Bulletin de la S. M. F.

Daniel Ferrand

Monomorphismes et morphismes absolument plats

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 97-128

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__97_0>

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 97 à 128.

MONOMORPHISMES ET MORPHISMES ABSOLUMENT PLATS

PAR

Daniel FERRAND

Table des matières

0. Introduction

(0.1). — Soient $f : X \to S$ un morphisme de schémas, et $\Delta_f : X \to X \times_S X$ son morphisme diagonal. L'immersion Δ_f est un intermédiaire fort utile pour l'étude de f, par exemple dans les questions de ramification ou de séparation. Or, en général, on ne sait montrer l'équivalence entre des propriétés de f et des propriétés de Δ_f que si f est de type fini ou même de présentation finie; ainsi, lorsque f est de type fini, Δ_f est une immersion ouverte si, et seulement si, f est net (EGA [6], IV, § 17). Il est donc naturel de chercher les équivalences de ce type qui restent vraies sans cette hypothèse de finitude; la motivation principale de ce travail est de dégager les propriétés de Δ_f qui « passent » à f lorsqu'on suppose seulement le schéma de base S noethérien. En un sens, cette recherche va à contre-courant de (et complète ?) la démarche actuelle qui tente, autant que faire se peut, d'éliminer les hypothèses noethériennes sur la base en les remplaçant par des hypothèses de finitude sur le morphisme.

Il convient de souligner que la quasi-totalité des résultats obtenus deviennent faux si on ne suppose ni la base noethérienne, ni le morphisme de type fini.

(0.2). — Il fallait d'abord étudier les morphismes dont le morphisme diagonal est un isomorphisme, c'est-à-dire les *monomorphismes* de la catégorie des schémas.

Parmi ceux-ci on connaissait bien les immersions ainsi que, après le travail de RAYNAUD (*cf.* [11]), les monomorphismes *plats* quasi-compacts qui sont très proches des immersions ouvertes. Hélas, il y en a beaucoup d'autres, même lorsque le schéma de base ne possède qu'un seul point (*cf.* les exemples de [7]); ces exemples enlevaient tout espoir de dire quoi que ce soit d'utile sur les monomorphismes sans hypothèses supplémentaires.

Le « Main theorem » de Zariski fournissait un modèle de résultat souhaitable; en effet, il implique immédiatement qu'un monomorphisme *de type fini* $f : X \to S$, où S est quasi-compact, se factorise en

$$X \xrightarrow{j} T \xrightarrow{u} S,$$

où j est une immersion ouverte et u un morphisme fini.

Un premier pas dans la direction que ce travail s'assignait fut franchi en montrant qu'on avait un résultat analogue en supposant S noethérien au lieu de supposer f de type fini; plus précisément :

(0.2.1) : Soient S un schéma localement noethérien, et $f : X \to S$ un monomorphisme quasi-compact. Alors f se factorise en

$$X \xrightarrow{j} T \xrightarrow{u} S,$$

où u est un morphisme entier et j un monomorphisme *plat* quasi-compact.

Ce résultat est, à certains égards, le meilleur possible; en effet, j établit un isomorphisme entre X et l'espace annelé induit par T sur $j(X)$; donc j est en tout point analogue à une immersion ouverte; d'autre part, même si X et S sont intègres et noethériens, il n'existe pas toujours une factorisation de ce type pour laquelle u soit fini (*voir* à ce propos le dernier paragraphe).

On déduit (0.2.1) de l'énoncé local suivant :

(0.2.2) : Soient A un anneau local noethérien hensélien, B un anneau local, et $f : A \to B$ un épimorphisme local. Alors f est surjectif.

Il implique aussi un résultat déjà connu sous des hypothèses de finitude :

(0.2.3) : Soient S un schéma localement noethérien, et $f : X \to S$ un morphisme. Pour que f soit une immersion fermée, il faut et il suffit que f soit un monomorphisme universellement fermé.

A partir de cela, on dégage sans peine des conditions nécessaires pour que le morphisme diagonal soit une *immersion fermée de présentation finie.* Dans la situation locale, on obtient même le critère suivant :

(0.2.4) : Soit $f : A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux, où A est noethérien. Pour que B soit une A-algèbre essentiellement de type fini, il faut et il suffit que $B \otimes_A B$ soit noethérien, ou encore que le noyau de $B \otimes_A B \to B$ soit un idéal de type fini de $B \otimes_A B$.

(0.3). — On étudie ensuite les morphismes de schémas dont le morphisme diagonal est *plat*. Lorsque le morphisme est localement de type fini, cette propriété est équivalente à la netteté; cela laisse présager du rôle joué ici par les anneaux henséliens; de fait :

(0.3.1) : Soient A un anneau strictement local noethérien, B un anneau local, et $f: A \to B$ un homomorphisme local tel que $B \otimes_A B \to B$ soit plat. Alors f est surjectif.

Ce résultat généralise (0.2.2); il est celui dont la démonstration est la plus délicate. On prouve d'abord l'énoncé lorsque A est complet; on relie ensuite la surjectivité de f à la connexité de certains ouverts du spectre du complété $\hat{A}$ de A; on montre enfin que ces ouverts « proviennent » d'ouverts analogues de Spec (A).

On en déduit des critères de platitude analogues à ceux de EGA ([6], IV, § 18.10) :

(0.3.2) : Soient S un schéma localement noethérien, réduit et géométriquement unibranche, et $f: X \to S$ un morphisme dont le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est plat. Pour que f soit plat, il faut et il suffit que, pour tout point générique x de X, $f(x)$ soit un point générique de S.

Inversement, si le morphisme f est supposé plat, la platitude de Δ_f se voit sur les fibres.

(0.3.3) : Soient S un schéma localement noethérien, et $f: X \to S$ un morphisme plat. Pour que Δ_f soit plat, il faut et il suffit que, pour tout $s \in S$, en désignant par $f_s : X_s \to \mathrm{Spec}\,(k(s))$ le morphisme fibre, Δ_{f_s} soit plat, ou encore que le schéma $X_s \times_S X_s$ soit absolument plat.

1. Sur le morphisme diagonal

(1.1). — Soit $f: X \to S$ un morphisme de schémas. On désignera par $\Delta_f : X \to X \times_S X$ le morphisme diagonal de f, c'est-à-dire l'unique morphisme qui donne l'identité par composition avec les deux projections $X \times_S X \rightrightarrows X$; c'est une immersion. Lorsque f est le morphisme associé à un homomorphisme d'anneaux $h: A \to B$, le morphisme diagonal de f est le morphisme de schémas associé à l'homomorphisme $B \otimes_A B \to B$ défini par la multiplication; le noyau de cet homomorphisme est l'idéal engendré par les éléments de la forme $t \otimes 1 - 1 \otimes t$ lorsque t parcourt un système générateur de la A-algèbre B.

Le résultat suivant sera constamment utilisé dans la suite; on prendra, le plus souvent pour **(P)** la propriété d'être : un isomorphisme, plat, de présentation finie, universellement fermé.

Lemme (1.2). — *Soit* (**P**) *une propriété portant sur les morphismes de schémas, stable par composition et changement de base, et telle que tout isomorphisme vérifie* (**P**). *Soient, d'autre part,* $g : Z \to Y$ *et* $f : Y \to X$ *deux morphismes de schémas. Alors :*

(i) *Si* $f \circ g$ *et* Δ_f *vérifient* (**P**), g *vérifie* (**P**);

(ii) *Si* Δ_f *et* Δ_g *vérifient* (**P**), $\Delta_{f \circ g}$ *vérifie* (**P**);

(iii) *Si* $\Delta_{f \circ g}$ *vérifie* (**P**), Δ_g *vérifie* (**P**).

(i) g se factorise en $Z \xrightarrow{u} Z \times_X Y \xrightarrow{v} Y$; il suffit donc de montrer que u et v vérifient (**P**). Or, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & Z \times_X Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Delta_f} & Y \times_X Y \end{array}$$

est cartésien, et par hypothèse, Δ_f vérifie (**P**); il en est donc de même de u. D'autre part, $v : Z \times_X Y \to Y$ s'identifie au morphisme déduit de $f \circ g$ par le changement de base $Y \to X$; il vérifie donc (**P**).

(ii) Le morphisme diagonal $\Delta_{f \circ g} : Z \to Z \times_X Z$ se factorise en

$$Z \xrightarrow{\Delta_g} Z \times_Y Z \xrightarrow{w} Z \times_X Z;$$

comme Δ_g vérifie (**P**) par hypothèse, il suffit de montrer qu'il en est de même de w; or cela se déduit du fait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y Z & \xrightarrow{w} & Z \times_X Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Delta_f} & Y \times_X Y \end{array}$$

est cartésien et de l'hypothèse que Δ_f vérifie (**P**).

(iii) Gardons les notations de (ii); comme Δ_f est une immersion (EGA [6], I, 5.3.9), c'est en particulier un monomorphisme; il en est donc de même de w; Δ_w est donc un isomorphisme, et par suite vérifie (**P**); comme $w \circ \Delta_g = \Delta_{f \circ g}$ vérifie par hypothèse (**P**), il en est de même de Δ_g, d'après (i).

(1.3). — Les *monomorphismes* de la catégorie des schémas sont caractérisés par le fait que leur morphisme diagonal est un isomorphisme. Une immersion est un monomorphisme. Un monomorphisme fini est une immersion fermée; un monomorphisme quasi-compact et fidèlement plat est un isomorphisme; en particulier, si $f : X \to S$ est un monomorphisme quasi-compact, et si, pour un point s de S, la fibre X_s est non vide, alors le morphisme $X_s \to \operatorname{Spec}(k(s))$ est un isomorphisme. Les monomorphismes plats quasi-compacts sont étudiés en détail dans [11].

(1.4). — On dit qu'un schéma S est *absolument plat* si, pour tout point $s \in S$, l'anneau local $\mathcal{O}_{S,s}$ est un corps; tout morphisme de but S est alors plat.

Un schéma absolument plat quasi-séparé et connexe est réduit à un point; c'est le spectre d'un corps. Un schéma absolument plat quasi-compact et quasi-séparé est affine.

On dit qu'un morphisme de schémas $f : X \to S$ est *absolument plat* s'il est plat ainsi que son morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$. Pour qu'un morphisme soit étale, il faut et il suffit qu'il soit absolument plat et localement de présentation finie.

Si A est un anneau local et si A' est un hensélisé (resp. un hensélisé strict) de A, le morphisme $\operatorname{Spec}(A') \to \operatorname{Spec}(A)$ est absolument plat.

Soit S le spectre d'un corps k. Pour qu'un morphisme $X \to S$ soit absolument plat, il faut et il suffit que, pour tout point $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ soit un corps extension algébrique séparable de k, ou encore que le schéma $X \times_S X$ soit absolument plat. Si, de plus, X est affine, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est alors limite inductive filtrante de k-algèbres finies étales.

Toutes les propriétés générales des morphismes absolument plats, ainsi qu'un résultat essentiel sur la préservation de la fermeture intégrale, ont été démontrés dans la thèse de J.-P. Olivier [9].

Lemme (1.5). — *Soient $u : Z \to Y$ une immersion fermée, et $v : Y \to X$ un monomorphisme plat quasi-compact. Si l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X \to (v \circ u)_* (\mathcal{O}_Z)$ est injectif, u est un isomorphisme.*

Preuve. — En faisant le changement de base $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X$, où $x \in v(Y)$, on se ramène au cas où v est un monomorphisme quasi-compact fidèlement plat, donc un isomorphisme, comme $v \circ u$ est quasi-compact et séparé, « la formation de l'image directe commute aux changements de base plats », on a donc encore une injection $\mathcal{O}_X \to (v \circ u)_* (\mathcal{O}_Z)$; mais comme v est un isomorphisme, $v \circ u$ est une immersion fermée; en vertu de l'injection précédente, l'idéal qui la définit est nul; c'est donc un isomorphisme.

