BULLETIN DE LA S. M. F.

BERNARD DE MATHAN

Un problème métrique d'approximation diophantienne

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 369-385
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__369_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 369 à 385.

UN PROBLÈME MÉTRIQUE D'APPROXIMATION DIOPHANTIENNE

PAR

BERNARD DE MATHAN

[Bordeaux et Rabat]

1. Introduction.

Un des premiers résultats métriques, en approximation diophantienne, est le théorème de Khintchine [Khinčin], selon lequel, si $(\varepsilon_q)_{q \in \mathbf{N}^*}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs, telle que la série $\sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon_q$ soit divergente, l'inéquation diophantienne

$$(1) \qquad | x - p/q | \leq \varepsilon_q/q$$

admet, pour presque tout nombre réel x, une infinité de solutions, en couple d'entiers (p, q), avec $q > 0$.

Soit $\nu(x, Q)$ le nombre de solutions de (1), telles que $0 < q \leq Q$. [On peut supposer $\varepsilon_q < 1$ pour tout q, en sorte que, pour q donné, l'inéquation (1) ait au plus une solution (p, q).] On a

$$\int_0^1 \nu(x, Q)\, dx = \sum_{q=1}^{Q} \varepsilon_q,$$

on pouvait donc s'attendre à ce que, pour presque tout x, $\nu(x, Q)$ soit équivalent, pour Q tendant vers l'infini, à $\sum_{q=1}^{Q} \varepsilon_q$. Cela a été effectivement démontré par P. ERDÖS [2] et W. SCHMIDT [11]. W. J. LE VEQUE [7] étudiait, dans cette optique, des suites $(a(q)x)$ mod 1, pour certaines suites $a\,(q)$. S. Lang [4] s'intéressait au cas où x est un nombre quadratique. Des problèmes analogues, mais non homogènes, ou des problèmes — voisins — de discrépance, étaient aussi étudiés par J. W. S. Cassels [1], W. Schmidt [12], W. Philipp [10], puis par l'auteur [8].

Ces résultats ont conduit à l'introduction de la notion de suite *eutaxique* par J. Lesca [6]. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite d'éléments d'un espace métrique compact X, muni d'une mesure normale μ (c'est-à-dire positive, et de masse totale 1). Soit $(\mathrm{B}_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de disques de X, u_n étant centre de B_n, et soit J l'ensemble des éléments $x \in X$ pour lesquels il existe une infinité de n tels que $x \in B_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est dite *μ-eutaxique* si les conditions que la suite $(\mu\,(\mathrm{B}_n))$ soit décroissante, et la série $\sum \mu\,(B_n)$ divergente, impliquent que l'ensemble J soit de complémentaire μ-négligeable.

Parallèlement, nous avons introduit la notion de suite fortement *eutaxique* [8]. Dans les conditions ci-dessus, soit, pour $x \in X$ et N, entier positif, $\nu\,(x, N)$ le nombre d'entiers n tels que $0 < n \leqq N$, et que $x \in B_n$. La suite (u_n) est dite *fortement μ-eutaxique* si les conditions que la suite $(\mu\,(B_n))$ soit décroissante, et la série $\sum \mu\,(B_n)$ divergente, impliquent que, pour μ-presque tout $x \in X$, $\nu\,(x, N)$ soit équivalent, pour N tendant vers l'infini, à $\sum_{n=1}^{N} \mu\,(B_n)$.

Soit $\sigma = (\varepsilon_n)$ une suite décroissante de nombres réels positifs, telle que la série $\sum \varepsilon_n$ soit divergente, et qu'il existe, pour tout n, un disque de E, de centre u_n et de mesure ε_n. Nous dirons que la suite (u_n) est μ-eutaxique (resp. fortement μ-eutaxique), *relativement à la suite* σ, si la condition

$$\lim \nu\,(x, N) = +\infty \qquad \left[\text{resp. } \nu\,(x, N) \simeq \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n\right]$$

pour μ-presque tout $x \in X$ est satisfaite pour toute suite de disques B_n, de centres u_n et de mesures ε_n. Une suite (u_n) sera donc *μ-eutaxique* (resp. fortement μ-eutaxique) si elle est μ-eutaxique (resp. fortement μ-eutaxique) relativement à toute suite σ. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la mesure μ, en particulier lorsque X est un groupe abélien, muni d'une mesure invariante par translation, compact, et μ sa mesure de Haar, les locutions μ-eutaxique et fortement μ-eutaxique, seront remplacées par eutaxique et fortement eutaxique.

