BULLETIN DE LA S. M. F.

H. SEYDI

Anneaux henséliens et conditions de chaînes

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 9-31
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__9_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 9 à 31.

ANNEAUX HENSÉLIENS ET CONDITIONS DE CHAÎNES

PAR

HAMET SEYDI (*).

Introduction. — Cet article a pour but de montrer le lien qui existe entre le problème de la condition des chaînes dans les anneaux noethériens et le problème de la condition des chaînes dans les anneaux locaux noethériens henséliens. Nous parlons essentiellement d'anneaux commutatifs unitaires. Nous partons d'une définition de la deuxième condition des chaînes qui semble en apparence beaucoup plus forte que celle de NAGATA et RATLIFF. C'est tout simplement pour éviter de démontrer que la deuxième condition des chaînes, telle qu'elle est définie par NAGATA et RATLIFF, « passe au quotient ». Nous avons cependant montré (1.10) que la définition de NAGATA et RATLIFF est équivalente à la nôtre du moins dans les anneaux noethériens. La démonstration donnée ici (1.10) semble originale. Nous l'avons appelée *théorème de Nagata* parce que la première démonstration de ce théorème est due à NAGATA, du moins modulo sa définition de la deuxième condition des chaînes (L. R. [5], 34.3, p. 123). Nous avons également donné ici une généralisation du lemme bien connu de Hironaka (1.16) du moins sous la forme indiquée par NAGATA (L. R. [5], 36.9, p. 134), la formulation indiquée dans EGA ([3], chap. IV, § 5, prop. 5.12.8) peut se déduire facilement de notre corollaire (1.16.1) qui est une généralisation de EGA (chap. IV, § 5, 5.12.7) du moins dans le cas des anneaux intègres. Nous supposons essentiellement connue la théorie de la hensélisation de Nagata. Il n'est pas besoin de dire que la plupart des résultats obtenus sont dus à NAGATA et RATLIFF, à l'exception de (1.3), et (1.12) à (1.15).

(*) Partie de la thèse de 3e cycle de l'auteur, soutenue à la Faculté des Sciences de Paris en juillet 1969.

0. Définitions.

0.1. Chaînes d'idéaux premiers.

Soient A un anneau, Q et P deux idéaux premiers de A tels que $Q \subseteq P$; on appelle *chaîne d'idéaux premiers* entre Q et P une suite finie d'idéaux premiers $P_0 = Q, \ldots, P_i, \ldots, P_r = P$ telle que $P_i \subset P_{i+1}$, $\forall\, i (0 \leqq 1 \leqq r - 1$ et $P_i \neq P_j$ si $i \neq j$. Par définition, la longueur de cette chaîne est r. On dira que la chaîne est saturée, si $\forall_i (0 \leqq i \leqq r - 1)$ et tout idéal premier P' tel que $P_i \subseteq P' \subseteq P_{i+1}$, ou bien $P' = P_i$ ou bien $P' = P_{i+1}$. Une chaîne d'idéaux premiers entre un idéal premier minimal et un idéal maximal s'appelle une *chaîne maximale.*

0.2. Conditions de chaînes.

1° S'il existe un entier m tel que toutes les chaînes maximales de A soient de longueur inférieure ou égale à m, on dit que A est de dimension finie, et on définit la dimension de A [noté $\dim(A)$] comme étant la borne supérieure des longueurs des chaînes maximales de A; dans le cas contraire, on dit que A est de dimension infinie, et on pose $\dim(A) = +\infty$. Il est évident que si $\dim(A) < +\infty$ (c'est-à-dire si A est de dimension finie), $\dim(A)$ est égale à la borne supérieure des longueurs des chaînes saturées maximales de A.

2° On dit que A est équidimensionnel si, pour tout idéal premier minimal P de A, $\dim(A/P) = \dim(A)$.

3° Étant donné un idéal I de A $(I \neq A)$, on appelle hauteur de I, et on note $ht(I)$, la borne inférieure des dimensions des anneaux locaux A_p, où P parcourt l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I. Si A est noethérien, alors, pour tout idéal $I (\neq A)$ de A, $ht(I) < +\infty$, d'après le Primidealsatz de Krull (EGA [2], chap. 0, § 16, 16.3.1).

4° Étant donnés deux idéaux premiers $Q \subseteq P$, on pose

$$\operatorname{codim}(P, Q) = \dim(A_p/QA_p).$$

5° On dit que A est caténaire si, pour tout couple d'idéaux premiers $Q \leqq P$ tel que $\operatorname{codim}(P, Q) < +\infty$, toutes les chaînes saturées maximales de A_p/QA_p ont même longueur; il revient au même de dire que toutes les chaînes saturées entre Q et P ont même longueur nécessairement égale à $\operatorname{codim}(P, Q)$.

6° On dit que A est universellement caténaire si toute A-algèbre de type fini est un anneau caténaire. Il est évident que tout anneau quotient d'anneau caténaire (resp. universellement caténaire) est un anneau caténaire (resp. universellement caténaire).

7° Soit A un anneau; on dira que A satisfait à la première condition des chaînes si, pour tout idéal maximal M de A, l'anneau local A_M est caténaire, équidimensionnel et $\dim(A_M) = \dim(A)$ (en particulier, A est caténaire); en particulier, si $\dim(A) < +\infty$, il revient au même de dire que toutes les chaînes saturées maximales de A ont même longueur, et dans ce dernier cas, on dira que A est biéquidimensionnel.

8° Soit A un anneau, on dira que A satisfait à la deuxième condition des chaînes, si A satisfait à la première condition des chaînes et si toute A-algèbre entière (1) intègre satisfait à la première condition des chaînes.

I. Énoncés et démonstrations des théorèmes fondamentaux.

1.1. PROPOSITION. — *Soit A un anneau.*

1° *A satisfait à la première (resp. deuxième) condition des chaînes si, et seulement si, pour tout idéal maximal M de A, l'anneau local A_M satisfait à la première (resp. deuxième) condition des chaînes, et* $\dim(A_M) = \dim(A)$

2° *Si A satisfait à la première (resp. deuxième) condition des chaînes, tout anneau quotient intègre de A satisfait à la première (resp. deuxième) condition des chaînes [du moins si* $\dim(A) < +\infty$].

3° *S'il existe une A-algèbre entière contenant A qui satisfait à la première (resp. deuxième) condition des chaînes, il en est de même de A si* $\dim(A) < +\infty$.

4° *Si A est intègre, et satisfait à la deuxième condition des chaînes, et si B est une A-algèbre entière telle que $A \subseteq B$ et qu'aucun élément non nul de A ne soit diviseur de 0 dans B, alors B satisfait à la deuxième condition des chaînes.*

Preuve. — Le 1° et le 2° sont évidents.

3° Si $P_0 \subset \ldots \subset P_s$ est une chaîne saturée maximale de A, elle se relève en une chaîne saturée maximale de B (*cf.* COHEN-SEIDENBERG), donc $s = \dim(B) = \dim(A)$ puisque B satisfait à la première condition des chaînes, donc A satisfait à la première condition des chaînes. Supposons donc que A satisfasse à la deuxième condition des chaînes, et soient A' une A-algèbre intègre et $(T_{a'})_{a' \in A'}$ des indéterminées; soit $\pi : A[T_{a'}]_{a' \in A'} \to A'$, défini par $\pi(T_{a'}) = a'$, et soit P le noyau de π qui est idéal premier. Puisque $B[T_{a'}]_{a' \in A'}$ est entier sur $A[T_{a'}]_{a' \in A'}$, il existe un idéal premier P' de $B[T_{a'}]_{a' \in A'}$ au-dessus de P (COHEN-SEIDENBERG), alors $B' = B[T_{a'}]_{a' \in A'/P'}$ est entier sur A', donc B' est une A-algèbre entière et *a fortiori* une B-algèbre entière. Donc B' satisfait à la première

(1) On rappelle que l'on dit qu'une A-algèbre B est une A-algèbre entière si B est entier sur l'image de A par l'application canonique de A dans B; on sait que, si B contient A, $\dim(A) = \dim(B)$, et dans le cas contraire, $\dim(B) \leq \dim(A)$.

condition des chaînes. Mais $\dim(A') \leqq \dim(A) < +\infty$, donc la première partie de la démonstration montre que A' satisfait à la première condition des chaînes, ce qui termine la démonstration du 3°.

