BULLETIN DE LA S. M. F.

ROBERT CAUTY

Sur les sous-espaces des complexes simpliciaux

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 129-155
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__129_0>

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 129-155.

SUR LES SOUS-ESPACES DES COMPLEXES SIMPLICIAUX

PAR

ROBERT CAUTY

RÉSUMÉ. — Cet article a pour objet la possibilité de plonger un espace topologique dans un complexe simplicial. La caractérisation des espaces admettant un tel plongement est faite dans deux cas particuliers : 1° espaces vérifiant le premier axiome de dénombrabilité; 2° espaces pouvant être plongés comme sous-ensembles fermés dans des complexes simpliciaux. En particulier, tout CW-complexe a cette dernière propriété. L'étude des propriétés d'extension des sous-espaces fermés des complexes simpliciaux en est faite, et il est montré, en particulier, que si un CW-complexe est plongé comme fermé dans un complexe simplicial K, alors c'est un rétracte de voisinage de K.

Introduction. — Lorsqu'on cherche à démontrer que certains espaces peuvent être plongés dans des complexes simpliciaux, on se trouve confronté à des problèmes qui, pour simplifier, peuvent se schématiser comme suit : considérons un espace topologique X qui est réunion d'une famille $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de sous-espaces; supposons que chaque X_α puisse être plongé dans un complexe simplicial K_α. Nous cherchons un complexe simplicial K contenant chaque K_α et des modifications des plongements de X_α dans K_α ($\subset K$) qui se recollent en un plongement de X dans K. Pour ce faire, il est utile de plonger chaque K_α dans un espace vectoriel muni de la topologie finie (*voir* § 1) et de considérer la somme directe de ces espaces vectoriels, ce qui permet d'utiliser des arguments géométriques simples. Nous traiterons deux cas particuliers importants :

1° $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert de X (théorèmes 2, 3, 4);

2° $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de fermés dominant X. Ce dernier cas s'applique aux CW-complexes.

Au paragraphe 5 nous étudierons les propriétés d'extension des sous-ensembles fermés des complexes simpliciaux. Le résultat le plus important est que, si un CW-complexe est plongé comme sous-ensemble fermé dans un complexe simplicial K, alors c'est un rétracte de voisinage de K. Ce résultat est un cas particulier du théorème A.1 de l'appendice qui, dans un cas particulier, donne une réponse affirmative au problème suivant : Soit X un espace complètement normal dominé par une famille $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$

de fermés, et soit Y un espace topologique. Supposons que Y ait la propriété d'extension locale par rapport à chaque X_α. En résulte-t-il que Y a la propriété d'extension locale par rapport à X ?

L'auteur tient à exprimer ses remerciements à Michel Zisman pour l'aide apportée à la préparation de ce travail.

1. Notations et rappels

Nous ne considérons que des espaces vectoriels réels. Si E est un espace vectoriel réel, la topologie finie sur E est la plus fine des topologies telles que, pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie F de E (muni de sa topologie séparée naturelle), l'inclusion de F dans E soit continue. Rappelons les faits connus suivants :

(A) (S. Kakutani et V. Klee [7]) Si E est un espace vectoriel muni de la topologie finie, alors :

(i) la multiplication scalaire : $\mathbf{R}\times E \to E$ est continue;

(ii) chaque translation $x \to x + y$: $E \to E$ est continue;

(iii) l'addition : $E \times E \to E$ est continue, si et seulement si, la dimension de E est dénombrable.

(B) (J. Dugundji [3]) Si E est un espace vectoriel muni de la topologie finie, X un k-espace [1], et si f, g : $X \to E$ sont continues, alors $f + g$ est continue.

(C) Soient E, F des espaces vectoriels munis de la topologie finie. Si f : $E \to F$ est linéaire, alors f est continue.

Tous les espaces vectoriels que nous considérerons seront supposés munis de la topologie finie. Si E est un espace vectoriel de base $(e_i)_{i\in I}$, nous noterons $H(E)$, ou H, l'hyperplan affine $\Sigma_{i\in I}\, x_i = 1$, $(x_i)_{i\in I}$ étant les coordonnées du vecteur x dans $(e_i)_{i\in I}$, et $K(E)$, ou K, le simplexe géométrique de sommets $(e_i)_{i\in I}$ (i. e. l'enveloppe convexe de l'ensemble des e_i); alors la topologie induite sur K par la topologie finie de E est la topologie faible usuelle; en outre, $K \subset H$.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons implicitement que tous les espaces vectoriels considérés sont munis de bases, fixées une fois pour toutes.

Si $E = \bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha$, nous identifierons canoniquement chaque E_α à un sous-espace de E, et chaque application de X dans E_α à l'application correspondante de X dans E. Nous écrirons alors H_α et K_α au lieu de $H(E_\alpha)$

---

[1] Un espace séparé X est appelé un k-espace si tout sous-ensemble de X, dont l'intersection avec tout compact de X est fermée, est lui-même fermé.

et $K(E_\alpha)$. Si $B \subset A$, nous poserons

$$E_B = \bigoplus_{\alpha \in B} E_\alpha \subset E, \qquad H_B = H(E_B) \subset H, \qquad K_B = K(E_B) \subset K.$$

Si $B \subset B'$ et $B' \subset A$, alors $H_B \subset H_{B'}$ et $K_B \subset K_{B'}$.

Nous ne distinguerons pas un complexe simplicial de sa réalisation géométrique, le contexte indiquant à chaque fois de quoi il est question.

Soit L un complexe simplicial, et soient $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ les sommets de L. Soit E un espace vectoriel réel de base $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$. Alors L peut être considéré naturellement comme un sous-complexe de $K(E)$.

2. Sous-espaces métrisables

THÉORÈME 1. — *Si un sous-espace d'un CW-complexe vérifie le premier axiome de dénombrabilité, il est somme topologique d'une famille d'espaces métrisables séparables localement de dimension finie.*

Preuve. — Soit X un sous-ensemble d'un CW-complexe K. Supposons que X vérifie le premier axiome de dénombrabilité; soit x un point de X, et soit $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un système fondamental dénombrable de voisinages de x dans X tel que $U_{n+1} \subset U_n$ pour tout n. Supposons que chaque U_n rencontre une infinité de cellules ouvertes distinctes de K. Soit $x_0 \in U_0$ un point différent de x, et soit e_0 la cellule ouverte qui le contient. Supposons définis des points $x_i \in U_i$ et des cellules ouvertes e_i pour $i = 0, \ldots, n$ de façon que $x_i \neq x$, $x_i \in e_i \cap U_i$ pour tout i et que $e_i \neq e_j$ et $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$. Puisque U_{n+1} rencontre une infinité de cellules ouvertes de K, il existe une cellule ouverte e_{n+1} distincte des e_i $(i = 0, \ldots, n)$ et un point $x_{n+1} \neq x$ appartenant à $U_{n+1} \cap e_{n+1}$. Alors, $x_{n+1} \neq x_i$ pour $i = 0, \ldots, n$. Puisque, pour tout n, $x_n \in U_n$, la suite (x_n) ainsi définie par récurrence converge vers x. D'après la construction de cette suite, l'intersection de $A = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ avec chaque cellule fermée de K est finie, donc A est fermé; puisque $x \neq x_n$ pour tout n, $x \notin \overline{A}$, ce qui contredit le fait que x_n converge vers x. Ceci montre que tout point x de X a un voisinage U_x contenu dans un sous-complexe fini de K; U_x est donc métrisable, séparable et de dimension finie.

X est paracompact (tout sous-espace d'un CW-complexe est paracompact); d'après ce qui précède, il est localement métrisable, donc métrisable (*voir* par exemple [9], théorème 1); étant localement séparable, il est somme d'une famille d'espaces métrisables séparables qui sont nécessairement localement de dimension finie d'après ce qui précède.

THÉORÈME 2. — *Tout espace métrisable séparable localement de dimension finie X peut être plongé dans un complexe simplicial localement fini. En outre, si X est localement compact, on peut supposer que l'image de X par ce plongement est fermée.*

Preuve. — X étant métrisable séparable localement de dimension finie, on peut (à l'aide de [4], chap. V, § 3, corollaire du théorème 3) trouver un recouvrement ouvert $(V_i)_{i\in I}$ de X tel que chaque V_i soit de dimension finie et que, pour tout $i \in I$, $J_i = \{ j \in I \mid V_j \cap V_i \neq \emptyset \}$ soit fini. Il existe alors un entier N_i et un plongement φ_i de V_i dans $\mathbf{R}^{N_i}$ vérifiant

(1) $$\varphi_i (V_i) \subset K (\mathbf{R}^{N_i}).$$

Soit $(\pi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité localement finie telle que $\operatorname{Supp}(\pi_i) \subset V_i$ pour tout i; alors la fonction $\psi_i : X \to \mathbf{R}^{N_i}$ définie par

(2) $$\psi_i (x) = \begin{cases} \pi_i (x)\, \varphi_i (x) & \text{si} \quad x \in V_i, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin V_i \end{cases}$$

est continue.

En outre, $\psi_i \mid \pi_i^{-1} (]0, 1])$ est un homéomorphisme de cet ensemble sur son image; en effet, son injectivité est claire, et si $V \subset \pi_i^{-1} (]0, 1])$ est ouvert, alors $\varphi_i (V)$ est ouvert dans $\varphi_i (V_i)$, donc il existe un ouvert U de l'hyperplan affine $H (\mathbf{R}^{N_i})$ tel que $U \cap \varphi_i (V_i) = \varphi_i (V)$, Alors le cône épointé C, de sommet 0 et de base U, est ouvert dans $\mathbf{R}^{N_i}$, et il est immédiat que $\psi_i (X) \cap C = \psi_i (V)$, donc $\psi_i (V)$ est ouvert dans $\psi_i (X)$.

Soit alors $E = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{R}^{N_i}$. Munissons E de la topologie finie. Considérons l'application $\psi : X \to E$ définie par

(3) $$\psi (x) = \Sigma_{i \in I}\, \psi_i (x).$$

Si $x \in X$, il existe un voisinage V de x ne rencontrant qu'un nombre fini des V_i; sur V, toutes les fonctions ψ_i sauf un nombre fini sont nulles; il en résulte que la formule (3) a un sens, et que ψ est continue.

