BULLETIN DE LA S. M. F.

MARGUERITE FLEXOR

Étude de certains éclatements

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 229-239
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__229_0>

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 229-239.

ÉTUDE DE CERTAINS ÉCLATEMENTS

PAR

MARGUERITE FLEXOR

RÉSUMÉ. — Soient A un anneau local noethérien intègre, $\mathfrak{q}$ un idéal de définition de A, engendré par un système de paramètres, $Z = \text{Proj}\ (\oplus\ \mathfrak{q}^n)$.

Dans la première partie, on montre que $\hat{A}$ est équidimensionnel (resp. strictement équidimensionnel) si toute composante irréductible de $Z \times_{\text{Spec}\, A} \text{Spec}\ \hat{A}$ (resp. tout cycle associé), contient le sous-schéma fermé intègre ayant le diviseur exceptionnel comme espace sous-jacent.

Dans la seconde partie, on montre que, si A est hensélien, normal, $\dim A = 2$, alors Pic Z s'identifie à $\mathbf{Z}$, le faisceau $\mathcal{O}_Z(1)$ engendrant Pic Z.

Introduction. — Dans tout ce qui suit, A est un anneau local noethérien intègre, $\mathfrak{m} = \text{rad}\, A$, $k = A/\mathfrak{m}$, $Y = \text{Spec}\, A$, y est le point fermé de Y, $U = Y - \{ y \}$, $\hat{A}$ est le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, $\hat{Y} = \text{Spec}\, \hat{A}$, $g : \hat{Y} \to Y$.

Soient Z le schéma éclaté de Y le long de $V(\mathfrak{q})$, où $\mathfrak{q}$ est un idéal de définition de A, $f : Z \to Y$ le morphisme projectif birationnel canonique, $\hat{f} : \hat{Z} \to \hat{Y}$, déduit de f par le changement de base $\hat{Y} \to Y$.

On a $\hat{Z} = \text{Proj}\ (\bigoplus \mathfrak{q}^n \hat{A})$, et l'isomorphisme canonique $\text{gr}_{\mathfrak{q}}(A) \simeq \text{gr}_{\mathfrak{q}\hat{A}}(\hat{A})$ montre que, si $D = \text{Proj}\ (\text{gr}_{\mathfrak{q}} A)$, alors :

$$g_D : \hat{Y} \times_Y D \to D$$

est un isomorphisme, ce qui permet d'identifier D à un sous-schéma fermé de $\hat{Z}$. Autrement dit, on a un isomorphisme entre les diviseurs exceptionnels de Z et $\hat{Z}$.

Dans la première partie, nous donnerons quelques propriétés de ces éclatements, puis nous verrons que, dans le cas où $\mathfrak{q}$ est engendré par un système de paramètres, certaines propriétés de X se caractérisent par des conditions de « finitude » sur Z.

Enfin, dans la dernière partie, nous préciserons la structure des Z-schémas finis intègres et birationnels lorsque A est normal, et nous regarderons le cas $\dim A = 2$, A hensélien.

1. Cas général.

Explicitons la situation. Soit $x_1, \ldots, x_n$, un système de générateurs de $\mathfrak{q}$. Le Y-schéma Z est recouvert par les ouverts affines

$$D_+(x_i) = \operatorname{Spec}(A[x_1/x_i, \ldots, x_n/x_i]).$$

Comme f est propre, et est un isomorphisme sur U, pour tout point fermé y' de U, si Z' est l'adhérence schématique de y' dans Z, $Z' \cap D \neq \emptyset$.

De même, pour tout point $x' \in g^{-1}(U)$, si Z'' est l'adhérence schématique de x' dans $\hat{Z}$, on a $Z'' \cap D \neq \emptyset$.

Proposition 1.1. — *Si l'ensemble des points, où Y est de Cohen-Macaulay (resp. où Y vérifie S_k) est ouvert, il en est de même pour Z.*

En effet, notons U_Y (resp. U_Z, U_D) l'ensemble des points de Y (resp. Z, D), où Y est de Cohen-Macaulay. Comme $Z - f^{-1}(y) \to U$ est un isomorphisme, $V_Y = U_Y \cap U$ est isomorphe à un ouvert de Z, et on a $U_Z = V_Y \cup U_D$ puisque D est un diviseur. Comme D est localement immergeable dans un schéma régulier, U_D est ouvert dans D. Donc U_Z est constructible. Comme il est stable par générisation, U_Z est ouvert.