4° Si P est un idéal premier minimal de B, alors $P \cap A = 0$, donc B/P est entier sur A, donc B/P satisfait à la première condition des chaînes et puisque $\dim(B/P) = \dim(A) = \dim(B)$, B satisfait à la première condition des chaînes. De même, puisque toute B-algèbre entière est une A-algèbre entière, donc toute B-algèbre entière intègre satisfait à la première condition des chaînes.

C. Q. F. D.

1.2. Proposition. — *Soit A un anneau intègre de dimension finie qui satisfait à la deuxième condition des chaînes, et soit B une A-algèbre entière contenant A et telle qu'aucun élément non nul de A ne soit diviseur de* 0 *dans B.*

1° *Soit $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_s$ une chaîne saturée d'idéaux premiers de B; alors, pour que la chaîne soit maximale, il faut et il suffit que*

$$P_0 \cap A \subset P_1 \cap A \subset \ldots \subset P_s \cap A$$

soit une chaîne saturée maximale de A.

2° *Soient Q un idéal de A, et Q' un idéal de B; alors*

$$ht(Q) = ht(QB) \qquad et \qquad ht(Q') = ht(Q' \cap A).$$

Preuve. — D'après la proposition 1.1, B satisfait à la deuxième condition des chaînes, donc la chaîne est maximale si, et seulement si, $s = \dim(B) = \dim(A)$, ce qui démontre le 1°.

2° Soit P un idéal premier minimal de Q, tel que $ht(Q) = ht(P)$, soit P' un idéal premier de B au-dessus de P, alors $QB \subseteq P'$, donc

$$ht(QB) \leqq ht(P') \leqq ht(P) = ht(Q).$$

Soit maintenant P' un idéal premier minimal de QB tel que $ht(P') = ht(QB)$, et soit $P'_0 \subset \ldots \subset P'_i = P' \subset \ldots \subset P'_s$ une chaîne saturée maximale de B, d'après le 1°,

$$0 = P'_0 \cap A \subset \ldots \subset P'_i \cap A = P \subset \ldots \subset P'_s \cap A$$

est une chaîne saturée maximale de A, puisque A est caténaire, $i = ht(P) \leqq ht(P')$; mais il est évident que $ht(P') \leqq ht(P)$, donc $ht(P) = ht(P') = ht(QB)$. En outre, $Q \subseteq P$, donc

$$ht(Q) \leqq ht(P) = ht(QB),$$

on a donc bien $ht(Q) = ht(QB)$. En particulier,

$$ht(Q' \cap A) = ht((Q' \cap A)B) \leq ht(Q'),$$

mais il est également évident que $ht(Q') \leq ht(Q' \cap A)$, d'où la conclusion.

C. Q. F. D.

1.2'. Remarques.

1° Puisque tout idéal premier d'un anneau noethérien est de hauteur finie (*cf.* Primidealsatz de Krull, EGA [2], chap. o, § 16, 16.3.1), tout anneau noethérien qui satisfait à la première condition des chaînes (*a fortiori* à la deuxième condition des chaînes) est de dimension finie.

2° Soit A un anneau; alors A satisfait à la première (resp. deuxième) condition des chaînes si, et seulement si, pour tout idéal maximal M de A,

(*a*) $\dim(A_M) = \dim(A)$;

(*b*) A_M satisfait à la première (resp. deuxième condition des chaînes (*cf.* 1.1), donc :

3° Si A est un anneau de dimension finie qui satisfait à la première (resp. deuxième) condition des chaînes, alors, pour tout idéal premier P de A, l'anneau local A_P satisfait à la première (resp. deuxième) condition des chaînes.

4° Tout anneau produit fini d'anneaux, ayant même dimension et qui satisfont à la première (resp. deuxième) condition des chaînes, satisfait à la première (resp. deuxième) condition des chaînes.

1.3. Théorème. — *Soient A un anneau semi-local (non nécessairement noethérien) de dimension finie, et A_H son hensélisé. Alors A satisfait à la deuxième condition des chaînes si, et seulement si, A_H satisfait à la deuxième condition des chaînes.*

Preuve. — Nous pouvons évidemment supposer que A est intègre.

Premier cas : A est local. — Dans ce cas, d'après Nagata (L. R. [5], 43.3, p. 180), il existe un anneau B contenant A et entier sur A, et un idéal maximal M de B tels que $B_M \cong A_H$. Donc si A satisfait à la deuxième condition des chaînes, il en est de même de B/P pour tout idéal premier minimal P de B, en outre, $\dim(B/P) = \dim(A)$, puisque $P \cap A = 0$, donc A_H satisfait à la deuxième condition des chaînes. Réciproquement, supposons que A_H satisfasse à la deuxième condition des chaînes. Soit A' un anneau local intègre et intégralement clos tel que $A \cong A'/P$, et soit A'_H le hensélisé de A'. D'après Nagata (L. R. [5], 43.3, p. 180), il existe un anneau intègre et intégralement clos B', et un idéal maximal M' de B' tels que $A'_H = B'_{M'}$. Alors $A_H \cong B'_{M'}/PB'_M$. Si $0 = P_0 \subset \ldots \subset P_s$ est une chaîne saturée maximale de A, il existe une chaîne $P'_0 \subset \ldots \subset P'_s$

dans B telle que P_i soit l'image réciproque dans A de P'_i, et $P'_s = M'$ (*cf.* COHEN-SEIDENBERG). Alors cette chaîne induit une chaîne maximale de $A_H \cong B'_{M'}/PB'_{M'}$, on en conclut $s = \dim A'_H$, donc A satisfait à la première condition des chaînes. Soit C une A-algèbre entière intègre. Pour démontrer que C satisfait à la première condition des chaînes, il n'est pas difficile de voir que l'on peut se limiter au cas où $A \subseteq C$, en raisonnant par récurrence sur la dimension de A. Soit $Q_0 = 0 \subset \ldots \subset Q_t$ une chaîne saturée maximale de C; posons $R = C_{Q_t}$, alors $R_H \cong R \otimes_A A_H$, et puisque tout idéal premier minimal de R_H est au-dessus de l'idéal 0 de R (L. R. [5], 43.20, p. 187), l'image réciproque dans A_H de tout idéal premier minimal de R_H est un idéal premier minimal de A_H; en outre, R_H est une A_H-algèbre entière, donc R_H satisfait à la deuxième condition des chaînes, donc R satisfait à la première condition des chaînes. Donc, puisque

$$\dim(R) = \dim(R_H) = \dim(A_H) = \dim(A),$$

on en conclut

$$t = \dim(A) = \dim(C).$$

Donc C satisfait à la première condition des chaînes, ce qui termine la démonstration dans ce cas.

Deuxième cas : A n'est pas local. — Alors $A_H \simeq \Pi_M (A_M)_H$, où M parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de A. Donc ce cas découle du premier cas, de (1.2′, 1°) et (1.2′, 4°), compte tenu de ce que

$$\dim(A_M)_H = \dim A_M, \ \forall M.$$

C. Q. F. D.

Définition. — Soit A un anneau semi-local noethérien. On dit que A est formellement équidimensionnel si son complété $\hat{A}$ est équidimensionnel.

1.4. THÉORÈME (I. S. COHEN). — *Soit A un anneau semi-local noethérien complet. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *A satisfait à la première condition des chaînes;*

2° *A est équidimensionnel.*

Preuve. — Il est clair que le 1° implique le 2°. Il nous reste donc à montrer que le 2° implique le 1°. Puisque pour tout idéal premier minimal P de A, $\dim(A/P) = \dim(A)$, il suffira de prouver l'implication dans le cas où A est intègre, donc local. Soit $r = \dim(A)$, et soit

$$0 = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_s$$

une chaîne saturée maximale de A. Nous allons prouver que $s = r$ par récurrence sur r. Si $r = 0$, c'est évident. Supposons $r > 0$, dans ce cas $s > 1$. Soit $x_1, \ldots, x_r$ un système de paramètres de A avec $x_1 \in P_1$.