Lemme (1.6). — *Soient $g : Z \to Y$ et $f : Y \to X$ deux morphismes de schémas. Supposons que :*

(*a*) *f est séparé;*

(*b*) *$f \circ g$ est un monomorphisme plat quasi-compact;*

(*c*) *$\mathcal{O}_Y \to g_* (\mathcal{O}_Z)$ est injectif.*

Alors :

(i) *g est un monomorphisme plat quasi-compact;*

(ii) *Pour que f soit un monomorphisme, il faut et il suffit que la projection $p_1 : Y \times_X Y \to Y$ soit un morphisme plat.*

En effet, g se factorise en $Z \xrightarrow{u} Z \times_X Y \xrightarrow{v} Y$; montrons que u est un isomorphisme : comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Z \times_X Y \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\Delta_f"] & Y \times_X Y \end{tikzcd}$$

est cartésien, on déduit de (a) que u est une immersion fermée; comme v se éduit de $f \circ g$ par le changement de base $Y \to X$, v est un monomorphisme plat quasi-compact, d'après (b); utilisant le lemme (1.5) et l'hypothèse (c), on voit que u est un isomorphisme. Cela prouve (i).

Montrons (ii) : il est clair que la condition est nécessaire puisque, si f est un monomorphisme, p_1 est même un isomorphisme. Réciproquement, supposons que le morphisme $p_1 : Y \times_X Y \to Y$ soit plat. Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \times_X Y \arrow[r, "h"] \arrow[d] & Y \times_X Y \arrow[d, "p_1"] \\ Z \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien, h vérifie la même propriété (c) que g. Posons $Z' = Z \times_X Y$ et $Y' = Y \times_X Y$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "\Delta_f"] \\ Z' \arrow[r, "h"] & Y' \end{tikzcd}$$

Comme, d'après ce qu'on a vu au début, u est un isomorphisme, $\mathcal{O}_{Y'} \to (h \circ u)_* (\mathcal{O}_Z)$ est injectif; comme $h \circ u = \Delta_f \circ g$, $\mathcal{O}_{Y'} \to (\Delta_f \circ g)_* (\mathcal{O}_Z)$ est injectif, donc aussi $\mathcal{O}_{Y'} \to (\Delta_f)_* (\mathcal{O}_Y)$; mais, comme f est séparé, Δ_f est une immersion fermée; c'est donc un isomorphisme, ce qui veut bien dire que f est un monomorphisme.

On utilisera souvent ce résultat sous la forme suivante :

COROLLAIRE (1.7). — *Soient $f : A \to B$ un homomorphisme fidèlement plat d'anneaux et $u : A \to E$ un épimorphisme plat injectif; si $E \to E \otimes_A B$ est un isomorphisme, f est un isomorphisme.*

Preuve. — Il suffit de montrer que f est un épimorphisme, ce qui se déduit de (1.6) appliqué aux morphismes

$$\mathrm{Spec}\,(E \otimes_A B) \to \mathrm{Spec}\,(B) \to \mathrm{Spec}\,(A).$$

2. Un lemme décisif

Théorème (2.1). — *Soient A un anneau local noethérien hensélien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, B un anneau local, et $f : A \to B$ un homomorphisme local induisant un isomorphisme $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m}\, B$. Supposons que l'*une *des propriétés suivantes soit vérifiée :*

(i) *f est plat, et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'homomorphisme $k(\mathfrak{p}) \to k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ est absolument plat.*

(ii) *L'homomorphisme canonique $B \otimes_A B \to B$ est plat.*

Alors f est surjectif.

(2.2) *Remarque et contre-exemples.* — Sous l'hypothèse (i), la démonstration de ce résultat est assez naturelle et n'offre pas de difficultés; par contre, sous l'hypothèse (ii), la démonstration proposée est trop détournée pour être tout à fait satisfaisante : en effet, elle consiste à démontrer d'abord l'assertion lorsque A est complet, puis à « descendre » la surjectivité de f; mais comme on ne fait aucune hypothèse sur les fibres formelles de A, on ne sait guère descendre actuellement, sans problème, que les composantes connexes du complémentaire du point fermé de $\operatorname{Spec}(\hat{A})$; l'idée consiste à relier la platitude de f à la connexité de certains ouverts de $\operatorname{Spec}(\hat{A})$ pour se ramener au premier cas. Une démonstration plus simple ne serait en tout cas probablement pas purement formelle, car toutes les hypothèses faites sont nécessaires à la validité du résultat, comme on va le voir par les exemples qui suivent.

Voici d'abord un exemple où A n'est pas noethérien, où toutes les autres hypothèses de (2.1) (i) sont vérifiées, et pour lequel f n'est pas surjectif : Soit V un anneau de valuation de hauteur 1, dont l'idéal maximal $\mathfrak{p}$ est égal à son carré. Prenons pour anneau A l'anneau $V/t\,V$, où t est un élément non nul de $\mathfrak{p}$, et pour B la A-algèbre $V/t\,V + \mathfrak{p}/t\,\mathfrak{p}$, où le second facteur de cette somme est considéré comme idéal de carré nul. Comme V est de hauteur 1, A possède un seul idéal premier, soit $\mathfrak{m}$, et en particulier est hensélien; l'homomorphisme $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m}\,B$ est un isomorphisme, puisque $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$; comme V est un anneau de valuation, $\mathfrak{p}$ est un V-module plat, donc $\mathfrak{p}/t\,\mathfrak{p}$ est un $V/t\,V$-module plat, et $A \to B$ est plat; enfin, $A \to B$ n'est pas un isomorphisme puisque la relation $\mathfrak{p} = t\,\mathfrak{p}$ impliquerait $\mathfrak{p} = t\,V = t^2\,V$, ce qui est absurde. L'existence d'un tel anneau V est conséquence de l'exemple 6 de [1] (n° 4, § 3, chap. 4), en tenant compte de la proposition 7 du paragraphe 4 de *loc. cit.*

D'autre part, D. Lazard a construit un épimorphisme $A \to B$ non surjectif, où $\operatorname{Spec}(A)$ est réduit à un point (*cf.* [7]); cela montre que, dans (2.1) (ii), on ne peut pas non plus supprimer l'hypothèse que A est noethérien.

Voici enfin un exemple où les hypothèses de (2.1) (i) sont vérifiées, exceptée la platitude de f, et où f n'est pas surjectif (il résulte des résultats classiques sur les algèbres nettes que cette situation ne peut pas se produire si f est essentiellement de type fini). Soient A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, et t une uniformisante de A; prenons pour B la A-algèbre $A + (K/A)$, où le second facteur est considéré comme idéal de carré nul. Alors $A \to B$ n'est pas un isomorphisme bien qu'on ait des isomorphismes $A/tA \tilde{\to} B/tB$ et $A_t \tilde{\to} B_t$.

Démonstration du théorème (2.1).

(2.3) *Réduction au cas où A est intègre et f injectif, et où, pour tout élément non nul $t \in \mathfrak{m}$, $A/tA \to B/tB$ est surjectif.* — Comme les hypothèses passent aux quotients, on peut, par récurrence noethérienne, supposer que, pour tout idéal non nul $\mathfrak{a}$ de A, l'homomorphisme $A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{a}B$ est surjectif. Cela implique que f est injectif. On peut supposer aussi que A est intègre : sinon, il existe un élément non nul t de A d'annulateur non nul; l'hypothèse que l'on vient de faire implique que $B = A + \mathrm{Ann}_A(t)B$ et $B = A + tB$; on déduit de la première égalité que tB est contenu dans A et la seconde permet alors de conclure.

(2.4) *Fin de la démonstration sous l'hypothèse* (i). — Supposons effectuée la réduction précédente. Soient K le corps des fractions de A, et $L = K \otimes_A B$. Pour montrer que f est un isomorphisme, il suffit, puisque f est fidèlement plat, de montrer que $K \to L$ est un isomorphisme (1.7); or $K \to L$ est un homomorphisme absolument plat par hypothèse, donc L est limite inductive filtrante de K-algèbres finies étales (1.4); il suffit donc de montrer que, pour tout corps K' extension finie de K, $K' \otimes_K L$ est un corps. Soient A' une A-algèbre finie de corps des fractions K', et $f' : A' \to A' \otimes_A B$ l'homomorphisme déduit de f; A' est un anneau local noethérien hensélien, et toutes les hypothèses faites sur f sont vérifiées pour f'. On est donc ainsi ramené à démontrer que B est intègre, ou encore que son anneau total des fractions L ne possède pas d'idempotent non trivial puisque (1.4) est un anneau absolument plat. Or, comme $L = B \otimes_A K$, un idempotent de L est image d'un idempotent de B_t pour un élément t de A convenable, et Spec (B_t) est connexe d'après le lemme suivant appliqué avec $I = tA$.

Lemme (2.5). — *Soient A un anneau local intègre unibranche, B un anneau local et $f : A \to B$ un homomorphisme local plat; enfin, soit I un idéal de type fini de A tel que $A/I \to B/IB$ soit un isomorphisme. Alors l'ouvert $D(IB)$ de* Spec (B) *est connexe.*

Pour une démonstration, *voir* l'appendice de [5], corollaire 4.3.

(2.6) *Démonstration de* (2.1) *sous l'hypothèse* (ii), *et lorsque A est complet.* — Posons $J = \cap_n \mathfrak{m}^n B$, et $I = f^{-1}(J)$; comme $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m} B$ est un isomorphisme, $A \to B/J$ est surjectif, puisque B/J est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique ([1], chap. 3, § 2, cor. 3 de la prop. 12). L'homomorphisme composé $A/I \to B/IB \to B/J$ étant un isomorphisme, on déduit de la platitude de $B \otimes_A B \to B$ que $B/IB \to B/J$ est plat (1.2) (i), donc fidèlement plat puisque B est local et par suite un isomorphisme; cela implique que $A \to B/I^2 B$ est surjectif, donc que $B/I^2 B$ est un anneau local noethérien, et en particulier que $B/I^2 B$ est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique; on voit donc que $J = IB = I^2 B$; mais IB est un idéal de type fini, puisque A est noethérien, donc $IB = 0$ (Nakayama); par suite, $A \to B$ est surjectif.

(2.7) *Réduction, sous l'hypothèse* (ii), *au cas où B est intègre et où* Spec (A) *est unibranche.* — Supposons effectuée la réduction de (2.3). Comme f est injectif, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B tel que $\mathfrak{q} \cap A = 0$; il est clair que les hypothèses faites sur f restent vérifiées pour l'homomorphisme composé $A \to B \to B/\mathfrak{q}$; si on montre que c'est un isomorphisme, on déduira de la platitude de $B \otimes_A B \to B$ et de (1.2) (i) que $B \to B/\mathfrak{q}$ est plat, donc fidèlement plat puisque B est local, donc donc que $\mathfrak{q} = 0$. On peut donc supposer que B est intègre.

Il existe une A-algèbre finie A' contenue dans le corps des fractions de A telle que Spec (A') soit unibranche; posons $B' = A' \otimes_A B$, de sorte qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

Notons que Spec (v) est surjectif puisque Spec (u) l'est, donc que v est injectif puisque B est intègre. Comme A est un anneau local noethérien hensélien, il en est de même de A'; de plus, f' vérifie les mêmes hypothèses que f. Si on montre que f' est un isomorphisme, on en déduira que f est fini puisque v est injectif, donc que f est un isomorphisme puisque $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m} B$ est un isomorphisme. On peut donc supposer que Spec (A') est unibranche.

Lemme (2.8). — *Soient A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, B un anneau local, et $f : A \to B$ un homomorphisme local induisant un isomorphisme sur les corps résiduels et tel que l'homomorphisme canonique $B \otimes_A B \to B$ soit plat.*

Soient, d'autre part, A' un anneau local noethérien, $u : A \to A'$ un homomorphisme fidèlement plat tel que $A/\mathfrak{m} \to A'/\mathfrak{m} A'$ soit un isomorphisme, et C le localisé de $B' = A' \otimes_A B$ en l'unique idéal premier de B' au-dessus *de l'idéal maximal de A', de sorte qu'on a le diagramme commutatif suivant:*

(2.8.1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "w"] & \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Supposons que $A' \to C$ soit surjectif, de noyau J, et soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de A annulateur du A-module J/J^2. Alors :

(*a*) *L'homomorphisme $A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{a}B$ est injectif;*

(*b*) *L'ouvert $D(\mathfrak{a})$ de* Spec (A) *est égal à l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A tels que $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ soit plat;*

(*c*) *Supposons, de plus,* soit *que A est réduit,* soit *que f est un épimorphisme. Alors pour que f soit plat, il faut et il suffit que f soit injectif et que l'ouvert* $\mathrm{D}(\mathfrak{a}A')$ *de* Spec (A') *soit connexe.*

Démonstration. — L'injectivité de $A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{a}B$ provient de ce que J/J^2 est canoniquement muni d'une structure de C-module, et du fait que les deux structures de A-module sur J/J^2 déduites par restriction des scalaires, respectivement par u et par wf, sont identiques puisque le diagramme (2.8.1) est commutatif.