Soient $x, y \in X$, $x \neq y$; s'il existe $i \in I$ tel que $\pi_i (x) \neq 0 \neq \pi_i (y)$, alors $\varphi_i (x)$ et $\varphi_i (y)$ sont définis et ne sont pas sur la même demi-droite d'origine 0 dans $\mathbf{R}^{N_i}$; il en résulte que

$$\psi_i (x) = \pi_i (x)\, \varphi_i (x) \neq \pi_i (y)\, \varphi_i (y) = \psi_i (y),$$

donc $\psi (x) \neq \psi (y)$; sinon, il existe i tel que $\pi_i (x) \neq 0$ et $\pi_i (y) = 0$; alors $\psi_i (x) \neq 0 = \psi_i (y)$, donc $\psi (x) \neq \psi (y)$; ψ est donc injective.

Pour montrer que ψ est un homéomorphisme de X sur $\psi (X)$, il ne reste plus qu'à montrer que, pour tout ouvert V de X, $\psi (V)$ est ouvert dans $\psi (X)$. Soit $x \in V$; il existe un $i \in I$ tel que $x \in \pi_i^{-1} (]0, 1])$. Soit U un voisinage ouvert de x contenu dans $\pi_i^{-1} (]0, 1]) \cap V$. Alors, puisque $\psi_i \mid \pi_i^{-1} (]0, 1])$ est un homéomorphisme de $\pi_i^{-1} (]0, 1])$ sur son image, il existe un ouvert W de $\mathbf{R}^{N_i}$ tel que $W \cap \psi_i (\pi_i^{-1} (]0, 1])) = \psi_i (U)$; quitte à remplacer W par $W - \{ 0 \}$, on peut même supposer que $W \cap \psi_i (X) = \psi_i (U)$.

La projection naturelle

$$\alpha_i : \quad E = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{R}^{N_i} \to \mathbf{R}^{N_i}$$

est linéaire, donc continue; $\alpha_i^{-1}(W)$ est donc ouvert dans E; soit $z \in \alpha_i^{-1}(W) \cap \psi(X)$; alors $z = \psi(x)$ et

$$\alpha_i(z) = \alpha_i \psi(x) = \psi_i(x) \in W$$

donc $\psi_i(x) \in \psi_i(U)$; d'après le choix de U, $\psi_i(U)$ ne rencontre pas $\psi_i(\pi_i^{-1}(0))$; comme en outre $\psi_i \mid \pi_i^{-1}(]0, 1])$ est injective, on en déduit que $x \in U$. Ceci montre que

$$\psi(U) = \psi(X) \cap \alpha_i^{-1}(W);$$

$\psi_i(U)$ est donc ouvert dans $\psi(X)$; par suite, $\psi_i(V)$ est ouvert dans $\psi(X)$, et ψ est bien un homéomorphisme de X sur $\psi(X)$.

Reste à inclure $\psi(X)$ dans un complexe simplicial localement fini. Pour $i \in I$, soit $E_i = \bigoplus_{j \in J_i} \mathbf{R}^{N_j}$, et soit $L_i = K(E_i)$. L_i est un simplexe de dimension finie. Soit

$$L = \cup_{i \in I} L_i.$$

Si l'on note $e_1^i, \ldots, e_{N_i}^i$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^{N_i}$, les e_k^j ($j \in J_i$, $k = 1, \ldots, N_j$) sont les sommets de L_i; les seuls simplexes de L auxquels le sommet e_k^i peut appartenir sont évidemment les faces des L_j tels que $j \in J_i$; J_i étant fini, ces simplexes sont en nombre fini, donc L est localement fini.

Montrons que $\psi(X) \subset L$. Soit $x \in X$, et soient $i_1, \ldots, i_n$ les indices tels que $\pi_i(x) \neq 0$; alors $\Sigma_p\, \pi_{i_p}(x) = 1$, $1 \leq p \leq n$; pour $p = 1, \ldots, n$, on peut écrire

$$\varphi_{i_p}(x) = \Sigma_k\, \varphi_{i_p}^k\, e_k^{i_p}, \qquad 1 \leq k \leq N_{i_p},$$

où les $\varphi_{i_p}^k(x)$ sont les coordonnées de $\varphi_{i_p}(x)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^{N_{i_p}}$; d'après (1), $\Sigma_k\, \varphi_{i_p}^k(x) = 1$, $1 \leq k \leq N_{i_p}$. Alors

$$\psi(x) = \Sigma_p\, \psi_{i_p}(x) = \Sigma_p\, \Sigma_k\, \pi_{i_p}(x)\, \varphi_{i_p}^k(x)\, e_k^{i_p},$$
$$1 \leq p \leq n, \qquad 1 \leq k \leq N_{i_p},$$

avec

$$\Sigma_p\, \Sigma_k\, \pi_{i_p}(x)\, \varphi_{i_p}^k(x) = \Sigma_p\, \pi_{i_p}(x)\, (\Sigma_k\, \varphi_{i_p}^k(x)) = \Sigma_i\, \pi_{i_p}(x) = 1,$$
$$1 \leq p \leq n, \qquad 1 \leq k \leq \mathrm{N}_{i_p}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Mais, pour $p = 1, \ldots, n$, $i_p \in J_{i_1}$, donc les $e_k^{i_p}$ sont des sommets du simplexe L_{i_1}; par suite, $\psi(x) \in L_{i_1}$ d'après ce qui précède [en fait $\psi(x) \in L_{i_1} \cap L_{i_2} \cap \ldots \cap L_{i_p}$]. D'où $\psi(X) \subset L$.

Si X est localement compact, on peut supposer chaque V_i relativement compact. Alors $F_i = \overline{\pi_i^{-1}(]0, 1])}$ est un recouvrement fermé de X tel que $F_i \subset V_i$ pour tout i. Remarquons que si $\psi(x) \in L_i$, alors il existe $j \in J_i$ tel que $\psi_j(x) \neq 0$, d'où $x \in F_j$, et par conséquent

$$L_i \cap \psi(X) = L_i \cap \psi(\cup_{j \in J_i} F_j) = \cup_{j \in J_i} L_i \cap \psi(F_j).$$

Mais F_j est un fermé contenu dans l'ensemble relativement compact V_j, donc est compact; $\psi(F_j)$ est donc compact, et $L_i \cap \psi(X)$, réunion finie de compacts, est compact, donc fermé. Ceci étant vrai pour tout $i \in I$, $\psi(X)$ est fermé dans L.

Des théorèmes 1 et 2, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire. — *Un espace vérifiant le premier axiome de dénombrabilité peut être plongé dans un complexe simplicial si, et seulement si, c'est une somme topologique d'espaces métrisables séparables localement de dimension finie.*

3. Espaces localement homéomorphes à des sous-ensembles de complexes simpliciaux

Théorème 3. — *Soit X un k-espace paracompact. Si tout point de X a un voisinage homéomorphe à un sous-ensemble d'un complexe simplicial, alors X est homéomorphe à un sous-ensemble d'un complexe simplicial.*

Preuve. — X étant paracompact, il existe un recouvrement ouvert localement fini $(V_i)_{i \in I}$ de X tel que chaque V_i soit homéomorphe à un sous-ensemble d'un complexe simplicial. Il existe donc, pour tout i, un espace vectoriel E_i et un plongement $\varphi_i : V_i \to K_i = K(E_i)$.

Soit $(\pi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité localement finie telle que $\operatorname{Supp}(\pi_i) \subset V_i$ pour tout i. Alors la fonction $\psi_i : X \to E$ définie par

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \pi_i(x)\,\varphi_i(x) & \text{si } x \in V_i, \\ 0 & \text{si } x \notin V_i \end{cases}$$

est continue.

On prouve, comme dans la démonstration du théorème 2, que $\psi_i \mid \pi_i^{-1}(]0, 1])$ est un homéomorphisme de cet ensemble sur son image.

Soit alors $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$. Munissons E de la topologie finie, et considérons l'application $\psi : X \to E$ définie par

$$\psi(x) = \Sigma_{i \in I}\, \psi_i(x).$$

Si $x \in X$, il existe un voisinage fermé V de x ne rencontrant qu'un nombre fini des V_i; sur V, toutes les fonctions ψ_i, sauf un nombre fini, sont nulles, donc la définition de $\psi(x)$ a un sens. En outre, V est un k-espace, donc [*voir* § 1 (B)] $\psi \mid V$ est continue, donc ψ est continue.

Comme dans la démonstration du théorème 2, on montre que ψ est un homéomorphisme de X sur $\psi(X)$. En outre, on vérifie facilement que $\psi(X) \subset K$, d'où le théorème.

REMARQUE. — L'hypothèse que X est un k-espace n'est utilisée que pour montrer la continuité de ψ; on ne s'en sert pas pour montrer que ψ est ouverte. Le théorème 4 ci-dessous montre que si l'on abandonne cette hypothèse, la conclusion précédente reste vraie si chaque point de X a un voisinage homéomorphe à un sous-ensemble d'un complexe simplicial dénombrable. On peut se demander s'il en est ainsi dans le cas général ([2]).

En relation avec ce problème, l'exemple qui suit montre qu'un sous-ensemble d'un complexe simplicial n'est pas nécessairement un k-espace; il montre en outre que si K est un complexe simplicial et si $x \in V \subset K$, il se peut que V ne soit pas un voisinage de x dans K bien que, pour tout simplexe fermé σ contenant x, $\sigma \cap V$ soit un voisinage de x dans σ. En fait, même si $V \cap K^n$ est un voisinage de x dans K^n pour tout n, V peut ne pas être un voisinage de x dans K (prendre par exemple $x = \omega$ et $V = K - F$).

EXEMPLE. — Soit L le simplexe de sommets $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, soit $\omega \notin L$ et soit $K = \omega \star L$. Tout élément y de K se met de façon unique sous la forme

$$y = \alpha\omega + \Sigma_i t_i x_i$$

où α, t_i sont des réels $\geqq 0$, tous nuls, sauf un nombre fini, vérifiant $\alpha + \Sigma_i t_i = 1$. Posons $n(y) =$ nombre d'indices i tels que $t_i \neq 0$,

$$F_n = \{ y \in K \mid n(y) = n \text{ et } \alpha \leqq 1 - (1/n) \} \qquad (n \geqq 1),$$
$$F = \cup_{n \geqq 1} F_n,$$
$$Y = F \cup \{ \omega \}.$$

Alors $\bar{F}_n$ contient l'ensemble des $y \in K$ vérifiant $n(y) \leqq n$ et $\alpha \leqq 1 - (1/n)$ $(n \geqq 1)$. On en déduit facilement les relations

$$\cup_n \bar{F}_n \supset K - \{ \omega \}$$

et

$$\bar{F} \supset \overline{\cup_n \bar{F}_n} = K.$$

Cependant, si $x \in K^n$, alors $n(x) \leqq n$, donc $K^n \cap F_m = \emptyset$ pour $m > n$; par suite,

$$K^n - F = K^n - (\cup_{m=1}^{n} F_m),$$

([2]) Des méthodes différentes développées récemment par l'auteur permettent de montrer que la réponse à ce problème est affirmative.

d'où

$$K^n - F \supset \{ x \in K^n / \alpha > 1 - 1/n \} \ni \omega$$

donc $K^n - F$ est un voisinage de ω dans K^n pour tout n, bien que F soit partout dense dans K.