Supposons d'abord que A contient un corps, et soit K son corps résiduel. D'après le théorème de structure de I. S. Cohen, $K \subseteq A$, et le sous-anneau $K[[x_1, \ldots, x_r]] = B$, défini comme l'image de l'application continue de l'anneau de séries formelles $C = K[[T_1, \ldots, T_r]]$ par l'application $T_i \to x_i$, est isomorphe à C, et A est une B-algèbre finie (L. R. [5], 31.6, p. 109). Puisque B est régulier, donc intégralement clos, $ht(P_1 \cap B) = 1$, d'après Nagata (L. R. [5], 10.4, p. 32). Donc $P_1 \cap B = x_1 B$. Donc A/P_1 est une $(B/x_1 B)$-algèbre finie de dimension $r - 1$. Puisque $0 = P_{1/P_1} \subset \ldots \subset P_{s/P_1}$ est une chaîne saturée maximale de A/P_1, $s - 1 = r - 1$ d'après l'hypothèse de récurrence, ce qui prouve le théorème dans ce cas. Si A ne contient pas un corps, d'après le théorème de Cohen cité dans la première partie, il existe un sous-anneau de valuation discrète complet V de A tel que, si $p, x_1, \ldots, x_{r-1}$ est un système de paramètres de A, où p est une uniformisante de V, A est une $(V[[x_1, \ldots, x_{r-1}]])$-algèbre finie, où $B = V[[x_1, \ldots, x_{r-1}]]$ est défini comme précédemment et est isomorphe à l'anneau des séries formelles $V[[T_1, \ldots, T_{r-1}]]$, l'isomorphisme étant défini par $T_i \to x_i$. Si $p \in P_1$, alors A/P_1 est une $(B/pB = (I/pI)[[x_1, \ldots, x_r]])$-algèbre finie, et l'on prouve le théorème comme précédemment. Si $p \notin P_1$, on peut choisir les $x_1, \ldots, x_{r-1}$ tel que $x_1 \in P$, et l'on voit que le théorème se prouve comme ci-dessus.

C. Q. F. D.

1.5. Proposition. — *Soit A un anneau semi-local noethérien formellement équidimensionnel, et soit P un idéal premier de A. Alors :*

1° *A/P et A_P sont formellement équidimensionnels;*

2° *A satisfait à la deuxième condition des chaînes;*

3° *Toute A-algèbre locale, essentiellement de type fini* (2) *et intègre, satisfait à la deuxième condition des chaînes (donc, en particulier, A est universellement caténaire).*

Preuve.

1° (*a*) Soit P' un idéal premier minimal de $P\hat{A}$, alors $ht(P') = ht(P)$, d'après Nagata (L. R [5], 22.9, p. 75). Puisque $\hat{A}$ satisfait à la première condition des chaînes (1.4)

$$\dim(\hat{A}/P') = \dim(\hat{A}) - ht(P') = \dim(A) - ht(P).$$

Ceci étant vrai pour tout idéal premier minimal de $P\hat{A}$, donc $\hat{A}/P\hat{A} = (A/P)^\wedge$ est équidimensionnel, c'est-à-dire que A est formellement équidimensionnel.

(2) On dit qu'une A-algèbre B est une A-algèbre essentiellement de type fini, si B est un anneau de fraction d'une A-algèbre de type fini.

1° (b) $\hat{A}_{P'}$ est une A_P-algèbre fidèlement plate et l'idéal maximal de A_P engendre dans $\hat{A}_{P'}$ un idéal primaire à $P'\hat{A}_{P'}$, donc le complété B' de $\hat{A}_{P'}$ est une $(B(B=\hat{A}_P))$-algèbre fidèlement plate, et l'idéal maximal de B engendre un idéal primaire à l'idéal maximal de B'. Donc, pour tout idéal premier minimal Q de B, $ht(QB)=0$ et $\dim(B/Q)=\dim(B'/QB'$ d'après NAGATA (L. R. [5], 22.9, p. 75) et (L. R. [5], 19.1, p. 64). Or $\hat{A}$ est un quotient d'anneau régulier d'après le théorème de structure de Cohen, donc $A_{P'}$ est également quotient d'anneau régulier, mais $\hat{A}_{P'}$ étant également équidimensionnel et compte tenu de ce qu'un anneau local régulier est formellement équidimensionnel, on voit bien que B' est équidimensionnel, d'après la première partie de la démonstration. Donc $\dim(B/Q)=\dim(B'/QB')=\dim(B')$, ce qui prouve que A_P est formellement équidimensionnel.

2° D'après la première partie de la démonstration,

$$\dim(A/P)+ht(P)=\dim(A).$$

En appliquant cette formule à A_P, on voit que, pour tout idéal premier $Q\subseteq P$,

$$\dim(A_P)=\dim(A_Q)+\dim(A_P/QA_P).$$

Il est facile de voir que cela implique que A est caténaire. Soient M_i, $1\leqq i\leqq m$, les idéaux maximaux de A, alors $\hat{A}=\prod_{1\leqq i\leqq m}(A_{M_i})$. Cela permet, de voir que tout idéal premier de $\hat{A}$ est contenu dans un seul idéal maximal, et puisque $\hat{A}$ est équidimensionnel, on voit que

$$\dim(A_{M_i})^{\wedge}=\dim(A_{M_i})=\dim(\hat{A})=\dim(A),\quad \forall\, i.$$

Cela achève de prouver que A satisfait à la première condition des chaînes. Pour montrer que A satisfait à la deuxième condition des chaînes, nous allons raisonner par récurrence sur $\dim(A)$. C'est évident si $\dim(A)\leqq 1$. Supposons donc la proposition vraie pour tout anneau de dimension $\leqq n$. Supposons donc que $\dim(A)=\dim(A_H)=n+1$. Pour montrer que A satisfait à la deuxième condition des chaînes, il suffira de prouver que A_H satisfait à la deuxième condition des chaînes (1.3). Or $\hat{A}_H=\hat{A}$, donc A_H satisfait à la première condition des chaînes, d'après ce qui a été vu précédemment. Soit B' une A_H-algèbre entière intègre, donc B' est un anneau local puisque A_H est hensélien, soit B l'image de A_H dans B, et $(0)=P_0\subset P_1\subset\ldots\subset P_s$ une chaîne saturée maximale de B', donc P_s est l'idéal maximal de B'. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $B_{P_{s-1}}\cap B$, d'après le 1° (a) et le 1° (*b*), on a $s-1=\dim(B_{P_{s-1}}\cap B)$. Si P' est un idéal premier de B' contenant P_{s-1}, et tel que

$$P_{s-1}\cap B\subseteq P=P'\cap B\subseteq P_s\cap B,$$

puisque $P'\subseteq P_s$, alors, soit $P=B\cap P_{s-1}$, soit $P=B\cap P_s$. Donc puisque pour tout idéal premier P de B, tel que $B\cap P_{s-1}\subseteq P\subseteq B\cap P_s$, il existe un idéal premier P' de B' contenant P'_{s-1} tel que $P=P'\cap B$, on en déduit que la chaîne

$$(0)\subset P_1\cap B\subset\ldots\subset P_s\cap B$$

est maximale. Donc $s=\dim(B)=\dim(B')$ puisque B est caténaire. Donc A_H satisfait à la deuxième condition des chaînes, ce qui termine de prouver le 2°.

3° Soit B une A-algèbre locale essentiellement de type fini. En raisonnant par récurrence sur le nombre r d'éléments de B tel que B soit un anneau de fractions de $C=A[x_1,\ldots,x_r]$, on peut supposer que $B=A[x]_P$ où P est un idéal premier de $A[x]$. Et même, d'après le 1°, on peut supposer x transcendant sur A. Si P' est un idéal premier minimal de $P\hat{A}[x]$, et si $B'=\hat{A}[x]_{P'}$, en appliquant le raisonnement du 1° (*b*) à B et B' à la place de A_P et $\hat{A}_P$ (en remarquant que B' est quotient intègre d'anneau régulier), on en déduit que B est formellement équidimensionnel, d'où la conclusion.

C. Q. F. D.

Un anneau local de Cohen-Macaulay étant formellement équidimensionnel (L. R. [5], 25.3, p. 83), on a donc la proposition suivante :

1.5.1. Proposition. — *Tout anneau local de Cohen-Macaulay satisfait à la deuxième condition des chaînes.*

1.5.2. Corollaire. — *Tout anneau local noethérien unibranche A, de dimension 2, satisfait à la deuxième condition des chaînes.*

Preuve. — On peut supposer A intègre. Sa clôture intégrale A' est alors un anneau local noethérien de dimension 2 (*cf.* L. R. [5], 33.12, p. 120), donc A' est un anneau de Cohen-Macaulay (L. R. [5], 25.13, p. 87). Donc A satisfait à la deuxième condition des chaînes, d'après (1.5.1 et (1.1.3).