La nouveauté des résultats auxquels conduisent ces notions, réside dans le fait que les résultats antérieurs étaient essentiellement du type suivant : soit U un ensemble de suites d'éléments d'un groupe compact X (par exemple), soit π une mesure sur U; alors, sous certaines conditions, pour toute suite σ comme ci-dessus, π-presque toute suite $u \in U$ est eutaxique ou même fortement eutaxique *relativement à* σ. Un tel résultat n'implique pas que π-presque toute suite $u \in U$ soit eutaxique (car l'ensemble des suites σ n'est pas dénombrable, ni ne possède de partie initiale dénombrable !). Ainsi, si l'on se donne une suite σ, la suite $(n\,\alpha)$ d'éléments du tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, est eutaxique (théorème métrique non homogène de Khintchine) et même fortement eutaxique [12], *relativement à* σ, pour presque tout $\alpha \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Mais J. Lesca [6] démontre que la suite $(n\,\alpha)$ est eutaxique, dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, si et seulement si la constante de Markov de α, $M(\alpha) = \limsup_{n \in \mathbf{N}^*} 1/n \,\|\, n\,\alpha \,\|$ est finie, ce qui n'est le cas pour presque aucun élément $\alpha \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Le but de ce travail était de trouver des exemples de suites fortement eutaxiques dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Nous avions montré, disons, qu'une suite à discrépance finie, à valeurs dans un groupe pro-fini, est fortement eutaxique [8]. Nous montrons ici qu'une suite d'éléments de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, pour laquelle il existe une famille « suffisamment riche » d'intervalles de restes bornés, est fortement eutaxique. Un exemple immédiat est fourni par les suites q-adiques (c'est-à-dire à valeurs dans l'ensemble des éléments de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de la forme a/q^n mod 1, q étant un entier supérieur à 1 donné, a et n des entiers quelconques), très bien réparties. Un résultat de J. Lesca [5] nous permet d'appliquer également ce théorème à la suite $(n\,\alpha)$ lorsque $M(\alpha) < +\infty$, montrant ainsi que, dans ce cas, la suite $(n\,\alpha)$ est fortement eutaxique. On peut même relier plus finement l'eutaxie de la suite $(n\,\alpha)$ aux approximations rationnelles de α, la même méthode nous permet de montrer que si, pour tout nombre réel positif δ, l'inéquation $\|\, n\,\alpha \,\| \leq 1/n^{1+\delta}$ n'a qu'un nombre fini de solutions entières positives n (ce qui est le cas, en vertu du théorème de Roth, si α est la classe mod 1 d'un nombre algébrique), alors la suite $(n\,\alpha)$ est fortement eutaxique, relativement à toute suite $\sigma = (\varepsilon_n)$ pour laquelle il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que

$$\liminf \left(\varepsilon_n^{\delta_0} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \right) > 0,$$

par exemple toute suite proportionnelle à une suite $1/n^\rho$ avec $0 < \rho < 1$.

Suivant l'usage, nous désignons par $\{ x \}$ le nombre de l'intervalle réel $[0, 1[$, dont la classe modulo 1 est l'élément $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, et par $\|.\|$ la norme de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\| x \| = \min(\{ x \}, 1 - \{ x \})$. Nous appellerons intervalle de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ l'image canonique d'un intervalle réel. Le centre d'un intervalle I de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ $(I \neq \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ est le point de I dont la distance au complémentaire de I est maximale, cette distance est le rayon de l'intervalle I, et est égale à la moitié de sa mesure (pour la mesure de Haar normalisée de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$). On considère $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ comme intervalle de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, de centre n'importe quel élément, de rayon $1/2$. Naturellement, les disques de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ sont les intervalles ouverts ou fermés. La notation $I(x_0, \varepsilon)$, où $x_0 \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et $0 < \varepsilon \leqq 1/2$, désigne le disque fermé $\| x - x_0 \| \leqq \varepsilon$. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbf{N}$ $(0 \in \mathbf{N})$, et $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$. Les suites sont toujours indexées sur $\mathbf{N}^*$.

2. Eutaxie et discrépance.

Le résultat sur les suites $(n\alpha)$ sera conséquence de l'énoncé plus général suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Supposons qu'il existe une suite croissante de nombres réels positifs, (R_k), tendant vers $+\infty$, et pour tout k, un recouvrement de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ par une famille $(J_k^i)_{1 \leqq i \leqq H_k}$, de H_k intervalles de mesure $1/R_k$, tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) $H_k = R_k + O(1)$;

(ii) *Pour tout couple d'entiers (M, N) tels que $0 \leqq M < N$, désignons par $\pi(J_k^i, M, N)$ le nombre d'entiers n, tels que $M < n \leqq N$ et que $u_n \in J_k^i$. Alors :*

$$\pi(J_k^i, M, N) \leqq (N - M)/R_k + O(1)$$

(uniformément par rapport à M, N, k et i);

(iii) $R_{k+1}/R_k = O(1)$.

Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est fortement eutaxique. De façon plus précise, soit une suite d'intervalles I_n de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, de centres u_n, de mesures ε_n, telle que la suite (ε_n) soit décroissante, et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$, divergente. Pour N, entier positif, et $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, désignons par $\nu(x, N)$ le nombre d'entiers n, tels que $0 < n \leqq N$ et que $x \in I_n$. Posons $S(N) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n$. Pour presque tout x, on a l'estimation suivante (relativement à N) :

$$\nu(x, N) = S(N) + O((S(N))^{5/6} (\log S(N))^{1+\varepsilon})$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

Nous allons d'abord démontrer le lemme suivant :

LEMME 1. — *Les notations étant celles du théorème 1, supposons les conditions (i) et (ii) satisfaites. Soient m, N, h et k, des entiers positifs, tels* *que* $m < N$ *et* $R_k \geq R_h \geq 1/\varepsilon_m$. *On a alors (uniformément par rapport à* m, N, h, k) :

$$\sum_{n=m+1}^{N} \mu(I_m \cap I_n) \leq \varepsilon_m \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n + O(R_k \varepsilon_m^2)$$
$$+ O\left(\varepsilon_m R_h/R_k \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n\right) + O\left(1/R_h \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n\right).$$

La démonstration de ce lemme s'appuie sur quelques autres lemmes. Remarquons tout d'abord :

