. — *Avec les notations de la proposition précédente, si* E *est annulé par* $\mathfrak{V}^n$, *alors* Ψ *se factorise à travers* $\mathcal{J}^{\omega'}_{n,k}$.

9.2.5. Corollaire. — *Soient* $0 \to G \xrightarrow{i} G' \xrightarrow{u} \mathrm{Ga}_k$ *une suite exacte de k-groupes, et* $f : G \to \mathcal{J}^{\omega}_{n,k}$ *un morphisme; il existe* $\mathcal{B}_{\omega'} \in \Omega$ *tel que* $\mathcal{B}_{\omega'} \supset \mathcal{B}_{\omega}$ *est un morphisme* $g : G' \to \mathcal{J}^{\omega'}_{n+1,k}$ *tels que* $\tau_{\omega',\omega} f = g\, i$.

Soit H l'image de u; d'après la proposition 10.3, il existe ω' avec $\mathcal{B}_{\omega'} \supset \mathcal{B}_{\omega}$ tel que $(\tau^0_{\omega',\omega})_* : \mathrm{Ext}^1_k(H, \mathcal{J}^{\omega}_{n,k}) \to \mathrm{Ext}^1_k(H, \mathcal{J}^{\omega'}_{n,k})$ soit nul. Le corollaire résulte alors de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Gr}_k(G', \mathcal{J}^{\omega'}_{n+1,k}) & \xrightarrow{?\,i} & \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}^{\omega'}_{n+1,k}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(H, \mathcal{J}^{\omega'}_{n+1,k}) \\
 & & \Big\uparrow{\scriptstyle \tau^0_{\omega',\omega}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle (\tau^0_{\omega',\omega})_*} \\
 & & \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}^{\omega}_{n,k}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(H, \mathcal{J}^{\omega}_{n,k})
\end{array}$$

et de l'exactitude de sa première ligne.

9.2.6. Proposition. — *Pour tout k-groupe algébrique unipotent G, il existe* $\omega, \omega' \in \Omega$ *(tels que* $\mathcal{B}_{\omega'} \supset \mathcal{B}_{\omega}$*), des entiers n, r, s, et une suite exacte*

$$0 \to G \to (\mathcal{J}^{\omega}_{n,k})^r \to (\mathcal{J}^{\omega'}_{n,k})^s.$$

La démonstration se fait comme en 4.7; on remplace la référence à 4.6 (resp. 4.1) par la référence à 9.2.5 (resp. 9.2.1).

9.3. *Compléments à l'étude de l'anneau de Cohen d'un corps k de p-base* $\mathcal{B}$.

9.3.1. — Remarquons que les résultats du chapitre 8 s'étendent au cas où card $\mathcal{B}$ n'est pas fini. En effet les morphismes

$$P^{\omega}_n : \quad \mathcal{J}^{\omega}_n \to \Pi_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}_{\omega}]|\mathbf{Z}[\mathcal{B}_{\omega}]} \mathrm{Ga}_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}_{\omega}]}$$

déterminent après extension des scalaires un morphisme de foncteurs en anneaux

$$P^{\mathcal{B}}_n : \quad \mathcal{J}^{\mathcal{B}}_n = \varinjlim_{\Omega} \mathcal{J}^{\omega}_{n,\mathbf{Z}[\mathcal{B}]} \to \Pi_n \mathrm{Ga}_{\mathbf{Z}[\mathcal{B}^{p^{-n}}]};$$

on remplace P_n par $P^{\mathcal{B}}_n$ dans 8.3, et l'on retrouve le théorème 8.4.

En vue de l'utilisation de l'anneau de Cohen dans la démonstration du théorème de structure (chap. 10), nous donnons ici quelques compléments aux chapitres 3 et 5.