Il en est de même, pour la propriété S_k, $k \geq 0$.

Proposition 1.2. — *Si D vérifie S_k, pour $k \geq 1$ (resp. est de Cohen-Macaulay), alors il en est de même pour U et $g^{-1}(U)$.*

Soit r un point de D, il existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$\mathcal{O}_{D,r} \simeq \mathcal{O}_{\hat{Z},r}/x_i\,\mathcal{O}_{\hat{Z},r}.$$

Donc, comme $\mathcal{O}_{\hat{Z},r}$ est caténaire, si $\mathcal{O}_{D,r}$ vérifie S_k, $\mathcal{O}_{\hat{Z},r}$ le vérifie aussi (resp. si $\mathcal{O}_{D,r}$ est de Cohen-Macaulay). D'où la proposition, compte tenu des remarques faites au début de ce paragraphe.

Corollaire. — *Supposons* $\dim A = 3$, *et A normal, alors l'ensemble des points, où Z est de Cohen-Macaulay, est ouvert.*

2. Cas où $\mathfrak{q}$ est engendré par un système de paramètres.

Dans ce cas, D est irréductible, $Z_0 = f^{-1}(y) = D_{\text{réd}}$ est isomorphe à $\mathbf{P}_k^{n-1}$, où $n = \dim A$, c'est-à-dire si $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ est le système de paramètres engendrant $\mathfrak{q}$, et si on pose $B_i = A[x_1/x_i, \dots, x_n/x_i]$, les images des éléments x_j/x_i dans $B_i/\mathfrak{m}B_i$ sont algébriquement indépendants sur k.

Notons W le normalisé de Z, $h : W \to Z$ le morphisme canonique associé,

$$D' = h^{-1}(D), \qquad T = \{ z \in D, \dim \mathcal{O}_{Z,z} \geqq 2 \},$$
$$T' = \{ z' \in D', \dim \mathcal{O}_{W,z'} \geqq 2 \}.$$

On a le résultat suivant :

Proposition 2.1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est universellement caténaire;*

(ii) *Soit Z_j une composante irréductible de $\hat{Z}$, alors* codim $(D \cap Z_j, \hat{Z}) = 1$, *ou encore $Z \subset Z_j$;*

(iii) $g^{-1}(T) = T'$;

(iv) *pour toute composante irréductible Z_i de $\hat{Z}$, on a*

$$\operatorname{codim}(Z_i \cap T, \hat{Z}) \geqq 2.$$

Nous ferons précéder la démonstration de cette proposition de quelques préliminaires :

(a) T est une partie stable par spécialisation, et on peut définir la $\mathcal{O}_Z$-algèbre $\mathcal{H}^0_{Z/T}(\mathcal{O}_Z)$ (*cf.* [4], IV, 5.9). Alors (iv) est équivalente à :

(iv *bis*) *$\mathcal{H}^0_{Z/T}(\mathcal{O}_Z)$ est une $\mathcal{O}_Z$-algèbre entière* (*cf.* [2], prop 1.1, et dans la démonstration de la proposition 2, qui suit, cette équivalence se voit aisément).

(b) Soit $K = \operatorname{Frac}(A)$, et posons

$$\hat{Z}_K = \hat{Z} \times_Y \operatorname{Spec}(K), \qquad \hat{Y}_K = \hat{Y} \times_Y K,$$

de sorte que $\hat{Z}_K \simeq \hat{Y}_K$.

Soit z un point de $\hat{Y}_K$, et soit $S = \hat{A}/\mathfrak{m}_z$, où $\mathfrak{m}_z$ est l'idéal premier associé à z. Notons Z' l'adhérence schématique de z dans $\hat{Z}$, d'où $Z' = \operatorname{Proj}$ $(\bigoplus \mathfrak{q}^n \hat{A}/\mathfrak{m}_z \mathfrak{q}^n \hat{A})$. Le schéma Z' est recouvert par les ouverts affines $V_i = \operatorname{Spec} S_i$, où $S_i = S[x_1/x_i, \dots, x_n/x_i]$ [ici $A \subset S$ et, par suite, $K \subset \operatorname{Frac}(S)$]. Soient $D^+_{\hat{Z}}(x_i) = D^+_Z(x_i) \times_Y \hat{Y}$ les ouverts affines recouvrant $\hat{Z}$, et soient B'_i les anneaux qui leur correspondent. D'où un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & \hat{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ B_i \arrow[r] & B'_i \arrow[r, "\varphi_i"] & S_i \end{tikzcd}$$

Donc $S_i = B'_i \otimes_{\hat{A}} S = B_i \otimes_A S$, φ et φ_i sont surjectifs. Soit $\mathfrak{p}_i$ le noyau de φ_i, il correspond au point z dans $D^+_{\hat{Z}}(x_i) \cap \hat{Z}_K$.