LEMME 2. — *Soit* $I \subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. *On a*

$$\mu(I) \leq 1/R_k \sum_{\substack{1 \leq i \leq H_k \\ J_k^i \cap I \neq \emptyset}} 1,$$

et si I *est un intervalle :*

$$1/R_k \sum_{\substack{1 \leq i \leq H_k \\ J_k^i \cap I \neq \emptyset}} 1 = \mu(I) + O(1/R_k).$$

Preuve. — La première inégalité est évidente, et en l'appliquant au complémentaire de l'ensemble $I' = I + I(0, 1/R_k)$, on obtient

$$1 - \mu(I') \leq 1/R_k \sum_{\substack{1 \leq i \leq H_k \\ J_k^i \cap \complement I' \neq \emptyset}} 1.$$

Or tout intervalle J_k^i, qui rencontre I, est contenu dans I', donc

$$1/R_k \sum_{\substack{i \\ J_k^i \cap I \neq \emptyset}} 1 + 1/R_k \sum_{\substack{i \\ J_k^i \cap \complement I' \neq \emptyset}} 1 \leq 1 + O(1/R_k).$$

D'autre part, si I est un intervalle, $\mu(I') \leq \mu(I) + 2/R_k$, d'où

$$1/R_k \sum_{\substack{i \\ J_k^i \cap I \neq \emptyset}} 1 \leq \mu(I) + O(1/R_k).$$

Nous nous servirons aussi du lemme suivant :

LEMME 3. — *Soient* $\beta_{n,i}$ *et* $\gamma_{n,i}$ *deux fonctions réelles non négatives du couple d'entiers* (n, i), *tels que* $1 \leq n \leq N$ *et* $1 \leq i \leq H$. *Supposons qu'il* *existe deux nombres réels non négatifs* ρ *et* C, *tels que l'on ait, pour tout* M *tel que* $0 < M \leq N$, *et pour tout* i,

$$\sum_{n=1}^{M} \beta_{n,i} \leq \rho M + C.$$

Supposons, de plus, que, pour tout i, *la fonction* $n \to \gamma_{n,i}$ *soit décroissante. Alors,*

$$\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq i \leq H}} \beta_{n,i}\gamma_{n,i} \leq \rho \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq i \leq H}} \gamma_{n,i} + C \sum_{1 \leq i \leq H} \gamma_{1,i}.$$

Il suffit évidemment de se restreindre à un seul indice i, la démonstration est bien claire.

Nous allons établir maintenant, avec les conditions du lemme 1, le résultat suivant :

LEMME 4. — *On a*

$$\sum_{n=m+1}^{N} \mu(I_m \cap I_n) \leq \varepsilon_m \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n + O(R_k\, \varepsilon_m^2) + O((N-m)\, \varepsilon_m / R_k).$$

Preuve. — On a

$$\sum_{n=m+1}^{N} \mu(I_m \cap I_n) \leq 1/R_k \sum_{n=m+1}^{N} \sum_{\substack{i \\ J_k^i \cap I_m \cap I_n \neq \emptyset}} 1,$$

donc

$$\sum_{n=m+1}^{N} \mu(I_m \cap I_n) \leq 1/R_k \sum_{\substack{i \\ J_k^i \cap I_m \neq \emptyset}} \sum_{\substack{n=m+1 \\ I_n \cap J_k^i \neq \emptyset}}^{N} 1.$$

Fixons l'entier i. Nous pouvons écrire

$$\sum_{\substack{n=m+1 \\ I_n \cap J_k^i \neq \emptyset}}^{N} 1 \leq \sum_{j=1}^{H_k} \sum_{\substack{n=m+1 \\ I_n \cap J_k^i \neq \emptyset \\ u_n \in J_k^j}}^{N} 1.$$

Or les conditions $I_n \cap J_k^i \neq \emptyset$ et $u_n \in J_k^j$, impliquent que J_k^j rencontre l'intervalle $J_k^i + I(0, \varepsilon_n/2)$. Soit $\gamma_{i,j}$ la fonction de n définie par $\gamma_{i,j}(n) = 1$

si $J^j_k \cap (J^i_k + I\,(0, \varepsilon_n/2)) \neq \emptyset$, et $\gamma_{i,j}\,(n) = 0$ sinon. Soit β_j la fonction caractéristique de l'intervalle J^j_k, nous pouvons écrire

$$\sum_{\substack{n=m+1 \\ I_n \cap J^i_k \neq \emptyset}} 1 \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq H_k \\ m < n \leq N}} \beta_j\,(u_n)\,\gamma_{i,j}\,(n).$$

Or, d'après la condition (ii) du théorème 1, on a, pour tout $M > m$:

$$\sum_{n=m+1}^{M} \beta_j\,(u_n) \leq (M - m)/R_k + \bigcirc(1)$$

et, d'autre part, puisque la suite (ε_n) est décroissante, pour tout (i, j), $\gamma_{i,j}\,(n)$ est une fonction décroissante de n. On peut donc appliquer le lemme 3 :

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq H_k \\ m < n \leq N}} \beta_j\,(u_n)\,\gamma_{i,j}\,(n) \leq 1/R_k \sum_{\substack{1 \leq j \leq H_k \\ m < n \leq N}} \gamma_{i,j}\,(n) + \bigcirc\Bigl(\sum_{1 \leq j \leq H_k} \gamma_{i,j}\,(m+1)\Bigr).$$

