BULLETIN DE LA S. M. F.

BERNARD VIROT

Modèles d'opérateurs linéaires et translations unilatérales simples

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 157-175

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__157_0>

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 157-175.

MODÈLES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES ET TRANSLATIONS UNILATÉRALES SIMPLES

PAR

BERNARD VIROT

[Orléans]

Introduction

Les espaces de Banach considérés sont tous réels ou tous complexes. Soient E et F deux espaces de Banach. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F, et E' le dual topologique de E, munis de leurs normes usuelles. On écrit $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$. On note I_E l'application identique de E sur E. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\rho(A) = \lim_{n \to +\infty} \| A^n \|^{1/n}$. Si x appartient à E, on dit que x est un vecteur cyclique pour A lorsque l'ensemble $\{ A^n(x) \mid n \in \mathbf{N} \}$ est total dans E.

Enfin, si k est un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$, on note k' le nombre conjugué de k, défini par $1/k + 1/k' = 1$.

Dans le paragraphe 1, après avoir rappelé divers résultats, on introduit plusieurs notions de modèles pour un opérateur linéaire continu sur un espace de Banach.

Soit H un espace hilbertien. ROTA a construit un modèle universel pour les opérateurs $A \in \mathcal{L}(H)$, vérifiant la condition $\rho(A) < 1$ [15]. Dans le paragraphe 2, utilisant les normes tensorielles g_k et d_k, introduites par P. SAPHAR [17] et S. CHEVET [2], on généralise ce modèle au cas où H est un espace de Banach quelconque.

Soient E un espace de Banach complexe, et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) \leq 1$. Dans le paragraphe 3, on établit une condition nécessaire et suffisante pour que T possède parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple S. Si E est un espace hilbertien et T une contraction, on retrouve ainsi une condition suffisante pour que S soit une transformée quasi-affine de T, obtenue par NAGY et FOIAS [14].

Dans le paragraphe 4, on obtient notamment le résultat suivant. Soient F un espace de Banach complexe de dimension infinie, et $B \in \mathcal{L}(F)$

un opérateur ayant la propriété $\rho(B) < 1$. Pour que B ait parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple, il faut et il suffit que B possède un vecteur cyclique x. Alors, l'application $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n B^n(x)$ de l^2 dans F est une injection nucléaire à image dense. Ce résultat précise une proposition de GERLACH ([8], p. 251).

§ 1. Rappels et définitions

1. Les normes tensorielles g_k et d_k (introduites par P. SAPHAR [17] et S. CHEVET [2]).

1.1. — Soient E un espace de Banach, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E, k un nombre réel tel que $1 \leqq k \leqq +\infty$, et k' le nombre conjugué de k. On pose

$$N_k[(x_i)_{i \in I}] = (\Sigma_{i \in I} \| x_i \|^k)^{1/k}, \quad \text{si } k \text{ est fini;}$$
$$N_\infty[(x_i)_{i \in I}] = \sup_{i \in I} \| x_i \|.$$

Soit $\varepsilon = \{ x' \in E' \mid \| x' \| \leqq 1 \}$. On pose

$$M_k[(x_i)_{i \in I}] = \sup_{x' \in \varepsilon} N_k[(\langle x', x_i \rangle)_{i \in I}].$$

S'il n'y a pas ambiguïté, on écrit $N_k(x_i)$ [resp. $M_k(x_i)$] au lieu de $N_k[(x_i)_{i \in I}]$ (resp. $M_k[(x_i)_{i \in I}]$).

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est scalairement de puissance $k^{\text{ième}}$ sommable si, pour tout $x' \in E'$, on a $N_k(\langle x', x_i \rangle) < +\infty$. Pour que la famille $(x_i)_{i \in I}$ soit scalairement de puissance $k^{\text{ième}}$ sommable, il faut et il suffit que $M_k(x_i)$ soit fini.

1.2. — Soient k un nombre réel tel que $1 \leqq k \leqq +\infty$, E et F deux espaces de Banach. Si $v = \Sigma_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ est un élément du produit tensoriel algébrique $E \otimes F$, on pose

$$g_k(v) = \inf N_k(x_i) M_{k'}(y_i), \qquad d_k(v) = \inf M_{k'}(x_i) N_k(y_i),$$

les bornes inférieures étant prises sur l'ensemble des représentations de v de la forme $v = \Sigma_{i=1}^n x_i \otimes y_i$.

Alors, g_k et d_k sont des normes tensorielles, ou $\otimes$-normes, sur $E \otimes F$. Donc, elles sont raisonnables (*cf.* [10], § 1). Par suite, pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$g_k(x \otimes y) = d_k(x \otimes y) = \| x \| . \| y \|.$$

De plus, les normes g_1 et d_1 sont égales à la norme projective π de Grothendieck ([2], § 2 et [17], § 3, n° 1).

Soient H_1 et H_2 des espaces hilbertiens. Si $1 < k \leqq +\infty$ (resp. $k = 2$), les normes g_k et d_k sont équivalentes (resp. égales) sur $H_1 \otimes H_2$ à la norme du produit tensoriel préhilbertien classique ([17], th. 4.1 et [18], prop. 12).

1.3. — Si ν est une norme raisonnable sur $E \otimes F$, on note $E \otimes_\nu F$ l'espace $E \otimes F$ muni de ν, et $E \hat{\otimes}_\nu F$ son complété.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de F, telles que l'on ait

$$\mathrm{N}_k(x_n) < +\infty, \qquad \text{et, de plus,} \quad \lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = 0 \quad \text{si} \quad k = +\infty,$$
$$M_{k'}(y_n) < +\infty.$$

Alors, la famille $(x_n \otimes y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est sommable dans $E \hat{\otimes}_{g_k} F$ ([17], lemme 3.1).

2. Les applications k-nucléaires à gauche et à droite (*voir* [17], § 3, n° 2).

2.1. — On conserve les hypothèses et les notations introduites dans le n° 1 ci-dessus. Il existe une application linéaire continue naturelle Γ_k (resp. Δ_k) de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ (resp. $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$) dans $\mathcal{L}(E, F)$. On dit qu'un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ est k-nucléaire à gauche (resp. à droite) s'il appartient à l'image par Γ_k (resp. Δ_k) de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ (resp. $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$). On note $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ [resp. $\mathcal{L}_d^k(E, F)$] l'espace des applications k-nucléaires à gauche (resp. à droite) de E dans F.