Rappelons que $Z' \cap D \neq \emptyset$.

LEMME 2.2. — *Pour tout point fermé* ξ de $Z' \cap D$, *on a* $\dim \mathcal{O}_{Z',\xi}$, $= \dim S$.

Soit i un indice tel que $\xi \in \operatorname{Spec} S_i$. Le morphisme $S \to S_i$ est birationnel, et S est universellement caténaire. La formule des dimensions donne :

$$\dim \mathcal{O}_{Z',\xi} + \deg \operatorname{tr}_k k(\xi) = \dim S.$$

Comme $Z' \cap D$ est un sous-schéma fermé de D, ξ est un point fermé de D, et comme $D_{\text{réd}}$ est isomorphe à $\mathbf{P}_k^{n-1}$, $k(\xi)$ est algébrique sur k, d'où le lemme.

Revenons à la *démonstration de la proposition.*

(i) $\Leftrightarrow$ (ii). — Soit Z_j une composante irréductible de $\hat{Z}$, et soit z son point générique, qui est aussi point générique d'une composante irréductible de $\hat{Y}$. Posons comme précédemment $S = \hat{A}/\mathfrak{m}_z$, où $\mathfrak{m}_z$ est l'idéal premier associé à z dans $\hat{Y}$. Si A est universellement caténaire, $\hat{A}$ est équidimensionnel (*cf.* [3]), et on a $\dim S = n$. D'après le lemme 2.2, pour tout point fermé ξ de $Z_j \cap D$, on a, en posant $R = \mathcal{O}_{Z_j,\xi}$, $\dim R = n$. Soit i un indice tel que $\mathfrak{q} R = x_i R$. Pour un certain entier $e > 0$, on a $\mathfrak{m}^e R \subset x_i R$, d'où $\dim R/\mathfrak{m} R = n - 1$. Comme la flèche $\mathcal{O}_{Z,\xi} \to R$ est surjective, $\mathcal{O}_{Z_0,\xi} \to R/\mathfrak{m} R$ l'est aussi. Or $\mathcal{O}_{Z_0,\xi}$ est intègre, de dimension $n - 1$, puisque ξ est un point fermé de Z_0, d'où $R/\mathfrak{m} R \simeq \mathcal{O}_{Z_0,\xi}$, d'où (ii). De plus, la réciproque se voit aisément à partir de la démonstration précédente et du fait que $\hat{Y}_K \simeq \hat{Z}_K$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). — Ceci se vérifie localement sur chacun des

$$D^+(x_i) = \operatorname{Spec}(B_i),$$

où ceci est bien connu, B_i étant universellement caténaire si A l'est.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). — Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existerait une composante irréductible Z_j de $\hat{Z}$ telle que codim $(D \cap Z_j, \hat{Z}) \geq 2$.

Soit ξ un point générique d'une composante irréductible de $D \cap Z_j$. Comme D est un diviseur, on a

$$\operatorname{codim}\left(\overline{\{\xi\}} \cap Z_j, Z_j\right) = 1.$$

Posons $R = \mathcal{O}_{Z,\xi}$, $R' = \mathcal{O}_{\hat{Z},\xi}$. On a $\dim R' = \dim R \geqq 2$ et le point générique z de Z_j est isolé dans Spec R'. En vertu du lemme cité ci-dessous, ceci est impossible dès que R est géométriquement unibranche. Nous allons voir que l'hypothèse (iii) nous permet de nous ramener à ce cas là.