9.3.2. — Par analogie avec 3.6, *on définit, pour tout* $m \in \mathbf{N}$, *un projecteur* $S^{(m)}$ *de* $\mathcal{C}(k)$ d'image $\mathcal{C}(k^{p^m})$: $\mathcal{C}^m(k)$ est un $\mathcal{C}(k^{p^m})$-module libre de base $\{B^\alpha;\ \alpha \in I^m\}$; la projection p_0 de $\mathcal{C}^m(k)$ sur le premier facteur (correspondant à $\alpha = 0$) se prolonge en un homomorphisme $\hat{p}_0$: $\hat{\mathcal{C}}^m(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(k) \to \mathcal{C}(k^{p^m})$ de $\mathcal{C}(k^{p^m})$ modules [puisque $\mathcal{C}(k^{p^m})$ est complet]. On a $\hat{p}_0 \circ J_m = \mathrm{Id}\,(\mathcal{C}(k^{p^m}))$ où $J^m : \mathcal{C}(k^{p^m}) \to \mathcal{C}(k)$ est l'injection canonique; et l'on appelle $S^{(m)}$ le projecteur $J_m \circ \hat{p}_0$ de $\mathcal{C}(k)$.

9.3.3. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'anneau $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ est la limite inductive de ses sous-anneaux $\mathcal{C}^\omega_{n+1}(k) = \mathcal{J}^\omega_{n+1}(k^{p^n})$, $\omega \in \Omega$. Si $\omega \in \Omega$, le projecteur de $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ déterminé par $S^{(m)}$ (nous le notons encore $S^{(m)}$) induit le projecteur $S^{(m)}_\omega$ de $\mathcal{C}^\omega_{n+1}(k)$ sur $\mathcal{C}^\omega_{n+1}(k^{p^m})$ associé à la décomposition

$$\mathcal{C}^\omega_{n+1}(k) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\alpha \in I^m_\omega} \mathcal{C}^\omega_{n+1}(k^{p^m}).[B^\alpha].$$

On définit l'endomorphisme $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}_\omega$) de $\mathcal{C}(k)$ [resp. $\mathcal{C}^\omega_{n+1}(k)$] comme en 3.7; $\mathcal{F}_\omega$ est induit par $\mathcal{F}$. On démontre alors, comme en 3.9, que les endomorphismes $\mathcal{F}_\omega$, $\mathcal{V}_\omega$ et les homothéties de $\mathcal{C}^\omega_{n+1}(k)$ sont liés par les cinq relations obtenues en remplaçant dans 3.9.1 à 3.9.5, $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$, I^r, $\mathcal{C}(k)$ respectivement par $\mathcal{F}_\omega$, $\mathcal{V}_\omega$, I^r_ω et $\mathcal{C}^\omega_{n+1}(k)$, avec $r = 0, 1, \ldots, n$; naturellement $\mathcal{V}^{n+1}_\omega = 0$!.

9.3.4. — De façon générale, on définit comme en 5.4 l'endomorphisme $\mathcal{F}$ du foncteur en anneaux $\mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1,k}$; il induit l'endomorphisme $\mathcal{F}_\omega$ de $\mathcal{J}^\omega_{n+1,k}$ pour tout $\omega \in \Omega$. De même, $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ opère sur $\mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1,k}$: si $X \in \mathcal{C}_{n+1}(k)$, l'endomorphisme $\mathcal{R}^\omega_n(X)$ défini par X est l'homothétie de rapport $X^{(p^{-n})}$, image de X par l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{C}_{n+1}(k) = \mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1}(k^{p^n}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}^{\mathcal{B}}_{n+1}(k);$$

on en déduit une opération de $\mathcal{C}^\omega_{n+1}(k)$ sur $\mathcal{J}^\omega_{n+1,k}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Il en résulte, comme en 5.5, un homomorphisme $\mathcal{R}^\omega_n$ de l'anneau $\mathcal{A}^\omega_{n+1}$ engendré par $\mathcal{C}^\omega_{n+1}(k)$ et les deux variables $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$ liés par les relations (i) à (iv) de 5.1, dans l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{J}^\omega_{n+1,k}$.