Si $H \subset Y$ est compact, il existe un n tel que $H \subset K^n$, alors $H \cap F = H \cap K^n \cap F$; d'après ce qui précède $K^n \cap F$ est fermé dans $K^n \cap Y$, donc $H \cap F$ est fermé dans $H = H \cap K^n \cap Y$. Puisque F n'est pas fermé dans Y, Y n'est pas un k-espace.

Lemme 1. — *Soit K un CW-complexe. Pour un sous-espace X de K, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est un espace de Lindelöf;*

(ii) *X est séparable;*

(iii) *X est contenu dans un sous-complexe dénombrable de K.*

Preuve. — (i) $\Rightarrow$ (iii) : Si X n'est pas contenu dans un sous-complexe dénombrable de K, il rencontre une infinité indénombrable de cellules ouvertes distinctes $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ de K. Pour tout $\alpha \in A$, soit $x_\alpha \in X \cap e_\alpha$. Alors l'intersection de $Y = \{ x_\alpha \mid \alpha \in A \}$ avec chaque cellule fermée de K est finie, donc Y est un fermé discret indénombrable de X.

Il suffit donc de montrer qu'un espace de Lindelöf X ne contient aucun sous-ensemble fermé discret indénombrable. En effet, si Y est un tel sous-ensemble, alors, pour tout $y \in Y$, $O_y = X - (Y - \{ y \})$ est un ouvert de X; les O_y recouvrent X; ce recouvrement est irréductible car, si $y \in Y$, alors

$$y \notin \cup_{y' \neq y} O_{y'} = X - \{ y \}.$$

Mais, ce recouvrement étant indénombrable, ceci contredit le fait que X est un espace de Lindelöf.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Puisque tout point d'un CW-complexe est contenu dans un sous-complexe fini, tout sous-ensemble dénombrable A de K est contenu dans un sous-complexe dénombrable L. Mais, L étant fermé dans K, $\overline{A}$ est contenu dans L. L'implication en résulte.

(iii) $\Rightarrow$ (i) et (ii) : Soit L un sous-complexe dénombrable de K, et soient $(e_i)_{i \in I}$ les cellules de L; alors I est dénombrable. Si X est contenu dans L, alors $X = \cup_{i \in I} (X \cap e_i)$; mais chaque $X \cap e_i$ est un sous-ensemble métrisable séparable, donc un espace de Lindelöf séparable, et une réunion dénombrable de tels sous-espaces est encore un espace de Lindelöf séparable.

Remarque 1. — L'équivalence des propriétés (i) et (ii) est un fait très particulier aux sous-espaces des complexes simpliciaux; en général, aucune d'elles n'implique l'autre.

REMARQUE 2. — Le lemme 1 montre que, pour les sous-espaces des complexes simpliciaux, les propriétés (i) et (ii) sont héréditaires, ce qui est faux dans le cas général.

LEMME 2. — *Soit X un espace topologique vérifiant :*

(i) *Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X plus fin que $\mathcal{U}$ et ponctuellement dénombrable.*

(ii) *Tout point de X a un voisinage séparable.*

Alors, X est somme topologique d'espaces séparables.

Preuve. — D'après (i) et (ii), il existe un recouvrement ponctuellement dénombrable $\mathcal{U} = \{ U_i \}_{i \in I}$ de X par des sous-espaces ouverts séparables. Soit $i \in I$, et soit $A_{i,0}$ un sous-ensemble dénombrable partout dense de U_i. Soit $I_{i,1} = \{ j \in I / U_j \cap U_i \neq \emptyset \} = \{ j \in I \mid U_j \cap A_{i,0} \neq \emptyset \}$. $I_{i,1}$ est dénombrable, car $A_{i,0}$ est dénombrable, et $\mathcal{U}$ est ponctuellement dénombrable. Soit $V_{i,1} = \cup_{j \in I_{i,1}} U_j$; $V_{i,1}$ est séparable; soit $A_{i,1}$ un sous-ensemble dénombrable partout dense de $V_{i,1}$. Par récurrence, supposons définis des sous-ensembles dénombrables $I_{i,k}$ de I, des ouverts séparables $V_{i,k}$ de X et des sous-ensembles dénombrables partout denses $A_{i,k}$ de $V_{i,k}$ pour $k = 1, \ldots, n$. Soit

$$I_{i,n+1} = \{ j \in I \mid U_j \cap V_{i,n} \neq \emptyset \} = \{ j \in I \mid U_j \cap A_{i,n} \neq \emptyset \}.$$

$I_{i,n+1}$ est dénombrable, donc $V_{i,n+1} = \cup_{j \in I_{i,n+1}} U_j$ est séparable; soit $A_{i,n+1}$ un sous-ensemble dénombrable partout dense de $V_{i,n+1}$. Ces ensembles étant ainsi définis par récurrence, posons

$$I_i = \cup_{n \geq 1} I_{i,n}, \qquad V_i = \cup_{j \in I_i} U_j = \cup_{n \geq 1} V_{i,n}.$$

Alors, V_i est un ouvert séparable de X. On vérifie facilement que si $i \neq i'$, ou bien $V_i = V_{i'}$, ou bien $V_i \cap V_{i'} = \emptyset$. Il en résulte que X est somme topologique des sous-espaces séparables V_i.

THÉORÈME 4. — *Soit X un espace paracompact. Si tout point de X a un voisinage homéomorphe à un sous-ensemble d'un complexe simplicial dénombrable, alors X est homéomorphe à un sous-ensemble d'une somme topologique de complexes simpliciaux dénombrables.*

Preuve. — Par hypothèse, X possède un recouvrement ouvert localement fini $(U_i)_{i \in I}$ tel que chaque U_i soit homéomorphe à un sous-espace d'un complexe simplicial dénombrable. D'après le lemme 1, chaque U_i est séparable et de Lindelöf. Alors, chacun des ensembles V_i construits dans la démonstration du lemme 2 est la réunion d'une sous-famille dénombrable de $(U_i)_{i \in I}$, donc est séparable et de Lindelöf. X est donc somme topologique de sous-espaces séparables de Lindelöf. Il suffit donc de prouver le théorème dans le cas où X lui-même a cette dernière propriété.

Reprenons alors la démonstration du théorème 3; on peut supposer le recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ dénombrable, et chaque espace vectoriel E_i de dimension dénombrable. Alors, E est de dimension dénombrable. La continuité de ψ résulte alors du (A) (iii) au lieu du (B) du paragraphe 1. Le reste de la démonstration s'applique sans changement. On obtient ainsi un plongement de X dans un complexe simplicial dénombrable.

C. Q. F. D.

4. Sous-espaces fermés

THÉORÈME 5. — *Soient X, Y des espaces topologiques, A un fermé de X, et f une application continue de A dans Y. Supposons que X puisse être plongé comme sous-ensemble fermé dans un complexe simplicial, et que Y puisse être plongé dans un complexe simplicial. Alors, $X \cup_f Y$ peut être plongé dans un complexe simplicial.*

Preuve. — On peut trouver des espaces vectoriels E_1, E_2 et des plongements

$$\varphi_1 : \quad X \to K_1 \subset E_1,$$
$$\varphi_2 : \quad Y \to K_2 \subset E_2,$$

l'image de φ_1 étant en outre fermée dans K_1. Alors (*voir* [2]), $\bar{r} = \varphi_2 \circ f : A \to K_2$ peut se prolonger en $r : X \to K_2$. Comme X est homéomorphe à un sous-ensemble d'un complexe simplicial, il est parfaitement normal, donc il existe $\theta : X \to [0, 1]$ continue telle que $\theta^{-1}(0) = A$.

Soient $Z = X \amalg Y$, $Z' = X \cup_f Y$, et π la projection canonique de Z sur Z'. Définissons $h : Z \to E = E_1 \oplus E_2$ par

$$h(x) = \theta(x)\,\varphi_1(x) + (1 - \theta(x))\,r(x) \qquad \text{si} \quad x \in X,$$
$$h(y) = \varphi_2(y) \qquad \text{si} \quad y \in Y.$$

X, étant homéomorphe à un sous-ensemble fermé d'un complexe simplicial, est un k-espace, donc $h \mid X$ est continue [§ 1 (B)]; $h \mid Y$ étant trivialement continue, h est continue. En outre, $h(Z)$ est contenu dans K.

Si $x \in A$, $\theta(x) = 0$, donc $h(x) = r(x) = \varphi_2 \circ f(x) = h(f(x))$, donc h définit, par passage au quotient, une application continue

$$h' : \quad Z' \to K \subset E.$$

Soient x', y' des points distincts de Z', et soient x et y des représentants de x' et y' respectivement dans Z. On peut toujours choisir ces représentants soit dans Y, soit dans $X - A$; si $x, y \in Y$, alors $x \neq y$ et

$$h(x) = \varphi_2(x) \neq \varphi_2(y) = h(y);$$

si $x \in X - A$ et $y \in Y$, alors $\theta(x)\,\varphi_1(x) \neq 0$, donc $h(x) \notin K_2$; comme $h(y) = \varphi_2(y) \in K_2$, on a $h(x) \neq h(y)$; si x, $y \in X - A$, alors $\varphi_1(x)$ et

$\varphi_1(y)$ ne sont pas sur la même demi-droite d'origine 0 dans E_1, et, comme $\theta(x) \neq 0 \neq \theta(y)$, on a $\theta(x)\varphi_1(x) \neq \theta(y)\varphi_1(y)$, d'où $h(x) \neq h(y)$.

On a donc, dans tous les cas, $h(x) \neq h(y)$, d'où $h'(x') \neq h'(y')$: h' est injective.