C. Q. F. D.

1.6. Proposition (Ratliff). — *Soient A un anneau local noethérien intègre, et $\hat{A}$ son complété; soient $P_1,\ldots,P_m$ les idéaux premiers associés à $\hat{A}$ et, pour tout $i=1,\ldots,m$, soit Z_i un idéal P_i-primaire tel que*

$$(0)=\bigcap_{1\leq i\leq m} Z_i.$$

Supposons que $ht(P_1) = 0$ *et* $\dim(\hat{A}/P_1) = 1 < \dim(\hat{A})$.

Alors il existe des éléments b *et* c $(\neq 0)$ *dans l'idéal maximal de* A, *et* $d \in \bigcap_{2 \leq i \leq m} Z_i$ *et* $d \notin P_1$ *tels que*

1° $b - d \in Z_1$;

2° $(b, d)\hat{A} = (b, c)\hat{A}$;

3° c/b *est entier sur* A *et* $c/b \notin A$.

Preuve. — Puisque $ht(P_1) = 0$, il existe un élément d' dans $\bigcap_{2 \leq i \leq m} Z_i$ qui n'est pas dans P_1 [on remarquera que $m \geq 2$, puisque $\dim \hat{A}/P_1 < \dim(\hat{A})$]. Puisque $\dim(\hat{A}/P_1) = 1$, alors $(Z_1, d')\hat{A}$ est primaire à l'idéal maximal M' de $\hat{A}$. Donc $Q = (Z_1, d')\hat{A} \cap A$ est primaire à l'idéal maximal $M = M' \cap A$ de A. Si $b \in Q$, alors $b = z + rd'$ avec $z \in Z_1$ et $r \in \hat{A}$. Donc $rd' \in \bigcap_{2 \leq i \leq m} Z_i$ et puisque b peut être pris différent de 0, b n'est pas diviseur de 0 dans $\hat{A}$, alors $rd' \notin P_1$. Soit $d = -rd'$, alors $b - d \in Z_1$.

Pour prouver l'existence de c, tel que 1° et 2° soient vrais, nous avons besoin des préliminaires suivants :

(i) $d \notin b\hat{A}$.

Si l'on avait $d = rb$, pour $r \in \hat{A}$, alors $(1 - r)b = b - d \in Z_1$. Puisque b n'est pas diviseur de 0, $(1 - r) \in Z_1$, ce qui impliquerait que r est inversible dans $\hat{A}$, donc $b = d/r$ serait diviseur de 0, ce qui est contradictoire donc $d \notin b\hat{A}$.

(ii) Si C est un idéal non nul de A, et si M n'est pas un idéal premier associé [3] à C, alors $d \in C\hat{A}$.

Si $(C : M) = C$, alors $C\hat{A} = (C : M)\hat{A} = C\hat{A} : M'$, donc M' n'est pas non plus un idéal premier associé à $C\hat{A}$. Si P est un idéal premier de $\hat{A}$ $(\neq M')$ et $P \neq P_1$, d appartiendrait à tout idéal P-primaire (puisque d est dans le noyau de $\hat{A} \to \hat{A}_P$). Si $C \neq 0$ et $(C : M) = C$, alors d est dans toute composante primaire de $C\hat{A}$, donc $d \in C\hat{A}$.

Nous allons maintenant achever la démonstration. D'après (i) et (ii), M est un idéal premier associé à bA. Soit $bA = C \cap Q$, où Q est M-primaire et $(C : M) = C$, alors $b\hat{A} = C\hat{A} \cap Q\hat{A}$ et $d \in C\hat{A}$, $\in Q\hat{A}$ [d'après (i) et (ii)].

---

(3) On dit qu'un idéal premier P est associé à un idéal $\mathfrak{a}$ de A, si P est l'image réciproque dans A d'un idéal premier associé à $A/\mathfrak{a}$.

Puisque $(C\hat{A} + Q\hat{A})/Q\hat{A} = (C+Q)\hat{A}/Q = C + Q/Q$, il existe $c \in C$ tel que $c - d \in Q\hat{A}$, donc $c - d \in C\hat{A} \cap Q\hat{A} = b\hat{A}$, donc $(b, d)\hat{A} = (b, c)\hat{A}$. Mais puisque $b - d \in Z_1$ et $dZ_1 = (0)$, alors $d^2 = db$. En outre, $c - d \in b\hat{A}$, $c^2 \in b(b, c)\hat{A} \cap A = b(b, c)A$, donc c/b est entier sur A, et l'on a également $c \notin bA$, puisque $b\hat{A} \subseteq (b, d)\hat{A} = (b, c)\hat{A}$.

C. Q. F. D.

1.7. Proposition. — *Moyennant les hypothèses de* (1.6), *la clôture intégrale A' de A a un idéal maximal de hauteur* 1.

Preuve. — Il suffit de prouver que $D = A[c/b]$ a un idéal maximal de hauteur 1. Soient $\hat{D}$ le complété de D, et R la clôture intégrale de $\hat{A}$, alors

$$\hat{D} = D \otimes_A \hat{A} \subseteq S^{-1}A \otimes_A \hat{A} = S^{-1}\hat{A}$$

[où $S = A - (0)$]. Donc $\hat{D}$ est contenu dans l'anneau total des fractions T de $\hat{A}$ puisque les éléments de S ne sont pas diviseurs de 0 dans $\hat{A}$. Il est clair que $\hat{D}$ est entier sur $\hat{A}$. Donc $\hat{A} \subseteq D = \hat{A}[c/b] = \hat{A}[b/d] \subseteq R$. Soient $Q_i = P_i T \cap \hat{D}$, $1 \leq i \leq m$. Il est clair que les Q_i sont les idéaux premiers associés à $\hat{D}$ et $ht(Q_i) = ht(P_i)$. Puisque $\hat{D}$ est entier sur $\hat{A}$ et que $Q_i \cap \hat{A} = P_i$, on a $\dim(\hat{A}/P_i) = \dim(\hat{D}/Q_i)$. Soit P' un idéal maximal de $\hat{D}$ contenant Q_1. On a $d \in \bigcap_{1 \leq i \leq m} Z_i$, $d - b \in Z_1$, $d/b \in Q_i$, $2 \leq i \leq m$ et $(d/b) - 1 \in Q_1$, donc $((d/b) - 1)/1 \in Q_1\hat{D}_{P'}$, alors $(d/b)/1 \in Q_i D_{P'}$, $1 \leq i \leq m$, est inversible, ce qui implique que $Q_1 \nsubseteq P'$ pour $2 \leq i \leq m$. Donc Q_1 est le seul idéal premier associé à $\hat{D}$ contenu dans P', ce qui implique que

$$ht(P') = \dim(\hat{D}/Q_1) = \dim(\hat{A}/P_1) = 1.$$

Soit $P = P' \cap D$, alors P est un idéal maximal de D et, puisque $(D_P)^\wedge = \hat{D}_{P'}$ on voit bien que $ht(P) = 1$.

1.8. Théorème. — *Soit A un anneau local noethérien hensélien intègre. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *A est formellement équidimensionnel;*

2° *Pour tout anneau quotient intègre B de A et tout idéal premier P de B* $\dim(B) = \dim(B/P) + ht(P)$.

En particulier, tout anneau semi-local noethérien hensélien caténaire est universellement caténaire (*cf.* 1.5).