Pour tout $U \in \mathcal{A}^\omega_{n+1}$ d'image canonique $\overline{U}$ dans $\mathcal{A}^\omega_n$, on a

$$\mathcal{R}_{n+1}(U) \circ \tau_\omega = \tau_\omega \circ \mathcal{R}^\omega_n(\overline{U}) \quad (cf.\ 5.6).$$

Pour $\mathcal{B}_\omega \subset \mathcal{B}_{\omega'}$, $\mathcal{A}^\omega_{n+1}$ est un sous-anneau de $\mathcal{A}^{\omega'}_{n+1}$, et $\mathcal{J}^\omega_{n+1,k}$ est naturellement plongé dans $\mathcal{J}^{\omega'}_{n+1,k}$; alors, pour tout $U \in \mathcal{A}^\omega_{n+1}$, $\mathcal{R}^{\omega'}_{n+1}(U)$ induit l'endomorphisme $\mathcal{R}^\omega_{n+1}(U)$ de $\mathcal{J}^\omega_{n+1,k}$.

Remarquons enfin que, dans l'anneau $\mathbf{Gr}_k\,(\mathcal{J}^{\omega}_{n+1,k}, \mathcal{J}^{\omega}_{n+1,k})$, la relation

$$\mathcal{R}^{\omega}_{n+1}\,(\textstyle\sum_{\alpha\in I^r_\omega})\,[B^\alpha]\,\mathcal{F}^r\,\mathcal{V}^r\,[B^{-\alpha}]) = \mathcal{R}^{\omega}_{n+1}\,(p^r)$$

est vraie pour tout $r = 1, 2, \ldots, n$ (utiliser 9.3.3 et 5.5).

10. Le théorème de structure : cas où card $\mathcal{B}$ n'est pas fini

Les notations sont celles des deux chapitres précédents. Nous nous proposons d'énoncer un théorème de structure analogue à celui du chapitre 6. Pour cela nous introduisons un anneau $D^{\mathcal{B}}$ formé encore à partir de $\mathcal{C}\,(k)$ et de deux variables $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$; les relations (i) à (iv) conservent un sens dans le cas où card $\mathcal{B}$ n'est pas fini, il faut donner un sens à (v). La construction est, en gros, la suivante : au moyen d'idéaux convenablement choisis, on met sur l'anneau $\mathcal{C}\,(k)\,[\mathcal{F}, \mathcal{V}]$, muni des relations (i) à (iv), une topologie telle que, en passant au complété la somme infinie $\mathfrak{S}_n = \sum_{\alpha\in I^n}[B^\alpha].\mathcal{F}^n\mathcal{V}^n\,[B^{-\alpha}]$ ait un sens pour tout n; et l'on pose $p^n = \mathfrak{S}^n$.

10.1. *Définition de l'anneau* $D^{\mathcal{B}}$. — Soit D^{ω}_n l'anneau engendré par $\mathcal{C}_n\,(k)$ et les deux variables $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$ liées par les relations

(i) $\quad \mathcal{F}X = {}^F X\mathcal{F}$,
(ii) $\quad X\mathcal{V} = \mathcal{V}\,{}^F X$,
(iii) $\quad \mathcal{V}\mathcal{F} = P$,
(iv) $\quad \mathcal{V}^r.X.\mathcal{F}^r = \mathcal{V}^r.S^{(r)}\,(X).\mathcal{F}^r$,
(v)$_\omega$ $\quad p^r = \sum_{\alpha\in I^r_\omega}[B^\alpha]\,\mathcal{F}^r\,\mathcal{V}^r\,[B^{-\alpha}]$,
(vi)$_{\omega',\omega}$ $\quad \mathfrak{S}^r_{\omega',\omega} = \sum_{\alpha\in I^r_{\omega',\omega}}[B^\alpha]\,\mathcal{F}^r\,\mathcal{V}^r\,[B^{-\alpha}] = 0$,
(vii) $\quad \mathcal{V}^n = 0$,

pour tous $X\in\mathcal{C}^n\,(k)$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$ et $\mathcal{B}_{\omega'}\supset\mathcal{B}_\omega$. [Comme en 5.1, on a posé ${}^F X = \mathcal{F}\,(X)$, où $\mathcal{F}$ est l'endomorphisme de $\mathcal{C}_n\,(k)$ défini en 9.3.3; $S^{(r)}$ a été défini en 9.3.2; rappelons que $I^r_{\omega',\omega}$ désigne le complémentaire de I^r_ω dans $I^r_{\omega'}$.]