Mais, pour n fixé, comme $J^i_k + I\,(0, \varepsilon_n/2)$ est un intervalle de mesure au plus $\varepsilon_n + 1/R_k$, on a, d'après le lemme 2 :

$$\sum_{1 \leq j \leq H_k} \gamma_{i,j}\,(n) = \sum_{\substack{j \\ J^j_k \cap (J^i_k + I(0, \varepsilon_n/2)) = \emptyset}} 1 = R_k\,\varepsilon_n + \bigcirc(1),$$

d'où finalement, pour i fixé :

$$\sum_{\substack{n=m+1 \\ I_n \cap J^i_k = \emptyset}}^{N} 1 \leq \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n + \bigcirc[(N - m)/R_k] + \bigcirc(R_k\,\varepsilon_m).$$

Le nombre de i tels que $J^i_k \cap I_m = \emptyset$, étant $\varepsilon_m\,R_k + \bigcirc(1)$, on obtient alors :

$$\sum_{n=m+1}^{N} \mu\,(I_m \cap I_n) \leq \varepsilon_m \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n + \bigcirc(R_k\,\varepsilon_m^2) + \bigcirc\{[(N-m)/R_k]\,\varepsilon_m\}.$$

Pour obtenir le lemme 1, il suffit de compléter ce calcul par le suivant :

LEMME 5. — *Soient m, N_0, N et h, des entiers positifs, tels que $m < N_0 < N$ et que $\varepsilon_{N_0+1} < 1/R_h \leq \varepsilon_m$. On a*

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} \mu(I_m \cap I_n) \leq \varepsilon_m \sum_{n=N_0+1}^{N} \varepsilon_n + \bigcirc\Bigl(1/R_h \sum_{n=N_0+1}^{N} \varepsilon_n\Bigr) + \bigcirc(\varepsilon_m).$$

Preuve. — Soit $n > N_0$; si $I_m \cap I_n \neq \emptyset$, alors $u_n \in I_m + I(0, 1/2\, R_h)$, donc

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} \mu(I_m \cap I_n) \leqq \sum_{\substack{i \\ J_h^i \cap [I_m + I(0,1/2\, R_h)] \neq \emptyset}} \sum_{\substack{n=N_0+1 \\ u_n \in J_h^i}}^{N} \varepsilon_n.$$

Soit β_i la fonction caractéristique de l'intervalle J_h^i, on a, d'après le lemme 3 et la condition (ii) du théorème 1 :

$$\sum_{\substack{n=N_0+1 \\ u_n \in J_h^i}}^{N} \varepsilon_n = \sum_{n=N_0+1}^{N} \beta_i(u_n)\, \varepsilon_n \leqq 1/R_h \sum_{n=N_0+1}^{N} \varepsilon_n + O(\varepsilon_{N_0+1}).$$

Comme le nombre de i, tels que J_h^i rencontre $I_m + I(0, 1/2\, R_h)$, est $\varepsilon_m R_h + O(1)$, on obtient

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} \mu(I_m \cap I_n) \leqq \varepsilon_m \sum_{n=N_0+1}^{N} \varepsilon_n + O(\varepsilon_m) + O\left(1/R_h \sum_{n=N_0+1}^{N} \varepsilon_n\right).$$

Démonstration du lemme 1. — Il suffit maintenant de rapprocher les énoncés des lemmes 4 et 5. Soit N_0 le plus grand entier tel que $m \leqq N_0 \leqq N$, et $\varepsilon_{N_0} \geqq 1/R_h$. D'après le lemme 4, si $N_0 > m$:

$$\sum_{n=m+1}^{N_0} \mu(I_m \cap I_n) \leqq \varepsilon_m \sum_{n=m+1}^{N_0} \varepsilon_n + O(R_k\, \varepsilon_m^2) + O((N_0 - m)\, \varepsilon_m / R_k).$$

Mais, comme on a $\varepsilon_n \geqq 1/R_h$ pour tout n tel que $m < n \leqq N_0$:

$$N_0 - m \leqq R_h \sum_{n=m+1}^{N_0} \varepsilon_n,$$

donc

$$\sum_{n=m+1}^{N_0} \mu(I_m \cap I_n) \leqq \varepsilon_m \sum_{n=m+1}^{N_0} \varepsilon_n + O(R_k\, \varepsilon_m^2) + O\left(\varepsilon_m R_h / R_k \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n\right).$$

D'autre part, si $N_0 < N$, on a, d'après le lemme 5 :

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} \mu(I_m \cap I_n) \leqq \varepsilon_m \sum_{n=N_0+1}^{N} \varepsilon_n + O(\varepsilon_m) + O\left(1/R_h \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n\right)$$

et l'on obtient

$$\sum_{n=m+1}^{N} \mu(I_m \cap I_n) \leq \varepsilon_m \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n + O(R_k\, \varepsilon_m^2)$$
$$+ O\left(\varepsilon_m R_h / R_k \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n\right) + O\left(1/R_h \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n\right).$$

Avec les conditions du théorème 1, le lemme 1 permet déjà de démontrer que la suite de fonctions $\nu(., N)/S(N)$ tend vers 1, dans $L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$. Pour passer à la convergence ponctuelle presque partout, il faut raffiner le théorème de Fischer-Riesz, suivant une méthode déjà utilisée dans ce genre de questions, par exemple par W. Schmidt [12].