Preuve. — Nous allons raisonner par récurrence sur $n = \dim(A)$. C'est vrai pour $n \leq 1$. Supposons donc $n = \dim(A) \geq 2$, et la proposition vraie pour tout anneau de dimension $<n$. Il est clair que le 1° implique le 2° (*cf.* 1.5, 2°). Il nous reste à montrer que le 2° implique le 1°. Supposons que $\hat{A}$ ne soit pas équidimensionnel, donc il existe un idéal premier minimal Q de $\hat{A}$ tel que $\dim(\hat{A}/Q) = d < \dim(\hat{A}) = n$. Si $d = 1$, on se trouverait dans les conditions d'application de (1.6), donc d'après (1.7) l'idéal maximal de la clôture intégrale de A serait de hauteur 1, ce qui est absurde puisque $\dim(A) \geq 2$. On a donc $d > 1$. Supposons que la condition $d > 1$ implique qu'il existe un idéal premier P de A de hauteur $d-1$, tel que A/P ne soit pas formellement équidimensionnel. Alors, puisque $\dim(A/P) < \dim(A)$, cela contredirait l'hypothèse de récurrence, et achèverait de prouver que le 2° implique le 1°. Il nous reste donc à prouver la proposition suivante :

1.8.1. PROPOSITION (RATLIFF). — *Soient A un anneau semi-local noethérien, et $\hat{A}$ son complété.*

On suppose que :

1° *Pour tout idéal premier P de A,* $\dim(A) = \dim(A/P) + ht(P)$;

2° *Il existe un idéal premier minimal Q de $\hat{A}$ tel que*

$$1 < d = \dim(\hat{A}/Q) < \dim(\hat{A}) = n.$$

On définit les ensembles E_i d'idéaux premiers de A, pour $1 \leq i \leq d-1$, comme suit : $E_0 = \{0\}$, pour $i \geq 1$, E_i est défini en choisissant $P_{i-1} \in E_{i-1}$, et $E_i = E_{i-1}(P_{i-1})$ sera l'ensemble des idéaux premiers P de hauteur i de A contenant P_{i-1}, et tel que $P\hat{A}$ possède un idéal premier minimal P', tel que $Q \subseteq P'$ et $ht(P'/Q) = i = ht(P')$. Alors, pour tout $i = 1, \ldots, d-1$,

(α) *E_i est un ensemble infini;*

(β) *Pour $P \in E_i$, A/P n'est pas formellement équidimensionnel.*

Nous aurons besoin du lemme suivant pour la démonstration de (1.8.1).

1.8.2. LEMME. — *Soient A un anneau semi-local noethérien complet, et P un idéal premier de A tel que* $\dim(A/P) \geq 2$.

Soit H l'ensemble des idéaux premiers P' de A contenant P, et tels que $ht(P'/P) = 1$.

Alors H contient un ensemble infini H', tel que $H - H'$ soit fini, et tel que :

1° *Pour tout idéal premier minimal Q de A, et tout $P' \in H'$, $Q \subseteq P'$ si, et seulement si, $Q \subseteq P$;*

2° *Pour $P' \in H'$, $ht(P') = ht(P) + 1$.*

Preuve. — Soit $Q' = \bigcap_{P' \in H} P'$; supposons H fini, alors $Q' \neq P$; donc, si f est un élément ($\neq 0$) de $B = A/P$, appartenant à Q'/P, alors B_f

est un corps, donc $\dim(B) \leqq 1$, d'après le lemme d'Artin-Tate (EGA [2], chap. 0, § 16, 16.3.3), ce qui est contradictoire. Donc H est infini.

Soit Q un idéal premier minimal, non contenu dans P, et tel qu'il existe $P' \in H$ contenant Q, et soit $H(Q)$ l'ensemble des $P' \in H$ contenant Q. Supposons $H(Q)$ infini, et soit $S_Q = \bigcap_{P' \in H(Q)} (A - P')$, alors l'anneau $B(Q) = S_Q^{-1}(A/P)$ est de dimension 1. Mais puisqu'il a, par hypothèse, une infinité d'idéaux premiers, si l'on avait $\bigcap_{P' \in H(Q)} P' \neq P$, c'est-à-dire s'il existait un élément $f (\neq 0)$ appartenant à $\left(\bigcap_{P' \in H(Q)} P'\right)(S_Q^{-1}A/PS_Q^{-1}A)$, alors $(B_Q)_f$ serait un corps. Donc B_Q n'aurait qu'un nombre fini d'idéaux premiers, d'après le lemme d'Artin-Tate cité ci-dessus. Donc $H(Q)$ est fini, puisque, dans le cas contraire, on aurait $P = \bigcap_{P' \in H(Q)} P'$; et, étant donné que $QB_Q \subseteq P'B_Q$, $\forall P' \in H(Q)$, on aurait $Q \subseteq \bigcap_{P' \in H(Q)} P' = P$ en prenant les images réciproques. L'ensemble des idéaux premiers minimaux de A étant fini, la réunion H_0 des $H(Q) \neq \emptyset$ est finie, donc $H' - H_0$ est infini, puisque H est infini.

Si $P' \in H'$, alors, par construction, pour tout idéal premier minimal Q, $Q \subseteq P'$ si, et seulement si, $Q \subseteq P$, et, puisque A est caténaire, on en déduit que $ht(P') \leqq ht(P) + 1$, mais il est également évident que

$$ht(P') \geqq ht(P) + 1,$$

donc $ht(P') = ht(P) + 1$.

C. Q. F. D.

Démonstration de (1.8.1). — Si $P \in E_i$ $(0 \leqq i \leqq d-1)$, il existe par hypothèse un idéal premier minimal P' de $P\hat{A}$ tel que $Q \subseteq P'$ et

$$ht(P'/Q) = i = ht(P').$$

Puisque $(\hat{A}/Q)$ satisfait à la première condition des chaînes (1.4),

$$\dim(\hat{A}/P') = d - i < n - i = \dim(A/P).$$

donc puisque $\hat{A}/P\hat{A}$ est le complété de A/P, A/P n'est pas formellement équidimensionnel.

Soient $i \leqq d-2$, et M le radical de Jacobson de $A b \in M$, $b \notin P$ (ce qui est possible puisque P n'est pas maximal et M est intersection d'idéaux maximaux). Donc $b \notin P'$, alors il existe un idéal premier P''

dans $\hat{A}$ tel que $(b, P)\hat{A} \subseteq P''$, $P' \subseteq P''$, et tel que $ht(P''/P') = 1$. Soit H l'ensemble des idéaux premiers P'' de $\hat{A}$ tel que $P' \subseteq P''$ et $ht(P''/P) = 1$. Puisque $\dim(\hat{A}/P') = d - i \geqq 2$, H est infini (*cf.* 1.9), et H contient un ensemble infini H' tel que $H - H'$ soit fini et

$$(P'' \in H) \Rightarrow (ht(P'') = ht(P) + 1) \quad (cf.\ 1.9).$$

Soit S l'ensemble des idéaux premiers de H contenant un idéal $(b, P)\hat{A}$ avec $b \in M$, $b \notin P$, alors

$$M = \bigcup_{P'_0 \in S} (P'_0 \cap A)$$

et $M'_j \notin S$ pour tout idéal maximal M_j de $\hat{A}$ contenant P' et tel que $ht(M'_{j/P'}) = \dim(\hat{A}/P')$. Si S était fini, d'après Bourbaki ([1], chap. II, § 1, prop. 2), il existerait $P'_0 \in S$ tel que $M = P'_0 \cap A$, donc P'_0 serait un idéal maximal de A et, en plus, M serait premier, donc A serait local, ce qui serait en contradiction avec le fait que $M_j \notin S$ (puisque P'_0 serait le seul idéal maximal de $\hat{A}$). Nous allons montrer maintenant que $S' = S \cap H'$ est infini. Si $P'' \in S$ et $P'' \notin H'$, alors $P'' \in H - H'$ qui est un ensemble fini, donc S' est infini, puisque H' est infini. Si $P'' \in S'$, alors $ht(P'') = ht(P') + 1$ et $P'' \cap A \neq P$, mais puisque $P \subset P'' \cap A$ on voit que P'' est un idéal premier minimal de $(P'' \cap A)\hat{A}$, donc $P'' \cap A \in E_{i+1} = E_i(P)$. Chaque $(P'' \cap A)\hat{A}$ n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux, et S' étant infini, on en déduit que E_{i+1} est un ensemble infini. La dernière partie de la proposition étant vraie pour $i = 0$ $[P_0 = (0)$ et $P = Q]$, donc E_1 est infini.

C. Q. F. D.

1.9. Corollaire. — *Soit A un anneau noethérien semi-local hensélien. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *A satisfait à la deuxième condition des chaînes;*

2° *A satisfait à la première condition des chaînes.*

Preuve. — Il est clair que le 1° implique le 2°. Supposons maintenant que A vérifie le 2°. Si Q est un idéal premier minimal de A, $\dim(A/Q) = \dim(A)$, et A/Q est un anneau local, donc est formellement équidimensionnel d'après (1.8), donc A/Q satisfait à la deuxième condition des chaînes d'après (1.5); ceci étant vrai pour tout idéal premier minimal de A, on en déduit que A satisfait à la deuxième condition des chaînes (on peut aussi remarquer que A est formellement équidimensionnel).