Si $\mathcal{B}_{\omega'}\supset\mathcal{B}_\omega$, l'anneau D^{ω}_n est le quotient de $D^{\omega'}_n$ par l'idéal bilatère engendré par les $\mathfrak{S}^r_{\omega'',\omega}$ pour tout ω'' tel que $\mathcal{B}_\omega\subset\mathcal{B}_{\omega''}\subset\mathcal{B}_{\omega'}$ et tout $r = 1, 2, \ldots, n-1$. Les D^{ω}_n forment un système projectif filtrant d'anneaux, et l'on pose

$$D^{\mathcal{B}}_n = \varprojlim_{\Omega} D^{\omega}_n.$$

On identifie $D^{\mathcal{B}}_1$ à l'anneau $k\,[F]$ déjà utilisé en envoyant $\mathcal{F}$ sur F; pour tout n, $k\,[F]$ est isomorphe au quotient de $D^{\mathcal{B}}_n$ par l'idéal bilatère engendré par $\mathcal{V}$.

On définit un homomorphisme surjectif $P_\omega : D_{n+1}^\omega \to D_n^\omega$ en envoyant $\mathcal{C}_{n+1}(k)$ sur $\mathcal{C}_n(k)$ par la projection canonique, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$ respectivement sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$. Les P_ω déterminent un homomorphisme surjectif

$$P : \quad D_{n+1}^{\mathcal{B}} \to D_n^{\mathcal{B}}.$$

On pose

$$D^{\mathcal{B}} = \varprojlim_n D_n^{\mathcal{B}}.$$

10.2. Pour tout k-groupe unipotent G, on pose

$$M(G) = \varinjlim_{\Omega, n} \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}_{n,k}^\omega).$$

On se propose de *définir sur $M(G)$ une structure de $D^{\mathcal{B}}$-module à gauche.*

Soient $U \in D^{\mathcal{B}}$, $f : G \to \mathcal{J}_{n,k}^\omega$ un élément de $M(G)$, et U_n^ω la projection canonique de U sur D_n^ω ;

si $U_n^\omega = \mathcal{F}$, on pose

$$U.f = \mathcal{F}_\omega \circ f \in \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}_{n,k}^\omega);$$

si $U_n^\omega = \mathcal{V}$, on pose

$$U.f = \mathcal{V}_\omega \circ f \in \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}_{n,k}^\omega);$$

si $U_n^\omega \in \mathcal{C}_n(k)$, alors il existe un élément $\mathcal{B}_{\omega'}$ de Ω tel que $\mathcal{B}_{\omega'} \supset \mathcal{B}_\omega$ et $U_n^\omega \in \mathcal{C}_n^{\omega'}(k)$, et l'on pose

$$U.f = (U_n^\omega)^{(p-n)} \circ \tau_{\omega',\omega}^0 \circ f \in \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}_{n,k}^{\omega'})$$

[où $(U_n^\omega)^{p-n}$ est l'homothétie définie en 9.3.4].

On vérifie que, pour tous $\mathcal{B}_{\omega'} \supset \mathcal{B}_{\omega''} \supseteq \mathcal{B}_\omega$, $m \geqq n$, $U \in D^{\mathcal{B}}$ et $f \in \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}_{n,k}^\omega)$, le diagramme ci-dessous est commutatif chaque fois que la projection $U_m^{\omega''}$ de U sur $D_m^{\omega''}$ est égale à $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{V}$, ou bien est un élément de $\mathcal{C}_m^{\omega'}(k)$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{J}_{n,k}^\omega \arrow[r, "\tau_{\omega'',\omega}^{m-n}"] & \mathcal{J}_{m,k}^{\omega''} \arrow[r, "\tau_{\omega',\omega''}^0"] & \mathcal{J}_{m,k}^{\omega'} \arrow[d, "(U_m^{\omega''})^{(p-n)}"] \\
\mathcal{J}_{n,k}^\omega \arrow[r, "\tau_{\omega',\omega}^0"] & \mathcal{J}_{n,k}^{\omega'} \arrow[r, "(U_n^\omega)^{(p-n)}"] & \mathcal{J}_{n,k}^{\omega'} \arrow[r, "\tau_{\omega'}^{m-n}"] & \mathcal{J}_{m,k}^{\omega'}
\end{tikzcd}$$

Cela résulte de 9.3.4.