De façon générale, soit J une mesure normale et complète, sur un ensemble quelconque E, et soit $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de fonctions réelles non négatives sur E, de carrés μ-intégrables. Soit $\varepsilon_n = \int \beta_n(x)\, d\mu(x)$, supposons que $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$ pour tout n, et que la série $\sum \varepsilon_n$ soit divergente. [La restriction $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$ n'a rien d'essentiel, les résultats qui suivent restent vrais même si la suite (ε_n) n'est pas bornée, la démonstration serait légèrement plus compliquée.] Posons, pour tout $x \in E$, et pour tout couple (M, N) d'entiers tels que $0 \leq M \leq N$:

$$\nu(x, M, N) = \sum_{M < n \leq N} \beta_n(x), \qquad S(M, N) = \sum_{M < n \leq N} \varepsilon_n,$$

et $\nu(x, N) = \nu(x, 0, N)$, $S(N) = S(0, N)$.

Soit $V(N) = [S(N)]$, et $V(0) = 0$. Puisque $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$, et que la série $\sum \varepsilon_n$ diverge, l'ensemble des valeurs de V est $\mathbf{N}$. Soit D une partie de $\mathbf{N}$, contenant 0, telle que la restriction de V à D soit une bijection de D sur $\mathbf{N}$. Pour tout couple d'entiers (s, t), tels que $0 \leq t \leq s$, désignons par $L_{s,t}$ l'ensemble des couples d'entiers $(M, N) \in D \times D$, tels que $0 \leq M < N$, $V(N) \leq 2^s$ et qu'il existe un entier u tel que $V(M) = u\, 2^t$ et $V(N) = (u+1)\, 2^t$. Soit $L_s = \bigcup_{0 \leq t \leq s} L_{s,t}$. On a le résultat suivant :

Lemme 6. — *Soient a et b deux constantes réelles, telles que $a > 1$, $b \geq 0$ et que $c = a + b < 2$. Supposons que l'on ait, pour tout (s, t) et pour tout $(M, N) \in L_{s,t}$:*

$$\int (\nu(x, M, N) - S(M, N))^2\, d\mu(x) = O(2^{at+bs}),$$

alors, pour μ-presque tout x :

$$\nu(x, N) = S(N) + O((S(N))^{c/2}(\log S(N))^{1+\varepsilon})$$

quel que soit $\varepsilon > 0$ (l'estimation étant uniquement relative à N, et non nécessairement uniforme par rapport à x).

Preuve. — Remarquons tout d'abord le résultat suivant :

LEMME 7. — *On a*

$$\sum_{(M,N)\in L_s} \int (\nu(x, M, N) - S(M, N))^2 \, d\mu(x) = O(2^{cs}).$$

Preuve. — Pour s et t fixés, le nombre de couples $(M, N) \in L_{s,t}$ est 2^{s-1}, donc :

$$\sum_{(M,N)\in L_{s,t}} \int (\nu(x, M, N) - S(M, N))^2 \, d\mu(x) = O(2^{(a-1)t+(b+1)s}),$$

et le résultat s'obtient en sommant sur t, compte tenu de

$$\sum_{t=0}^{s} 2^{(a-1)t} = O(2^{(a-1)s}).$$

Le lemme 6 résultera alors du calcul suivant :

LEMME 8. — *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite $(U_s)_{s\in\mathbf{N}^*}$ de sous-ensembles μ-intégrables de E, tels que $\mu(U_s) = O(1/s^{1+2\varepsilon})$ et que, pour tout $s > 0$, on ait l'implication*

$$\{x \notin U_s;\ N \in D;\ V(N) \leq 2^s\} \Rightarrow (|\nu(x, N) - S(N)| \leq s^{1+\varepsilon} 2^{cs/2}).$$

Preuve. — Pour $s > 0$, soit U_s l'ensemble des $x \in E$, tels que

$$\sum_{(M,N)\in L_s} (\nu(x, M, N) - S(M, N))^2 > s^{1+2\varepsilon} 2^{cs}.$$

D'après le lemme 7, $\mu(U_s) = O(1/s^{1+2\varepsilon})$.

D'autre part, pour tout $N \in D$, tel que $V(N) \leq 2^s$, il existe une suite finie d'entiers, $N_0 = 0 < N_1 < \ldots < N_q = N$, où $q \leq s$, telle que $(N_{r-1}, N_r) \in L_s$ pour tout $r = 1, \ldots, q$. En effet, dans le développement 2-adique de $V(N)$,

$$V(N) = \sum_{i=0}^{s} a_i 2^i,$$

soient $a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}$ $(i_1 < \ldots < i_q \leqq s)$, les a_i non nuls. La suite d'entiers de D, $(N_r)_{0 \leqq r \leqq q}$, ainsi définie :

$$N_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad N_r = \sum_{i=0}^{i_r} a_i\, 2^i,$$

répond visiblement à la question.

Soit alors $x \notin U_s$. Comme

$$\nu(x, N) - S(N) = \sum_{r=1}^{q} (\nu(x, N_{r-1}, N_r) - S(N_{r-1}, N_r)),$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy, puisque $q \leqq s$:

$$(\nu(x, N) - S(N))^2 \leqq s \sum_{(M, N) \in L_s} (\nu(x, N_{r-1}, N_r) - S(N_{r-1}, N_r))^2,$$

on a

$$|\nu(x, N) - S(N)| \leqq s^{1+\varepsilon}\, 2^{cs/2}.$$

Fin de la démonstration du lemme 6. — Comme la série $\sum_s \mu(U_s)$ est convergente, il existe, pour μ-presque tout x, un entier $s_0 > 0$, tel que, pour tout $s \geqq s_0$, on ait $x \notin U_s$. Soit alors $N \in D$, tel que $V(N) \geqq 2^{s_0}$, et soit s, l'entier défini par $2^{s-1} < V(N) \leqq 2^s$. Comme $s \geqq s_0$, x n'appartient pas à U_s, et l'on a donc, d'après le lemme 8 :

$$|\nu(x, N) - S(N)| \leqq s^{1+\varepsilon}\, 2^{cs/2} = O((\log S(N))^{1+\varepsilon} (S(N))^{c/2}).$$