On peut identifier $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ à l'espace vectoriel quotient

$$E' \hat{\otimes}_{g_k} F / \Gamma_k^{-1}(0).$$

On munit $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ de la norme quotient, qui en fait un espace de Banach. De manière analogue, on définit sur $\mathcal{L}_d^k(E, F)$ une structure d'espace de Banach.

La norme de l'injection canonique de $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ est inférieure ou égale à 1.

2.2. — On dit que E est accessible (ou vérifie l'hypothèse d'approximation) si I_E est limite uniforme sur les compacts de E d'applications linéaires continues de rang fini. Tout espace hilbertien est accessible. (*cf.* [9], chap. 1, § 5). Si E' ou F sont accessibles, les applications naturelles Γ_k et Δ_k de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ et $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ sont injectives ([9], chap. 1, p. 95). Alors, l'application naturelle de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ (resp. $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$) dans $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ [resp. $\mathcal{L}_d^k(E, F)$] est une isométrie.

3. Les espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$ (*voir* [12], chap. 3 et chap. 5).

3.1. — Soient $D = \{ z \mid z \in \mathbf{C}$ et $\mid z \mid < 1 \}$, $\mathcal{H}(D)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur D, à valeurs complexes, et soit p un nombre réel tel que $1 \leqq p \leqq +\infty$. Si f appartient à $\mathcal{H}(D)$, on pose

$$\lambda_p(f) = \sup_{0<r<1} \left[1/2\pi \int_0^{2\pi} \mid f(r\, e^{i\theta}) \mid^p d\theta \right]^{1/p}, \quad \text{si } p \text{ est fini;}$$

$$\lambda_\infty(f) = \sup_{z \in D} \mid f(z) \mid.$$

Soit $\mathcal{H}^p = \{ f \mid f \in \mathcal{H}(D)$ et $\lambda_p(f) < +\infty \}$. Alors, $\mathcal{H}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(D)$, et λ_p est une norme sur $\mathcal{H}^p$; elle en fait un espace de Banach.

Soient $\mathbf{T}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, et m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbf{T}$ [c'est-à-dire telle que $m(\mathbf{T})$ soit égal à 1]. Pour $1 \leqq p < +\infty$ (resp. $p = +\infty$), on note L^p l'espace de Banach des classes des fonctions définies sur $\mathbf{T}$, à valeurs complexes, m-mesurables et de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable (resp. bornées en mesure). Pour $p \leqq 1 \leqq +\infty$, $\mathcal{H}^p$ est canoniquement isomorphe, en tant qu'espace vectoriel normé, à un sous-espace fermé de L^p.

3.2. — Si f appartient à $\mathcal{H}^p$, $\lim_{r \to 1, 0<r<1} f(rt)$ existe pour m-presque tout $t \in \mathbf{T}$; on note $f(t)$ cette limite.

Soit $f \in \mathcal{H}^\infty$. On dit que f est une fonction intérieure si on a

$$\mid f(t) \mid = 1 \quad \text{pour } m\text{-presque-tout } t \in \mathbf{T}.$$

Toute fonction intérieure f se met sous la forme $f = bs$, b étant un produit de Blaschke et s une fonction intérieure sans zéros dans D.

4. Quasi-affinités ; transformées quasi-affines; opérateurs quasi-semblables (*cf.* [3], p. 54 et [13], p. 64).

Soient E, F deux espaces de Banach, et $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que Φ est une quasi-affinité de E dans F si elle est injective et si, de plus, $\Phi(E)$ est partout dense dans F.

Soient $A \in \mathcal{L}(E)$ et $B \in \mathcal{L}(F)$. On dit que A est une transformée quasi-affine de B s'il existe une quasi-affinité Φ de E dans F vérifiant la relation

$$\Phi A = B \Phi.$$

On dit que les applications A et B sont quasi-semblables si chacune d'elles est une transformée quasi-affine de l'autre.

5. Certaines classes de contractions.

5.1. — Soient H un espace hilbertien, et C l'ensemble des contractions de H. Si $T \in C$, on pose

$$Z_T = \{ h \mid h \in H \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \| T^n(h) \| = 0 \}.$$

Nagy et Foias ont considéré les parties suivantes de C ([13], p. 66 et 114).

On note $C_{0.}$ (resp. $C_{1.}$) l'ensemble des $T \in C$ tels que Z_T soit égal à H (resp. $\{ 0 \}$).

On note $C_{.0}$ (resp. $C_{.1}$) l'ensemble des $T \in C$ tels que Z_{T^*} soit égal à H (resp. $\{ 0 \}$).

On pose alors :

$$C_{ij} = C_{i.} \cap C_{.j} \qquad (i, j = 0, 1).$$

Enfin, supposons H complexe. On note C_0, ou C_0^H s'il y a ambiguïté, l'ensemble des $T \in C$, complètement non unitaires, tels qu'il existe $f \in \mathcal{H}^\infty$ vérifiant les conditions : 1° $f \not\equiv 0$; 2° $f(T) = 0$ (au sens de Nagy et Foias).

On a $C_0 \subset C_{00}$ [(13], chap. III, prop. 4.2).

5.2. — Soient H_1 et H_2 des espaces hilbertiens complexes, $T_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ des contractions complètement non unitaires, telles que l'une soit une transformée quasi-affine de l'autre. Alors, si T_1 appartient à $C_0^{H_1}$, la contraction T_2 appartient à $C_0^{H_2}$ ([13], chap. III, prop. 4.6).

6. Translations unilatérales.

6.1. — Soient H un espace hilbertien, L un sous-espace vectoriel fermé de H, et $U \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie. On dit que L est ambulant pour U si $U^n(L)$ est orthogonal à L pour tout entier $n \geq 1$.

L'isométrie U est appelée translation unilatérale s'il existe dans H un sous-espace L ambulant pour U, ayant la propriété

$$H = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} U^n(L).$$

Alors, ce sous espace est déterminé de manière unique par la translation unilatérale U. Sa dimension hilbertienne est appelée multiplicité de U; elle détermine U à équivalence unitaire près ([13], chap. I, n° 1).