En effet, soit R_1 une R-algèbre finie telle que si C est la clôture intégrale de R, le morphisme $\operatorname{Spec} C \to \operatorname{Spec} R_1$ soit radiciel (*cf.* [4], 23.2.5). Comme $\dim R \geqq 2$, l'hypothèse montre que tous les points fermés de $\operatorname{Spec} R_1$ sont de codimension $\geqq 2$. Soit η un tel point. Posons $R'_1 = R_1 \otimes_R R'$ on a

$$R'_1 \otimes_{R_1} K \simeq R' \otimes_R K \qquad \text{et} \qquad z \in \operatorname{Spec} R' \otimes_R K.$$

Soit z' l'unique point de Spec R'_1 au-dessus de z, on a $\dim \mathcal{O}_{z'} = 0$. Regardons la fibre $\psi^{-1}(\eta)$, où $\psi : \operatorname{Spec} R'_1 \to \operatorname{Spec} R_1$. Comme R'_1 est entier sur R', tout point de $\psi^{-1}(\eta)$ est au-dessus de ξ, donc fermé, et $\psi^{-1}(\eta)$ est fini. Soit η' un point de $\psi^{-1}(\eta) \cap \overline{\{z'\}}$. On a $\dim \mathcal{O}_{\eta'} = \dim \mathcal{O}_{\eta} \geqq 2$. De plus, on a encore

$$\operatorname{codim}\left(\overline{\{z'\}} \cap \overline{\{\eta'\}}, \overline{\{z'\}}\right) = 1,$$

c'est-à-dire z' est encore isolé dans $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\eta'} - \{\eta'\}$.

Lemme 2.3. (*cf.* [4], IV, 18.9.7.7). — *Soit R un anneau local géométriquement unibranche de dimension* $\geqq 2$. *Soit* $R' \to R$ *un morphisme fidèlement plat tel que* $\dim R' = \dim R$. *En posant* $U = \operatorname{Spec} R - \{\operatorname{rad} R\}$ *et* $f : \operatorname{Spec} R' \to \operatorname{Spec} R$, *alors* $U' = f^{-1}(U)$ *est connexe.*

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv *bis*). — Ceci est local, il suffit de le vérifier sur chacun des ouverts affines $D^+(x_i)$.

Notons T_i, T'_i, W_i, g_i, les restrictions de T, T', W, g à $D^+(x_i)$.

Comme T_i est une partie stable par spécialisation, on peut réaliser $D^+(x_i) - T_i$ comme intersection d'une famille filtrante décroissante d'ouverts $(V_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, et de plus, on a

$$\mathcal{H}_{D^+(x_i)/T_i}(\mathcal{O}_{D^+(x_i)}) = \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} (i_\alpha)_* (\mathcal{O}_{D^+(x_i)}|^{V_\alpha}),$$

où i_α est l'injection canonique $V_\alpha \subset D^+(x_i)$. D'autre part,

$$g^{-1}(D^+(x_i) - T_i) = W_i - g_i^{-1}(T_i) = \cap_\alpha g^{-1}(V_\alpha),$$

et l'assertion résulte de la proposition suivante :

Proposition 2.4. — *Soient A un anneau local noethérien intègre,* $Y = \operatorname{Spec} A$, $Y' = \operatorname{Spec} A'$ *le normalisé de* Y, $g : Y' \to Y$, *U un ouvert* *non vide de Y. Alors $A(U)$ est entier sur A si, et seulement si, $U' = g^{-1}(U)$ contient tous les points de codimension inférieure ou égale à 1 de Y'.*

La suffisance résulte du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A(U) \arrow[r] & A'(U') \\ A \arrow[u] \arrow[r] & A' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

et du fait que A' est un anneau de Krull. En effet, si U' contient tous les points de codimension 1, on a $A' = A'(U')$.

Inversement, nous allons le montrer en supposant seulement $Y - U$ stable par spécialisation. Supposons qu'il existe $y \in Y - U$, et $y' \in g^{-1}(y)$ tel que $\dim \mathcal{O}_{y'} = 1$. Faisons le changement de base $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_y \to Y$. Comme $i_*(\mathcal{O}_U)$ est une $\mathcal{O}_Y$-algèbre quasi cohérente et entière, il en est de même de

$$i_*(\mathcal{O}_U) \otimes \mathcal{O}_y = j_*(V), \qquad \text{où} \quad V = U \cap \operatorname{Spec} \mathcal{O}_y$$

et j l'injection canonique $V \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_y$.

On est donc ramené au cas où Y est local de point fermé y, et U un sous-ensemble de $Y - \{y\}$ tel que $Y - U$ soit stable par spécialisation. Soit $Y_0 = \operatorname{Spec} A_0$ un Y-schéma affine intègre fini birationnel tel que, si $g_0 : Y_0 \to Y$ est le morphisme canonique, il existe $y_0 \in g_0^{-1}(y)$ avec $\dim \mathcal{O}_{y_0} = 1$.