Si U_n^ω s'exprime comme un polynôme en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$, on définit $U.f$ par composition. Il reste à montrer que, lorsque U_n^ω parcourt D_n^ω, les relations définissant D_n^ω sont vérifiées par les $U_n^\omega.f\,(f \in \mathbf{Gr}_k(G, \mathcal{J}_{n,k}^\omega))$. La relation (vii) est évidente; si l'on prend X dans $\mathcal{C}_n^{\omega'}(k)$ avec $\mathcal{B}_{\omega'} \supset \mathcal{B}_\omega$, les relations (i) à (iv) sont vérifiées car elles sont vraies dans l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{J}^{\omega'}_{n,k}$ (*cf.* 9.3); les relations $(\mathrm{v})_\omega$ sont vraies dans l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{J}^{\omega}_{n,k}$, donc

$$(\Sigma_{\alpha\in I^r_\omega}[B^\alpha]\,\mathcal{F}^r\,\mathcal{V}^r\,[B^{-\alpha}]).f = p^r.f.$$

Enfin, pour montrer que $\mathfrak{S}^r_{\omega',\omega}.f = 0$ pour tous $\mathcal{B}_{\omega'}\supset\mathcal{B}_\omega$ et $r = 1$, $2, \ldots, n-1$, on écrit

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}^r_{\omega',\omega}.f = {} & \Sigma_{\alpha\in I^r_{\omega'}}[B^\alpha]\circ\mathcal{F}^r_{\omega'}\circ\mathcal{V}^r_{\omega'}\circ[B^{-\alpha}]\circ\tau^0_{\omega',\omega}\circ f\\ & -\Sigma_{\alpha\in I^r_\omega}[B^\alpha]\circ\mathcal{F}^r_{\omega'}\circ\mathcal{V}^r_{\omega'}\circ[B^{-\alpha}]\circ\tau^0_{\omega',\omega}\circ f.\end{aligned}$$

Le premier terme s'écrit $p^r\circ\tau^0_{\omega',\omega}\circ f$ puisque

$$\Sigma_{\alpha\in I^r_{\omega'}}[B^\alpha]\,\mathcal{F}^r_{\omega'}\,\mathcal{V}^r_{\omega'}\,[B^{-\alpha}] = p^r$$

dans l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{J}^{\omega}_{n,k}$; le deuxième s'écrit $\tau^0_{\omega',\omega}\circ\Sigma_{\alpha\in I^r_\omega}[B^\alpha]\circ\mathcal{F}^r_\omega\circ\mathcal{V}^r_\omega\circ[B^{-\alpha}]\circ f$, puisque les $[B^\alpha]$ sont dans $\mathcal{C}^\omega_n(k)$, il vaut donc $\tau^0_{\omega',\omega}\circ p^r\circ f$; d'où $\mathfrak{S}^r_{\omega',\omega}.f = 0$.

On a ainsi défini une structure de $D^{\mathcal{B}}$-module à gauche sur $M(G)$; elle dépend fonctoriellement de G.

Soit L^ω_n l'idéal à gauche de $D^{\mathcal{B}}$ engendré par les éléments $\mathcal{V}^r[B^{-\alpha}]$, $(n-r, \alpha)$ parcourant le sous-ensemble $J_\omega(n) = I^n \dot{\cup} I^*_\omega(n-1)$ de $I(n)$ [où $I^*_\omega(n-1)$ est le complémentaire de $I_\omega(n-1)$ dans $I(n-1)$]; alors, d'après 9.1.3, pour tout k-groupe G, le $D^{\mathcal{B}}$-module à gauche $M(G)$ possède la propriété suivante : pour tout $m\in M(G)$, il existe un couple (n, ω) tel que $L^\omega_n.m = 0$. Nous dirons encore que $M(G)$ *est un module effaçable.*

10.3. *Étude du module* $M(\mathcal{J}^\omega_{n,k})$. — Remarquons d'abord que, compte tenu de 9.2.1,

$$M(\mathcal{J}^\omega_{n,k}) = \varinjlim_{\omega'}\mathbf{Gr}_k(\mathcal{J}^\omega_{n,k}, \mathcal{J}^{\omega'}_{n,k}),$$

et que, d'après 9.1.3, $M(\mathcal{J}^\omega_{n,k})$ est annulé par L^ω_n.