Les translations unilatérales de multiplicité 1 sont également appelées translations unilatérales simples.

6.2. — Toute translation unilatérale est complètement non unitaire ([13], chap. I, n° 3).

Par ailleurs, soit H un espace hilbertien complexe. On a $C_0 \subset C_{00}$ (n° 5.1 ci-dessus). Donc, si $U \in \mathcal{L}(H)$ est une translation unilatérale, U n'appartient pas à C_0.

7. Modèles; définitions, exemples.

Dans ce numéro, nous introduisons diverses notions de modèles généralisant celle due à Rota ([15], [16]).

Définition 1. — Soient E et F des espaces de Banach. Soient $M \in \mathcal{L}(E)$ et $T \in \mathcal{L}(F)$. On dit que M est un modèle de type 1 (resp. 2, 3) pour T s'il existe un sous-espace vectoriel fermé K de E, stable par M, et vérifiant la condition (1) [resp. (2, 3)] suivante.

(1) M, restreint à K, est semblable à T.

(2) M, restreint à K, est quasi-semblable à T.

(3) M, restreint à K, est une transformée quasi-affine de T.

De plus, quand on peut choisir K égal à E, on dit que M est un modèle strict de type 1 (resp. 2, 3) pour T.

Exemple 1. — Quand E et F sont égaux à un même espace hilbertien H, la notion de modèle de type 1 coïncide avec celle de modèle au sens de Rota. Notamment, Rota a établi le résultat suivant [15]. Soient $\mathcal{H}$ l'espace hilbertien des suites de carré sommable d'éléments de H, et $\mathcal{R}$ l'opérateur $(h_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (h_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{H}$ dans lui-même. Alors, $\mathcal{R}$ est un modèle de type 1 pour tout élément T de $\mathcal{L}(H)$ vérifiant la condition $\rho(T) < 1$. On l'appelle modèle de Rota sur H.

Exemple 2. — Soit H un espace hilbertien. D'après Nagy et Foias, tout élément de C_{11} possède parmi ses modèles stricts de type 2 un opérateur unitaire ([13], chap. II, prop. 3.5).

Exemple 3. — Soit H un espace hilbertien complexe. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $T \in C_{.0}$ et $T \notin C_0$;

(ii) T a un vecteur cyclique.

Tout élément de $\mathcal{V}$ possède parmi ses modèles stricts de type 3 une translation unilatérale simple ([14], prop. 3). On retrouve ce résultat dans le paragraphe 3 ci-dessous.

§ 2. Généralisation du modèle de Rota

PROPOSITION 1. — *Soient H un espace hilbertien séparable, de dimension infinie, et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base orthonormale de H. Soient E un espace de Banach, $T\in\mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T)<1$, k un nombre réel tel que $1\leqq k\leqq+\infty$.*

(i) *Pour tout $x\in E$, la famille $[T^n(x)\otimes e_n]_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable dans $E\hat{\otimes}_{g_k}H$* (resp. $E\hat{\otimes}_{d_k}H$).

(ii) *L'ensemble $\{\sum_{n=0}^{+\infty}T^n(x)\otimes e_n \mid x\in E\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E\hat{\otimes}_{g_k}H$* (resp. $E\hat{\otimes}_{d_k}H$)*; l'application linéaire*

$$x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}T^n(x)\otimes e_n$$

de E sur ce sous-espace est une bijection bicontinue.

Démonstration. — La norme g_k est une norme raisonnable (§ 1, nº 1.2). Donc, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}g_k[T^n(x)\otimes e_n]=\sum_{n=0}^{+\infty}\|T^n(x)\|\leqq\|x\|\sum_{n=0}^{+\infty}\|T^n\|<+\infty.$$

Par suite, la famille $[T^n(x)\otimes e_n]_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable dans l'espace de Banach $E\hat{\otimes}_{g_k}H$, et si on note v_x sa somme, on a l'inégalité

$$g_k(v_x)\leqq\|x\|\sum_{n=0}^{+\infty}\|T^n\|. \tag{2.1}$$

D'autre part, la norme g_k étant une norme tensorielle, l'injection canonique de $E\otimes_{g_k}H$ dans $E''\otimes_{g_k}H$ est une isométrie [10]. De plus, l'application naturelle de $E''\hat{\otimes}_{g_k}H$ dans $\mathcal{L}_g^k(E',H)$ est une bijection isométrique (§ 1, nº 2.2). On en déduit qu'il existe une application linéaire isométrique naturelle de $E\hat{\otimes}_{g_k}H$ dans $\mathcal{L}_g^k(E',H)$. Soit V_x l'image par cette application de $v_x=\sum_{n=0}^{+\infty}T^n(x)\otimes e_n$. Pour tout $x'\in E'$, on a

$$V_x(x')=\sum_{n=0}^{+\infty}\langle x',T^n(x)\rangle e_n.$$

Notons respectivement $\|V_x\|$ et $g_k(V_x)$ les normes de V_x dans $\mathcal{L}(E',H)$ et $\mathcal{L}_g^k(E',H)$. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on obtient aisément l'inégalité

$$\|x\|\leqq\|V_x\|,$$

et, d'après le paragraphe 1, nº 2.1, on a

$$\|V_x\|\leqq g_k(V_x).$$

Donc, il vient

$$(2.2) \qquad \| x \| \leqq \| V_x \| \leqq g_k(V_x) = g_k(v_x).$$

D'après les inégalités (2.1) et (2.2) ci-dessus, l'ensemble $\{ v_x \mid x \in E \}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \hat{\otimes}_{g_k} H$, et l'application linéaire $x \mapsto v_x$ de E sur ce sous-espace est une bijection bicontinue. On raisonne de manière analogue en remplaçant g_k par d_k.

COROLLAIRE. — *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans la proposition* 1, *pour tout* $x \in E$, *l'application* $V_x : x' \mapsto \Sigma_{n=0}^{+\infty} \langle x', T^n(x) \rangle e_n$ *de* E' *dans* H *est nucléaire.*

Démonstration. — Les normes g_1 et d_1 sont égales à la norme π (§ 1, nº 1.2). Donc, le résultat découle immédiatement de la proposition 1 (i).