Montrons (*b*) : l'homomorphisme $w = gv$ est local et plat, donc fidèlement plat; on en déduit que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, la relation « $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ est plat » est équivalente à « $A'_\mathfrak{p} \to C_\mathfrak{p}$ est plat » ; comme $A' \to C$ est surjectif de noyau l'idéal de type fini J, cette relation revient à dire que $J_\mathfrak{p}$ est engendré par un idempotent de $A'_\mathfrak{p}$, ce qui équivaut à $(J/J^2)_\mathfrak{p} = 0$; enfin, comme J/J^2 est un A'-module de type fini, le support du A-module J/J^2 est le fermé défini par son annulateur $\mathfrak{a}$; cela prouve (*b*), mais cela montre aussi qu'en posant $U = D(\mathfrak{a}A')$, $V(J) \cap U$ est un ouvert et fermé de U.

Il est clair que les conditions de (*c*) sont nécessaires; réciproquement, supposons f injectif et U connexe. Soit Z l'ensemble des points génériques de Spec (A), et soit Z' l'image réciproque de Z par l'application Spec $(A') \to$ Spec (A). Montrons que U contient Z' : soit $\mathfrak{p} \in Z$; si A est réduit, $A_\mathfrak{p}$ est un corps, et $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ est plat; si f est un épimorphisme (injectif par hypothèse), $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ est un isomorphisme puisque $A_\mathfrak{p}$ est local artinien; dans les deux cas, f est plat aux points génériques, donc $Z' \subset U$. D'autre part, w est fidèlement plat, donc $gf'u = wf$ est injectif, donc $u^{-1}(J) = 0$; on en déduit que les points génériques de Spec (A) se relèvent dans Spec $(A'/J) = V(J)$, donc que $V(J) \cap Z' \neq \emptyset$; comme U contient Z', $V(J) \cap U$ est non vide; mais on a vu que $V(J) \cap U$ est une partie ouvert et fermée de U, et on a supposé U connexe; donc $Z' \subset U \subset V(J)$; comme $A \to A'$ est plat, Z' contient les points génériques de Spec (A'), donc J est nilpotent. Par définition de $\mathfrak{a}$, il existe donc un entier n tel que $\mathfrak{a}^n J = 0$. Posons $\mathfrak{b} = \mathrm{Ann}_A(\mathfrak{a}^n)$; par platitude, on a $J \subset \mathfrak{b} A'$. Comme $\mathfrak{a}$ n'est contenu dans aucun idéal premier minimal de A, $\mathfrak{b}$ est nilpotent; donc si A est réduit, $J = 0$, et f est plat puisque u et w sont fidèlement plats. Comme $J \subset \mathfrak{b} A'$, le même argument de platitude montre que $A/\mathfrak{b} \to B/\mathfrak{b} B$ est fidèlement plat; c'est donc un isomorphisme si f est un épimorphisme; comme $\mathfrak{b}$ est nilpotent, on en conclut que f est un isomorphisme.

(2.9) *Fin de la démonstration sous l'hypothèse* (ii). — Supposons effectuées les réductions (2.3) et (2.7). On va montrer qu'alors f est plat, ce qui achèvera la démonstration compte tenu de la partie (i) déjà prouvée.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A possédant les propriétés énoncées dans (2.8) appliqué en prenant pour A' le complété de A et en tenant compte de (2.6); il s'agit de montrer que $\mathfrak{a} = A$. Or, si $\mathfrak{a} \neq A$, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ minimal parmi ceux contenant $\mathfrak{a}$; posons $A' = A_{\mathfrak{p}}$ et $B' = B_{\mathfrak{p}}$; d'après le choix de $\mathfrak{p}$, $f' : A' \to B'$ n'est pas plat. Comme A est intègre, f est plat au point générique, donc $\mathfrak{a} \neq 0$ et par suite $A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{a} B$ est un isomorphisme. Montrons que B' est local : soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B tel que $\mathfrak{q} \cap A \subset \mathfrak{p}$; si $\mathfrak{q}$ est non nul, $\mathfrak{q} \cap A$ est non nul puisque le corps des fractions de B est une extension algébrique de celui de A (1.4); on a donc, par hypothèse, un isomorphisme $A/\mathfrak{q} \cap A \to B/(\mathfrak{q} \cap A) B$; on en déduit que $\mathfrak{q}$ est engendré par $\mathfrak{q} \cap A$, donc est contenu dans $\mathfrak{p} B$; ce qui montre que $B' = B_{\mathfrak{p}}$ est local. La dernière assertion de (2.8) implique que le complémentaire du point fermé de $\mathrm{Spec}(\hat{A}')$ n'est pas connexe; or, A' est unibranche, puisque $\mathrm{Spec}(A)$ est unibranche; le lemme (2.5) appliqué à $A' \to \hat{A}'$ conduit alors à une contradiction. Donc $\mathfrak{a} = A$, et f est plat.

C. Q. F. D.

Corollaire (2.10). — *Soient A un anneau local noethérien, B un anneau local, et $f: A \to B$ un homomorphisme local tel que l'homomorphisme canonique $B \otimes_A B \to B$ soit un isomorphisme* (resp. *soit plat*). *Soient A' un hensélisé de A* (resp. *un hensélisé strict de A*), *et $\mathfrak{n}$ un idéal premier de $A' \otimes_A B$ au-dessus de l'idéal maximal de A'. Posons $B' = (A' \otimes_A B)_{\mathfrak{n}}$. Alors $A' \to B'$ est surjectif, et l'homomorphisme $B \to B'$ fait de B' un hensélisé de B* (resp. *un hensélisé strict de B*). *En particulier, B est noethérien.*

Preuve. — Considérons le diagramme où ces données s'insèrent :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "w"] & \\ A' \arrow[r, "f'"] & A' \otimes_A B \arrow[r, "g"] & B' \end{tikzcd}$$

Dans les deux cas, l'homomorphisme canonique $B' \otimes_{A'} B' \to B'$ est plat. Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, et $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} A'$ celui de A'. Si f est un épimorphisme, $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m} B$ est un isomorphisme, donc aussi

$$A'/\mathfrak{m}' \to B'/\mathfrak{m}'B';$$

si $B \otimes_A B \to B$ est plat, alors $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m} B$ est une extension algébrique séparable, il en est donc de même de $A'/\mathfrak{m}' \to B'/\mathfrak{m}' B'$; mais, par définition du hensélisé strict, $A'/\mathfrak{m}'$ est un corps séparablement clos; la flèche précédente est donc encore un isomorphisme.

D'après le théorème (2.1), $A' \to B'$ est surjectif; en particulier, B' est noethérien et hensélien (resp. strictement hensélien). Comme v est fidèlement plat, $B \to B'$ est fidèlement plat; donc B est noethérien. Enfin, par définition de A', B' est limite inductive filtrante de B-algèbres étales; donc B' est le hensélisé de B (resp. un hensélisé strict de B).

3. Épimorphismes locaux

Ce paragraphe est consacré aux épimorphismes locaux, c'est-à-dire aux homomorphismes locaux $f : A \to B$ d'anneaux locaux tels que l'homomorphisme canonique $B \otimes_A B \to B$ soit un isomorphisme.

Si A est noethérien, il résulte de (2.10) qu'en passant aux hensélisés on obtient un homomorphisme surjectif ${}^hA \to {}^hB$. On va d'abord dégager des conditions pour qu'un quotient de ${}^hA$ provienne d'un épimorphisme local.

Le second résultat important de ce paragraphe est qu'un épimorphisme local de source un anneau noethérien est « essentiellement fini », c'est-à-dire s'obtient par localisation d'un homomorphisme fini. On obtient ainsi une variante du « Main Theorem » de Zariski dans laquelle on fait une hypothèse de finitude sur le morphisme diagonal et non sur le morphisme lui-même.

Lorsqu'on parlera de la « catégorie des épimorphismes locaux » de source un anneau local A, il s'agira de la sous-catégorie pleine de la catégorie des A-algèbres dont les objets sont les épimorphismes locaux; il y a donc, au plus, un morphisme entre deux tels objets, et c'est nécessairement un homomorphisme local.

Proposition (3.1). — *Soient A un anneau local noethérien, et A' son hensélisé. Le foncteur hensélisation établit une équivalence entre la catégorie des épimorphismes locaux de source A et la catégorie des homomorphismes surjectifs $A' \to B'$ satisfaisant les propriétés équivalentes suivantes* [*où* $J = \operatorname{Ker}(A' \to B')$] :

(*a*) *Les deux homomorphismes canoniques $B' \rightrightarrows B' \otimes_A B'$ sont plats;*

(*b*) *Dans l'anneau $A' \otimes_A A'$, on a $J \otimes_A A' \subset J^2 \otimes_A A' + A' \otimes_A J$.*

De plus, un foncteur quasi-inverse du précédent peut être défini en associant à tout quotient B' de A', satisfaisant les propriétés indiquées, la A-algèbre, noyau de la double flèche $B' \rightrightarrows B' \otimes_A B'$.

Démonstration. — Soient $f: A \to B$ un épimorphisme local, et B' le hensélisé de B; comme $B \otimes_A B \to B$ est un isomorphisme, l'homomorphisme canonique $B' \otimes_A B' \to B' \otimes_B B'$ est un isomorphisme; cette remarque et la fidèle platitude de $B \to B'$ montrent qu'on a une suite exacte

$$B \to B' \rightrightarrows B' \otimes_A B', \tag{3.1.1}$$

où les trois homomorphismes sont plats; cela implique immédiatement la dernière assertion ainsi que la nécessité de la condition (a). D'autre part, on a vu (2.10) que $A' \to B'$ est surjectif.

Montrons que la condition (a) est suffisante : soit donc $A' \to B'$ un homomorphisme surjectif, de noyau J, tel que les deux homomorphismes $B' \rightrightarrows B' \otimes_A B'$ soient plats. Comme J est de type fini, et comme A' est limite inductive de A-algèbres étales, il existe une A-algèbre étale $\overline{A}$ et un homomorphisme surjectif $\overline{A} \to \overline{B}$ tels que $B' = A' \otimes_{\overline{A}} \overline{B}$, et tels que les deux homomorphismes $\overline{B} \rightrightarrows \overline{B} \otimes_A \overline{B}$ soient plats. Posons $\overline{S} = \operatorname{Spec}(\overline{A})$ et $\overline{T} = \operatorname{Spec}(\overline{B})$. Il résulte du théorème de Murre sur la représentabilité du « flattening functor » [8] (cor. 2, p. 11), qu'il existe une factorisation de $\overline{T} \to S$ en

$$\overline{T} \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} S,$$

où u est fidèlement plat et v un monomorphisme. Soient x l'unique point de X tel que $v(x)$ soit le point fermé de S, et $B = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Il est clair qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A' \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}$$

où les homomorphismes verticaux sont fidèlement plats et où $A \to B$ est un épimorphisme local. Il reste à vérifier que le hensélisé ${}^hB$ de B est A'-isomorphe à B'; or, d'après sa propriété universelle et puisque B' est hensélien, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \arrow[rdd] & \\
A' \arrow[r] \arrow[rrd] & {}^hB \arrow[rd, "\varphi"] & \\
 & & B'
\end{tikzcd}$$

Comme $A' \to B'$ est surjectif, φ est surjectif; mais φ est plat puisque $B \to B'$ est plat et que ${}^hB \otimes {}^hB \to {}^hB$ est plat; donc φ est un isomorphisme.