Soit F' un fermé de Z'; posons $F = \pi^{-1}(F')$, $F_1 = F \cap X$, $F_2 = F \cap Y$. Alors F est fermé dans Z, F_1 fermé dans X et F_2 fermé dans Y. Comme φ_1 est un plongement, $\varphi_1(F_1)$ est fermé dans $\varphi_1(X)$, donc dans E_1; comme φ_2 est un plongement, il existe un fermé A_2 de K_2 tel que $A_2 \cap \varphi_2(Y) = \varphi_2(F_2)$. Nous voulons montrer que $h'(F') = h(F)$ est fermé dans $h'(Z') = h(Z)$. Pour cela, il suffit de démontrer que :

(1) $$A_2 \cup h(F_1) \text{ est fermé dans } E;$$

(2) $$h(Z) \cap (A_2 \cup h(F_1)) = h(F).$$

Pour prouver (1), il faut montrer que, pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie G de E, l'ensemble $G \cap (A_2 \cup h(F_1))$ est fermé dans G; il suffit évidemment de le faire lorsque $G = G_1 \oplus G_2$, où G_i est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E_i $(i = 1, 2)$.

Montrons d'abord que, si $G = G_1 \oplus G_2$, alors

(3) $$G \cap (A_2 \cup h(F_1)) = (A_2 \cap G) \cup [h(\varphi_1^{-1}(\varphi_1(F_1) \cap G_1)) \cap G].$$

En effet,
$$G \cap (A_2 \cup h(F_1)) = (G \cap A_2) \cup (G \cap h(F_1))$$
et, de
$$\varphi_1^{-1}(\varphi_1(F_1) \cap G_1) \subset \varphi_1^{-1}\varphi_1(F_1) = F_1,$$

on déduit que $h(\varphi_1^{-1}(\varphi_1(F_1) \cap G_1))$ est contenu dans $h(F_1)$, d'où
$$G \cap (A_2 \cup h(F_1)) \supset (A_2 \cap G) \cup [h(\varphi_1^{-1}(\varphi_1(F_1) \cap G_1)) \cap G].$$

Inversement, soit $t \in G \cap h(F_1)$; alors $t = h(z)$ avec $z \in F_1$; si $z \in F_1 \cap A$, alors $f(z) \in F_2$ et $h(z) = h(f(z)) \in h(F_2) = \varphi_2(F_2) \subset A_2$, donc $t \in G \cap A_2$. Si $z \in F_1 - A$, alors d'après la définition de h, $\varphi_1(z)$ et la projection de $h(z)$ sur E_1 sont sur la même demi-droite d'origine 0 dans E_1; par suite, puisque $h(z) \in G_1 \oplus G_2$, on a $\varphi_1(z) \in G_1$, i. e. $\varphi_1(z) \in \varphi_1(F_1) \cap G_1$, donc $h(z) \in h(\varphi_1^{-1}(\varphi_1(F_1) \cap G_1)) \cap G$.

On constate donc que
$$(G \cap A_2) \cup (G \cap h(F_1)) \subset (G \cap A_2) \cup [h(\varphi_1^{-1}(\varphi_1(F_1) \cap G_1)) \cap G],$$

d'où l'égalité (3).

$\varphi_1(F_1) \cap G_1$ est un fermé contenu dans $K_1 \cap G_1$; si G_1 est de dimension finie, $K \cap G_1$ est compact, donc aussi $\varphi_1(F_1) \cap G_1$ et il en est de même de $\varphi_1^{-1}(\varphi_1(F_1) \cap G_1)$ et de $h(\varphi_1^{-1}(\varphi_1(F_1) \cap G_1))$, donc de

$h(\varphi_1^{-1}(\varphi_1(F_1) \cap G_1)) \cap G$. Ce dernier ensemble est donc fermé dans G. Comme $A_2 \cap G$ est fermé dans G, il résulte de (3) que $G \cap (A_2 \cup h(F_1))$ est réunion de deux fermés, donc est fermé. Ceci prouve (1).

Preuve de (2). — Puisque $h(F_2) \subset A_2$, on a

$$h(F) = h(F_1 \cup F_2) = h(F_1) \cup h(F_2) \subset h(F_1) \cup A_2.$$

Inversement, soit $t \in h(Z) \cap (h(F_1) \cup A_2)$; si t n'appartient pas à $h(F)$, il n'appartient pas à $h(F_1)$, donc appartient à A_2. On peut écrire $t = h(z)$, $z \in Z$; si $z \in Y$, alors

$$h(z) = \varphi_2(z) \in \varphi_2(F_2) = h(F_2), \qquad \text{car} \quad A_2 \cap \varphi_2(Y) = \varphi_2(F_2);$$

ceci étant impossible, $z \in X$; alors $z \in A$, car $h(X - A)$ ne rencontre pas $E_2 \supset A_2$; mais alors $h(z) = h(f(z))$ avec $f(z) \in Y$, ce qui est impossible d'après ce qu'on vient de voir. Par suite, $t \in h(F)$. Ceci prouve (2).

Ceci achève de prouver que h' est un homéomorphisme de Z' sur $h'(Z')$.

Remarque. — Si $\varphi_2(Y)$ est fermé dans K_2, on peut, dans la démonstration précédente, prendre $A_2 = \varphi_2(F_2)$. En particulier, $h'(Z')$ est fermé dans K.

Définition. — *Soit X un espace topologique. On dit qu'un recouvrement fermé* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ *de X domine X si, étant donnés un sous-ensemble F de X et un sous-ensemble B de A tels que*

(i) $F \subset \bigcup_{\alpha \in B} X_\alpha$ *et*

(ii) $F \cap X_\alpha$ *est fermé pour tout* $\alpha \in B$,
alors F est fermé dans X.

Théorème 6. — *Supposons que l'espace topologique X soit dominé par un recouvrement fermé* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$. *Si chaque* X_α *peut être plongé comme sous-ensemble fermé dans un complexe simplicial, alors X peut être plongé comme sous-ensemble fermé dans un complexe simplicial.*

Preuve. — Pour tout $\alpha \in A$, il existe un espace vectoriel E_α et un plongement $\varphi_\alpha : X_\alpha \to K_\alpha \subset E_\alpha$ tel que $\varphi_\alpha(X_\alpha)$ soit fermé dans K_α. Soit $E = \bigoplus_{\alpha \in A} E_\alpha$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples (B, φ_B), où $B \subset A$, et φ_B est un plongement de $X_B = \bigcup_{\alpha \in B} X_\alpha$ sur un sous-ensemble fermé de K_B. Alors $\mathcal{C}$ n'est pas vide. Définissons un ordre dans $\mathcal{C}$ par

$$(B, \varphi_B) \leqq (B', \varphi_{B'}) \iff \begin{cases} B \subset B', \\ \varphi_{B'} | X_B = \varphi_B \quad \text{et} \quad \varphi_{B'}(X_{B'} - X_B) \cap K_B = \emptyset. \end{cases}$$

Soit $(B_i, \varphi_{B_i})_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{C}$. Soit $B = \bigcup_{i \in I} B_i$. Alors

$$X_B = \bigcup_{\alpha \in B} X_\alpha = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{\alpha \in B_i} X_\alpha = \bigcup_{i \in I} X_{B_i}.$$

Si $x \in X_{B_{i_1}} \cap X_{B_{i_2}}$, on a par exemple, $(B_{i_1}, \varphi_{B_{i_1}}) \leqq (B_{i_2}, \varphi_{B_{i_2}})$, d'où

$$\varphi_{B_{i_1}}(x) = \varphi_{B_{i_2}}(x) \in K_{B_{i_1}} \subset K_B.$$

On définit donc sans ambiguïté une fonction $\varphi_B : X_B \to K_B$ par

$$\varphi_B \mid X_{B_i} = \varphi_{B_i} \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Alors, pour tout $i \in I$, $\varphi_B \mid X_{B_i}$ est continue donc, puisque $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ domine X, φ_B est continue. Soient $x, y \in X_B$. Alors $x \in X_{B_i}$, $y \in X_{B_j}$ avec, par exemple, $(B_i, \varphi_{B_i}) \leqq (B_j, \varphi_{B_j})$, d'où $x, y \in X_{B_j}$ et, si $x \neq y$, on a

$$\varphi_B(x) = \varphi_{B_j}(x) \neq \varphi_{B_j}(y) = \varphi_B(y).$$

φ_B est donc injective.

Soit F un fermé de X_B. Pour montrer que $\varphi_B(F)$ est fermé dans K_B, il faut montrer que, pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie G de E_B, $\varphi_B(F) \cap G$ est fermé dans E_B. Puisque

$$E_B = \bigoplus_{\alpha \in B} E_\alpha = \Sigma_{i \in I} \bigoplus_{\alpha \in B_i} E_\alpha = \Sigma_{i \in I} E_{B_i},$$

il existe un nombre fini d'indices $i_1, \ldots, i_n$ tels que $G \subset \Sigma_{k=1}^n E_{B_{i_k}}$. Alors, par exemple, $(B_{i_j}, \varphi_{B_{i_j}}) \leqq (B_{i_n}, \varphi_{B_{i_n}})$ pour $1 \leqq j \leqq n$, donc $B_{i_j} \subset B_{i_n}$ pour $1 \leqq j \leqq n$ et $\Sigma_{k=1}^n E_{B_{i_k}} = E_{B_{i_n}}$. Soit $x \in X_B - X_{B_{i_n}}$, et soit i tel que $x \in X_B$. Alors $(B_i, \varphi_{B_i}) \not\leqq (B_{i_n}, \varphi_{B_{i_n}})$, donc $(B_{i_n}, \varphi_{B_{i_n}}) \leqq (B_i, \varphi_{B_i})$, d'où, d'après la définition de la relation $\leqq$, $\varphi_B(x) = \varphi_{B_i}(x) \notin K_{B_{i_n}}$. Par suite,

$$\varphi_B(F) \cap K_{B_{i_n}} = \varphi_B(F \cap X_{B_{i_n}}) \cap K_{B_{i_n}} = \varphi_{B_{i_n}}(F \cap X_{B_{i_n}}) \cap K_{B_{i_n}}$$

donc, puisque $\varphi_{B_{i_n}}$ est un homéomorphisme de $X_{B_{i_n}}$ sur un fermé de $K_{B_{i_n}}$, cet ensemble est fermé dans $K_{B_{i_n}}$; alors

$$\varphi_B(F) \cap G = \varphi_B(F) \cap E_{B_{i_n}} \cap G = \varphi_B(F) \cap K_{B_{i_n}} \cap G$$

est fermé dans G. φ_B est donc fermé : c'est un plongement de X_B sur un sous-ensemble fermé de K_B. Par construction, $B_i \subset B$ et $\varphi_B \mid X_{B_i} = \varphi_{B_i}$ pour tout $i \in I$. Si $x \in X_B - X_{B_i}$, soit $j \in I$ tel que $x \in X_{B_j}$; alors

$$(B_j, \varphi_{B_j}) \not\leqq (B_i, \varphi_{B_i}), \text{ donc } (B_i, \varphi_{B_i}) \leqq (B_j, \varphi_{B_j}),$$

et $\varphi_B(x) = \varphi_{B_j}(x) \notin K_{B_i}$, d'où

$$\varphi_B(X_B - X_{B_i}) \cap K_{B_i} = \emptyset \quad \text{pour tout } i \in I$$

i. e.