REMARQUE 1. — Conservons les hypothèses et les notations de la proposition 1. Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ la translation unilatérale simple définie par $S(e_n) = e_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Pour tout $x \in E$, l'application nucléaire V_x, introduite dans le corollaire ci-dessus, vérifie la relation

$$V_x {}^tT = S^* V_x.$$

Donc, l'adhérence $\overline{V_x(E')}$ de $V_x(E')$ dans H est stable par S^*, et, si V_x est injective, l'opérateur ${}^tT$ est une transformée quasi-affine de S^* restreint à $\overline{V_x(E')}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, V_x est injective si et seulement si x est un vecteur cyclique pour T.

REMARQUE 2. — Soient E un espace de Banach complexe, et $x \in E$. Dans le paragraphe 4 ci-dessous, on montre que $\overline{V_x(E')}$ est égal à H si et seulement si le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{ T^n(x) \mid n \in \mathbf{N} \}$ est de dimension infinie.

Soient F et G deux espaces de Banach, ν une norme tensorielle sur $F \otimes G$; soient $A \in \mathcal{L}(F)$ et $B \in \mathcal{L}(G)$. Alors, $A \otimes B$ est une application linéaire continue de $F \otimes_\nu G$ dans lui-même ([1], § 1, nº 1). On note $A \otimes_\nu B$ son prolongement par continuité à $F \hat{\otimes}_\nu G$. On a le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — *On conserve les hypothèses et les notations de la proposition* 1. *Soit* $S \in \mathcal{L}(H)$ *une translation unilatérale simple.*

Les opérateurs $I_E \otimes_{g_k} S^* \in \mathcal{L}(E \hat{\otimes}_{g_k} H)$ *et* $I_E \otimes_{d_k} S^* \in \mathcal{L}(E \hat{\otimes}_{d_k} H)$ *sont des modèles de type* 1 *pour l'opérateur* T.

Démonstration. — Il existe une base orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de* H telle que l'on ait

$$S^*(e_0) = 0, \qquad S^*(e_{n+1}) = e_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

D'après la proposition 1, l'ensemble $\mathcal{G} = \{ \Sigma_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n \mid x \in E \}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \hat{\otimes}_{g_k} H$, et l'application linéaire $A : x \mapsto \Sigma_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n$ de E sur $\mathcal{G}$ est une bijection bicontinue. De plus, $\mathcal{G}$ est stable par $I_E \otimes_{g_k} S^*$, et on a

$$\left(I_E \otimes_{g_k} S^* \Big|_{\mathcal{G}} \right) A = AT.$$

Donc, l'opérateur $I_E \otimes_{g_k} S^*$ est un modèle de type 1 pour T.

Un raisonnement analogue montre qu'il en est de même pour $I_E \otimes_{d_k} S^*$.

Remarque. — Si E est un espace hilbertien, notons $\mathcal{E}$ l'espace hilbertien des suites de carré sommable d'éléments de E, et $\mathcal{R}$ l'application linéaire $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{E}$ dans lui-même. L'opérateur $\mathcal{R}$ est le modèle de Rota sur E (§ 1, nº 7, ex. 1). Si $1 < k \leqq +\infty$ (resp. $k = 2$), il est semblable (resp. unitairement équivalent) aux opérateurs $I_E \otimes_{g_k} S^*$ et $I_E \otimes_{d_k} S^*$. Faisons la démonstration pour $I_E \otimes_{g_k} S^*$. Si $1 < k \leqq +\infty$ (resp. $k = 2$), la norme g_k est équivalente (resp. égale) sur $E \otimes H$ à la norme du produit tensoriel préhilbertien classique (§ 1, nº 1.2). Donc, l'application linéaire $J_k : (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \Sigma_{n=0}^{+\infty} x_n \otimes e_n$ de $\mathcal{E}$ dans $E \hat{\otimes}_{g_k} H$ est bijective et bicontinue (resp. unitaire). De plus, on a

$$(I_E \otimes_{g_k} S^*) J_k = J_k \mathcal{R}.$$

Le résultat est obtenu. On raisonne de manière analogue en remplaçant g_k par d_k.

§ 3. Transformées quasi-affines ; cas des opérateurs de rayon spectral inférieur ou égal à 1

Introduisons tout d'abord la notion de fonction minimum d'un opérateur relative à un vecteur.

Définition 1. — *Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) \leqq 1$, et $x \in E$ un vecteur tel que $\lim_{r \to 1, 0 < r < 1} f(rT)(x)$ existe pour tout $f \in \mathcal{H}^\infty$. On pose*

$$\mathcal{N} = \{ f \in \mathcal{H}^\infty \mid \lim_{r \to 1, 0<r<1} f(rT)(x) = 0 \}.$$

Si q est une fonction intérieure, on dit que q est une fonction minimum de T relative au vecteur x lorsque l'on a

$$\mathcal{N} = q \mathcal{H}^\infty.$$

Remarque. — Si l'opérateur T possède une fonction minimum relative au vecteur x, cette fonction est unique, à une constante multiplicative de module 1 près.

Soit $D = \{ z \in \mathbf{C} \text{ et } |z| < 1 \}$. Si n appartient à $\mathbf{N}$, on note φ_n l'application $z \mapsto z^n$ de D dans $\mathbf{C}$.

Proposition 1. — *On fait sur E et T les mêmes hypothèses que dans la définition* 1. *Soient p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, et $x \in E$ un vecteur tel que $\lim_{r \to 1, 0<r<1} f(rT)(x)$ existe pour tout $f \in \mathcal{H}^p$.*

(i) *L'application linéaire $\Phi : f \mapsto \lim_{r \to 1, 0<r<1} f(rT)(x)$ de $\mathcal{H}^p$ dans E est continue. Si on note U l'isométrie $f \mapsto f\varphi_1$ de $\mathcal{H}^p$ dans lui-même, on a la relation $\Phi U = T \Phi$.*

(ii) *Supposons $p < +\infty$. Si Φ n'est pas injective, l'opérateur T possède une fonction minimum relative au vecteur x.*

Démonstration. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}^p$, convergeant vers zéro. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers zéro uniformément sur les compacts de D. Par conséquent, si $0 < r < 1$, $[f_n(rT)]_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers zéro dans $\mathcal{L}(E)$. Donc, l'application linéaire $\Phi_r : f \mapsto f(rT)(x)$ de $\mathcal{H}^p$ dans E est continue. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il en est de même pour Φ.