Montrons que les conditions (*a*) et (*b*) sont équivalentes : comme l'homomorphisme $A \to A'$ est absolument plat, il en est de même de $B' \to B' \otimes_A A'$; donc (1.2) (i) la platitude de l'homomorphisme composé $B' \to B' \otimes_A A' \to B' \otimes_A B'$ est équivalente à la platitude de l'homomorphisme $B' \otimes_A A' \to B' \otimes_A B'$; comme ce dernier est surjectif de noyau l'idéal de type fini Im $(B' \otimes_A J \to B' \otimes_A A')$, cet homomorphisme est plat si, et seulement si, cet idéal est égal à son carré; c'est exactement ce qu'exprime la condition (*b*).

(3.2) *Remarque.* — Gardant les hypothèses et les notations de (3.1), on peut montrer que si J est un idéal de A' tel que les deux homomorphismes $A'/J \rightrightarrows A'/J \otimes_A A'/J$ soient plats, alors il en est de même des homomorphismes $A'/J^2 \rightrightarrows A'/J^2 \otimes_A A'/J^2$.

COROLLAIRE (3.3). — *Soient A un anneau local noethérien, et A' son hensélisé. Alors le foncteur hensélisation établit une équivalence entre la catégorie des épimorphismes locaux $A \to B$, tels que $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ soit plat pour tout idéal premier non maximal $\mathfrak{p}$ de A, et la catégorie des homomorphismes surjectifs $A' \to B'$, dont le noyau J est tel que J/J^2 soit un A'-module de longueur finie.*

Preuve. — Soient $f: A \to B$ un épimorphisme local, et $f' : A' \to B'$ l'homomorphisme surjectif obtenu en passant aux hensélisés. Il est clair que f est plat en dehors du point fermé si, et seulement si, f' l'est; cette dernière condition revient à dire que $J = \mathrm{Ker}\,(f')$ est un idéal idempotent au-dessus du complémentaire du point fermé, ou encore que J/J^2 est de longueur finie. D'autre part, si J est un idéal de A' tel que J/J^2 soit un A'-module de longueur finie $\neq 0$, l'annulateur $\mathfrak{a}'$ de J/J^2 est un idéal primaire pour l'idéal maximal de A', donc est égal à $\mathfrak{a}\, A'$, où $\mathfrak{a} = A \cap \mathfrak{a}'$. Posons $A'' = A' \otimes_A A'$, et soit $\mathfrak{m}''$ l'unique idéal premier de A'' contenant $\mathfrak{a}\, A''$ (cette unicité résulte de ce que $A/\mathfrak{a} \to A'/\mathfrak{a}\, A'$ est un isomorphisme); comme $A'' \to A'$ est surjectif et plat, $A_{\mathfrak{m}''} \to A'$ est un isomorphisme, donc $(1 + \mathfrak{a}\, A'')^{-1} A'' \to A'$ est un isomorphisme; on en déduit qu'il existe $z \in \mathfrak{a}\, A''$ tel que $(1 + z)\, J \otimes_A A' \subset A' \otimes_A J$. Comme $\mathfrak{a}\, J \subset J^2$, on a $z . J \otimes_A A' \subset J^2 \otimes_A A'$, donc la condition (*b*) de (3.1) est satisfaite, et le corollaire est démontré.

COROLLAIRE (3.4). — *Soient A un anneau local noethérien intègre de dimension 1, et A' son hensélisé. Alors le foncteur hensélisation établit une équivalence entre la catégorie des épimorphismes locaux de source A et la catégorie des homomorphismes surjectifs $A' \to B'$. En particulier, pour que tout épimorphisme local de source A soit surjectif, il faut et il suffit que A soit unibranche.*

Preuve. — Il suffit, d'après (3.3), de remarquer que, pour *tout* idéal J de A', J/J^2 est de longueur finie, ce qui est clair puisque A' est réduit. D'autre part, pour que tout idéal de A' soit engendré par sa trace sur A, il faut et il suffit que A' soit intègre, c'est-à-dire A unibranche.

THÉORÈME (3.5). — *Soient A un anneau local noethérien, B un anneau local, et $f: A \to B$ un épimorphisme local. Alors f est essentiellement fini. Plus précisément, il existe un élément $t \in B$, entier sur A tel que, en désignant par $A[t]$ la sous-A-algèbre finie de B engendrée par t, $A \to A[t]_t$ soit un épimorphisme, et tel que B soit un localisé de $A[t]_t$.*

Démonstration. — Soient A' le hensélisé de A, $C' = A' \otimes_A B$ et B' le localisé de C' en l'unique idéal premier qui est au-dessus de l'idéal maximal de A'. On a vu (2.10) que $A' \to B'$ est surjectif. Montrons que B' est le localisé d'une A'-algèbre finie contenue dans C' : soit J le noyau de $A' \to B'$; l'homomorphisme composé $A'/J \to C'/JC' \to B'$ est un isomorphisme; comme $C' \otimes_{A'} C' \to C'$ est un isomorphisme, $C'/JC' \to B'$ est aussi un isomorphisme (1.2) (i); mais B' est, par définition, un localisé de C'; l'idéal de type fini JC' de C' est donc engendré par un idempotent e de C', et B' est un localisé de $A'[e]$ puisque $A' \to B'$ est surjectif.

Comme $C' = A' \otimes_A B$, il existe une sous-A-algèbre de type fini R de B telle que
$$A'[e] \subset A' \otimes_A R \subset C'.$$

Il est clair que B' est encore un localisé de $A' \otimes_A R$. Montrons que B est un localisé de R, c'est-à-dire, puisque B est local, que l'épimorphisme $R \to B$ est plat : or, dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' \otimes_A R & \longrightarrow & B' \end{array}$$

les deux homomorphismes verticaux sont fidèlement plats et la base est un homomorphisme de localisation.

Soit $\mathfrak{r}$ l'idéal premier de R tel que $R_{\mathfrak{r}} \xrightarrow{\sim} B$; comme $A \to R_{\mathfrak{r}}$ est un épimorphisme, le morphisme $\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{r}}) \to \mathrm{Spec}(A)$ est injectif, donc $\mathfrak{r}$ est minimal parmi les idéaux premiers de R qui contiennent $\mathfrak{m}R$, où $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de A; d'autre part, l'homomorphisme composé $A/\mathfrak{m} \to R/\mathfrak{r} \to B/\mathfrak{m}B$ est un isomorphisme, et $\mathfrak{r}$ est la trace de $\mathfrak{m}B$ sur R, donc $\mathfrak{r}$ est maximal; bref, $\mathfrak{r}$ est isolé dans sa fibre $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m}R)$, et on peut appliquer le théorème principal de Zariski (EGA [6], III, 4.4.7 ou [10]); il existe donc une sous-A-algèbre finie $E \subset R$ telle que $E_{\mathfrak{p}} \to B$ soit un isomorphisme, où on a posé $\mathfrak{p} = \mathfrak{r} \cap E = \mathfrak{m}B \cap E$. Cela prouve la première partie du théorème.

Allons plus loin. Soient S la partie multiplicative $E - \mathfrak{p}$, et I le noyau de l'homomorphisme canonique $E \otimes_A E \to E$, de sorte que $(S \otimes S)^{-1} I = 0$, puisque $A \to S^{-1} E$ est un épimorphisme; comme E est fini sur A, I est un idéal de type fini; il existe donc $t \in S$ tel que $A \to E_t$ soit un épimorphisme et E est fini sur $A[t]$, donc $A[t]_t \to E_t$ est un épimorphisme fini injectif, c'est-à-dire un isomorphisme. D'où le résultat.

Corollaire (3.6). — *Soient A un anneau local noethérien, B un anneau local, et $f : A \to B$ un homomorphisme local. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *B est une A-algèbre essentiellement de type fini, c'est-à-dire est isomorphe à un localisé d'une A-algèbre de type fini;*

(*b*) *$B \otimes_A B$ est un anneau noethérien;*

(*c*) *Le noyau de l'homomorphisme canonique $B \otimes_A B \to B$ est un idéal de type fini.*

Preuve. — Les implications $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ sont claires. La condition (*c*) entraîne l'existence d'une sous-A-algèbre de type fini C de B telle que $C \to B$ soit un épimorphisme; en appliquant (3.5), on voit que B est essentiellement de type fini sur C, d'où (*a*).

(3.7) *Remarque.* — On peut se demander si, étant donnés deux homomorphismes locaux $f : A \to B$ et $g : A \to C$ tels que A, B, C et $B \otimes_A C$ soient des anneaux noethériens, alors f ou g est essentiellement de type fini. Il n'en est rien comme on le voit en prenant pour A un corps k dont la clôture séparable k_s et la clôture radicielle k_i sont de degré infini sur k : $k_s \otimes_k k_i$ est un corps.

Corollaire (3.8). — *Soient A un anneau local noethérien d'idéa maximal $\mathfrak{m}$, B un anneau local, et $f : A \to B$ un homomorphisme local. Pour que f soit essentiellement fini, il faut et il suffit que $B/\mathfrak{m}B$ soit une A-algèbre finie, et que le noyau de $B \otimes_A B \to B$ soit un idéal de type fini.*

C'est une conséquence immédiate de (3.6) et du théorème principal de Zariski.

4. Critères de platitude et d'absolue platitude

Le lecteur remarquera que les énoncés (4.1) à (4.8) restent vrais si, au lieu de supposer le schéma de base S localement noethérien, on suppose seulement que, pour tout point $s \in S$, l'anneau $\mathcal{O}_{S,s}$ est noethérien.

Théorème (4.1). — *Soient S un schéma localement noethérien, et $f : X \to S$ un morphisme* plat. *Pour que f soit absolument plat, il faut et il suffit que, pour tout $s \in S$, le morphisme fibre $f_s : X_s \to$ Spec $(k(s))$ soit absolument plat.*

Cet énoncé justifie en partie le choix de la dénomination « morphisme absolument plat »; en effet, lorsque la base est localement noethérienne, elle est cohérente avec les définitions de EGA ([6], IV, 6.7 et 6.8) puisqu'elle désigne les morphismes plats tels que, pour tout $s \in S$ et toute extension finie k de $k(s)$, $X_s \times_S \operatorname{Spec}(k)$ soit un schéma absolument plat.

Preuve de (4.1). — Il s'agit de montrer que le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est plat. Il résulte de [9] qu'il suffit de vérifier cette propriété pour les morphismes $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,f(x)})$. Posons $A = \mathcal{O}_{S,f(x)}$ et $B = \mathcal{O}_{X,x}$. Soient A' un hensélisé strict de A, et B' un localisé de $A' \otimes_A B$ en un idéal premier au-dessus de l'idéal maximal de A'; comme l'homomorphisme $B' \otimes_{A'} B' \to B'$ est encore plat l'extension résiduelle de $A' \to B'$ est algébrique et séparable (1.4); mais, par hypothèse le corps résiduel de A' est séparablement clos; on peut donc appliquer (2.1) (i) à $A' \to B'$ et en déduire que c'est un isomorphisme; par suite, l'homomorphisme absolument plat $A \to A'$ se factorise en $A \to B \to A'$, où $B \to A'$ est fidèlement plat. Il suffit, pour pouvoir conclure, d'appliquer [1] (chap. 1, § 3, n° 4, Remarque 2) au carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \longrightarrow & A' \otimes_A A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A' \end{array}$$

COROLLAIRE (4.2). — *Soit $f : X \to S$ un morphisme plat de schémas, où S est localement noethérien. Pour que f soit un monomorphisme, il faut et il suffit que, pour tout $s \in S$ tel que X_s soit non vide, le morphisme* $X_s \to \operatorname{Spec}(k(s))$ *soit un isomorphisme.*

Preuve. — Il résulte de (4.1) que le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est plat. Mais comme f est radiciel, Δ_f est surjectif (EGA [6], IV, 1.8.7.1), et par suite fidèlement plat; comme c'est une immersion, c'est un isomorphisme, et f est un monomorphisme.