L'estimation recherchée est donc prouvée lorsque $N \in D$. Pour voir que cette estimation est valable pour tout entier $N > 0$, il suffit de remarquer qu'il existe alors des entiers N' et N'' de D, tels que

$$N' \leqq N < N'',$$

et que

$$V(N') = V(N) = V(N'') - 1.$$

Comme $\nu(x, N') \leqq \nu(x, N) \leqq \nu(x, N'')$, l'estimation de $\nu(x, N')$ et $\nu(x, N'')$, donne celle de $\nu(x, N)$.

Démonstration du théorème 1. — Soit β_n la fonction caractéristique de l'intervalle I_n. Le nombre d'entiers n, tels que $0 < n \leqq N$ et que $x \in I_n$, est $\nu(x, N) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n(x)$, et $\int \beta_n(x)\, dx = \varepsilon_n$. Avec les notations du lemme 6, on a le lemme suivant :

LEMME 9. — *Pour tout* $(M, N) \in L_{s,t}$,

$$\int (\nu(x, M, N) - S(M, N))^2\, dx = O(2^{5t/3}).$$

Preuve. — Soient, pour tout entier m tel que $M < m < N$, k_m et h_m respectivement, les plus petits entiers tels que

$$R_{k_m} \varepsilon_m \geqq 2^{2t/3} \qquad \text{et} \qquad R_{h_m} \varepsilon_m \geqq 2^{t/3}.$$

En raison de la condition (iii), on aura

$$R_{k_m} \varepsilon_m = O(2^{2t/3}), \qquad R_{h_m} \varepsilon_m = O(2^{t/3}) \qquad \text{et} \qquad R_{h_m}/R_{k_m} = O(2^{-t/3}).$$

On a

$$\int (\nu(x, M, N) - S(M, N))^2\, dx = \int (\nu(x, M, N))^2\, dx - (S(M, N))^2.$$

Calculons

$$\int (\nu(x, M, N))^2\, dx = \sum_{M<n\leqq N} \int \beta_n(x)\, dx + 2 \sum_{M<m<n\leqq N} \int \beta_m(x)\, \beta_n(x)\, dx,$$

soit

$$\int (\nu(x, M, N))^2\, dx = S(M, N) + 2 \sum_{M<m<n\leqq N} \mu(I_m \cap I_n).$$

D'après le lemme 1, on a, pour tout m,

$$\sum_{n=m+1}^{N} \mu(I_m \cap I_n) \leqq \varepsilon_m \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n + O(2^{2t/3} \varepsilon_m) + O\left(2^{-t/3} \varepsilon_m \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n\right),$$

d'où

$$\int (\nu(x, M, N))^2\, dx \leqq (S(M, N))^2 + O(2^{2t/3} S(M, N)) + O(2^{-t/3} (S(M, N))^2)$$

et, comme $S(M, N) = 2^t + O(1)$,

$$\int (\nu(x, M, N))^2 \, dx \leqq (S(M, N))^2 + O(2^{5t/3}),$$

ce qui prouve le lemme 9.

Le théorème 1 résulte alors du lemme 6.

Dans le but d'étudier la suite $(n\alpha)$ lorsque l'inéquation $\| n\alpha \| \leqq 1/n^{1+\delta}$ n'a qu'un nombre fini de solutions, pour tout $\delta > 0$, nous allons aussi établir le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Supposons satisfaites les hypothèses du théorème* 1, *à l'exception éventuelle de la condition* (iii), *remplacée par la condition* (iii)′ *suivante :*

(iii)′ $$R_{k+1} = O(R_k^{1+\delta}) \text{ pour tout } \delta > 0.$$

Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *est fortement eutaxique, par rapport à toute suite* $\sigma = (\varepsilon_n)$ *pour laquelle il existe* $\delta_0 > 0$ *tel que* $\liminf \varepsilon_N^{\delta_0} S(N) > 0$. *De façon plus précise, on a alors, pour presque tout* x :

$$\nu(x, N) = S(N) + O((S(N))^{5/6+\varepsilon}) \qquad \text{(quel que soit } \varepsilon > 0).$$

Preuve. — Le lemme 9 est remplacé par le lemme suivant :

LEMME 10. — *Soit* ε *tel que* $0 < \varepsilon < 1/6$. *On a, pour tout* $(M, N) \in L_{s,t}$:

$$\int (\nu(x, M, N) - S(M, N))^2 \, dx = O(2^{(5/3+\varepsilon)t+\varepsilon s}).$$

Preuve. — Comme précédemment, soient, pour tout m tel que $M < m < N$, k_m et h_m les plus petits entiers tels que

$$R_{k_m} \varepsilon_m \geqq 2^{2t/3} \qquad \text{et} \qquad R_{h_m} \varepsilon_m \geqq 2^{t/3}.$$

On a, cette fois,

$$R_{k_m} \varepsilon_m = O(2^{2(1+\delta)t/3} \varepsilon_m^{-\delta})$$

et

$$R_{h_m} \varepsilon_m = O(2^{(1+\delta)t/3} \varepsilon_m^{-\delta}) \qquad \text{quel que soit } \delta > 0.$$