Posons

$$\hat{Y} = \operatorname{Spec} \hat{A}, \qquad \hat{Y}_0 = Y_0 \times_Y \hat{Y} = \operatorname{Spec} \hat{A}_0,$$
$$f_0 : \hat{Y}_0 \to Y_0, \qquad y'_0 = f_0^{-1}(y_0),$$

$\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\hat{Y}_0, y'_0}$ est donc une composante connexe de dimension 1 de $\hat{Y}_0$. Si z_0 est un point maximal de cette composante, nécessairement $\dim \overline{\{z_0\}} = 1$.

Soit z la trace de z_0 dans $\hat{Y}$. Comme $\hat{Y}_0$ est entier sur $\hat{Y}$, $\dim \overline{\{z\}} = 1$ et comme $Y_0 \to Y$ est birationnel, z est un point maximal de $\hat{Y}$, de dimension 1.

Soient $\mathfrak{p}$ l'idéal premier associé à z, et $B = \hat{A}_{\text{réd}}$. On a une suite exacte de B-modules :

$$0 \to \hat{A}/\mathfrak{p} \to B.$$

Soit V l'image réciproque de U par le morphisme $f : \hat{Y} \to Y$. Comme f est fidèlement plat, on a

$$\hat{A}(V) = A(U) \otimes_A \hat{A}$$

et la suite exacte :

$$0 \to \hat{A}/\mathfrak{p}\,(V) \to B\,(V) \simeq (\hat{A}\,(V))_{\text{réd}}.$$

Comme $\hat{A}$ (V) est entier sur $\hat{A}$, $B\,(V)$ l'est sur B, et par suite est fini sur B. Il en est de même du sous-B-module $(\hat{A}/\mathfrak{p})\,(V)$. D'où une contradiction; si dim $\hat{A}/\mathfrak{p} = 1$ et $V \neq \operatorname{Spec} \hat{A}/\mathfrak{p}$.

Proposition 2.1 *bis*. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\hat{A}$ *est strictement équidimensionnel;*

(ii) *Soit* Z_j *un cycle associé à* $\mathcal{O}_{\hat{Z}}$, *on a*

$$\operatorname{codim}(D \cap Z_j, \hat{Z}) = 1;$$

(iii) $\mathcal{H}_{Z/T}(\mathcal{O}_Z)$ *est une* $\mathcal{O}_Z$-*algèbre finie.*

L'équivalence de (ii) et (iii) résulte de ([4], 5.6.10). Dans les cas (i) ou (ii), $\hat{Z}$ est sans cycle associé immergé et (i) $\Leftrightarrow$ (ii) résulte du (i) $\Leftrightarrow$ (ii) dans la proposition 2.1.

Proposition 2.5. — *Soit* $A \to R$ *un homomorphisme plat d'anneaux locaux noethériens intègres tels que* $(\operatorname{rad} A)\,R = \operatorname{rad} R$ *et tels que* $k\,(A)$ *et* $k\,(R)$ *désignent les corps résiduels respectifs de* A *et* R, $k\,(R)$ *est une extension algébrique de* $k\,(A)$. *Alors* $\hat{A}$ *est équidimensionnel* (resp. *strictement*) *si, et seulement si,* $\hat{R}$ *l'est.*

En effet, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de paramètres de A, $(x_1, \ldots, x_n)$ reste un système de paramètres dans R. Si on désigne par Z_A, Z_R des éclatés respectifs de A et R le long de ce système de paramètres, on a

$$Z_R = Z_A \otimes_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} R,$$

le morphisme $A \to R$ étant fidèlement plat. Notons D_A, T_A (resp. D_R, T_R) le diviseur exceptionnel et la partie stable par spécialisation de Z_A (resp. Z_R) qui lui sont attachées. Il est clair que D_R est l'image réciproque de D_A. Comme $(D_A)_{\text{réd}} \simeq \mathbf{P}^{n-1}_{k(A)}$ et $(D_R)_{\text{réd}} \simeq \mathbf{P}^{n-1}_{k(R)}$, on voit que $T_R \to T_A$ est une bijection. Comme $A \to R$ est plat, on a

$$\mathcal{H}_{Z_R/T_R}(\mathcal{O}_{Z_R}) \simeq \mathcal{H}_{Z_A/T_A}(\mathcal{O}_{Z_A}) \otimes_{\mathcal{O}_A} \mathcal{O}_R,$$

et on en déduit la proposition aisément.