Soit M^ω_n le quotient de $D^{\mathcal{B}}_n$ par l'idéal à gauche L^ω_n; on appelle l_n l'image de 1 par la projection canonique, et N^ω_n le noyau de la projection canonique $M^\omega_{n+1}\to M^\omega_n$. On définit un homomorphisme

$$\varphi_n : \quad M^\omega_n \to M(\mathcal{J}^\omega_{n,k})$$

en posant $\varphi_n(l_n) = \mathrm{Id}(\mathcal{J}^\omega_{n,k})$.

Proposition. — *Soit* $(\mathcal{V}^m)$, $m\in\mathbf{N}$, *l'idéal bilatère de* D^ω_n *engendré par* $\mathcal{V}^m$; *pour tout* $n\in\mathbf{N}$,

(*a*) $N^\omega_n = (\mathcal{V}^n)\,M^\omega_{n+1}$;

(*b*) N^ω_n *est engendré par la famille* $\{\mathcal{V}^n[B^\alpha].l_{n+1};\ \alpha\in I^n_\omega\}$ *et l'on a* $(\mathcal{V}).N^\omega_n = 0$;

(*c*) *pour la structure naturelle de* $k[F]$*-module à gauche,* N_n^ω *est libre et a pour base* $\{\mathcal{V}^n[B^\alpha].l_{n+1}\,;\ \alpha \in I_\omega^n\}$;

(*d*) $\varphi_{n+1} : M_n^\omega \to M(\mathcal{J}_{n,k}^\omega)$ *est un isomorphisme.*

La proposition est triviale pour $n = 0$ [pour (*a*) poser $M_0^\omega = 0$)]; supposons-la vraie pour tout $m < n$, et montrons-la pour n.

On utilise la suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}_{n,k}^\omega \to \mathcal{J}_{n+1,k}^\omega \to \mathrm{Ga}_k^{I_\omega^n} \to 0,$$

et l'on obtient un diagramme commutatif et exact

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim_{\omega'} \mathbf{Gr}_k\left(\mathrm{Ga}_k^{I_\omega^n}, \mathcal{J}_{n+1,k}^{\omega'}\right) \arrow[r] & \varinjlim_{\omega'} \mathbf{Gr}_k(\mathcal{J}_{n+1,k}^\omega, \mathcal{J}_{n+1,k}^{\omega'}) \arrow[r] & \varinjlim_{\omega'} \mathbf{Gr}_k(\mathcal{J}_{n,k}^\omega, \mathcal{J}_{n+1,k}^{\omega'}) & \\
 & & & \varinjlim_{\omega'} \mathbf{Gr}_k(\mathcal{J}_{n,k}^\omega, \mathcal{J}_{n+1,k}^{\omega'}) \arrow[u, "\tilde{\tau}", "\wr"'] & \\
0 \arrow[r] & N_n^\omega \arrow[r] \arrow[uu, dotted, "i"'] & M_{n+1}^\omega \arrow[r] \arrow[uu, "\varphi_{n+1}"] & M_n^\omega \arrow[r] \arrow[u, "\varphi_n", "\wr"'] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel $\tilde{\tau} = \varinjlim \tau_{\omega'}$? est une bijection d'après 9.1.3. Alors φ_{n+1} est un isomorphisme si et seulement si i est une bijection.