Si U est l'opérateur de multiplication par φ_1 sur $\mathcal{H}^p$, des vérifications immédiates montrent que l'on a $\Phi U = T \Phi$. Par suite, le noyau de Φ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}^p$, stable par l'opérateur U. Pour $1 \leq p < +\infty$, un tel sous-espace est, soit réduit à $\{0\}$, soit de la forme $q\,\mathcal{H}^p$, où q est une fonction intérieure ([11], p. 25). On en déduit immédiatement (ii), puisque l'on a

$$q\,\mathcal{H}^\infty = \mathcal{H}^\infty \cap [q\,\mathcal{H}^p].$$

Remarque. — Dans le paragraphe 4 ci-dessous, faisant l'hypothèse supplémentaire $\rho(T) < 1$, on montre que toute fonction minimum de T relative au vecteur x est, à une constante multiplicative de module 1 près, un produit de Blaschke fini.

Lemme 1. — *Soient E un espace de Banach, $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E ayant la propriété*

$$\limsup_{n \to +\infty} \| y_n \|^{1/n} \leq 1,$$

et soit p un nombre réel tel que $1 \leq p < +\infty$. Considérons les conditions :

(i) $M_{p'}(y_n) < +\infty$;

(ii) *Pour tout $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$*

$$\lim_{r \to 1, 0<r<1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n$$

existe dans E.

Alors, (i) *et* (ii) *sont équivalentes. De plus, si elles sont vérifiées, on a*

$$\lim_{r \to 1, 0<r<1} \Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n.$$

Démonstration. — Supposons vérifiée la condition (i). Soient Y' un élément non nul du dual topologique $(l^{p'})'$ de $l^{p'}$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$.

On a

$$N_p(\alpha_n Y') < +\infty, \qquad M_{p'}(y_n) < +\infty$$

(*cf.* § 1, n° 1.1). Ces inégalités entraînent la sommabilité de la famille $(\alpha_n Y' \otimes y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $(l^{p'})' \hat{\otimes}_{g_p} E$ (§ 1, n° 1.3). L'application linéaire naturelle de $(l^{p'})' \hat{\otimes}_{g_p} E$ dans $\mathcal{L}(l^{p'}, E)$ est continue (§ 1, n° 2.1). Donc, pour tout $Y \in l^{p'}$, la série $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_u \langle Y', Y \rangle y_n$ converge dans E. En particulier $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n$ est une série convergente. Utilisant le procédé de sommation d'Abel, on montre alors, comme dans le cas scalaire, que la série $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n$ converge uniformément par rapport à $r \in [0, 1]$. On en déduit

$$\lim_{r \to 1, 0<r<1} \Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n.$$

Réciproquement, supposons vérifiée la condition (ii). D'après l'inégalité de Hölder, si $0 < r < 1$, l'application linéaire

$$\Phi'_r : \quad (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n$$

de l^p dans E est continue. Pour tout $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$, $\Phi'_r [(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}]$ a une limite $\Phi' [(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}]$ quand r tend vers 1 $(0 < r < 1)$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, l'application linéaire Φ' de l^p dans E ainsi définie est continue. Si $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de scalaires ayant au plus un nombre fini de termes non nuls, on a

$$\Phi' [(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}] = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \beta_n y_n.$$

Utilisant la densité dans l^p des suite de cette forme, on obtient

$$\Phi' [(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}] = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n, \quad \text{pour tout } (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p.$$

Soit $x' \in E'$. Pour tout $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$, la série numérique $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \langle x', y_n \rangle$ est convergente. Donc, $(\langle x', y_n \rangle)_{n \in \mathbf{N}}$ appartient à $l^{p'}$. Le résultat voulu en découle (*cf.* § 1, n° 1.1).

Remarque. — Si on ne fait pas l'hypothèse

$$\limsup_{n \to +\infty} \| y_n \|^{1/n} \leq 1,$$

on voit que (i) implique (ii) et que l'on a la relation

$$\lim_{r \to 1, 0<r<1} \Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n, \quad \text{pour tout } (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p.$$

Proposition 2. — *Soient E un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) \leq 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple;*

(ii) *T possède un vecteur cyclique x tel que, pour tout élément non nul f de $\mathcal{H}^2$, $f(rT)(x)$ ait une limite non nulle quand r tend vers 1 $(0 < r < 1)$;*

(iii) *T possède un vecteur cyclique x ayant les propriétés :*

(1) $M_2[(T^n(x))_{n\in\mathbf{N}}] < +\infty$;

(2) *pour toute fonction intérieure q,*

$$\lim_{r\to 1,\, 0<r<1} q(rT)(x) \neq 0.$$

Démonstration. — Soit $D = \{ z \mid z \in \mathbf{C} \text{ et } |z| < 1 \}$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, soit φ_n l'application $z \to z^n$ de D dans $\mathbf{C}$. Alors, $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base orthonormale de l'espace hilbertien $\mathcal{H}^2$.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Supposons vérifiée la condition (i). Deux translations unilatérales de même multiplicité sont unitairement équivalentes (§ 1, n° 6.1). Donc, si S est l'opérateur $f \mapsto \varphi_1 f$ de $\mathcal{H}^2$ dans lui-même, S est une transformée quasi-affine de T. Notons Q une quasi-affinité de $\mathcal{H}^2$ dans E vérifiant la relation $QS = TQ$. Le vecteur φ_0 étant cyclique pour S, $x = Q(\varphi_0)$ est cyclique pour T.