Corollaire. — *Si* A *est géométriquement unibranche, alors* $\hat{A}$ *est strictement équidimensionnel si, et seulement si, le complété du hensélisé strict de* A *l'est.*

3. A est normal.

(*a*) D'après le théorème de connexion de Zariski, on a $f_* (\mathcal{O}_Z) \simeq \mathcal{O}_Y$, et il en est de même pour tout Z-schéma fini Z' intègre, birationnel, c'est-à-dire plus précisément si g est le morphisme structural $Z' \to Z$, $f' = g \circ f$, alors $f'_* (\mathcal{O}_{Z'}) \simeq \mathcal{O}_Y$.

THÉORÈME 3.1. — *Il existe un entier $d > 0$ tel que $Z' =$ Proj $(\bigoplus \mathfrak{q}'^n)$, où $\mathfrak{q}' = f'_* (\mathfrak{q}^d \mathcal{O}_{Z'})$ est un idéal de définition de A. Si, de plus, $g^* (\mathfrak{q}\, \mathcal{O}_Z)$ est très ample alors on peut choisir $d = 1$,*

$$\mathfrak{q}\, \mathcal{O}_{Z'} = \mathfrak{q}'\, \mathcal{O}_{Z'} \qquad \textit{et} \qquad \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}' = f'_* (\mathfrak{q}\, \mathcal{O}_{Z'}).$$

Remarques.

1° En appliquant ceci à $Z' = Z$, on voit que $Z =$ Proj $(\bigoplus \mathfrak{q}'^n)$, avec $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ et $\mathfrak{q}' = f_* (\mathfrak{q}'\, \mathcal{O}_Z)$. Autrement dit $\mathfrak{q}'$ est contracté pour f.

2° On retrouve le fait que si, pour tout tel morphisme, $Z' \to Z$, et si, pour tout $n > 0$, on a $\mathfrak{q}^n = f'_* (q^n \mathcal{O}_{Z'})$ (c'est-à-dire les puissances n-ièmes de $\mathfrak{q}$ sont « complètes »), alors Z est normal (*cf.* [6], Appendice du tome 2, et [5], chap. II).

En effet, tout tel schéma Z' est alors de la forme Proj $(\bigoplus_n (\mathfrak{q}^d)^n) \simeq Z$ (cf. [4], 3.1.8, chap. II).

Démonstration du théorème 3.1. — Comme Z' est intègre,

$$g^* (\mathcal{O}_Z (1)) = g^* (\mathfrak{q}\, \mathcal{O}_Z) = \mathfrak{q}\, \mathcal{O}_{Z'},$$

et $\mathfrak{q}\, \mathcal{O}_{Z'}$ est un $\mathcal{O}_{Z'}$-module inversible ample pour f'. Il existe donc un entier $d > 0$ tel que $(\mathfrak{q}\, \mathcal{O}_{Z'})^d = \mathfrak{q}^d \mathcal{O}_{Z'}$ soit très ample pour f'. Comme f' est propre, et que $q' = f'_* (\mathfrak{q}^d \mathcal{O}_{Z'})$ est un $\mathcal{O}_Y$-module de type fini, f' est projectif, et on a un Y-isomorphisme $r : Z' \simeq P =$ Proj $(\bigoplus \mathfrak{q}'^n)$ tel que $r^* (\mathcal{O}_P (1)) \simeq \mathfrak{q}^d \mathcal{O}_{Z'}$ (*cf.* [4], III, 2.3.4.1). Donc $\mathfrak{q}'\, \mathcal{O}_{Z'} = \mathfrak{q}^d \mathcal{O}_{Z'}$.

Comme $\mathfrak{q}'\, \mathcal{O}_{Z'} \subset \mathcal{O}_{Z'}$, on a $\mathfrak{q}' \subset f'_* (\mathcal{O}_{Z'}) = A$. Montrons que c'est un idéal de définition de A. Comme Y est normal, g est un isomorphisme en dehors du diviseur exceptionnel. Comme f est un isomorphisme en dehors du point fermé, il en est de même de f'. Donc $V(\mathfrak{q}') = \{ y \}$. Il est clair que si $\mathfrak{q}\, \mathcal{O}_{Z'}$ est très ample, on peut choisir $d = 1$ et $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$. En effet, on a les flèches :

$$\mathfrak{q} \to f_* f^* (\mathfrak{q}) \to f_* (\mathfrak{q}\, \mathcal{O}_Z) \to f_* (g_* (\mathfrak{q}\, \mathcal{O}_{Z'})) = \mathfrak{q}'$$

qui sont des isomorphismes en dehors du point fermé. Comme A est intègre, la flèche composée $\mathfrak{q} \to \mathfrak{q}'$ est injective.