Choisissons $\delta = \min(3\varepsilon/2, \delta_0 \varepsilon)$. Comme $\varepsilon_m^{-\delta} = O((S(m))^{\delta/\delta_0})$, et que

$$S(m) \leqq S(N) = O(2^s),$$

on a

$$R_{k_m} \varepsilon_m = O(2^{(2/3+\varepsilon)t+\varepsilon s}), \qquad R_{h_m} \varepsilon_m = O(2^{(1/3+\varepsilon)t+\varepsilon s})$$

et

$$R_{h_m}/R_{k_m} = O(2^{(-1/3+\varepsilon)t+\varepsilon s}).$$

On en déduit comme précédemment :

$$\int (\nu(x, M, N) - S(M, N))^2 \, dx = O(2^{(5/3+\varepsilon)t+\varepsilon s}),$$

ce qui, d'après le lemme 6, démontre le théorème 2.

3. Applications.

Un premier exemple d'application est le suivant :

Corollaire 1. — *Soit q un entier supérieur à 1, et soit (u_n) la suite d'éléments de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ainsi définie : si $n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_s q^s$ est le développement q-adique de n, alors $u_n = a_0 q^{-1} + a_1 q^{-2} + \ldots + a_s q^{-(s+1)}$. La suite (u_n) est fortement eutaxique.*

Preuve. — Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème 1, en utilisant les intervalles de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de la forme $[h/q^s, (h+1)/q^s[$, où s est un entier positif, et h un entier tel que $0 \leq h < q^s$.

Soit maintenant $\alpha \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, la classe mod 1 d'un nombre irrationnel, les théorèmes 1 et 2 vont s'appliquer à l'étude de la suite $(n\alpha)$, en raison de la remarque suivante : soit $q_0 = 1 < q_1 < \ldots < q_k < \ldots$ la suite des réduites du développement en fraction continue de $\{\alpha\}$. Tous les intervalles de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, de longueur $\|q_k \alpha\|$ (k décrivant $\mathbf{N}$), sont de restes uniformément bornés. Cette propriété est contenue dans les résultats obtenus par J. Lesca dans [5]. En effet, soient β et γ deux éléments distincts de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, désignons par $]\beta, \gamma]$ (resp. $[\beta, \gamma[$), les intervalles de $\mathbf{R}/\mathbf{Z} : 0 < \{x - \beta\} \leq \{\gamma - \beta\}$ (resp. $0 \leq \{x - \beta\} < \{\gamma - \beta\}$); autrement dit, si $\{\beta\} < \{\gamma\}$, $]\beta, \gamma]$ et $[\beta, \gamma[$ sont les images canoniques des intervalles réels $]\{\beta\}, \{\gamma\}]$ et $[\{\beta\}, \{\gamma\}[$ respectivement, et de toute façon $]\beta, \gamma] = \complement\,]\gamma, \beta]$. et $[\beta, \gamma[= \complement\, [\gamma, \beta[$. Pour tout entier $N > 0$, et tout intervalle I de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, soit $\pi^+(I, N)$ [resp. $\pi^-(I, N)$] le nombre d'entiers n tels

$$0 < n \leq N \text{ (resp. } 0 \leq n < N)$$

et que $n\alpha \in I$, et posons

$$E^+(I, N) = \pi^+(I, N) - N\mu(I)$$
$$[\text{resp. } E^-(I, N) = \pi^-(I, N) - N\mu(I)].$$

Dans [5], J. Lesca démontre l'ingénieuse relation « de réciprocité » suivante :

$$E^+(]\beta, \beta + u\alpha], v) = E^-([-\beta, -\beta + v\alpha[, u)$$

quels que soient $\beta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, et $(u, v) \in N^* \times N^*$.

Posant $\varphi^+(\beta, N) = E^+(]0, \beta], N)$, J. Lesca déduit, de la relation précédente, que

$$-1 < \varphi^+(\beta, q_k) < 1 \quad \text{pour tout } k.$$

Comme on a visiblement :

$$E^+(]\beta, \gamma], N) = \varphi^+(\gamma, N) - \varphi^+(\beta, N)$$

pour tout entier positif N, et pour tout couple (β, γ) d'éléments distincts de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, il en résulte aussitôt que

$$-2 < E^+(]\beta, \gamma], q_k) < 2.$$

Comme $E^+(]-\beta, -\beta + N\alpha], q_k) = E^-([\beta, \beta + q_k\alpha[, N)$, on aura, pour tout β, et pour tout k et tout N :

$$-2 < E^-([\beta, \beta + q_k\alpha[, N) < 2.$$

Soit maintenant I un intervalle de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, de longueur $\| q_k\alpha \|$ $(k \in \mathbf{N}^*)$, de la forme $[\beta, \gamma[$. On a $\gamma = \beta + q_k\alpha$ ou $\beta = \gamma + q_k\alpha$, et de toute façon, comme $E^-(I, N) = -E^-\left(\complement I, N\right)$, on a

$$-2 < E^-(I, N) < 2.$$

Revenant aux notations du théorème 1, soient M et N des entiers tels que $0 < M \leqq N$, comme

$$\begin{aligned} \pi(I, M, N) &= \pi^-(I - M\alpha, N - M) \\ &= (N - M)\| q_k\alpha \| + E^-(I - M\alpha, N - M), \end{aligned}$$