Par ailleurs, si f appartient à $\mathcal{H}^2$, posons $f = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n$ $((\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}} \in l^2)$. Il vient

$$f(rT)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n T^n(x).$$

Compte tenu des relations

$$T^n Q = QS^n, \qquad S^n(\varphi_0) = \varphi_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

on en déduit :

$$f(rT)(x) = Q\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \varphi_n\right). \tag{3.1}$$

Dans $\mathcal{H}^2$, on a

$$\lim_{r\to 1,\, 0<r<1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \varphi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n = f,$$

par suite, l'égalité (3.1) ci-dessus implique

$$\lim_{r\to 1,\, 0<r<1} f(rT)(x) = Q(f), \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{H}^2.$$

Utilisant le lemme 1 et le fait que Q est injective, on en déduit (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Soit x un vecteur cyclique pour T vérifiant les conditions (1) et (2) de (iii). D'après le lemme 1, pour tout $f \in \mathcal{H}^2$,

$\lim_{r \to 1, 0<r<1} f(rT)(x)$ existe dans E. Supposons qu'il existe un élément non nul f de $\mathcal{H}^2$ tel que l'on ait

$$\lim_{r \to 1, 0<r<1} f(rT)(x) = 0.$$

Alors, d'après la proposition 1, l'opérateur T possède une fonction minimum q relative au vecteur x. On a

$$\lim_{r \to 1, 0<r<1} q(rT)(x) = 0,$$

ce qui contredit la condition (2) de (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons vérifiée la condition (ii). Soit Φ l'application linéaire $f \mapsto \lim_{r \to 1, 0<r<1} f(rT)(x)$ de $\mathcal{H}^2$ dans E. Par hypothèse, Φ est injective; de plus, le vecteur x étant cyclique pour T, on a

$$\overline{\Phi(\mathcal{H}^2)} = E.$$

Utilisant la proposition 1, on en déduit que l'opérateur de multiplication par φ_1 sur $\mathcal{H}^2$ est une transformée quasi-affine de T.

PROPOSITION 3. — *Soient H un espace hilbertien complexe, et $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction complètement non unitaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'opérateur T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple;*

(ii) *$T \notin C_0$ et, de plus, T possède un vecteur cyclique x tel que $M_2[(T^n(x))_{n \in \mathbf{N}}] < +\infty$.*

Démonstration. — Supposons vérifiée la condition (i). D'après la proposition 2, T possède un vecteur cyclique x tel que l'on ait $M_2[(T^n(x))_{n \in \mathbf{N}}] < +\infty$. De plus, d'après le paragraphe 1, n° 5.2 et n° 6.2, l'opérateur T n'appartient pas à C_0.

Réciproquement, montrons que (ii) implique (i). Supposons vérifiée la condition (ii). D'après la proposition 2, il suffit de montrer que, pour toute fonction intérieure q, on a $\lim_{r \to 1, 0<r<1} q(rT)(x) \neq 0$. Soit q une fonction intérieure vérifiant la relation

$$\lim_{r \to 1, 0<r<1} q(rT)(x) = 0. \tag{3.2}$$

La contraction T étant complètement non unitaire, l'application linéaire $q(T) : h \mapsto \lim_{r \to 1, 0<r<1} q(rT)(h)$ de H dans lui-même est continue ([13], chap. III, th. 2.1). D'après la relation (3.2) ci-dessus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $q(T)[T^n(x)] = 0$; puisque x est un vecteur cyclique pour T, on en déduit $q(T) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $T \notin C_0$.

Le corollaire suivant a été obtenu par NAGY et FOIAS ([14], prop. 3).

Corollaire. — *Soient H un espace hilbertien complexe, et $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction ayant les propriétés :*

$T \in C_{.0}$ et $T \notin C_0$;

T possède un vecteur cyclique.

Alors, l'opérateur T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple.

Démonstration. — Soit U la dilatation unitaire minimum de T, définie sur un espace hilbertien $\mathbf{H}$ contenant H ([13], chap. I, n° 4). On note P_H le projecteur orthogonal de $\mathbf{H}$ sur H, et $\mathbf{H}_+$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{H}$ engendré par $\cup_{n \in \mathbf{N}} U^n(H)$.

Si x_0 est un vecteur cyclique pour T, on pose $H_0 = \mathbf{C}\, x_0$, et on note N le sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{H}_+$ engendré par $\cup_{n \in \mathbf{N}} U^n(H_0)$. Alors, on a les résultats suivants ([14], § 1, n° 2) :

(i) $F = N \ominus U(N)$ est ambulant pour U (*cf.* § 1, n° 6.1);

(ii) $\dim F = \dim H_0 = 1$; le sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{H}$ engendré par $\cup_{n \in \mathbf{N}} T^n P_H(F)$ est égal à H;

(iii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$P_H U^n \Big|_{\mathbf{H}_+} = T^n P_H \Big|_{\mathbf{H}_+} .$$

D'après (ii), si X est un élément non nul de F, le vecteur $x = P_H(X)$ est cyclique pour T.

Soit $y \in H$. On déduit de (iii) :

$$\langle y, T^n(x) \rangle = \langle y, U^n(X) \rangle, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N};$$

par suite, d'après (i), on a $M_2[(T^n(x))_{n \in \mathbf{N}}] < +\infty$.

Enfin, puisque la contraction T appartient à $C_{.0}$, elle est complètement non unitaire. Le résultat découle alors de la proposition 3.

§ 4. Transformées quasi-affines; cas des opérateurs de rayon spectral strictement inférieur à 1

Soient E un espace de Banach complexe, et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur dont le rayon spectral $\rho(T)$ est strictement inférieur à 1. Si f est une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert D de $\mathbf{C}$, à valeurs complexes, on a, dans $\mathcal{L}(E)$,

$$f(T) = \lim_{r \to 1, 0 < r < 1} f(rT).$$

Soit $x \in E$ un vecteur tel qu'il existe un élément f non nul de l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1$ vérifiant la relation $f(T)(x) = 0$. Alors, on peut considérer une fonction minimum de T relative au vecteur x (§ 3, prop. 1).