$$(B_i, \varphi_{B_i}) \leqq (B, \varphi_B) \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Soit (B_0, φ_{B_0}) un élément maximal de $\mathcal{C}$. Supposons que $X_{B_0} \neq X$. Il existe alors $x \in X - X_{B_0}$ et $\alpha \in A$ tel que $x \in X_\alpha$. Soit $B = B_0 \cup \{ \alpha \}$. La démonstration du théorème 5 montre que φ_{B_0} peut se prolonger en un plongement $\varphi_B : X_B \to K_B$ tel que $\varphi_B(X_B)$ soit fermé dans K_B et que

$$\varphi_B(X_B - X_{B_0}) = \varphi_B(X_\alpha - X_{B_0}) \subset K_B - K_{B_0}$$

(prendre $X = X_\alpha$, $Y = X_{B_0}$, $A = X_\alpha \cap X_{B_0}$, pour f l'inclusion de A dans X_{B_0}, $E_1 = E_\alpha$, $E_2 = E_{B_0}$, $E = E_\alpha \oplus E_{B_0} = E_B$ dans la démonstration du théorème 5). Ceci contredit la maximalité de (B_0, φ_{B_0}), donc $X = X_{B_0}$ et le théorème en résulte.

Corollaire 1. — *Soit X un espace paracompact. Si tout point de X a un voisinage homéomorphe à un sous-ensemble fermé d'un complexe simplicial, alors X est homéomorphe à un sous-ensemble fermé d'un complexe simplicial.*

Preuve. — Il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = \{ V_i \}_{i \in I}$ de X tel que, pour tout $i \in I$, $\overline{V_i}$ puisse être plongé comme sous-ensemble fermé dans un complexe simplicial. X étant paracompact, il existe un recouvrement fermé localement fini $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X plus fin que $\mathcal{V}$. Alors, chaque F_α peut être plongé comme sous-ensemble fermé dans un complexe simplicial et $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ domine X.

Corollaire 2. — *Tout CW-complexe est homéomorphe à un sous-ensemble fermé d'un complexe simplicial.*

C'est une conséquence du corollaire suivant :

Corollaire 3. — *Un espace topologique X peut être plongé comme sous-ensemble fermé dans un complexe simplicial si, et seulement si, il est dominé par un recouvrement fermé $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ tel que chaque F_α soit un espace compact métrisable de dimension finie.*

Preuve. — La *nécessité* résulte du fait qu'un fermé X d'un complexe simplicial K est dominé par la famille de fermés $\sigma \cap X$, où σ parcourt les simplexes de K, et chaque tel sous-ensemble est compact, métrisable et de dimension finie.

La *suffisance* est une conséquence immédiate du théorème 6.

5. Propriétés d'extension

Soit Q la classe des espaces topologiques qui peuvent être plongés comme sous-ensemble fermés dans des complexes simpliciaux.

Un espace $Y \in Q$ est appelé un r. a. v. (Q) si, pour tout $X \in Q$, tout fermé de X homéomorphe à Y est un rétracte de voisinage de X.

Nous dirons qu'un espace topologique Y a la propriété d'extension (locale) par rapport à un espace topologique X si pour tout fermé A de X, toute application continue de A dans Y a un prolongement continu à X (resp. à un voisinage de A dans X).

Nous dirons qu'un espace topologique Y a la propriété d'extension (locale) par rapport à une classe $\mathfrak{L}$ d'espaces topologiques s'il a la propriété d'extension (locale) par rapport à tout espace de $\mathfrak{L}$.

THÉORÈME 7. — *Pour un espace $Y \in Q$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Y a la propriété d'extension locale par rapport à la classe Q;*

(ii) *Y est un r. a. v. (Q);*

(iii) *Y est homéomorphe à un rétracte de voisinage d'un complexe simplicial;*

(iv) *Y a la propriété d'extension locale par rapport à tout espace X qui est dominé par une famille $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de sous-ensembles fermés métrisables.*

Preuve. — (i) $\Rightarrow$ (ii) : trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Il est connu, et facile de vérifier, que si Y a la propriété d'extension locale par rapport à un espace X, alors tout ouvert de Y et tout rétracte de Y a aussi cette propriété. Nous pouvons donc supposer que Y est un complexe simplicial. Puisqu'un complexe simplicial est homéomorphe à un rétracte de voisinage d'un simplexe, il suffit de démontrer (iv) dans le cas d'un simplexe. Puisqu'un simplexe a en fait la propriété d'extension par rapport à tout espace métrique ([2], corol. (5.3)); l'implication résulte du lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit X un espace dominé par un recouvrement fermé $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$. Si un espace topologique Y a la propriété d'extension par rapport à chaque X_α, alors Y a la propriété d'extension par rapport à X.*

Preuve du lemme. — Soient F un fermé de X, et f une application continue de F dans Y. Si $B \subset A$, soit $X_B = \cup_{\alpha \in B} X_\alpha$. Considérons l'ensemble $\mathfrak{M}$ des couples (B, f_B), où $B \subset A$, et $f_B : X_B \to Y$ est une fonction continue telle que $f_B \mid X_B \cap F = f \mid X_B \cap F$. Ordonnons $\mathfrak{M}$, en convenant que

$$(B, f_B) \leq (B', f_{B'}) \iff B \subset B' \quad \text{et} \quad f_B = f_{B'} \mid X_B.$$

Il est facile de vérifier que $\mathfrak{M}$ est inductif. Soit (B, f_B) un élément maximal de $\mathfrak{M}$. Supposons X_B différent de X. Alors, il existe $\alpha \in A$ tel que $X_\alpha - X_B$ soit non vide. Soit $B' = B \cup \{ \alpha \}$ et soit $X_{B'} = X_B \cup X_\alpha$.

$(X_B \cap X_\alpha) \cup (F \cap X_\alpha)$ est un fermé de X_α et l'application g : $(X_B \cap X_\alpha) \cup (F \cap X_\alpha) \to Y$ définie par

$$g \mid X_B \cap X_\alpha = f_B \mid X_B \cap X_\alpha,$$
$$g \mid F \cap X_\alpha \ = f \mid F \cap X_\alpha$$

est bien définie et continue. Puisque Y a la propriété d'extension par rapport à X_α, elle a un prolongement continu $g' : X_\alpha \to Y$. Alors l'application $f_{B'} : X_{B'} \to Y$ donnée par

$$f_{B'} \mid X_B = f_B,$$
$$f_{B'} \mid X_\alpha = g'$$

est bien définie et continue, vérifie $f_{B'} \mid X_{B'} \cap F = f \mid X_{B'} \cap F$ et, évidemment, $(B, f_{B'}) < (B', f_{B'})$, une contradiction. Par suite, $X_B = X$ et f_B est un prolongement de f à X : le lemme est prouvé.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Résulte du corollaire 3 du théorème 6.

C. Q. F. D.

Concernant la condition (iv), remarquons qu'un sous-ensemble d'un complexe simplicial est dominé par une famille de sous-ensembles fermés métrisables si, et seulement si, c'est un k-espace.

Corollaire. — *Soit X un espace paracompact. Si tout point de X a un voisinage homéomorphe à un rétracte de voisinage d'un complexe simplicial, alors X est homéomorphe à un rétracte de voisinage d'un complexe simplicial.*

Preuve. — Tout point $x \in X$ a un voisinage homéomorphe à un rétracte V_x d'un ouvert O_x d'un complexe simplicial. D'après le corollaire 1 du théorème 6, O_x appartient à Q (en fait, O_x est triangulable); V_x, rétracte de O_x, est fermé dans O_x, donc V_x appartient à Q. D'après le corollaire 1 du théorème 6, X appartient à Q.

D'après le théorème 7, (i) $\Leftrightarrow$ (iii), tout point de X a un voisinage vérifiant la condition (i). Puisque tous les espaces de la classe Q sont paracompacts, il résulte d'un théorème de Hanner que X vérifie aussi cette condition (i) (*voir* par exemple [5], chap. II, théorème 17.1), donc X est un r. a. v. (Q).

Théorème 8. — *Tout CW-complexe vérifie les conditions* (i)-(iv) *du théorème* 7.

Preuve. — Tout CW-complexe a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces compacts. En effet, si f est une fonction continue d'un sous-ensemble fermé A d'un espace compact dans un CW-complexe K, alors $f(A)$ est contenu dans un sous-complexe fini L de K, et il est connu qu'un CW-complexe fini a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces normaux. Le théorème A.1 de l'appendice montre alors que tout CW-complexe vérifie la condition (i) du théorème 7.

APPENDICE : **Pseudo-complexes**

DÉFINITION A.1. — *Un pseudo-complexe est le couple formé par un espace topologique X et un ensemble $\mathcal{F}$ de fermés de X vérifiant :*

(PC 1) *$\mathcal{F}$ recouvre X;*

(PC 2) *L'intersection de deux éléments de $\mathcal{F}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{F}$;*

(PC 3) *Chaque élément de $\mathcal{F}$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{F}$;*

(PC 4) *Un sous-ensemble de X est fermé si, et seulement si, son intersection avec chaque élément de $\mathcal{F}$ est fermée.*

Il résulte immédiatement de (PC 2) et (PC 3) que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{F}$ est une réunion finie d'éléments de $\mathcal{F}$.

EXEMPLES

(1) Si K est CW-complexe, et $\mathcal{F}$ l'ensemble de ses sous-complexes finis, alors $(K, \mathcal{F})$ est un pseudo-complexe.