(4.3) *Remarque.* — On a déjà vu (2.2) que l'hypothèse de platitude est essentielle dans (2.1) (i). Voici un exemple encore plus probant où S est le spectre d'un anneau local régulier complet A de dimension 2 et X le spectre d'un anneau local intégralement clos B contenu dans le corps des fractions de A et dominant A : soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, et t un élément de $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, de sorte que $\mathfrak{p} = tA$ est un idéal premier et que $A/\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation discrète. Posons $B = A + \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$. On vérifie sans peine que les homomorphismes $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m} B$ et $k(\mathfrak{p}) \to B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ sont des isomorphismes, et que les seuls idéaux premiers de B sont $\mathfrak{m} B$, $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ et (0), de sorte que les hypothèses de (4.2) sont vérifiées, excepté la platitude. Il résulte de (2.1) (ii) que $A \to B$

n'est pas un épimorphisme. De plus, comme $A_{\mathfrak{p}}$ et $A/\mathfrak{p}$ sont intégralement clos, B est lui-même intégralement clos.

COROLLAIRE (4.4). — *Soient S un schéma localement noethérien, $S' \to S$ un morphisme surjectif, et $f: X \to S$ un morphisme plat. Pour que f soit absolument plat, il faut et il suffit que $f' : X \times_S S' \to S'$ soit absolument plat.*

COROLLAIRE (4.5). — *Soient S un schéma localement noethérien, $u : S' \to S$ un morphisme fini tel que $\mathcal{O}_S \to u_* \mathcal{O}_{S'}$ soit injectif, et $f: X \to S$ un morphisme. Pour que f soit absolument plat, il faut et il suffit que $f' : X \times_S S' \to S'$ le soit.*

Preuve par descente finie de la platitude.

On va maintenant dégager des conditions qui impliqueront qu'un morphisme est plat dès que son morphisme diagonal l'est (comparer avec EGA [6], IV, 18.10.1).

THÉORÈME (4.6). — *Soient A un anneau local noethérien intègre et géométriquement unibranche, B un anneau local, et $f: A \to B$ un homomorphisme local tel que l'homomorphisme $B \otimes_A B \to B$ soit plat. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *f est plat;*

(*b*) *f est injectif;*

(*c*) $\dim (A) \leqq \dim (B)$.

De plus, si ces conditions sont vérifiées, B est intègre et géométriquement unibranche.

Démonstration. — On sait (2.10) que B est noethérien et qu'il existe un homomorphisme surjectif $A' \to B'$, où A' (resp B') est un hensélisé strict de A (resp. de B). Comme A' est intègre par hypothèse, la condition (*c*) revient à dire que $A' \to B'$ est un isomorphisme, ou encore que $A' \to B'$ est plat ou, enfin, que f est plat; d'où l'équivalence de (*a*) et (*c*). D'autre part, si f est plat, donc fidèlement plat, il est injectif. Si f est injectif, le noyau J de $A' \to B'$ a une trace nulle sur A puisque $B \to B'$ est injectif; mais si K désigne le corps des fractions de A, $A' \otimes_A K$ est un corps, donc $J = 0$ et $A' \to B'$ est un isomorphisme. Vu ce qui précède, la dernière assertion est claire.

COROLLAIRE (4.7). — *Soient S un schéma localement noethérien réduit et géométriquement unibranche, et $f: X \to S$ un morphisme de schémas tel que le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$ soit plat. Pour que f soit plat, il faut et il suffit que, pour tout point générique x de X, $f(x)$ soit un point générique de S.*

Pour voir que la condition est suffisante, il suffit de montrer que, pour tout $x \in X$, l'homomorphisme local $\mathcal{O}_{S,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif [condition (*b*) de (4.6)], ce qui est une conséquence immédiate des hypothèses.

PROPOSITION (4.8). — *Soient S un schéma localement noethérien, et $f: X \to S$ un morphisme dont le morphisme diagonal est plat. Pour que f soit plat, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) *Pour tout point générique x de X, $f(x)$ est un point générique de S;*

(ii) *f est plat en tout point x tel que* $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{S,f(x)}) \leq 1$.

Preuve. — Les conditions sont clairement nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soient $x \in X$, $s = f(x)$, $A = \mathcal{O}_{S,s}$ et $B = \mathcal{O}_{X,x}$. Soit J le noyau de l'homomorphisme surjectif $A' \to B'$ obtenu en passant aux hensélisés stricts. Il faut montrer que J est nul, c'est-à-dire que $\operatorname{Ann}_{A'}(J) = A'$. Soient $\mathfrak{p}'$ un idéal premier de A' minimal parmi ceux contenant J, et $\mathfrak{p}$ sa trace sur A ; il résulte de (i) que $\mathfrak{p}$ est minimal dans A, donc que $\operatorname{prof}(A_{\mathfrak{p}}) = 0$, et de (ii) que $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{p}}$ est plat, donc que $A'_{\mathfrak{p}'} \to B'_{\mathfrak{p}'}$ est un isomorphisme; autrement dit, $J_{\mathfrak{p}'} = 0$ et $\mathfrak{p}' \not\supset \operatorname{Ann}_{A'}(J)$. Soit maintenant $\mathfrak{p}'$ un idéal premier de A' minimal parmi ceux contenant $J + \operatorname{Ann}_{A'}(J)$. Vu ce qui précède, on déduit d'un théorème de Hartshorne (EGA [6], IV, 5.11) que $\operatorname{prof}(A'_{\mathfrak{p}'}) \leq 1$; posant encore $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}'$, on a, par platitude, $\operatorname{prof}(A_{\mathfrak{p}}) \leq 1$; soient $\mathfrak{q}'$ l'image de $\mathfrak{p}'$ dans $B' = A'/J$ et $\mathfrak{q} = B \cap \mathfrak{q}'$; d'après l'hypothèse (ii), $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ est plat, donc $A'_{\mathfrak{p}'} \to B'_{\mathfrak{q}'}$ est un isomorphisme, ce qui est absurde puisque $\mathfrak{p}'$ contient J et l'annulateur de J; on en conclut que $J + \operatorname{Ann}_{A'}(J) = A'$, donc que $\operatorname{Ann}_{A'}(J) = A'$.

COROLLAIRE (4.9). — *Gardons les hypothèses de* (4.8), *et supposons que f vérifie* (i), *et que S est un schéma intègre. Soit U l'ensemble des points $s \in S$ tels que le morphisme*

$$X \times_S \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$$

soit plat. Alors, si U contient un ouvert, U est ouvert.

Preuve. — On peut supposer S affine d'anneau A. Par hypothèse, il existe un élément non nul t de A tel que l'ouvert $D(t)$ soit contenu dans U; soit F le fermé de S, adhérence de l'ensemble fini $\operatorname{Ass}(A/tA) \cap (S - U)$. On va montrer que $U = S - F$. Soit V le schéma induit par S sur l'ouvert $S - F$. Comme U est stable par généralisation, V contient U. Il suffit donc de montrer que le morphisme $f^{-1}(V) \to V$ est plat. Or, d'après la définition de V, les points de profondeur 1 de V sont dans U; on peut appliquer (4.8).

Corollaire (4.10). — *Soit A un anneau intègre noethérien.*

(i) *Pour que* Spec (A) *soit géométriquement unibranche, il faut et il suffit que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que* prof $(A_{\mathfrak{p}}) = 1$, *$A_{\mathfrak{p}}$ soit géométriquement unibranche.*

(ii) *Si l'ensemble des points géométriquement unibranches de* Spec (A) *contient un ouvert, il est lui-même ouvert.*

Preuve. — Elle est calquée sur celles de (4.8) et (4.9) : pour (i), on peut supposer A local; soit A' un hensélisé strict de A; pour prouver que A' est intègre, on applique (4.7) et (4.8) à l'homomorphisme composé $A \to A' \to A'/\mathfrak{p}'$, où $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier minimal de A'. Pour prouver (ii), on procède, *mutatis mutandis*, comme dans (4.9).

(4.11) *Remarque.* — Soit A un anneau intègre noethérien. L'ensemble des points géométriquement unibranches de Spec (A) n'est pas nécessairement ouvert; Raynaud a en effet construit un anneau intègre noethérien de dimension 1 de spectre infini et qui est géométriquement unibranche au seul point générique; cependant, cet ensemble est ouvert dans de nombreux cas, par exemple si A est local (EGA [6], 0_{IV}, 23.2.5), ou si A est japonais.

5. Exemples

(5.1). — Soient a, b et c trois éléments d'un anneau A. Désignons par C le quotient de l'anneau de polynômes $A[T]$ par l'idéal engendré par les polynômes $T^2 + aT + b$ et $bT + c$, et par t l'image de T dans C. Alors $A \to C_t$ est un épimorphisme.

En effet, dans l'anneau $C \otimes_A C$, on a $t \otimes t(t \otimes 1 - 1 \otimes t) = 0$; comme le noyau de $C \otimes_A C \to C$ est l'idéal engendré par $t \otimes 1 - 1 \otimes t$, l'homomorphisme $C_t \otimes_A C_t \to C_t$ est un isomorphisme.

(5.2). — Soient A un anneau local noethérien, et $A \to B$ un épimorphisme local plat au-dessus de l'ouvert U de Spec (A) complémentaire du point fermé. Alors B est isomorphe à un quotient d'un localisé d'un épimorphisme du type décrit en (5.1). (En particulier, si de plus A est intègre et de dimension 1, la même conclusion est vraie pour *tout* épimorphisme local $A \to B$.)

En effet, d'après (3.5), il existe une A-algèbre finie $C \subset B$, et un idéal maximal $\mathfrak{n}$ de C tels que B soit isomorphe à $C_{\mathfrak{n}}$. Soient W l'ouvert de Spec (C) formé des points où le morphisme Spec $(C) \to$ Spec (A) est plat, et V l'image réciproque de U par ce morphisme, c'est-à-dire l'ensemble des points non fermés de Spec (C). L'hypothèse selon laquelle $A \to C_{\mathfrak{n}}$ est plat au-dessus de U s'écrit aussi : $V \cap \text{Spec}(C_{\mathfrak{n}}) \subset W$; il existe donc un élément $u \in C - \mathfrak{n}$ tel que $V \cap \text{Spec}(C_u) \subset W$; comme $A \to C_{\mathfrak{n}}$ est un épimorphisme, on peut aussi supposer que $A \to C_u$ est un épimorphisme.

Soit I le conducteur de $A \to C$; montrons que $V \cap \mathrm{Spec}\,(C_u) \subset D\,(I)$; soit donc $\mathfrak{r}$ un idéal premier de C ne contenant pas u et dont la trace $\mathfrak{p}$ dans A est distincte de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. D'après ce qui précède, $\mathfrak{r} \in W$; l'homomorphisme composé $A_\mathfrak{p} \to C_\mathfrak{p} \to (C_u)_\mathfrak{p} = C_\mathfrak{r}$ est donc un épimorphisme fidèlement plat, c'est-à-dire un isomorphisme; comme C est par hypothèse contenu dans $B = C_\mathfrak{n}$, $C \to C_u$ est injectif, donc $A_\mathfrak{p} \to C_\mathfrak{p}$ est un isomorphisme, et $\mathfrak{p}$ ne contient pas le conducteur I; *a fortiori*, $\mathfrak{r}$ ne contient pas I.

On déduit de la relation $V \cap \mathrm{Spec}\,(C_u) \subset D\,(I)$ que $(C/I)_u$ est un anneau artinien. Par suite, il existe un idempotent de C/I qui est inversible au seul point $\mathfrak{n}$; notons par t un élément de C dont l'image dans C/I soit l'idempotent en question. On a

$$D\,(t) \cap \mathrm{Spec}\,(C/I) = \{\,\mathfrak{n}\,\} \subset D\,(u) \cap \mathrm{Spec}\,(C/I);$$

quitte à remplacer t par $t + a$, où a est un élément convenable de I, on peut donc supposer que $D\,(t)$ est contenu dans $D\,(u)$, donc que $A \to C_t$ est un épimorphisme.