Comme en 5.6, on voit que $\varinjlim_{\omega'} \mathbf{Gr}_k\left(\mathrm{Ga}_k^{I_\omega^n}, \mathcal{J}_{n+1,k}^{\omega'}\right)$ est isomorphe à $\mathbf{Gr}_k\left(\mathrm{Ga}_k^{I_\omega^n}, \mathrm{Ga}_k\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{I_\omega^n} k[F]\, p_\alpha$, où p_α est la projection canonique sur le facteur de rang α; de plus, $i(\mathcal{V}^n[B^\alpha].l_{n+1}) = p_\alpha$. Il s'ensuit que i est une bijection si et seulement si la famille $\{\mathcal{V}^n[B^\alpha].l_{n+1}\,;\ \alpha \in \mathrm{I}_\omega^n\}$ engendre N_ω^n.

Par conséquent, avec l'hypothèse de récurrence, il suffit de démontrer les propriétés (*a*) et (*b*) pour n; (*c*) et (*d*) résultent alors de (*b*). La démonstration se fait comme en 5.3 (*a*); il suffit de remarquer que tout élément de M_n^ω admet une écriture analogue à celle de 5.2.

En effet, soit $\sigma : k \to \mathcal{C}(k)$ une section de la projection canonique; on pose $\sigma_n = \pi_n \circ \sigma : k \to \mathcal{C}_n(k)$; on montre, comme en 5.2, que tout élément de D_n a une écriture (non nécessairement unique !) de la forme

$$\textstyle\sum_{r \in \mathbf{N},\, s<n,\, \alpha \in I^s} \sigma_n(x_{r,s,\alpha})\, \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s [B^\alpha],$$

où les $x_{r,s,\alpha}$ sont des éléments de k tous nuls pour r assez grand [il suffit d'utiliser l'isomorphisme $\mathcal{C}_n(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_n(k^{p^m})[B]$, qui découle de 3.4, et les relations $\sum_{\alpha \in I^n} [B^\alpha]\, \mathcal{F}^m \mathcal{V}^m [B^{-\alpha}] = p^m$, qui sont vraies dans D_n]. En passant au quotient par L_n^ω, on voit que tout élément U de M_n^ω a une écriture de la forme

$$\mathrm{U} = \textstyle\sum_{r \in \mathbf{N},\, s<n,\, \alpha \in I_\omega^s} \sigma_n(x_{r,s,\alpha})\, \mathcal{F}^r \mathcal{V}^s [\mathrm{B}^\alpha].l_n,$$

où les $x_{r,s,\alpha}$ sont presque tous nuls; on démontre alors (*a*) et (*b*) en utilisant les méthodes de 5.3 (*a*).

COROLLAIRE. — *Le $D^{\mathcal{B}}$-module M_n^{ω} est noethérien.*

10.4. THÉORÈME. — *Le foncteur M est une antiéquivalence de la catégorie* $\mathbf{Gr}_k$ *sur la catégorie des $D^{\mathcal{B}}$-modules effaçables.*

La démonstration est la même qu'en 6.3, *mutatis mutandis.*

10.5. COROLLAIRE. — *Si $G \in \mathbf{Gr}_k$, G est algébrique* (resp. *fini*) *si et seulement si $M(G)$ est de type fini* (resp. *de longueur finie*).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DEMAZURE (M.) et GABRIEL (P.). — *Groupes algébriques.* Tome 1. — Paris, Masson; Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1970.

[2] GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de géométrie algébrique.* Chap. 4. — Paris, Presses Universitaires de France, 1964 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques,* 20).

[3] KAPLANSKY (I.). — *Infinite abelian groups.* Revised edition. — Ann Arbor, University of Michigan Press, 1959.

[4] KAPLANSKY (I.). — *Multiplicative representatives in discrete valuation rings* (à paraître).

[5] NAGATA (M.). — *Local rings.* — New York, Interscience Publishers, 1962 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics,* 13).

[6] TEICHMÜLLER (O.). — Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper, *J. für reine und angew. Math.,* t. 176, 1937, p. 141-152.

[7] WITT (E.). — Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n, Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Characteristik p, *J. für reine und angew. Math.,* t. 176, 1937, p. 126-140.

(Texte reçu le 8 décembre 1971.)

Colette SCHOELLER,
Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur,
7, rue René-Descartes,
67-Strasbourg.