COROLLAIRE. — *Si l'image réciproque du faisceau inversible canonique* $\mathcal{O}_Z(1) = \mathfrak{q}\,\mathcal{O}_Z$ *reste très ample pour tout morphisme fini birationnel et intègre, alors le normalisé de* Z *est fini sur* Z.

Remarque. — D'après LIPMAN [5], l'hypothèse du corollaire est satisfaite si « pour tout tel schéma Z', on a

$$H^1(Z', \mathcal{O}_{Z'}) = H^2(Z', J) = 0$$

pour tout idéal J de $\mathcal{O}_{Z'}$ ».

(*b*) *Cas où* $\dim A = 2$ *et où* $\mathfrak{q}$ *est engendré par un système de paramètres.* — Rappelons pour mémoire les résultats suivants en dimension 2, si A est hensélien, pas nécessairement normal, on a (*cf.* [1]), pour tout idéal de définition $\mathfrak{q}$ de A,

$$\operatorname{Pic} Z \simeq \operatorname{Pic} \hat{Z}.$$

En outre, il existe un entier $n > 0$ tel que $\operatorname{Pic} Z \simeq \operatorname{Pic} Z_n$, où

$$Z_n = Z \times_Y \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{m}^n).$$

Si, de plus, $\mathfrak{q}$ est engendré par un système de paramètres, $Z_0 \simeq \mathbf{P}_k^{n-1}$, où $n = \dim A$ et $k = A/\mathfrak{m}$.

Comme $\operatorname{Pic}\left(\mathbf{P}_k^{n-1}\right) \simeq \mathbf{Z}$ $\left[\text{le faisceau inversible } \mathcal{O}_P(1) \text{ engendrant } \operatorname{Pic} \mathbf{P}_k^{n-1}\right]$, on voit que $\operatorname{Pic} Z_0 \simeq \mathbf{Z}$.

Nous allons voir que si, de plus, A est normal, $\operatorname{Pic} Z \simeq \operatorname{Pic} Z_0$, ce qui donne $\operatorname{Pic} Z \simeq \mathbf{Z}$ [et $\operatorname{Pic}(Z)$ est même engendré par $\mathcal{O}_Z(1)$].

LEMME 3.2. — $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$.

Soit (b, c) le système de paramètres engendrant $\mathfrak{q}$, de sorte que Z est recouvert par les ouverts affines

$$U_b = \operatorname{Spec} A[c/b], \qquad U_c = \operatorname{Spec} A[b/c].$$

Les cochaînes de ce recouvrement sont des éléments de

$$\Gamma(U_b \cap U_c, \mathcal{O}_Z) = A[b/c, c/b].$$

Comme on a les relations, pour $t_{ij} \in A$,

$$\Sigma_{i,j}\, t_{ij}\, (b/c)^i\, (c/b)^j = \Sigma_{j \leq i}\, t_{ij}\, (c/b)^{i-j} - \Sigma_{j > i}\, (-t_{ij})\, (b/c)^{j-i},$$

on voit que toute cochaîne est un cobord.

PROPOSITION 3.3. — *Z vérifie S_2* :

Comme $\hat{A}$ est strictement équidimensionnel, $\mathcal{H}_{Z/T}(\mathcal{O}_Z)$ est une $\mathcal{O}_Z$-algèbre finie (*cf.* prop. 2.1 *bis* du § 2). Il s'agit de voir que tout Z-schéma fini intègre Z', tel que $Z' \xrightarrow{g} Z$ soit un isomorphisme en dehors de T, est isomorphe à Z. Soit K le conoyau de $\mathcal{O}_Z \to g_*(\mathcal{O}_{Z'})$. Comme codim $T = 2$, dim $K = 0$. La suite exacte :

$$0 \to f_*(\mathcal{O}_Z) \xrightarrow{\sim} f'_*(\mathcal{O}_{Z'}) \to f_*(K) \to R^1 f_*(\mathcal{O}_Z)$$

montre que $f_*(\mathrm{K}) = 0$, car Y étant affine le lemme 3.2 montre que $R^1 f_*(\mathcal{O}_Z) = 0$. Donc $K = 0$.