Désignons alors par E la sous-A-algèbre de C engendrée par t; comme $E_t \to C_t$ est un épimorphisme fini injectif, c'est un isomorphisme; par suite, B est isomorphe à un localisé de E_t. Enfin, comme t est un idempotent modulo I, on a $t^2 = t + b$ avec $b \in I$; comme I est le conducteur de $A \to C$, on a aussi $bt = c$, avec $c \in I$. Finalement, on voit donc que B est isomorphe à un quotient d'un localisé d'un épimorphisme du type construit en (5.1).

(5.3). — L'énoncé (3.3) fournit un procédé de construction d'épimorphismes locaux plats au-dessus du complémentaire du point fermé; en voici un autre, peut-être plus explicite.

Soient A un anneau local noethérien de dimension > 0, et U l'ouvert de Spec (A) complémentaire du point fermé $\mathfrak{m}$. Supposons que la fermeture intégrale de A dans $\Gamma(U, \tilde{A})$ ne soit pas un anneau local; il existe donc une A-algèbre finie $C \subset \Gamma(U, \tilde{A})$ qui n'est pas locale; comme A et C coïncident au-dessus de U, le quotient C/I de C par le conducteur I de $A \to C$ est un anneau artinien, donc est, en particulier, un produit fini d'anneaux locaux. Comme C n'est pas local, C/I ne l'est pas non plus; il existe donc un élément $t \in C$ dont l'image dans C/I soit un idempotent non trivial; la remarque déjà faite quelques lignes plus haut montre que $A \to A\,[t]_t$ est un épimorphisme; on vérifie immédiatement que cet épimorphisme est plat au-dessus de U.

Pour pouvoir appliquer cela aux anneaux de dimension 1, nous aurons besoin du résultat technique suivant :

Lemme (5.4). — *Soient A un anneau intègre noethérien de dimension* 1, *de corps des fractions K, $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'anneaux locaux contenus* *dans K et contenant A, et $B = \bigcap_{i \in I} B_i$. Pour tout i, soit $\mathfrak{p}_i$ l'idéal maximal de B_i, $\mathfrak{n}_i = B \cap \mathfrak{p}_i$ et $\mathfrak{m}_i = A \cap \mathfrak{p}_i$; on suppose que, pour $i \neq j$, on a $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$. Alors B est un anneau noethérien de dimension* 1, *dont les idéaux maximaux sont exactement les $\mathfrak{n}_i$; de plus, pour tout i, on a $B_{\mathfrak{m}_i} = B_{\mathfrak{n}_i} = B_i$.*

Preuve. — Pour tout élément x de K et tout $i \in I$, désignons par $\mathfrak{s}_i(x)$ l'idéal de A formé des éléments a tels que $ax \in B_i$; il résulte des hypothèses que, pour $i \neq j$, $(B_i)_{\mathfrak{m}_j} = K$, donc que $\mathfrak{s}_i(x) \not\subset \mathfrak{m}_j$. Notons que $\mathfrak{s}(x) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{s}_i(x)$ s'identifie à l'ensemble des $a \in A$ tels que $ax \in B$; comme B est contenu dans le corps des fractions de A, pour tout $x \in K$, $\mathfrak{s}(x)$ est un idéal non nul de A, donc $A/\mathfrak{s}(x)$ est un anneau artinien; par suite, $\mathfrak{s}(x)$ est égal à l'intersection d'une sous-famille finie (dépendant de x) de la famille des $\mathfrak{s}_i(x)$.

Montrons que, pour tout i, $B_{\mathfrak{m}_i} = B_i$: soit $x \in B_i$; on a donc $\mathfrak{s}_i(x) = A$, et il faut voir que $\mathfrak{m}_i$ ne contient pas $\mathfrak{s}(x)$; or, d'après ce qui précède, $\mathfrak{m}_i$ ne contient aucun des $\mathfrak{s}_j(x)$, et $\mathfrak{s}(x)$ est égal à l'intersection d'un nombre fini d'entre eux.

Le fait que B soit noethérien et de dimension 1 résulte du théorème de Krull-Akizuki. Pour prouver que les seuls idéaux maximaux de B sont les $\mathfrak{n}_i$, le plus simple est d'utiliser les éléments de cohomologie locale exposés dans EGA ([6], IV, 5.10). Posons $X = \operatorname{Spec}(B)$, et soit Z l'ensemble des idéaux maximaux de B distincts des $\mathfrak{n}_i$; on sait que, pour tout ouvert U de X, $\Gamma(U, \mathcal{H}^0_{Z/X}(\mathcal{O}_X))$ s'identifie à l'intersection des localisés $B_{\mathfrak{n}_i}$ en les points $\mathfrak{n}_i \in U$; par définition de B, on voit donc que $\mathcal{O}_X \to \mathcal{H}^0_{Z/X}(\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme; d'après *loc. cit.*, cela implique que les anneaux locaux de X aux points de Z sont de profondeur au moins 2; comme X est de dimension 1, on en déduit que Z est vide.

(5.5). — On va construire un épimorphisme d'anneaux intègres de dimension 1 qui ne se factorise pas en un homomorphisme fini et un épimorphisme plat.

Raynaud a construit un anneau intègre noethérien A, de dimension 1 de spectre infini et qui n'est unibranche qu'au point générique. Soit $(\mathfrak{m}_i)_{i \in I}$ la famille des idéaux maximaux de A. Utilisant (5.3) ou (3.4), on voit que, pour tout i, il existe un épimorphisme local injectif (non surjectif) $A_{\mathfrak{m}_i} \to B_i$, où B_i est contenu dans le corps des fractions K de A. Prenant pour B l'intersection des B_i, on voit, en utilisant (5.4), que $A \to B$ est un épimorphisme, qui est plat au seul point générique. Comme une A-algèbre finie contenue dans K et isomorphe à A au-dessus d'un ouvert non vide, cet épimorphisme ne peut pas se factoriser par un homomorphisme fini et un épimorphisle plat.

Lemme (5.6). — *Soient $A' \to B'$ un homomorphisme d'anneaux, et S' une partie multiplicative de B' telle que l'homomorphisme composé*

$A' \to B' \to S'^{-1} B'$ soit un épimorphisme. Soient, d'autre part, $B \to B'$ un homomorphisme surjectif, S une partie multiplicative de B dont l'image dans B' contienne S', et $A = A' \times_{B'} B$ l'anneau produit fibré de A' par B au-dessus de B'. Alors l'homomorphisme composé $A \to B \to S^{-1} B$ est un épimorphisme.

Preuve. — Par définition de A, on a le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' \end{array}$$

Comme u définit un isomorphisme de $I = \operatorname{Ker}(p)$ sur $\operatorname{Ker}(q)$, l'idéal de $B \otimes_A B$, engendré par l'image de I, est isomorphe à I; nous le noterons encore par I. Soit J le noyau de l'homomorphisme canonique $B \otimes_A B \to B$; la remarque précédente montre que $I \cap J = 0$, donc que le carré

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' \otimes_{A'} B' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

est cartésien; comme cette propriété est stable par changement de base plat, le carré suivant est encore cartésien :

$$\begin{array}{ccc} S^{-1} B \otimes_A S^{-1} B & \longrightarrow & S^{-1} B \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{-1} B' \otimes_{A'} S^{-1} B' & \longrightarrow & S^{-1} B' \end{array}$$

Mais, par hypothèse, l'homomorphisme du bas est un isomorphisme; donc celui du haut est un isomorphisme, et $A \to S^{-1} B$ est un épimorphisme.

Ce lemme permet de construire des épimorphismes par « localisation d'un pincement »; on l'appliquera notamment lorsque B' est l'anneau produit $A' \times A'$, et qu'on prend pour S' la partie multiplicative engendrée par un idempotent définissant l'un des facteurs de ce produit.

(5.7). — Reprenons la construction de EGA ([6], IV, 5.6.11). Elle montre qu'il existe un corps k et une k-algèbre essentiellement de type fini E qui est un anneau intègre et intégralement clos possédant exactement deux idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ tels que les homomorphismes $k \to E/\mathfrak{m}$ et $k \to E/\mathfrak{m}'$ soient des isomorphismes et tels que $\mathfrak{m}$ soit de hauteur 2 et $\mathfrak{m}'$ de hauteur 1. Appliquons le lemme précédent en prenant pour homomorphisme $A' \to B'$ l'homomorphisme $k \to E/\mathfrak{m} \times E/\mathfrak{m}'$ déduit des isomorphismes donnés et pour $B \to B'$ la surjection canonique $E \to E/\mathfrak{m} \times E/\mathfrak{m}'$. L'anneau produit fibré A est intègre noethérien local et de dimension 2, et sa clôture intégrale est égale à E. D'après le lemme (5.6), on a deux épimorphismes locaux $A \to E_{\mathfrak{m}}$ et $A \to E_{\mathfrak{m}'}$, qui sont tous les deux plats en dehors du point fermé de A. Le second donne un exemple d'épimorphisme local injectif d'anneaux locaux noethériens tel que la dimension du but soit strictement inférieure à celle de la source.

D'autre part, ces épimorphismes montrent que, dans (4.8), il serait insuffisant de supposer que f est plat aux seuls points x tels que $\dim(\mathcal{O}_{S,f(x)}) \leqq 1$.

6. Monomorphismes de schémas. Critères de finitude

Ce paragraphe contient les énoncés globaux correspondant à ceux du paragraphe 3; on montre que si S est un schéma localement noethérien, un monomorphisme quasi-compact se factorise en un monomorphisme *plat* quasi-compact et un morphisme entier que l'on peut, sous certaines hypothèses, choisir fini.

Soit $f: X \to S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, de sorte que la $\mathcal{O}_S$-algèbre $f_* \mathcal{O}_X$ est quasi-cohérente; alors (EGA [6], II, 6.3.4) la fermeture intégrale $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}_S$ dans $f_* \mathcal{O}_X$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente et, pour tout ouvert affine U de S, $\Gamma(U, \mathcal{A})$ est la fermeture intégrale de $\Gamma(U, \mathcal{O}_S)$ dans $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$; le S-schéma entier $S' = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ s'appelle la *fermeture intégrale* de S dans X; f se factorise en $X \to S' \to S$.

THÉORÈME (6.1). — *Soient S un schéma localement noethérien, et f: $X \to S$ un morphisme quasi-compact satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

(*i*) *Pour tout $s \in S$, le morphisme fibre $X_s \to \mathrm{Spec}(k(s))$ est fini;*

(*ii*) *Le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est une immersion fermée de présentation finie.*

Alors si S' désigne la fermeture intégrale de S dans X, le morphisme canonique $j : X \to S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact.

Démonstration. — On a supposé f quasi-compact, et $S' \to S$ est entier, donc, en particulier, séparé; par suite, $j : X \to S'$ est quasi-compact; pour voir que c'est un monomorphisme plat, il faut montrer que, pour tout $x \in X$, l'ensemble $j^{-1}(j(x))$ est réduit au point x et que l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S',j(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme. Pour cela, on peut supposer que S est un schéma local de point fermé $s = f(x)$; utilisant EGA ([6], IV, 6.14.4), on peut même supposer que $\mathcal{O}_{S,s}$ est hensélien. Posons $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. D'après (3.8), $Y \to S$ est fini puisque S est hensélien, et de présentation finie puisque S est noethérien; utilisant l'hypothèse (ii) et (1.2) (i), on voit que $Y \to X$ est fini et de présentation finie; comme c'est un monomorphisme, c'est une immersion fermée de présentation finie, mais qui est, par définition, plate; le morphisme $Y \to X$ est donc une immersion ouverte et fermée; par suite, son image est définie par un idempotent de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ qui se trouve en fait dans $\Gamma(S, \mathcal{A})$ par définition de la fermeture intégrale; bref, il existe une partie ouverte et fermée T de S' telle que $j^{-1}(T)$ s'identifie à Y; mais $Y \to S$ est fini; donc *a fortiori*, $Y \to T$ est fini; comme la formation de la fermeture intégrale commute à la restriction aux ouverts, T est intégralement fermé dans $j^{-1}(T) \cong Y$; donc $Y \to T$ est un isomorphisme. D'où le résultat.