1.10. THÉORÈME (NAGATA). — *Soit A un anneau noethérien intègre. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *A satisfait à la deuxième condition des chaînes;*

2° *Toute A-algèbre intègre finie B, contenant A, satisfait à la première condition des chaînes.*

Preuve. — Il est clair que le 1° implique le 2°. Supposons donc que A vérifie le 2°. Alors A lui-même satisfait à la première condition des chaînes. Il nous reste donc à montrer que, pour tout idéal maximal M de A, l'anneau local A_M satisfait à la deuxième condition des chaînes. Or il est clair que A_M vérifie la condition 2°. On est donc ramené au cas où A est local. D'après GROTHENDIECK (EGA [4], chap. IV, § 18, 18.6.4), il existe un ensemble préordonné I et, pour tout $i \in I$, une A-algèbre finie fidèlement plate B_i et un idéal maximal M_i de B_i tel que si l'on pose $A_i = (B_i)_{M_i}$, pour $i < j$, il existe un homomorphisme $\varphi_{ji} : A_i \to A_j$ faisant de A_j une A_i-algèbre fidèlement plate, et tel que $\varinjlim_i (A_i, \varphi_{ji}) = A_H$ (où A_H est le hensélisé de A).

Soit Q_i un idéal premier de B_i tel que $Q_i A_i$ soit un idéal premier minimal de A_i. Donc $Q_i \cap A = (0)$ puisque B_i est une A-algèbre fidèlement plate. Donc B_i/Q_i satisfait à la première condition des chaînes, et $\dim(B_i/Q_i) = \dim(A)$. Ceci étant vrai pour tout idéal premier minimal de A_i, on en déduit que A_i satisfait à la première condition des chaînes. Nous allons en déduire que A_H satisfait à la première condition des chaînes, ce qui achèvera la démonstration en vertu de (1.9). Soit donc $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_s$ une chaîne saturée maximale d'idéaux premiers de A_H et, pour tout $i \in I$ et tout $k = 0, \ldots, i, \ldots, s$, désignons par P_{ki} l'image réciproque dans A_i de P_k. Puisque A_H est noethérien, il existe un i tel que $P_k = P_{ki} A_H$, $\forall\, k$. Puisque A_H est une A_i-algèbre fidèlement plate, on en déduit que

$$1 = \operatorname{codim}(P_{k+1}, P_k) = \operatorname{codim}(P_{k+1,\, i}, P_{k,\, i}), \quad \forall\, k = 0, \ldots, s-1,$$

d'après GROTHENDIECK (EGA [3], chap. IV, § 6, 6.1.4). Donc $P_{0i} \subset \ldots \subset P_{si}$ est une chaîne saturée maximale de A_i, ce qui prouve que

$$s = \dim(A_i) = \dim(A),$$

puisque nous avons montré que A_i satisfait à la première condition des chaînes. Donc A_H satisfait bien à la première condition des chaînes, d'où la conclusion.

C. Q. F. D.

1.11. THÉORÈME (NAGATA-RATLIFF). — *Soit A un anneau semi-local noethérien. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *A est formellement équidimensionnel;*

2° *A satisfait à la première condition des chaînes et A est universellement caténaire;*

3° *A satisfait à la deuxième condition des chaînes.*

Preuve. — Il a été prouvé (1.5) que le 1° implique le 2°; pour montrer que le 2° implique le 3°, il suffira de la prouver quand A est intègre. Dans ce cas, d'après GROTHENDIECK (EGA [3], chap. IV, § 5, 5.6.10), toute A-algèbre finie contenant A satisfait à la première condition des chaînes, donc d'après (1.10) A satisfait à la deuxième condition des chaînes, donc le 2° implique le 3°. Supposons que A vérifie le 3°, alors d'après (1.3), le hensélisé de A_H satisfait à la deuxième condition des chaînes. Si Q est un idéal premier minimal de A_H, $\dim(A_H/Q) = \dim(A_H)$, mais puisque A_H/Q est un anneau local hensélien intègre et caténaire, il est formellement équidimensionnel (*cf.* 1.8), donc A_H est formellement équidimensionnel puisque la propriété précédente est vraie pour tout idéal premier minimal Q de A_H. Donc A est formellement équidimensionnel, puisque $\hat{A}_H = \hat{A}$.

C. Q. F. D.

Remarque. — La proposition (1.11) dans sa forme actuelle est due à RATLIFF. L'équivalence entre le 1° et le 3° avait été obtenue par NAGATA moyennant une hypothèse supplémentaire sur les fibres formelles de A (L. R. [5], p. 185). La première tentative de démonstration de l'équivalence du 1° et du 2° est de NAGATA (C. C. [7]), mais sa démonstration nous paraît incomplète.

1.11.1. COROLLAIRE. — *Soit A un anneau local noethérien intègre. Alors A est universellement caténaire si, et seulement si, toute A-algèbre intègre finie contenant A satisfait à la première condition des chaînes.*

1.11.2. COROLLAIRE. — *Soit A un anneau local noethérien unibranche. Alors A est universellement caténaire si, et seulement si, son hensélisé A_H est caténaire.*

Preuve. — Si A est universellement caténaire, il en est de même de A_H (*cf.* EGA [4], chap. IV, § 18, 18.75). Réciproquement, si A_H est caténaire, puisque A_H est unibranche, il satisfait à la première condition des chaînes. Donc, d'après (1.9) et (1.11), A_H est formellement équidimensionnel, d'où la conclusion en vertu de (1.5).

C. Q. F. D.

1.12. THÉORÈME. — *Soit A un anneau noethérien universellement caténaire, alors l'anneau des séries formelles $B = A[[T]]$ est universellement caténaire.*

Preuve. — Soient (P_i) $(i = 1, \ldots, n)$ les idéaux premiers minimaux de A. Alors si l'on pose $Q_i = P_i B$ $(i = 1, \ldots, n)$, les Q_i sont les idéaux premiers minimaux de B. Pour montrer que B est universellement caténaire, il suffira de prouver que les $B_i = B/Q_i$ sont universellement caténaires. On est donc ramené au cas où A est intègre (puisque $B_i = (A/P_i)[[T]]$). Soit M' un idéal maximal de B, et soit M, $M = M' \cap A$. Alors le complété $(B_{M'})^\wedge$ de $B_{M'}$ est isomorphe à $(A_M)^\wedge[[T]]$ [où $(A_M)^\wedge$ est le complété de A_M]. Soient $(Q'_j)_{j \in J}$ les idéaux premiers minimaux de $(A_M)^\wedge$, alors les idéaux $Q'_j(B_{M'})^\wedge$ sont les idéaux premiers minimaux de $(B_{M'})^\wedge$, et

$$\begin{aligned}\dim(B_{M'}/Q'_j B_{M'}) &= \dim(((A_M)^\wedge/Q'_j)[[T]]) \\ &= \dim((A_M)^\wedge/Q'_j) + 1 = \dim(A_M)^\wedge + 1,\end{aligned}$$

puisque A_M est formellement équidimensionnel d'après (1.11). Donc $B_{M'}$ est formellement équidimensionnel, donc $B_{M'}$ est universellement caténaire. Ceci étant vrai pour tout idéal maximal M' de B, on en déduit que B est universellement caténaire.

C. Q. F. D.

1.13. Théorème. — *Soit A un anneau noethérien qui satisfait à la deuxième condition des chaînes. Alors l'anneau des séries formelles $B = A[[T]]$ satisfait à la deuxième condition des chaînes.*

Preuve. — D'après (1.12), B est universellement caténaire. Il suffira donc de prouver que tous les idéaux maximaux de B ont même hauteur dans le cas où A est intègre (puisque les quotients de B par ses idéaux premiers minimaux sont les anneaux $A_i[[T]]$ où les A_i sont les quotients de A par ses idéaux premiers minimaux compte tenu de ce que $\dim(A_i) = \dim(A)$ et $\dim(B_i) = \dim(A_i) + 1$). Soit M' un idéal maximal de B, alors $M = M' \cap A$ en un idéal maximal de A, et

$$\begin{aligned}ht(M') = \dim(B_{M'}) &\geqq ht(MA[[T]]) + \dim((A/M)[[T]]) \\ &\geqq ht(M) + 1 = \dim(B)\end{aligned}$$

[puisque $ht(M) = \dim A$ et $\dim(B) = \dim(A) + 1$]. Donc $ht(M') = \dim B$ d'où la conclusion.