PROPOSITION 3.4. — Pic $Z_n \simeq$ Pic $D \simeq$ Pic Z_0, *pour tout* n, *et ils sont isomorphes à* $\mathbf{Z}$ [à savoir engendrés respectivement par les faisceaux $\mathcal{O}_{Z_n}(1)$, $\mathcal{O}_D(1)$, $\mathcal{O}_{Z_0}(1)$].

Notons $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_Z/\mathfrak{m}^n\mathcal{O}_Z$, et regardons les idéaux nilpotents

$$I = \mathfrak{m}\,\mathcal{O}_Z/\mathfrak{q}\,\mathcal{O}_Z, \qquad I_n = \mathfrak{m}\,\mathcal{O}_Z/\mathfrak{m}^n\,\mathcal{O}_Z$$

respectivement de $\mathcal{O}_D$ et $\mathcal{O}_n$. Le raisonnement que nous allons faire pour le couple $(I, \mathcal{O}_D)$ est encore valable pour le couple $(I_n, \mathcal{O}_n)$. Regardons la suite exacte :

$$0 \to I \to \mathcal{O}_D^* \to \mathcal{O}_{Z_0}^* \to 1.$$

D'où la suite de cohomologie :

$$H^1(I) \to \mathrm{Pic}\,(D) \to \mathrm{Pic}\,(Z_0) \to H^2(I).$$

Comme Supp $I \subseteq \mathrm{D}$, $H^2(I) = 0$. Regardons $H^1(I)$. On a une suite exacte :

$$H^1(\mathfrak{m}\,\mathcal{O}_Z) \to H^1(I) \to H^2(\mathfrak{q}\,\mathcal{O}_Z).$$

Comme $Z \to Y$ est propre, à fibres de dimension inférieure ou égale à 1, $H^2(\mathfrak{q}\,\mathcal{O}_Z) = 0$. D'autre part, comme Z_0 s'identifie à $\mathbf{P}^1_k$, on a

$$\Gamma(\mathcal{O}_Z/\mathfrak{m}\,\mathcal{O}_Z) \simeq k.$$

Comme $\Gamma(\mathcal{O}_Z) = A$, on voit que $\Gamma(\mathfrak{m}\,\mathcal{O}_Z) = \mathfrak{m}$ et $0 \to H^1(\mathfrak{m}\,\mathcal{O}_Z) \to H^1(\mathcal{O}_Z)$. Par suite, le lemme 3.2 montre que $H^1(\mathfrak{m}\;\mathcal{O}_Z) = H^1(I) = 0$ et Pic $(D) \simeq$ Pic (Z_0).

THÉORÈME 3.5. — *Soient A un anneau local hensélien, intégralement clos, de dimension* 2, $\mathfrak{q}$ *un idéal de définition engendré par un système de paramètres. Alors si* $Z = \mathrm{Proj}\,(\bigoplus \mathfrak{q}^n)$, $Z_0 = \mathrm{Proj}\,(\bigoplus \mathfrak{q}^n/\mathfrak{m}\,\mathfrak{q}^n)$, *où* $\mathfrak{m} = \mathrm{rad}\,\mathrm{A}$, *on a l'isomorphisme* Pic $Z \simeq$ Pic Z_0, *ces deux derniers s'identifiant à* $\mathbf{Z}$ [c'est-à-dire engendrés respectivement par $\mathcal{O}_Z(1)$ et $\mathcal{O}_{Z_0}(1)$].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Boutot (Jean-François). — Groupes de Picard local d'un anneau hensélien, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 272, 1971, série A, p. 1248-1250.

[2] Ferrand (D.) et Raynaud (M.). — Fibres formelles d'un anneau local noethérien, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 3, 1970, p. 295-311.

[3] Flexor-Mangeney (Marguerite). — Étude de l'assassin du complété, *Bull. Soc. math. France*, t. 98, 1970, p. 117-126.

[4] Grothendieck (Alexander). — *Éléments de géométrie algébrique*. Chap. II, III et IV. — Paris, Presses universitaires de France, 1961-1967 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).

[5] Lipman (Joseph). — Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization, *Volume dédié au Professeur Zariski*, — Paris, Presses universitaires de France, 1969 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 36, p. 195-280).

[6] Zariski (O.) and Samuel (P.). — *Commutative algebra*. Vol. 2. — Princeton, D. Van Nostrand Compagny, 1960 (*The University Series in higher Mathematics*).

(Texte définitif reçu le 19 janvier 1972.)

Mme Marguerite Flexor,
180, avenue de Choisy,
75013 Paris.