PROPOSITION (6.2). — *Soient S un schéma localement noethérien, et $f: X \to S$ un morphisme.*

(i) *Pour que f soit une immersion fermée, il faut et il suffit que f soit un monomorphisme universellement fermé.*

(ii) *Supposons, de plus, que S est réduit. Alors, pour que f soit une immersion ouverte, il faut et il suffit que f soit un monomorphisme universellement ouvert.*

Démonstration. — Il est clair que les conditions sont nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes; comme f est injectif, f établit, dans les deux cas, un homéomorphisme de X sur le sous-espace $f(X)$ de S, qui est respectivement fermé et ouvert. Utilisant le critère de EGA ([6], I, 4.2.2), il suffit de montrer que, pour tout $x \in X$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif dans le cas (i), et bijectif dans le cas (ii). Or, soient S' le spectre du hensélisé de $\mathcal{O}_{S,s}$ [où $s = f(x)$] et

$$f' : X' = X \times_S S' \to S'$$

le monomorphisme déduit de f; si on montre que X' est un schéma local, on déduira de (2.1) que f' est une immersion fermée, et même un isomorphisme sous l'hypothèse (ii), puisque S' est réduit et f' est ouvert, et cela permettra de conclure; or, on a le lemme élémentaire suivant :

LEMME (6.2.1). — *Soient S un schéma local, et $f: X \to S$ un morphisme injectif. On suppose,* ou bien *que f est fermé,* ou bien *que f est ouvert et surjectif. Alors X est un schéma local.*

Preuve. — Dans les deux cas, il existe un unique point x_0 de X dont l'image s_0 soit le point fermé de S. Soit x un point de X; montrons que son adhérence $Y = \overline{\{x\}}$ contient x_0 : Si f est fermé, s_0 appartient au fermé $f(Y)$ de S, et cela résulte de l'injectivité de f; si f est ouvert, l'ouvert $f(X - Y)$ est distinct de S puisque f est injectif; il ne contient donc pas s_0; par suite, $x_0 \notin X - Y$. Autrement dit, x_0 est adhérent à tout point de X; on en déduit que tout ouvert affine de X contenant x_0 est égal à X, donc que X est affine; comme tout point de X est une générisation de x_0, X est même un schéma local de point fermé x_0.

Corollaire (6.3). — *Soit S un schéma noethérien. Pour qu'un morphisme $f: X \to S$ soit fini, il faut et il suffit qu'il soit quasi-compact, universellement fermé, et que les projections $X \times_S X \rightrightarrows X$ soient des morphismes finis.*

Lemme (6.3.1). — *Soient S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, et $f: X \to S$ un morphisme quasi-compact et séparé. Supposons que f se factorise en*

$$X \xrightarrow{h} T \xrightarrow{g} S,$$

où h est un monomorphisme et g un morphisme affine. Alors, pour que le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$ soit une immersion fermée de présentation finie, il faut et il suffit que g se factorise en

$$T \xrightarrow{h'} T' \xrightarrow{g'} S,$$

où g' est affine de type fini et le composé $h' \circ h : X \to T'$ un monomorphisme.

L'hypothèse faite sur f est, en particulier, vérifiée si f est quasi-affine.

Preuve de (6.3.1). — Il est clair que la condition est *suffisante.*

Montrons qu'elle est *nécessaire* : comme g est affine, $\mathcal{B} = g_* (\mathcal{O}_T)$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente, et $T = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{B})$; d'après EGA ([6], I, 9.6.6, et IV, 1.7.9), $\mathcal{B}$ est limite inductive de ses sous-$\mathcal{O}_S$-algèbres quasi-cohérentes de type fini $\mathcal{B}_\lambda$; T est donc limite projective des S-schémas affines de type fini $\mathrm{T}_\lambda = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{B}_\lambda)$, et, pour tout λ, l'immersion fermée $u: X \times_T X \to X \times_S X$ se factorise en

$$X \times_T X \xrightarrow{v_\lambda} X \times_{T_\lambda} X \xrightarrow{u_\lambda} X \times_S X,$$

où u_λ et v_λ sont des immersions fermées; enfin, les v_λ font de $X \times_T X$ une limite projective du système des $X \times_{T_\lambda} X$. Notons que les hypothèses faites sur S et f impliquent que $X \times_S X$ est quasi-compact; d'autre part, Δ_f se factorise en

$$X \xrightarrow{\Delta_h} X \times_T X \xrightarrow{u} X \times_S X,$$

et, par hypothèse, Δ_h est un isomorphisme; u est donc une immersion fermée de présentation finie; enfin, l'assertion sera prouvée si l'on montre qu'il existe un indice λ tel que v_λ soit un isomorphisme. Or, cette assertion est évidente au-dessus de chaque ouvert affine de $X \times_S X$ et ce schéma est quasi-compact.

Démonstration de (6.3). — Pour montrer que les conditions sont *suffisantes,* on va utiliser (6.1); vérifions donc les hypothèses (i) et (ii) de (6.1) : pour (i), on se ramène au cas où $S = \mathrm{Spec}\,(k(s))$, et il faut montrer qu'alors f est fini; or, f est fidèlement plat et quasi-compact; il suffit donc d'appliquer EGA ([6], IV, 2.7.1 (xv)). Vérifions (ii); soit $p : X \times_S X \to X$ l'une des deux projections; comme p est supposé fini, Δ_p est une immersion fermée de présentation finie; comme $p\,\Delta_f$ est l'identité, on déduit de (1.2) (i) que Δ_f est une immersion fermée de présentation finie. Appliquant (6.1), puis (6.3.1), on trouve une factorisation de f en

$$X \xrightarrow{g} T \xrightarrow{v} S,$$

où v est fini, donc T est noethérien, et où g est un monomorphisme. Comme f est universellement fermé par hypothèse, et v séparé, g est un monomorphisme universellement fermé, donc une immersion fermée (6.2); par suite, f est fini.

THÉORÈME (6.4). — *Soient S un schéma noethérien, $f: X \to S$ un morphisme quasi-compact, $(X_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles de X. Pour tout i, désignons par S_i le sous-schéma fermé intègre de S, image fermée de X_i par f, et par $f_i : X_i \to S_i$ le morphisme déduit de f.*

Pour que f se factorise en

$$X \xrightarrow{j} T \xrightarrow{u} S,$$

où j est un monomorphisme plat quasi-compact et u un morphisme fini. il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) *Pour tout $s \in S$, le morphisme fibre*

$$X_s = X \times_S \operatorname{Spec}(k(s)) \to \operatorname{Spec}(k(s))$$

est fini;

(ii) *Le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est une immersion fermée de présentation finie;*

(iii) *Les composantes irréductibles X_i sont en nombre fini;*

(iv) *Pour tout i, il existe un ouvert non vide U_i de S_i tel que la restriction de f_i à $f_i^{-1}(U_i)$ soit un morphisme plat.*

De plus, la condition (iv) *est conséquence de* (i) *et* (ii) *si, pour tout i, S_i possède un ouvert géométriquement unibranche non vide.*

Preuve. — Démontrons d'abord la dernière assertion : on peut supposer que X et S sont intègres et f dominant; si f vérifie (i) et (ii), d'après le théorème (6.1) et (6.3.1), f se factorise en $X \to T \to S$, où $X \to T$ est un monomorphisme, et $T \to S$ un morphisme fini qu'on peut supposer dominant; en se restreignant à un ouvert assez petit de S, on peut supposer que T est géométriquement unibranche et que $T \to S$ est plat; mais, d'après (4.7), le monomorphisme $X \to T$ est alors plat; d'où le résultat.

Démontrons que les conditions sont nécessaires : si f se factorise par un monomorphisme plat et un morphisme fini, ses fibres sont des morphismes finis, d'où (i); la condition (ii) est conséquence du lemme (6.3.1). Comme u est fini et S noethérien, T est noethérien; en particulier, T n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles; comme j est un monomorphisme plat, on en déduit que X a un nombre fini de composantes irréductibles, d'où (iii). Pour tout i, soit T_i l'image fermée de X_i par j;

comme j est un monomorphisme plat quasi-compact, X_i est isomorphe à $X \times_T T_i$ (lemme 1.5), donc $X_i \to T_i$ est plat; comme f_i se factorise en $X_i \to T_i \to S_i$, où $T_i \to S_i$ est fini dominant, il est clair qu'au voisinage du point générique de S_i, $T_i \to S_i$ est plat, donc aussi f_i.

(6.4.1). — Pour démontrer que les conditions sont suffisantes, on procèdera par étapes. Fixons d'abord les notations.

D'après le théorème (6.1), les hypothèses (i) et (ii) impliquent que f se factorise en

$$X \to S' \to S,$$

où $j : X \to S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact, et $v : S' \to S$ un morphisme entier. La $\mathcal{O}_S$-algèbre $v_*(\mathcal{O}_{S'})$ est donc quasi-cohérente et entière; en particulier, elle est réunion de la famille filtrante croissante de ses sous-$\mathcal{O}_S$-algèbres quasi-cohérentes de type fini $\mathcal{S}_\lambda$; si $S_\lambda = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{S}_\lambda)$, v se factorise en $S' \to S_\lambda \to S$, où $u_\lambda : S_\lambda \to S$ est fini, et les morphismes entiers surjectifs $v_\lambda : S' \to S_\lambda$ font de S' une limite projective du système des S_λ. On va montrer qu'il existe un indice λ tel que le morphisme composé

$$j_\lambda = v_\lambda \circ j : X \to S' \to S_\lambda$$

soit un monomorphisme plat quasi-compact.

1° *Réduction au cas où f est un monomorphisme.* — D'après le lemme (6.3.1), il existe un indice λ tel que j_λ soit un monomorphisme; il suffit donc de prouver que j_λ vérifie (iv); c'est une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME (6.4.2). — *Soient X, Y et Z trois schémas intègres, $j : X \to Y$ un monomorphisme dominant, et $u : Y \to Z$ un morphisme fini surjectif. Supposons que Z soit noethérien et que le composé $f = u \circ j : X \to Z$ soit plat. Alors il existe un ouvert non vide W de Z tel que le monomorphisme $f^{-1}(W) \to u^{-1}(W)$ déduit de j soit plat.*

Comme u est fini et que la question est locale sur Z, on peut supposer que Y et Z sont affines, soit $Z = \mathrm{Spec}\,(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$; A est donc un anneau intègre noethérien, et B une A-algèbre finie intègre contenant A; soient K et L les corps des fractions de A et B respectivement, K' la clôture séparable de K dans L, et $A' = B \cap K'$. Comme A est noethérien, le schéma $Z' = \mathrm{Spec}\,(A')$ est fini sur A, et u se factorise en $Y \to Z' \to Z$, Comme K' est une extension séparable de K, on peut, en se restreignant à un ouvert W de Z, supposer que $Z' \to Z$ est non ramifié; par suite, le morphisme diagonal de $Z' \to Z$ est une immersion ouverte (EGA, [6], IV, 17.4.2), donc un morphisme plat; en appliquant le lemme (1.2) (i) aux morphismes $X \to Z'$ et $Z' \to Z$, on voit que $X \to Z'$ est plat. D'autre part, on vérifie tout de suite que $Y \to Z'$ est radiciel. Quitte à remplacer Z par Z', on peut donc supposer que $u : Y \to Z$ est un morphisme fini radiciel et surjectif, donc un homéomorphisme universel. Montrons qu'alors $X \to Y$ est plat. Par un changement de base appropriée, on peut supposer que Z est le spectre d'un anneau local noethérien hensélien dont le point fermé est l'image d'un point $x \in X$. Comme $Y \to Z$ est un homéomorphisme fini, Y est un schéma local dont l'anneau est lui aussi hensélien. D'autre part, comme $X \to Y$ est un monomorphisme, il suffit de montrer que le monomorphisme composé

$$\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X \to Y$$

est un isomorphisme. Bref, on peut se ramener au cas où X, Y et Z sont des schémas locaux. Notons qu'alors le composé $X \to Y \to Z$ est même fidèlement plat, donc surjectif; comme $Y \to Z$ est bijectif, $X \to Y$ est surjectif; mais, comme Y est le spectre d'un anneau local hensélien noethérien, et $X \to Y$ un monomorphisme, $X \to Y$ est une immersion fermée (2.1) surjective; comme Y est réduit, c'est un isomorphisme; d'où le résultat.