C. Q. F. D.

1.14. Théorème. — *Soit A un anneau de Jacobson noethérien qui satisfait à la deuxième condition des chaînes, alors l'anneau des polynômes $B = A[T]$ satisfait à la deuxième condition des chaînes.*

Preuve. — Il est clair que B est universellement caténaire. Pour les mêmes raisons que dans la démonstration de (1.13), il suffira de prouver que, si A est intègre, tous les idéaux maximaux de B ont même hauteur.

Soit M' un idéal maximal de A. Puisque A est un anneau de Jacobson [4], $M = M' \cap A$ est un idéal maximal de A. Donc

$$\begin{aligned}\dim(B_{M'}) = ht(M') &\geq ht(MA[T]) + \dim((A/M)[T]) \\ &= ht(M) + 1 = \dim(A) + 1 = \dim(B),\end{aligned}$$

ce qui implique que $ht(M') = \dim(B)$.

C. Q. F. D.

Remarque. — (1.14) peut être en défaut si A n'est pas un anneau de Jacobson. Par exemple, supposons que A soit un anneau de valuation discrète, soit π une uniformisante de A, et soit K le corps des fractions de A. Alors

$$K = A\left[\frac{1}{\pi}\right] = A[T]/(\pi T - 1)A[T].$$

Donc $M = (\pi T - 1)A[T]$ est un idéal maximal, et M est de hauteur 1, d'après le Hauptidealsatz de Krull (EGA [2], chap. 0, § 16, 16.3.2). Or A satisfait à la deuxième condition des chaînes et $\dim A[T] = 2$, donc A est un contre-exemple à (1.14).

1.15. PROPOSITION. — *Soit A un anneau semi-local noethérien. Alors A satisfait à la deuxième condition des chaînes si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :*

1° *Pour tout idéal premier P de A et tout idéal maximal M contenant P,*

$$\dim(A_M) = \dim(A_M/PA_M) + ht(PA_M);$$

2° *Pour tout idéal premier P de hauteur 1 de A, A/P est formellement équidimensionnel;*

3° *Pour tout idéal premier minimal Q de A, tout idéal maximal de la clôture intégrale de A/Q est de hauteur égale à* $\dim(A)$.

Preuve. — Les conditions précédentes sont évidemment nécessaires. Pour montrer qu'elles sont suffisantes, on peut supposer A intègre et $\dim(A) \geq 2$. D'après (1.11), il nous suffit de montrer que, moyennant ces conditions, le complété A de A est équidimensionnel. Supposons le contraire. Dans ce cas, il existerait un idéal maximal M de A tel que l'anneau local $A_M = B$ ne soit pas formellement équidimensionnel. Il existerait donc un idéal premier minimal Q_0 de $\hat{B}$ tel que

$$d = \dim(\hat{B}/Q) < \dim(\hat{B}).$$

---

(4) On dit qu'un anneau A est un anneau de Jacobson si, pour tout A-algèbre de type fini B, l'image réciproque de tout idéal maximal de B est un idéal maximal de A. En particulier, toute A-algèbre de type fini est un anneau de Jacobson.

Si $d = 1$, on se trouverait dans les conditions d'application de (1.6), donc, d'après (1.7), un des idéaux maximaux de la clôture intégrale de B serait de hauteur 1, donc un idéal maximal de la clôture intégrale de A serait de hauteur 1, ce qui contredit le 3° puisque l'on a supposé $\dim(A) \geqq 2$. Donc $d > 1$, et dans ce cas compte tenu du 1°, il existerait un idéal premier de hauteur $d - 1$ de B tel que B/P ne soit pas formellement équidimensionnel, d'après (1.8.1).

Soit $P_0 = P \cap A$, puisque B/P est isomorphe à $(A/P_0)M/P_0$, A/P_0 n'est pas formellement équidimensionnel d'après (1.5). Mais

$$ht(P_0) = ht(P) = d - 1 > 1,$$

donc A/P_0 est isomorphe à un quotient d'un anneau quotient A/Q de A, où Q est un idéal premier de hauteur 1 de A, donc d'après l'hypothèse 2° et (1.5), A/P_0 est formellement équidimensionnel, d'où une contradiction. Donc $\hat{A}$ est équidimensionnel.

C. Q. F. D.

1.16. Théorème (*Lemme de Hironaka*). — *Soient A un anneau noethérien intègre, A' la clôture intégrale de A, et a ($\neq 0$) un élément appartenant au radical de Jacobson de A. On suppose que :*

1° *aA a un seul idéal premier minimal P;*

2° *$aA_P = PA_P$;*

3° *A/P est intégralement clos;*

4° *A' est une A-algèbre finie. Alors A est intégralement clos, et $P = aA$.*

Preuve. — Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des idéaux maximaux de A. Alors, pour tout $M \in \mathfrak{M}$, l'anneau local A_M vérifie les conditions 1°...4°, avec $a/1$ et PA_M. Or pour montrer que A est intégralement clos et $P = aA$, il suffira de montrer que A_M est intégralement clos et $aA_M = PA_M$, $\forall\, M \in \mathfrak{M}$. Donc on est ramené au cas où A est un anneau local. Nous allons raisonner par récurrence sur $n = \dim(A)$ (en supposant A local). On a nécessairement $n \geqq 1$. Si $n = 1$, alors $A = A_P$ et, dans ce cas, la proposition est triviale. Supposons donc $n \geqq 2$. Nous allons d'abord montrer que, pour tout idéal premier minimal P' de aA', $P' \cap A = P$. Soit B le hensélisé de A, et soit B' le hensélisé de A'. Alors on sait que B' est la clôture intégrale de B, et B' est une B-algèbre finie. Puisque B/PB est le hensélisé de A/P, alors B/PB est un anneau local normal. Donc $P_1 = PB$ est un idéal premier, et $P_1 B_{P_1} = aB_{P_1}$, donc puisque a n'est pas diviseur de 0 dans B, B_{P_1} est un anneau de valuation discrète. On voit donc que P_1 ne contient qu'un seul idéal premier minimal Q_1 de B; soient alors $Q_2, \ldots, Q_r$ les autres idéaux premiers minimaux de B, et

$$B_i = B/Q_i (i = 1, \ldots, r).$$

Puisque B est réduit, alors

$$B' = \prod_{1 \leq i \leq r} B'_i,$$

où B'_i est la clôture intégrale de B_i. Si $J_1 = P_1 B_1$, alors $B_1 J_1 = B_{P_1}$ et $B_1/J_1 = B/P_1$, et B'_1 est une B_1-algèbre finie. Donc B_1 vérifie les conditions du théorème avec a et J_1. Soit J'_1 un idéal premier minimal de aB'_1, alors $ht(J_1) = 1$ d'après le Hauptidealsatz de Krull (EGA [2], chap. 0, § 16, 16.3.2). Puisque l'on $aQ_1 \subseteq P_1$, qui n'est pas un idéal maximal, parce que

$$\dim(B) = \dim(A) \geqq 2 \qquad \text{et} \qquad ht(P_1) = ht(P) = 1$$

d'après Nagata (L. R. [5], 22.9, p. 75), on en déduit que $\dim B_1 \geqq 2$, donc $\dim(B'_1) \geqq 2$, et on montre que J'_1 n'est pas l'idéal maximal de B_1 (remarquer que B'_1 est local puisque B_1 est hensélien). Donc $I_1 = J'_1 \cap B_1$ n'est pas l'idéal maximal de B_1. Soit $S = B_1 - I_1$, alors $S^{-1}B'_1$ est la clôture intégrale de $(B_1)_{I_1}$, et $\dim(B_1)_{I_1} < \dim(B_1)$. Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à $(B_1)_{I_1}$, a et $J_1(B)_{I_1}$, on voit que $(B_1)_{I_1} = S^{-1}B'_1$, donc $ht(I_1) = ht(J'_1) = 1$, on en déduit donc que $I_1 = J_1$. Soit donc P' un idéal premier minimal de aA', et P'_1 un idéal premier minimal de $P'B'$, alors $ht(P') = ht(P'_1) = 1$ (*cf.* EGA [2], chap. 0, § 16, 16.3.2, et L. R. [5], 22.9, p. 75). Puisque $P'_1 \cap A$ est un idéal premier contenant P, alors

$$P'_1 = J'_1 \times B'_2 \times \ldots \times B'_r,$$

où J'_1 est un idéal premier minimal de aB'_1. Donc, d'après ce qui a été vu, $J'_1 \cap B_1 = J_1$, donc

$$P' \cap A = P'_1 \cap A = J_1 \cap A = P.$$

Nous avons donc montré que tout idéal premier minimal P' de aA' est au-dessus de P. Puisque A_P est intégralement clos, donc sa clôture intégrale $S^{-1}A'$ ($S = A - P$) est un anneau local. Ce qui montre qu'il n'existe qu'un seul idéal premier P' de A' au-dessus de P qui est nécessairement l'unique idéal premier minimal de aA' et $A_P = A'_{P'}$, donc $aA'_{P'} = P'A'_{P'}$. Puisque A' est un anneau intégralement clos, P' est associé à aA, donc

$$aA' = aA'_{P'} \cap A' = P'A'_{P'} \cap A' = P'.$$

Or $A/P \subseteq A'/P' \subseteq A_P/PA_P = K$, et, K étant le corps de fractions de A/P, on voit donc que $A/P = A'/P'$ puisque A'/P' est entier sur A/P. Donc $A' = P' + A = aA' + A$. Donc $A = A'$ d'après le lemme de Nakayama, alors $P = P' = aA$. Ce qui achève la démonstration.