(2) Si K est un « chunk complex » au sens de CEDER [1], et si $\mathcal{K}$ est l'ensemble de ses « chunks », alors $(K, \mathcal{K})$ est un pseudo-complexe.

(3) Si X est limite inductive de la suite $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \ldots$ de fermés, et si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des X_n, alors $(X, \mathcal{F})$ est un pseudo-complexe.

(4) Si $\mathcal{F}$ est un ensemble localement fini, de type fini et stable par intersections finies de fermés de X recouvrant X, alors $(X, \mathcal{F})$ est un pseudo-complexe.

(5) Les produits faibles de C. J. KNIGHT [8]. Soit $(X_\alpha, \star_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces topologiques pointés. Le produit faible des espaces $(X_\alpha, \star_\alpha)_{\alpha \in A}$ est le sous-ensemble $Y = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ du produit $X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ formé des points $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ tels que $x_\alpha = \star_\alpha$ pour tout α sauf un nombre fini, munie de la topologie définie comme suit. Pour tout sous-ensemble fini N de A, on peut, puisque les espaces en question sont pointés, identifier canoniquement le produit $X_N = \Pi_{\alpha \in N} X_\alpha$ à un sous-ensemble de X; nous munirons chaque tel X_N de la topologie produit usuelle. Alors les X_N sont contenus dans Y, et nous conviendrons qu'un sous-ensemble G de Y est ouvert dans Y si, et seulement si, son intersection avec chaque X_N est ouverte dans X_N. La topologie induite

par Y sur X_N est la topologie produit originale. Si quel que soit α, $\{\bigstar_\alpha\}$ est fermé dans X_α, alors chaque X_N est fermé dans Y et l'ensemble des X_N, N parcourant les sous-ensembles finis de A, est une structure de pseudo-complexe sur Y. (Nous convenons ici que $X_\emptyset$ est l'ensemble réduit au point base de Y.)

Proposition A.1. — *Si* $(X, \mathcal{F})$ *est un pseudo-complexe, alors* X *est dominé par* $\mathcal{F}$.

Preuve. — Nous devons démontrer que si A est un sous-ensemble de X, et $\mathcal{F}'$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ tels que

(i) $\mathcal{F}'$ recouvre A;

(ii) $A \cap F'$ est fermé pour tout F' appartenant à $\mathcal{F}'$,

alors A est fermé dans X. D'après (i), nous avons, pour tout élément F de $\mathcal{F}$,

$$A \cap F = \cup_{F' \in \mathcal{F}'} A \cap F \cap F'.$$

Il résulte de (PC 2) et (PC 3) qu'il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles $F \cap F'$ distincts. $A \cap F$ est donc réunion d'un nombre fini de fermés, donc est fermé. D'après (PC 4), A est fermé.

Il résulte de cette proposition et de théorèmes connus que si chaque élément de $\mathcal{F}$ est $\mathcal{C}_1$ (normal, parfaitement normal, collectivement normal, paracompact, etc.), alors X aussi.

Si $(X, \mathcal{F})$ est un pseudo-complexe et n un entier ≥ 0, nous noterons $\mathcal{F}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des éléments de $\mathcal{F}$ qui contiennent au plus n éléments de $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}_0$ est vide). Notant par $\amalg$ la somme topologique, posons

$$X^n = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_n} F \subset X \qquad (n \geq 0),$$

$$M_n = \amalg_{F \in \mathcal{F}_n - \mathcal{F}_{n-1}} F \qquad (n \geq 1),$$

$$\dot{M}_n = \amalg_{F \in \mathcal{F}_n - \mathcal{F}_{n-1}} F \cap X^{n-1} \subset M_n \qquad (n \geq 1).$$

Évidemment, on a

$$\emptyset = X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots \subset X^n \subset \ldots \subset X,$$

et il y a, pour $n \geq 1$, une application continue $\varphi_n : \dot{M}_n \to X^n$ induite par les inclusions $F \cap X^{n-1} \hookrightarrow X^n$ $(F \in \mathcal{F}^n - \mathcal{F}_{n-1})$.

Lemme A.1 :

(i) $X = \varinjlim X^n$;

(ii) $(X^n, \mathcal{F}_n)$ *est un pseudo-complexe;*

(iii) $X^n = M_n \cup_n X^{n-1}$.

Preuve. — (i) Puisque X^n est réunion d'un sous-ensemble de $\mathcal{F}$, i est fermé dans X d'après la proposition A.1. D'après (PC 3), on a $\mathcal{F} = \cup_n \mathcal{F}_n$, donc, d'après (PC 1), $X = \cup_n X^n$. Enfin, si un sous-ensemble K de X est tel que $K \cap X^n$ soit fermé pour tout n, et si F est un élément de $\mathcal{F}$, il y a un n tel que F appartienne à $\mathcal{F}_n$, ce qui implique que $K \cap F = (K \cap X^n) \cap F$ est fermé dans F. D'après (PC 4), K est fermé. Ceci prouve (i).

(ii) $\mathcal{F}_n$ vérifie trivialement les conditions (PC 1) et (PC 3). Puisque $(X, \mathcal{F})$ vérifie (PC 2) et que si des éléments F, F' de $\mathcal{F}$ vérifient $F' \subset F \in \mathcal{F}_n$, alors F' appartient à $\mathcal{F}_n$, on voit que $(X^n, \mathcal{F}_n)$ vérifie (PC 3). Enfin, (PC 4) résulte de la proposition A.1.

(iii) se déduit facilement de (ii).

Proposition A.2. — *Soient X un espace topologique séparé et $\mathcal{F}$ un ensemble de fermés de X vérifiant* (PC 1)-(PC 3). *Si X est un k-espace, alors $(X, \mathcal{F})$ est un pseudo-complexe si, et seulement si, tout compact de X est contenu dans une réunion finie d'éléments de $\mathcal{F}$.*

Preuve. — La *nécessité* résulte du fait connu que si un espace séparé à la topologie limite inductive par rapport à une famille de fermés, alors tout compact de cet espace est contenu dans une réunion finie d'éléments de cette famille. La *suffisance* est triviale.

Si $(X, \mathcal{F})$ est un pseudo-complexe, et A un sous-ensemble de X, nous noterons $\mathcal{F}_A$ l'ensemble des sous-ensembles de A de la forme $F \cap A$, où F appartient à $\mathcal{F}$. Il est clair que $(A, \mathcal{F}_A)$ vérifie (PC 1) et (PC 2). Soit $F \in \mathcal{F}$, et soient $F_1, \ldots, F_n$ les éléments de $\mathcal{F}$ qui sont contenus dans F. Pour montrer que $(A, \mathcal{F}_A)$ vérifie (PC 3), il suffit de montrer que si F' est un élément de $\mathcal{F}$ tel que $F' \cap A$ soit contenu dans $F \cap A$, alors $F \cap A$ est réunion de certains des ensembles $F_i \cap A$. Mais $F' \cap A \subset F \cap A$ implique

$$F' \cap A = F' \cap F \cap A$$

et $F' \cap F$ est réunion de certains des F_i $(1 \leq i \leq n)$ d'après (PC 2), d'où notre affirmation.

Notons que $(A, \mathcal{F}_A)$ ne vérifie pas toujours (PC 4) (*voir* l'exemple du § 3).

Proposition A.3. — *Si A est un sous-ensemble localement fermé de X, alors $(A, \mathcal{F}_A)$ est un pseudo-complexe.*

Preuve.

Cas 1 : *A est fermé.* — *Si C* est un sous-ensemble de A tel que $C \cap (F \cap A)$ soit fermé dans A, donc dans X, quel que soit F appartenant à $\mathcal{F}$, on déduit de (PC 4), puisque $C \cap F = C \cap (F \cap A)$, que C est fermé dans X, donc dans A. Par suite, $(A, \mathcal{F}_A)$ vérifie (PC 4).

Cas 2 : *A est ouvert.* — Si $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble de A tel que $\mathcal{O} \cap (F \cap A)$ soit ouvert dans $F \cap A$ quel que soit F appartenant à $\mathcal{F}$, on déduit de (PC 4), puisque $\mathcal{O} \cap F = \mathcal{O} \cap (F \cap A)$, que $\mathcal{O}$ est ouvert dans X, donc dans A. Par suite, $(A, \mathcal{F}_A)$ vérifie (PC 4).

Cas général : A est l'intersection d'un ouvert $\mathcal{O}$ et d'un fermé H. — La proposition résulte alors des cas 1 et 2 si l'on remarque que $\mathcal{F}_A = (\mathcal{F}_H)_{\mathcal{O} \cap H}$.

Proposition A.4. — *Si X est séparé et si A est un k-espace, alors $(A, \mathcal{F}_A)$ est un pseudo-complexe.*

Preuve. — Cela résulte de la proposition A.2 puisque, X étant séparé, tout compact de A est contenu dans une réunion finie d'éléments de $\mathcal{F}$, donc aussi dans une réunion finie d'éléments de $\mathcal{F}_A$.

Soient X, Y des espaces topologiques, et soit $\mathcal{L}(Y)$ l'ensemble des sous-ensembles non vides de Y. Si G est une fonction arbitraire de X dans $\mathcal{L}(Y)$, nous dirons que X a la propriété d'extension locale des sélections de G si, pour tout fermé A de X et toute fonction continue $\varphi : A \to Y$ vérifiant

$$\varphi(x) \in G(x), \quad \forall\, x \in A,$$

il existe un voisinage N de A dans X et une fonction continue $\psi : N \to Y$ prolongeant φ et vérifiant

$$\psi(x) \in G(x), \quad \forall x \in N.$$

Si H est un sous-ensemble de X, nous noterons $G \mid H$ la restriction de G à H.