2° *Réduction au cas où les S_i sont les composantes irréductibles de S.* — Remarquons d'abord que $j : X \to S'$ établit une bijection entre les points maximaux de X et ceux de S'; comme j est plat, il transforme point maximal en point maximal, comme c'est un monomorphisme, c'est une injection; enfin, comme par définition de S', $\mathcal{O}_{S'} \to j_*(\mathcal{O}_X)$ est injectif, tout point maximal de S' est dans $j(X)$ (localiser en ce point maximal, et utiliser le fait que la formation de l'image directe commute aux changements de base plats).

Il suffit donc de montrer que, pour un λ assez grand, $v_\lambda : S' \to S_\lambda$ établit une bijection entre les points maximaux de S' et ceux de S_λ; or, comme S est quasi-compact, on peut supposer que S est affine, et il reste à prouver ceci :

LEMME (6.4.3). — *Soient A un anneau, et B une A-algèbre n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux. Il existe une A-algèbre de type fini $C \subset B$ telle que l'application* $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(C)$ *établisse une bijection entre les idéaux premiers minimaux de B et ceux de C.*

Comme les idéaux premiers minimaux $\mathfrak{q}_i$ de B sont en nombre fini, il existe, d'après le lemme d'évitement, une famille finie (t_i) d'éléments de B tels que $t_i \in \mathfrak{q}_i$ et $t_i \notin \mathfrak{q}_j$ pour $j \neq i$; il suffit de prendre pour C la sous-A-algèbre de B engendrée par les t_i; en effet, comme $C \subset B$, tout idéal premier minimal de C se relève à B; d'autre part, pour tout i, $C \cap \mathfrak{q}_i$ est un idéal premier minimal, sinon il contiendrait un idéal premier minimal, donc un $C \cap \mathfrak{q}_j$ pour un $j \neq i$, ce qui s'oppose au choix des t_i.

3° *Démonstration dans le cas où X est intègre.* — Remarquons qu'on n'utilise pas ici le fait que S' est la fermeture intégrale de S dans X, mais seulement les deux propriétés suivantes : $j : X \to S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact, et $S' \to S$ est entier.

D'après le 1° et le 2°, on peut supposer que f est un monomorphisme et que S est intègre. Pour tout λ, soit U_λ l'ensemble des points $t \in S_\lambda$ tels que le morphisme

$$X \times_{S_\lambda} \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S_\lambda, t}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S_\lambda, t}),$$

déduit de $j_\lambda : X \to S_\lambda$ par changement de base, soit plat. Comme, d'après le lemme 6.4.2, le monomorphisme j_λ vérifie (iv), on déduit du corollaire (4.9) que U_λ est ouvert dans S_λ. Comme $u_\lambda : S_\lambda \to S$ est fini, c'est en particulier un morphisme fermé, donc $F_\lambda = u_\lambda (S_\lambda - U_\lambda)$ est un fermé de S pour tout λ. D'autre part, pour $\mu \geq \lambda$, le morphisme composé $X \times_{S_\lambda} U_\lambda \to S_\mu \times_{S_\lambda} U_\lambda \to U_\lambda$ est plat; en utilisant le lemme (1.6) (i), on en déduit que $F_\mu \subset F_\lambda$, donc que la famille (F_λ) est filtrante décroissante. Montrons que $\bigcap_\lambda F_\lambda = \emptyset$: soient $s \in S$, $A = \mathcal{O}_{S,s}$ et $T = \operatorname{Spec}(A)$; $S' \times_S T$ est un schéma affine dont l'anneau est une A-algèbre entière contenue dans le corps des fractions de A. En utilisant (EGA, [6], 0_{IV}, 23.2.5), on voit que, pour λ assez grand, le morphisme $S' \times_S T \to S_\lambda \times_S T$ est radiciel. Or, on a le lemme suivant :

LEMME 6.4.4. — *Soient X, Y et Z trois schémas intègres, Z étant noethérien, $j : X \to Y$ un monomorphisme plat, et $v : Y \to Z$ un morphisme entier bijectif, tels que le composé $v \circ j : X \to Z$ soit un monomorphisme. Alors $v \circ j$ est plat.*

On se ramène comme d'habitude au cas où Z est un schéma local dont le point fermé est dans $v \circ j(X)$, et il faut voir qu'alors $v \circ j$ est un isomorphisme. Mais, comme v est injectif et entier, Y est alors lui aussi un schéma local, et son point fermé se trouve dans $j(X)$; comme j est plat, il est fidèlement plat, et comme c'est un monomorphisme, c'est un isomorphisme. Donc, $v \circ j$ est un monomorphisme entier, donc un isomorphisme (proposition 6.2).

Appliquant ce lemme au morphisme composé

$$X \times_S T \to S' \times_S T \to S_\lambda \times_S T,$$

on voit que c'est un monomorphisme plat; en particulier, $u_\lambda^{-1}(s) \subset U_\lambda$, donc $s \notin F_\lambda$, ce qui prouve bien que l'intersection des F_λ est vide. Comme S est quasi-compact, il existe λ tel que $F_\lambda = \emptyset$, ce qui veut dire que $U_\lambda = S_\lambda$, donc que j_λ est plat.

4° *Réduction au cas où, pour tout i, $f_i : X_i \to S_i$ est plat.* — Pour tout i, soient S'_i et $(S_\lambda)_i$ les images fermées de X_i par j et j_λ respectivement. Il est clair que S'_i est limite projective du système des S_i-schémas finis $(S_\lambda)_i$; comme $j : X \to S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact, $X_i \to S'_i \times_{S'} X$ est un isomorphisme [lemme (1.5)]; donc $X_i \to S'_i$ est un monomorphisme plat quasi-compact; enfin, $S'_i \to S_i$ est évidemment entier; utilisant le 3° et le fait que les X_i sont en nombre fini, on voit donc qu'il existe λ tel que, pour tout i, $X_i \to (S_\lambda)_i$ soit plat; il suffit de remplacer S par S_λ.

Remarquons que cela implique, en particulier, que les X_i sont noethériens ([11], 1.2), donc que l'espace topologique X, réunion d'un nombre fini d'espaces noethériens, est noethérien.

5° *Fin de la démonstration.* — Supposons effectuées toutes les réductions précédentes : $f: X \to S$ est donc un monomorphisme quasi-compact tel que, pour tout i, $f_i: X_i \to S_i$ soit plat, et les S_i sont exactement les composantes irréductibles de S; enfin, $\mathcal{O}_S \to f_*(\mathcal{O}_X)$ est injectif.

Montrons qu'en remplacant S par un S_λ, pour un indice λ convenable, on peut se ramener au cas où, pour tout i, l'immersion fermée

$$w_i: \quad X_i \to X \times_S S_i$$

est un isomorphisme.

Comme les composantes irréductibles S_i sont en nombre fini, il suffit de prouver l'existence d'un tel λ pour chaque i. Remarquons d'abord que w_i est une immersion ouverte : en effet, w_i est plat puisque le morphisme composé $X_i \to X \times_S S_i \to S_i$ est plat par hypothèse, et que $X \times_S S_i \to S_i$ est un monomorphisme [(1.2) (i)]; $w_i(X_i)$ est donc un fermé stable par générisation de $X \times_S S_i$; mais cet espace topologique est noethérien, puisqu'il s'identifie à un fermé de X; en particulier, ses composantes irréductibles sont en nombre fini; par suite, le fermé stable par générisation $w_i(X_i)$ est ouvert, donc w_i est une immersion ouverte et fermée, et est donc définie par un idéal engendré par une section idempotente.

D'autre part, pour tout λ, w_i se factorise en

$$X_i \to X \times_{S'} S'_i \to X \times_{S_\lambda} (S_\lambda)_i \to X \times_S S_i,$$

où le premier morphisme est un isomorphisme puisque $X \to S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact (1.5), et les deux autres sont des immersions fermées; il est clair que, pour un indice λ assez grand, la section idempotente qui définit w_i sera contenue dans l'idéal qui définit l'immersion $X \times_{S_\lambda} (S_\lambda)_i \to X \times_S S_i$; quitte à remplacer S par S_λ, on peut donc supposer que w_i est un isomorphisme; il suffit alors, pour pouvoir conclure, d'appliquer le lemme suivant :

LEMME (6.4.5). — *Soient S un schéma noethérien, et $f: X \to S$ un monomorphisme quasi-compact tel que $\mathcal{O}_S \to f_* \mathcal{O}_X$ soit injectif. Désignons par S_i les schémas intègres induits par S sur ses composantes irréductibles. Supposons que, pour tout i, les monomorphismes $X \times_S S_i \to S_i$ soient plats. Alors f est plat.*

On se ramène immédiatement au cas où S est un schéma local dont le point fermé se trouve dans $f(X)$; montrons que l'application f est fermée;

soit Y un sous-schéma fermé de X; pour montrer que $f(Y)$ est fermé, il suffit de montrer que, pour tout i, $f(Y) \cap S_i$ est fermé ; cet ensemble est l'image du morphisme composé $Y \times_S S_i \to X \times_S S_i \to S_i$; or, la première flèche est une immersion fermée, et $X \times_S S_i \to S_i$ est un isomorphisme puisque c'est un monomorphisme quasi-compact fidèlement plat. D'où ce qu'on veut. En vertu du lemme (6.2.1), X est un schéma local; soient B son anneau, et A celui de S. Il faut montrer ceci : soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{p}_i$ ses idéaux premiers minimaux, et $g : A \to B$ un homomorphisme injectif; si, pour tout i, $A/\mathfrak{p}_i \to B/(\mathfrak{p}_i B)$ est un isomorphisme, alors g est un isomorphisme. Il suffit de montrer que g est surjectif; désignons par M le A-module B/A; d'après l'hypothèse, $M = \mathfrak{p}_i M$ pour tout i; donc $M = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n M$. Mais, dans un anneau noethérien, le produit des idéaux premiers minimaux est un idéal nilpotent; donc $M = 0$, et g est surjectif.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative*. Chap. 1-2, 3-4, 5-6, 7. — Paris, Hermann, 1961, 1964, 1965 (*Act. scient. et ind.*, 1290, 1293, 1308, 1314; *Bourbaki*, 27, 28, 30, 31).

[2] Ferrand (Daniel). — Épimorphismes d'anneaux et algèbres séparables, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 265, 1967, p. 411-414.

[3] Ferrand (Daniel). — Épimorphismes d'anneaux à source noethérienne et monomorphismes de schémas, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, 1968, p. 319-321.

[4] Ferrand (Daniel). — Monomorphismes de schémas noethériens, *Séminaire P. Samuel*, 1967/68, n° 7, 25 p. — Paris, Secrétariat mathématique, 1968.

[5] Ferrand (D.) et Raynaud (M.). — Fibres formelles d'un anneau local noethérien, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 3, 1970, p. 295-311.

[6] Grothendieck (Alexander). — *Éléments de géométrie algébrieue* [cité EGA], I, II, III, IV. — Paris, Presses universitaires de France, 1960-1967 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).

[7] Lazard (Daniel). — Autour de la platitude, *Bull. Soc. math. France*, t. 97, 1969, p. 81-128 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1968).

[8] Murre (J. P.). — Representation of unramified functor, *Séminaire Bourbaki*, 17e année, 1964/65, n° 294, 19 p. — Paris, Secrétariat mathématique, 1966.

[9] Olivier (Jean-Pierre). — *Thèse Sc. math.* (à paraître).

[10] Peskine (Christian). — Une généralisation du « Main theorem » de Zariski, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 90, 1966, p. 119-127.

[11] Raynaud (Michel). — Un critère d'effectivité de descente, *Séminaire P. Samuel*, 1967/68, n° 5, 22 p. — Paris, Secrétariat mathématique, 1968.

[12] Raynaud (Michel). — *Anneaux locaux henséliens*. — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 169).

(Texte reçu le 27 juillet 1971.)

Daniel Ferrand,
35-37, rue de la Glacière,
75-Paris 13.