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) < 1$, et x un vecteur non nul de E tel que l'on ait* $\{ f \mid f \in \mathcal{H}^1$ et $f(T)(x) = 0 \} \neq \{ 0 \}$. *Toute fonction minimum de T relative au vecteur x est, à une constante multiplicative de module* 1 *près, un produit de Blaschke fini, non constant, dont les zéros sont des valeurs propres de T.*

Démonstration. — Soit q une fonction minimum de T relative au vecteur x. D'après le « Spectral Mapping Theorem », si q ne s'annule pas sur D, l'opérateur $q(T)$ est inversible ([7], p. 569). Or, ceci est impossible, puisque $q(T)(x) = 0$. La fonction q a donc des zéros dans D. Soit μ l'un d'eux. Il existe une fonction intérieure w ayant la propriété

$$q(z) = \frac{\mu - z}{1 - \bar{\mu} z} w(z), \quad \text{pour tout } z \in D. \tag{4.1}$$

On en déduit :

$$(I_E - \bar{\mu} T) q(T) = (\mu I_E - T) w(T).$$

Par suite, si μ n'est pas valeur propre de T, la relation $q(T)(x) = 0$ entraîne $w(T)(x) = 0$. Alors, q étant une fonction minimum de T relative au vecteur x, on a

$$w = qf, \quad \text{où } f \text{ est intérieure.} \tag{4.2}$$

Des vérifications immédiates montrent que les relations (4.1) et (4.2) sont incompatibles. Tout zéro de q dans D est donc une valeur propre dans T. Le spectre de l'opérateur T est une partie compacte de D. La fonction intérieure q étant holomorphe sur D et non identiquement nulle, elle a au plus un nombre fini de zéros sur ce compact. Donc, l'ensemble (non vide) des zéros de q dans D est fini.

Par ailleurs, on sait que q se met sous la forme

$$q = bs, \tag{4.3}$$

où b est un produit de Blaschke et s une fonction intérieure sans zéros dans D (§ 1, n° 3.2). Les fonctions b et q ont les mêmes zéros dans D. Par suite, b est un produit de Blaschke fini, non constant, dont les zéros sont des valeurs propres de T. D'après le « Spectral Mapping Theorem », l'opérateur $s(T)$ est inversible; donc, les relations

$$q(T)(x) = s(T)\, b(T)(x) = 0$$

impliquent $b(T)(x) = 0$. Compte tenu de la relation (4.3) ci-dessus, on en déduit que b est une fonction minimum de T relative au vecteur x.

COROLLAIRE 1. — *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans la proposition* 1, *il existe un polynôme* R, *de degré supérieur ou égal à* 1, *ayant les deux propriétés suivantes :*

(i) $R(T)(x) = 0$;

(ii) *Les zéros de* R *sont des valeurs propres de* T.

Démonstration. — Il suffit de considérer le numérateur R du produit de Blaschke, donné par la proposition 1 (*cf.* [14], p. 41).

REMARQUE. — Soient H un espace hilbertien complexe, et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur ayant les propriétés

$$\| T \| < 1 \qquad \text{et} \qquad T \in C_0.$$

NAGY et FOIAS ont démontré dans [14] qu'il existe alors un polynôme P, de degré supérieur ou égal à 1, vérifiant $P(T) = 0$.

PROPOSITION 2. — *Soient* E *un espace de Banach complexe,* $T \in \mathcal{L}(E)$ *un opérateur ayant la propriété* $\rho(T) < 1$. *Soient* $x \in E$, *et* p *un nombre réel tel que* $1 \leq p \leq +\infty$.

Si on note Φ *l'application* $f \mapsto f(T)(x)$ *de* $\mathcal{H}^p$ *dans* E, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Φ *est injective;*

(ii) *Le sous-espace vectoriel de* E, *engendré par* $\{ T^n(x) \mid n \in \mathbf{N} \}$, *est de dimension infinie.*

Démonstration. — Il est clair que (i) implique (ii). Réciproquement, supposons Φ non injective. Alors, il existe un polynôme R, de degré supérieur ou égal à 1, vérifiant la relation $R(T)(x) = 0$. En effet, si $x = 0$, cela est évident, et si $x \neq 0$, cela résulte du corollaire 1. De la relation $R(T)(x) = 0$, on déduit que le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{ T^n(x) \mid n \in \mathbf{N} \}$ est de dimension finie (*cf.* [14], p. 42).

COROLLAIRE 2. — *Soient* H *un espace hilbertien complexe, séparable, de dimension infinie, et* $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une base orthonormale de* H. *Soient* E *un espace de Banach complexe,* $T \in \mathcal{L}(E)$ *un opérateur ayant la propriété* $\rho(T) < 1$. *Soit* $x \in E$. *Notons* V_x *l'application* $x' \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x', T^n(x) \rangle e_n$ *de* E' *dans* H. *Pour que* $V_x(E')$ *soit partout dense dans* H, *il faut et il suffit que le sous-espace vectoriel de* E *engendré par* $\{ T^n(x) \mid n \in \mathbf{N} \}$ *soit de dimension infinie.*

Démonstration. — L'application V_x a été introduite dans le paragraphe 2 (corol. de la prop. 1). On peut supposer que H est égal à l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2$, et e_n à l'application $\varphi_n : z \mapsto z^n$ ($|z| < 1$, $n \in \mathbf{N}$). Notons Λ l'involution

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\alpha}_n \varphi_n$$

de $\mathcal{H}^2$ sur lui-même $((\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}\in l^2)$. Si Φ est l'opérateur $f \mapsto f(T)(x)$ de $\mathcal{H}^2$ dans E, des vérifications immédiates montrent que l'on a

$$\mathcal{H}^2 \ominus \overline{V_x(E')} = \Lambda\,(\mathrm{Ker}\,\Phi).$$

Donc, le résultat découle de la proposition 2.

PROPOSITION 3. — *Soient E un espace de Banach complexe, de dimension infinie, et $T\in\mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T)<1$. Considérons les conditions :*

(i) *T possède un vecteur cyclique x;*

(ii) *T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple.*

Alors (i) *et* (ii) *sont équivalentes. De plus, si elles sont vérifiées, l'application*

$$(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto \Sigma_{n=0}^{+\infty}\,\alpha_n\,T^n(x)$$

de l^2 dans E est une injection nucléaire, à image dense.

Démonstration. — Supposons vérifiée la condition (i). Le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{T^n(x)\mid n\in\mathbf{N}\}$ est de dimension infinie. Donc, d'après la proposition 2, l'application $f\mapsto f(T)(x)$ de $\mathcal{H}^2$ dans E est injective. Utilisant alors la proposition 2 du paragraphe 3, on obtient (ii).

Par ailleurs, toute translation unilatérale simple a un vecteur cyclique. Donc, (ii) implique (i).