Théorème A.1. — *Soient $(X, \mathcal{F})$ un pseudo-complexe, Y un espace topologique, et G une fonction de X dans $\mathcal{L}(Y)$. Supposons que chaque élément F de $\mathcal{F}$ soit complétement normal et ait la propriété d'extension locale des sélections de $G \mid F$. Alors X a la propriété d'extension locale des sélections de G.*

Preuve. — Soient A un fermé de X, et $g : A \to Y$ une fonction continue vérifiant $g(x) \in G(x)$ pour tout $x \in A$. Posons, pour $n \geqq 0$,

$$A_n = X^n \cap A.$$

Nous allons définir par récurrence des sous-ensembles U_n de A_n et des fonctions continues $f_n : \overline{U}_n \to Y$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & U_n \text{ est ouvert dans } A_n \ (n \geqq 0), \\ \text{(ii)} & U_0 = A \text{ et } U_{n+1} \text{ contient } U_n \text{ pour tout } n \geqq 0, \\ \text{(iii)} & f_0 = g, \\ \text{(iv)} & f_{n+1} \mid \overline{U}_n = f_n, \\ \text{(v)} & f_n(x) \in G(x) \text{ pour tout } x \in \overline{U}_n, \\ \text{(vi)} & \text{Si } F \text{ appartient à } \mathcal{F}_n, \text{ alors } \overline{U}_n \cap F = \overline{U_n \cap F}. \end{array} \right.$$

Supposons ceci fait. Soit $U = \cup_{n \geqq 0} U_n$. Alors,

$$U \cap X^m = \cup_{n \geqq 0} U_n \cap X^m = \cup_{n \geqq m} U_n \cap X^m$$

[d'après (ii)] est ouvert dans X^m, car chaque $U_n \cap X^m$ est ouvert dans X^m pour $n \geqq m$ d'après (i). D'après le lemme A.1 (i), ceci implique que U est ouvert dans X. D'après (iv), on définit sans ambiguïté une fonction $f : U \to X$ par $f \mid U_n = f_n \mid U_n$ pour tout $n \geqq 0$. Puisque U est ouvert dans X et que $X = \varinjlim X^n$, on a $U = \varinjlim U \cap X^n$, donc, pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que sa restriction à chaque $U \cap X^n$ est continue. Puisque $U \cap X^n = \cup_{m \geqq n} U_m \cap X^n$ et que chaque $U_m \cap X^n$ est ouvert dans X^n pour $m \geqq n$, il suffit pour cela de démontrer que $f \mid U_m \cap X^n$ est continue pour $m \geqq n$, ce qui résulte du fait que $f \mid U_m \cap X^n = f_m \mid U_m \cap X^n$ et de la continuité de f_m. Alors, (iii) implique que f est un prolongement de g à l'ouvert U de X, et (v) implique que $f(x) \in G(x)$ pour tout $x \in U$.

Reste à construire les suites (U_n) et (f_n). Définissons U_0 par (ii); alors $U_0 = \overline{U}_0$ et l'on peut définir f_0 par (iii). Supposons U_k et f_k construits pour $0 \leqq k \leqq n$. Soit $F \in \mathscr{F}_{n+1} - \mathscr{F}_n$, et soit

$$A_F = \overline{U}_n \cap F = (A \cap F) \cup (\overline{U}_n \cap X^n \cap F).$$

Alors A_F est fermé dans F et l'application $g_F = f_n \mid \overline{U}_n \cap F : A_F \to Y$ est une application continue vérifiant $g_F(x) \in G(x)$ pour tout $x \in A_F$. Par hypothèse, g_F a un prolongement, encore noté g_F, à un ouvert V_F de F contenant A_F et tel que $g_F(x) \in G(x)$ pour tout $x \in V_F$. La normalité de F permet de supposer, quitte à restreindre V_F, que g_F est en fait définie sur $\overline{V}_F$.

On a

$$\overline{U_n \cap F \cap X^n} = \overline{U}_n \cap F \cap X^n. \tag{2}$$

En effet,

$$F \cap X^n = F \cap (\cup_{F' \in \mathscr{F}_n} F') = \cup_{F' \in \mathscr{F}_n} (F \cap F').$$

Chaque $F \cap F'$ est une réunion finie d'éléments de $\mathscr{F}_n$; comme F ne contient qu'un nombre fini de tels éléments, $F \cap X^n$ est réunion finie d'éléments de $\mathscr{F}_n$, donc on peut écrire

$$F \cap X^n = \cup_{i \in I} F',$$

où I est un sous-ensemble fini de $\mathscr{F}_n$. Alors, d'après (vi),

$$F \cap X^n \cap \overline{U}_n = \cup_{i \in I} F' \cap \overline{U_n} = \cup_{i \in I} \overline{F' \cap U_n} = \overline{\cup_{i \in I} F' \cap U_n} = \overline{F \cap X^n \cap U_n}.$$

LEMME A.2. — *Soient X' un espace complètement normal, A' et B' des fermés de X', U' un sous-ensemble de A' ouvert dans A' et contenant*

$B' \cap A'$, et V' un ouvert de X' contenant $B' \cup \bar{U}'$. Alors il existe un ouvert W' de X' vérifiant :

(*a*) $B' \cup U' \subset W' \subset V'$;

(*b*) $W' \cap A' = U'$;

(*c*) $\overline{W}' \cap A' = \bar{U}'$.

Preuve. — On a

$$(A' - \bar{U}') \cap (\overline{B' \cup U'})$$
$$= [(A' - \bar{U}') \cap \bar{B}'] \cup [(A' - \bar{U}') \cap \bar{U}'] = (A' - \bar{U}') \cap B' = \emptyset,$$

car $B' \cap A'$ est contenu dans U'. D'autre part,

$$\overline{A' - \bar{U}'} \cap (B' \cup U') = (\overline{A' - \bar{U}'} \cap B') \cup (\overline{A' - \bar{U}'} \cap U') = \emptyset,$$

car U' est un ouvert de A' disjoint de $A' - \bar{U}'$, donc de $\overline{A' - \bar{U}'}$, et $\overline{A' - \bar{U}'} \cap B'$ est contenu dans $(A' - U') \cap B' = \emptyset$.

Les ensembles $A' - \bar{U}'$ et $B' \cup U'$ sont donc séparés. D'après la complète normalité de X', il existe des ouverts M', N' de X' contenant $A' - \bar{U}'$ et $B' \cup U'$ respectivement, et tels que $M' \cap N' = \emptyset$.

Soit $W' = N' \cap V'$. Alors W' contient $B' \cup U'$. D'autre part,

$$W' \cap A' = N' \cap V' \cap A' \supset U',$$
$$(W' \cap A') \cap (A' - \bar{U}') \subset N' \cap M' = \emptyset.$$

$W' \cap A'$ est ouvert dans A' et ne rencontre pas l'extérieur de U' dans A', donc ne rencontre pas la frontière $\bar{U}' - U'$ de U' dans A'; on en déduit que $W' \cap A' = U'$.

Puisque $W' \cap A' = U'$, $\overline{W}' \cap A'$ contient $\overline{W' \cap A'} = \bar{U}'$. Puisque M' est un ouvert disjoint de W', $\overline{W}'$ est disjoint de M', donc de $A - \bar{U}'$. Par suite, $\overline{W}' \cap A' = \bar{U}'$. Le lemme est démontré.

Si l'on applique le lemme précédent en prenant $X' = F$, $A' = F \cap X^n$, $B' = A \cap F$, $U' = U_n \cap X^n \cap F$ et $V' = V_F$, on obtient un ouvert U_F de F tel que

$$(3) \quad \begin{cases} (\alpha) & (A \cap F) \cup (U_n \cap X^n \cap F) \subset U_F \subset V_F, \\ (\beta) & U_F \cap X^n = U_n \cap F \cap X^n, \\ (\gamma) & \bar{U}_F \cap X^n = \overline{U_n \cap F \cap X^n} = \overline{U_F \cap X^n}. \end{cases}$$

Posons

$$U_{n+1} = (\cup_F U_F) \cup U_n, \qquad H_{n+1} = (\cup_F \bar{U}_F) \cup \bar{U}_n,$$

F parcourant les éléments de $\mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$. Alors, ($\beta$) et ($\gamma$) impliquent que, si $F' \in \mathcal{F}_n$,

$$U_F \cap F' = U_n \cap F \cap F',$$
$$\bar{U}_F \cap F' = \bar{U}_n \cap F \cap F' \quad \text{[utiliser (2)]},$$

d'où

$$(4) \quad \begin{cases} U_{n+1} \cap F' = (U_n \cup (\cup_F U_F)) \cap F' \\ \qquad = (U_n \cap F') \cup (\cup_F U_n \cap F \cap F') = U_n \cap F', \\ H_{n+1} \cap F' = (\bar{U}_n \cup (\cup_F \bar{U}_F)) \cap F' \\ \qquad = (\bar{U}_n \cap F') \cup (\cup_F \bar{U}_n \cap F \cap F') = \bar{U}_n \cap F', \end{cases}$$

ce qui montre que $U_{n+1} \cap F'$ est ouvert dans F', et $H_{n+1} \cap F'$ fermé dans F'. Si $F_0 \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$, on obtient

$$(5) \quad \begin{aligned} U_{n+1} \cap F_0 &= (U_n \cup (\cup_F U_F)) \cap F_0 \\ &= U_{F_0} \cup (\cup_{F_0 \neq F} U_F \cap F_0) \cup (U_n \cap F_0) \\ &= U_{F_0} \cup (\cup_{F \neq F_0} U_F \cap X^n \cap F_0) \cup (U_n \cap F_0) \\ &= U_{F_0} \cup (\cup_{F \neq F_0} U_n \cap F \cap F_0) \cup (U_n \cap F_0) \\ &= U_{F_0} \cup (U_n \cap F_0) = U_{F_0} \end{aligned}$$

qui est ouvert dans F_0, et

$$(6) \quad \begin{aligned} H_{n+1} \cap F_0 &= (\bar{U}_n \cup (\cup_F \bar{U}_F)) \cap F_0 \\ &= \bar{U}_{F_0} \cup (\cup_{F \neq F_0} \bar{U}_F \cap F_0) \cup (\bar{U}_n \cap F_0) \\ &= \bar{U}_{F_0} \cup (\cup_{F \neq F_0} \bar{U}_F \cap X^n \cap F_0) \cup (\bar{U}_n \cap F_0) \\ &= \bar{U}_{F_0} \cup (\cup_{F \neq F_0} \bar{U}_n \cap F \cap F_0) \cup (\bar{U}_n \cap F_0) \\ &= \bar{U}_{F_0} \cup (\bar{U}_n \cap F_0) = \bar{U}_{F_0} \end{aligned}$$

qui est fermé dans F_0.

En résumé, quel que soit $F \in \mathcal{F}_{n+1}$, $U_{n+1} \cap F$ est ouvert dans F, et $H_{n+1} \cap F$ est fermé dans F. Il résulte du lemme A.1 (ii) que $U_{n+1} \cap X^{n+1}$ est ouvert dans X^{n+1}, et $H_{n+1} \cap X^{n+1}$ fermé dans X^{n+1}. Puisque $U_{n+1} \cap A = A = H_{n+1} \cap A$ et que A_{n+1} est réunion des deux fermés X^{n+1} et A, il en résulte que U_{n+1} est ouvert dans A_{n+1}, et H_{n+1} fermé dans A_{n+1}. La définition de H_{n+1} implique alors immédiatement que $H_{n+1} = \bar{U}_{n+1}$.