on a

$$-2 < \pi(I, M, N) - (N - M)\| q_k\alpha \| < 2.$$

Ainsi, en posant $R_k = 1/\| q_k\alpha \|$, et en prenant pour tout k, un recouvrement de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ par $[R_k] + 1$ intervalles de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, de la forme $[\beta, \gamma[$, de longueur $\| q_k\alpha \|$, les conditions (i) et (ii) du théorème 1 se trouvent satisfaites. La condition (iii) : $\| q_k\alpha \| / \| q_{k+1}\alpha \| = O(1)$ équivaut alors au fait que la constante de Markov de α : $M(\alpha) = \limsup\limits_{n>0} 1/n\| n\alpha \|$, soit finie. Quant à la condition (iii)' du théorème 2, comme

$$1/2\, q_{k+1} < \| q_k\alpha \| < 1/q_{k+1},$$

elle équivaut au fait que, pour tout $\delta > 0$, l'inéquation $\| n\alpha \| < 1/n^{1+\delta}$ n'ait qu'un nombre fini de solutions entières positives n. Les théorèmes 1 et 2 conduisent donc aux corollaires suivants :

Corollaire 2. — *Si la constante de Markov de α est finie, la suite $(n\alpha)_{n \in \mathbf{N}^*}$, d'éléments de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, est fortement eutaxique. De façon plus précise, on a l'estimation du théorème* 1 :

$$\nu(x, N) = S(N) + O((S(N))^{5/6} (\log S(N))^{1+\varepsilon})$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

Corollaire 3. — *Si, pour tout $\delta > 0$, l'inéquation $\| n\alpha \| \leqq 1/n^{1+\delta}$, n'a qu'un nombre fini de solutions n, entières positives, la suite $(n\alpha)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est fortement eutaxique par rapport à toute suite (ε_n) pour laquelle il existe $\delta_0 > 0$, tel que* $\liminf \varepsilon_N^{\delta_0} S(N) > 0$. *On a alors l'estimation du théorème* 2 :

$$\nu(x, N) = S(N) + O((S(N))^{5/6+\varepsilon})$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

4. Problèmes non résolus.

Soit G un groupe abélien métrique compact. Il est facile de démontrer que, pour une suite $\sigma = (\varepsilon_n)$ donnée, presque toute suite d'éléments de G est fortement eutaxique par rapport à σ. On peut d'ailleurs démontrer dans ce sens des résultats plus généraux ([8], [10], [12]). Cependant, le fait que l'ensemble des éléments $\alpha \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ tels que la suite $(n\alpha)$ soit eutaxique — c'est-à-dire les éléments de constante de Markov finie — soit négligeable, donne l'idée que presque aucune suite d'éléments de G ne serait eutaxique, ni *a fortiori* fortement eutaxique. Nous ignorons ce qu'il en est effectivement. Il paraît difficile d'étudier, dans cette optique, les suites de la forme (λx^n) modulo 1, ou $(P(n)\alpha)$, où P est un polynôme.

Il serait intéressant d'étudier les rapports entre les diverses notions d'eutaxie, de forte eutaxie, et d'équirépartition. Ainsi, on connaît des conditions de répartition qui entraînent la forte eutaxie, mais en sens inverse, nous ne savons pas quelles conséquences, en termes de répartition, peuvent avoir l'eutaxie ou la forte eutaxie, d'une suite. Signalons aussi que nous ne connaissons pas d'exemple de suite équirépartie et eutaxique, qui ne soit pas fortement eutaxique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASSELS (J. W. S.). — Some metrical theorems in Diophantine approximation, III, *Proc. Camb. phil. Soc.*, t. 46, 1950, p. 219-225.

[2] ERDÖS (P.). — Some results on diophantine approximation, *Acta Arith.*, Warszawa, t. 5, 1959, p. 359-369.

[3] KHINTCHINE [KHINČIN] (A.). — Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen, *Math. Annalen*, t. 92, 1924, p. 115-125.

[4] LANG (S.). — Asymptotic approximations to quadratic irrationalities, I and II, *Amer. J. Math.*, t. 87, 1965, p. 481-496.

[5] LESCA (J.). — Sur la répartition modulo 1 des suites ($n\,\alpha$), *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 8e année, 1966-1967, nº 2, 9 pages.

[6] LESCA (J.). — *Sur les approximations diophantiennes à une dimension* (*Thèse Sc. Math. Grenoble*, 1968).

[7] LE VEQUE (W. J.). — On the frequency of small fractional parts in certains real sequences, III, *J. für reine. und angew. Math.*, t. 202, 1959, p. 215-220.

[8] DE MATHAN (B.). — Approximations diophantiennes dans un corps local, *Bull. Soc. math. France, Mémoire* 21, 1970, 93 pages.

[9] DE MATHAN (B.). — Un critère de non-eutaxie. *C. R. Acad. Sc. Paris* (à paraître).

[10] PHILIPP (W.). — Some metrical theorems in number theory, *Pacific J. Math.*, t. 20, 1967, p. 109-127.

[11] SCHMIDT (W.). — A metrical theorem in diophantine approximation, *Canad. J. Math.*, t. 12, 1960, p. 619-631.

[12] SCHMIDT (W.). — Metrical theorems on fractional parts of sequences, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 110, 1964, p. 493-518.

(Texte reçu le 7 juin 1971.)

Bernard DE MATHAN,
U. E. R. de Mathématiques,
Université de Bordeaux-I,
351 cours de la Libération,
33-TALENCE
[détaché à la Faculté des Sciences de Rabat]