Si x est un vecteur cyclique pour T, soit Φ' l'application $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}\mapsto\Sigma_{n=0}^{+\infty}\,\alpha_n\,T^n(x)$ de l^2 dans E. Il est clair que $\Phi'(l^2)$ est partout dense dans E; des vérifications immédiates montrent que Φ' est nucléaire. Enfin, d'après la proposition 2, elle est injective.

REMARQUE. — On retrouve ainsi, en le précisant, un résultat annoncé récemment par GERLACH ([8], p. 251).

Indiquons quelques conséquences simples des résultats précédents.

PROPOSITION 4. — *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans la proposition* 3, *si T a un vecteur cyclique toute translation unilatérale simple est un modèle strict de type* 3 *pour T.*

PROPOSITION 5. — *Soient E un espace de Banach, et $A\in\mathcal{L}(E)$. Si on note $c(A)$ l'ensemble des vecteurs cycliques pour A, $c(A)$ est un G_δ de E. De plus, si E est complexe et de dimension infinie, $c(A)$ est vide ou total dans E.*

Démonstration. — Si $c(A)$ est vide, il est clair que $c(A)$ est un G_δ. Supposons $c(A)$ non vide. Soit $x_0\in c(A)$. Si on note $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{ A^n \mid n \in \mathbf{N} \}$ on a

$$c(A) = \cap_{m \in \mathbf{N}} \cup_{A' \in \mathcal{A}} \{ x \in E \mid \| A'(x) - x_0 \| < 1/(m+1) \},$$

(*cf.* [4], lemme 4). Donc $c(A)$ est un G_δ.

Supposons maintenant E complexe et de dimension infinie. Si $c(A)$ n'est pas vide, on voit que $c(A)$ est total dans E en utilisant la proposition 3, et en raisonnant exactement comme dans [14], remarque 4.

REMARQUE. — Si E est un espace hilbertien complexe, de dimension infinie, NAGY et FOIAS ont démontré que $c(A)$ est vide ou total dans E. Ce résultat a été généralisé au cas où E est un espace de Banach quelconque par M. L. GEHÉR (*cf.* [14], rem. 4).

PROPOSITION 6. — *Soient H un espace hilbertien complexe, séparable, de dimension infinie, et $S \in \mathcal{L}(H)$ une translation unilatérale simple. L'ensemble $c(S^*)$ est un G_δ partout dense dans H.*

Démonstration. — Il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^2)$ tel que l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés non triviaux de $\mathcal{H}^2$, stables par T, soit dénombrable ([5], ex. 1). Rangeons ses éléments en une suite $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$. On a

$$c(T) = \cap_{n \in \mathbf{N}} \complement E_n.$$

L'espace $\mathcal{H}^2$ étant un espace de Baire, on en déduit

$$\overline{c(T)} = \mathcal{H}^2.$$

De même, il vient

$$\overline{c(T^*)} = \mathcal{H}^2.$$

On peut supposer $\| T \| < 1$. Alors, d'après la proposition 3, S est une transformée quasi-affine de T, et, par suite, T^* est une transformée quasi-affine de S^*. On en déduit, par des vérifications immédiates, que $c(S^*)$ est partout dense dans H.

Enfin, d'après la proposition 5, $c(S^*)$ est un G_δ de H.

Le résultat est obtenu.

REMARQUE. — DOUGLAS, SHAPIRO et SHIELDS ont démontré que $c(S^*)$ est partout dense dans H et que $\complement c(S^*)$ est un ensemble de première catégorie (ou maigre) dans H ([6], cor. 2.2.10 et th. 2.3.3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMEMIYA (I.) and SHIGA (K.). — On tensor products of Banach spaces, *Kodai math. Sem. Rep.*, t. 9, 1957, p. 161-178.

[2] CHEVET (Simone). — Sur certains produits tensoriels topologiques d'espaces de Banach, *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 11, 1969, p. 120-138.

[3] COLOJOARA (I.) and FOIAS (C.). — *Theory of generalized spectral operators.* — New York, Gordon and Breach, 1968 (*Mathematics and its Applications*, 9).

[4] DIXMIER (J.) et MARÉCHAL (O.). — *Vecteurs totalisateurs d'une algèbre de von Neumann* (à paraître).

[5] DONOGHUE (W. F.). — The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasi-nilpotent transformation, *Pacific J. Math.*, t. 7, 1957, p. 1031-1035.

[6] DOUGLAS (R. G.), SHAPIRO (H. S.) and SHIELDS (A. L.). — Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 20, 1970, fasc. 1, p. 37-76.

[7] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J. T.). — *Linear operators*, Parts 1 and 2. — New York, Interscience Publishers, 1967 (*Pure and applied Mathematics*. Interscience, 7).

[8] GERLACH (E.). — Sous-espaces hilbertiens invariants pour un opérateur linéaire, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 272, 1971, série A, p. 251-253.

[9] GROTHENDIECK (A.). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* — Providence, American mathematical Society, 1955 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 16).

[10] GROTHENDIECK (A.). — Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo*, t. 8, 1956, p. 1-79.

[11] HELSON (H.). — *Lectures on invariant subspaces.* — New York, Academic Press, 1964.

[12] HOFFMAN (K.). — *Banach spaces of analytic functions.* — Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965 (*Prentice-Hall Series in modern Analysis*).

[13] NAGY (B. Sz.) et FOIAS (C.). — *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert.* — Paris, Masson et Cie; Budapest, Akadémiai Kiado, 1967.

[14] NAGY (B. Sz.) et FOIAS (C.). — Vecteurs cycliques et quasi-affinités, *Studia Math.*, Warszawa, t. 31, 1968, p. 35-42.

[15] ROTA (G. C.). — On models for linear operators, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 13, 1960, p. 469-472.

[16] ROTA (G. C.). — Note on the invariant subspaces of linear operators, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, série 2, t. 8, 1959, p. 182-184.

[17] SAPHAR (P.). — Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires, *Studia Math.*, Warszawa, t. 38, 1970, p. 71-100.

[18] SAPHAR (P.). — Applications à puissance nucléaire et applications de Hilbert-Schmidt dans les espaces de Banach, *Ann. scient. École Norm. Sup.*, t. 83, 1966, p. 113-151.

(Texte reçu le 19 octobre 1971.)

Bernard VIROT,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences d'Orléans,
Domaine universitaire de la Source,
45-Orléans 02.