Alors, (5) et (6) impliquent que si $F \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$, on a

$$\bar{U}_{n+1} \cap F = H_{n+1} \cap F = \bar{U}_F = \overline{U_{n+1} \cap F}.$$

D'après (4), si $F \in \mathcal{F}_n$, on a

$$\bar{U}_{n+1} \cap F = H_{n+1} \cap F = \bar{U}_n \cap F = \overline{U_{n+1} \cap F},$$

donc la condition (vi) est vérifiée.

Soit $F \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$. Puisque $\bar{U}_F$ est contenu dans $\bar{V}_F$, la fonction $g_F \mid \bar{U}_F : \bar{U}_F \to Y$ est définie et continue. En outre,

$$g_F \mid \bar{U}_F \cap \bar{U}_n = g_F \mid \bar{U}_n \cap F$$

et, si $F, F' \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$, on a $F \cap F' = F \cap X^n \cap F'$, d'où

$$\begin{aligned} g_F \mid \bar{U}_F \cap F \cap F' &= g_F \mid \bar{U}_F \cap F \cap X^n \cap F' \\ &= g_F \mid \bar{U}_n \cap F \cap X^n \cap F' = f_n \mid \bar{U}_n \cap F \cap X^n \cap F' \\ &= g_{F'} \mid \bar{U}_n \cap F \cap X^n \cap F' = g_{F'} \mid \bar{U}_{F'} \cap F \cap F'. \end{aligned}$$

On définit donc, sans ambiguïté, une fonction $f_{n+1} : \bar{U}_{n+1} \to Y$ par

$$\begin{aligned} &f_{n+1} \mid \bar{U}_n = f_n, \\ &f_{n+1} \mid \bar{U}_F = g_F \mid \bar{U}_F \qquad \text{pour} \quad F \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

dont la continuité est une conséquence facile de la continuité de f_n et des g_F et du lemme A.1 (ii).

Le fait que $f_{n+1}(x) \in G(x)$ pour tout $x \in \bar{U}_{n+1}$ résulte de ce que f_n et les g_F ont cette propriété. Les conditions (i)-(vi) sont alors vérifiées et la récurrence est achevée.

C. Q. F. D.

Corollaire 1. — *Soit* $(X, \mathcal{F})$ *un pseudo-complexe tel que chaque* F *appartenant à* $\mathcal{F}$ *soit complètement normal. Si un espace topologique* Y *a la propriété d'extension locale par rapport à chaque élément* F *de* $\mathcal{F}$, *alors il a la propriété d'extension locale par rapport à* X.

Preuve. — Il suffit de prendre $G(x) = Y$ quel que soit $x \in X$ dans le théorème A.1.

Si f est une fonction de X sur Y, une section de f sur un sous-ensemble A de Y est une fonction $s : A \to X$ telle que $fs = 1_A$.

Corollaire 2. — *Soit* f *une fonction (pas nécessairement continue) d'un espace topologique* X *sur un CW-complexe* K. *Pour que toute section continue* $s : A \to X$ *de* f, *définie sur un sous-ensemble fermé* A *de* K, *puisse se prolonger en une section continue* $t : V \to X$, *définie sur un voisinage de* A *dans* K, *il faut et il suffit que, pour tout sous-complexe fini* L *de* K, $f \mid f^{-1}(L) : f^{-1}(L) \to L$ *possède cette même propriété.*

Preuve. — La *nécessité* est triviale. La *suffisance* résulte du théorème A.1 appliqué en prenant pour $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-complexes finis de K, et en posant $G(x) = f^{-1}(x)$ pour tout $x' \in K$.

DÉFINITION A.2. — *On dit qu'un espace topologique Z est un espace paracomplexe s'il existe une suite $Z_0 \hookrightarrow Z_1 \hookrightarrow Z_2 \hookrightarrow \dots$ de sous-espaces fermés de Z tels que :*

1° *Z_0 est métrisable;*

2° *Pour tout $n > 0$, il existe un espace métrique X_n, un fermé A_n de X_n et une fonction continue $f_n : A_n \to Z_{n-1}$ tels que Z_n soit homéomorphe à $X_n \cup_{f_n} Z_{n-1}$;*

3° $Z = \varinjlim Z_n$.

Les espaces paracomplexes ont été introduits par D. M. Hyman [6] sous le nom de M-espaces. La version globale du théorème suivant a été prouvée par D. M. HYMAN ([6] th. 10.1).

THÉORÈME A.2. — *Un espace topologique Y a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces paracomplexes si, et seulement si, il a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces métriques.*

Preuve. — La nécessité est triviale. Pour prouver la réciproque, soit $Z = \varinjlim Z_n$ un espace paracomplexe (nous utilisons les notations de la définition A.2). Puisque la complète normalité se conserve par formation des espaces d'adjonction, on voit par récurrence sur n que chaque Z_n est complètement normal. Si l'on peut montrer que Y a la propriété d'extension locale par rapport à chaque Z_n, le théorème résultera du corollaire 1 du théorème A.1. Procédons par récurrence; par hypothèse, cela est vrai pour $n = 0$. Si cela est vrai pour n, alors cela résulte pour $n + 1$ du lemme suivant :

LEMME A.3. — *Soient X un espace topologique, A un fermé de X, Y un espace normal et $f : A \to Y$ continue. Si un espace topologique Z a la propriété d'extension locale par rapport à X et à Y, alors il a la propriété d'extension locale par rapport à $X \cup_f Y$.*

Preuve. — Soit $\pi : X \amalg Y \to X \cup_f Y$ la projection naturelle, et soient $i = \pi \mid X$ et $j = \pi \mid Y$. Soient B un fermé de $X \cup_f Y$ et $g : B \to Z$ continue. Puisque Z a la propriété d'extension locale par rapport à Y, et que Y est normal, il y a un voisinage ouvert U de $j^{-1}(B)$ dans Y et un prolongement $\bar{g}$ de $g \circ (j \mid B)$ à $\bar{U}$. Alors $C = i^{-1}(B) \cup f^{-1}(\bar{U})$ est un fermé de X

et l'application $h : C \to Z$ donnée par

$$h \mid i^{-1}(B) = g \circ (i \mid i^{-1}(B)),$$
$$h \mid f^{-1}(\bar{U}) = \bar{g} \circ (f \mid f^{-1}(\bar{U}))$$

est bien définie et continue donc se prolonge en $\bar{h} : V \to Z$, où V est un ouvert de X contenant C. Soit

$$V' = V \cap [f^{-1}(U) \cup (X - A)] = V - (A - f^{-1}(U)).$$

Il est clair que V' contient $i^{-1}(B)$. En outre, V' est ouvert car

$$X - V' = (X - V) \cup [(X - f^{-1}(U)) \cap A] = (X - V) \cup (A - f^{-1}(U))$$

qui est fermé puisque, U étant ouvert dans Y, $f^{-1}(U)$ est un sous-ensemble de A ouvert dans A.

Le sous-ensemble $V' \amalg U$ de $X \amalg Y$, qui est ouvert, est saturé, car si $x \in A$ et si $f(x) \in U$, alors $x \in f^{-1}(U) \subset V'$. L'application $k : V' \amalg U \to Z$ définie par

$$k(x) = \bar{h}(x) \qquad \text{si} \quad x \in V',$$
$$k(x) = \bar{g}(x) \qquad \text{si} \quad x \in U$$

est compatible avec les identifications car si x appartient à

$$V' \cap A = V' \cap f^{-1}(U),$$

alors $\bar{h}(x) = \bar{g}(f(x)) = k(f(x))$; elle définit donc, par passage au quotient, une application continue $\bar{k} : \pi(V' \amalg U) \to Z$. D'après ce qui précède, $\pi(V' \amalg U)$ est un voisinage ouvert de B dans $X \cup_f Y$. Enfin, $\bar{k}$ prolonge g car si $x \in B \cap j(Y)$, alors $\bar{k}(x) = \bar{g}(j^{-1}(x)) = g(x)$ et si $x \in B \cap i(X - A)$, alors $\bar{k}(x) = k(i^{-1}(x)) = \bar{h}(i^{-1}(x)) = g(x)$.

Le lemme est démontré, donc aussi le théorème :

Proposition A.5. — *Soit* $(X, \mathcal{F})$ *un pseudo-complexe. Si chaque élément* F *de* $\mathcal{F}$ *est un espace paracomplexe, alors* X *est un espace paracomplexe.*

Preuve. — X^0, somme topologique d'espaces paracomplexes, est un espace paracomplexe. Par récurrence sur n, il résulte du lemme A.1 (iii) et du lemme 4.4 de [6] que chaque X^n est un espace paracomplexe. Puisque X est limite inductive des X^n, il résulte du lemme 4.3 de [6] que X est un espace paracomplexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CEDER (J.). — Some generalizations of metric spaces, *Pacific J. of Math.*, t. 11, 1962, p. 105-125.

[2] DUGUNDJI (J.). — Note on *CW*-polytopes, *Portug. Math.*, Lisboa, t. 11, 1952, p. 7-10 *b*.

[3] DUNGUNDJI (J.). — A duality property of nerves, *Fund. Math.*, Warszawa, t. 59, 1966, p. 213-219.

[4] ENGELKING (R.). — *Outline of general topology*. — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1968.

[5] HU (S. T.). — *Theory of retracts*. — Detroit, Wayne State University Press, 1965.

[6] HYMAN (D. M.). — A category slightly larger than the metric and the *CW*-categories, *Michigan math. J.*, t. 15, 1968, p. 193-214.

[7] KAKUTANI (S.) and KLEE (V.). — The finite topology of a linear space, *Archiv der Math.*, Basel, t. 14, 1963, p. 55-58.

[8] KNIGHT (C. J.). — Weak products of spaces and complexes, *Fund. Math.*, Warszawa, t. 53, 1963, p. 1-12.

[9] PALAIS (R. S.). — Homotopy theory of infinite dimensional manifolds, *Topology*, London, t. 5, 1966, p. 1-16.

(Texte reçu le 2 juillet 1971.)

Robert CAUTY,
88, rue de Clichy,
75009 Paris.