C. Q. F. D.

Remarque. — (1.16) sous la forme où il est formulé ici est à peu de chose près celui de NAGATA (L. R. [5], 36.9, p. 134) qui suppose cependant en plus que, pour tout idéal premier minimal P' de aA', $P' \cap A = P$.

1.16.1. COROLLAIRE. — *Soit A un anneau noethérien intègre, et soit $a (\neq 0)$ un élément appartenant au radical de Jacobson de A.*

Si A/aA est intègre et intégralement clos, alors A est intégralement clos.

Nous allons d'abord démontrer le lemme suivant :

1.16.2. LEMME. — *Soit A un anneau, et a un élément de A, qui n'est pas diviseur de o et tel que $aA = P$ soit un idéal premier. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, $a^n A$ est l'image réciproque dans A de $a^n A_P$.*

Preuve. — En effet, supposons que $b \in A$ soit un élément tel que $b/1 = a^n x/s$ dans A_P, où $x \in A$ et $s \notin P$, il existe donc $s' \notin P$ tel que $ss'b = xa^n s'$, d'où $s'sb \in P$, et comme $ss' \notin P$, cela entraîne que $b \in P$, autrement dit $b = ab'$ avec $b' \in A$; puisque a est non diviseur de o, on en conclut $s'sb = a^{n-1}xs'$, et il suffit de raisonner par récurrence sur n.

C. Q. F. D.

Preuve de 1.16.1. — Soit $P = aA$, et soit B le complété de A pour la topologie P-adique. D'après (1.16.2), cette topologie est induite par la topologie P-adique de A_P, donc $B \subseteq (A_P)^\wedge$, donc B est intègre. B est aussi un anneau noethérien et une A-algèbre fidèlement plate. Donc, pour montrer que A est intégralement clos, il suffira de prouver que B est intégralement clos. Or $B/aB = A/aA$, donc on est ramené au cas où A est séparé et complet pour la topologie P-adique. Soient alors A' la clôture intégrale de A, et P' un idéal premier minimal de aA'. D'après NAGATA (L. R. [5], 33.11, p. 120), $P'A$ est un idéal premier associé à P, donc $P'A = P$, et puisque A_P est intégralement clos, on voit que P' est unique. Donc P' est un idéal premier associé à aA' d'après NAGATA (L. R. [5], 33.10, p. 118, et 33.3, p. 115). On en conclut

$$aA' = aA'P' \cap A' = P'A'_{P'} \cap A' = P',$$

et puisque A'/P' est entier sur A/P et est contenu dans le corps des fractions $K = A_P/PA_P$ de A/P, on en déduit que $A'/P' = A'/aA' = A/aA$ et puisque la topologie P'-adique de A' est induite par celle de $A'_{P'} = A_P$ (*cf.* 1.16.2), A' est séparé pour la topologie P$'$-adique. Donc d'après le lemme de Chevalley (L. R. [5], 30.6, p. 105), A' est une A-algèbre finie, d'où la conclusion en vertu du lemme de Hironaka.

C. Q. F. D.

1.16.3. Corollaire. — *Soient A un anneau noethérien intègre et caténaire, et $a_1, \ldots, a_r$ des éléments appartenant au radical de Jacobson de A. On suppose que :*

1° $\sum_{1 \leq i \leq r} a_i A$ *a un seul idéal premier minimal P;*

2° $ht\left(\sum_{1 \leq i \leq r} a_i A\right) = r$;

3° $\sum_{1 \leq i \leq r} a_i A_P = P A_P$;

4° *A/P est intégralement clos;*

5° *Pour tout idéal premier P' contenu dans P, la clôture intégrale de $B = A/P'$ est une B-algèbre finie. Alors*

(*a*) *A est intégralement clos, et* $P = \sum_{1 \leq i \leq r} a_i A$;

(*b*) *Pour tout entier i : $1 \leq i \leq r$, l'anneau* $A_i = A \Big/ \left(\sum_{1 \leq j \leq i} a_i A\right)$ *est intègre et intégralement clos, et* $\dim(A_i) = \dim(A) - i$.

Preuve. — Nous allons raisonner par récurrence sur r. Si $r = 1$, la proposition découle du lemme de Hironaka (1.16) et du fait que A est caténaire. Supposons $r > 1$. Soient Q un idéal premier minimal de $a_1 A$, et I un idéal premier minimal de $Q + \sum_{1 \leq i \leq r} a_i A$. Donc $ht(I/Q) \leq r - 1$, d'après le Primidealsatz de Krull (EGA [2], chap. 0, § 16, 16.3.1), on en conclut $ht(I) \leq r$ puisque A est caténaire, et $ht(Q) = 1$ d'après le Hauptidealsatz de Krull (EGA [2], chap. 0, § 16, 16.3.2). Ce qui implique que $I = P$, donc $Q \subseteq P$. Mais les a_i formant un système régulier de paramètres de A_P, on en déduit que Q est l'image réciproque dans A de $a_1 A_P$, donc $QA_Q = a_1 A_Q$, et Q est le seul idéal premier minimal de $a_1 A$. Posons $B = A/Q$, alors $\dim(B) = \dim(A) - 1$ puisque Q est contenu dans tout idéal maximal de A, $ht(Q) = 1$, et A est caténaire. En appliquant l'hypothèse de récurrence à B avec les éléments $a'_i = a_i \operatorname{mod}(Q)$ $(2 \leq i \leq r)$, on en conclut que B est intégralement clos,

$$P/Q = \left(Q + \sum_{1 \leq i \leq r} a_i A\right) \Big/ Q,$$

et $B_1 = B \Big/ \left(\sum_{2 \leq j \leq i} a'_j B\right)$ est un anneau intègre et intégralement clos, et

$$\dim(B_i) = \dim(B) - (i - 1) = \dim(A) - i.$$

Donc en appliquant le cas $r = 1$ à A et a_1, on en conclut que A est intégralement clos, et $Q = a_1 A$, donc $P = \sum_{1 \leq i \leq r} a_i A$, et $B_i = A_i$ pour $2 \leq i \leq r$ et $B = A_1$, d'où la conclusion.

C. Q. F. D.

Remarque. — (1.16.3) est généralement démontré en supposant A universellement caténaire (L. R. [5], 36.10, p. 135, ou EGA [3], chap. IV, § 5, 5.12.10). Il serait intéressant de savoir si l'on ne peut pas se passer de l'hypothèse sur les chaînes d'idéaux premiers dans A, ce qui est possible si $r = 1$, d'après notre généralisation du lemme de Hironaka (1.16).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative.* Chap. 1 et 2. — Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1290; *Bourbaki*, 27).

[2] Grothendieck (A.) et Dieudonné (J.). — *Éléments de géométrie algébrique* [cité : EGA]. Chap. IV : *Étude locale des schémas*..., 1re partie. — Paris, Presses universitaires de France, 1964 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 20).

[3] Grothendieck (A.) et Dieudonné (J.). — *Éléments de géométrie algébrique* [cité : EGA]. Chap. IV : *Étude locale des schémas*..., 2e partie. — Paris, Presses universitaires de France, 1965 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 24).

[4] Grothendieck (A.) et Dieudonné (J.). — *Éléments de géométrie algébrique* [cité : EGA]. Chap. IV : *Étude locale des schémas*..., 4e partie. — Paris, Presses universitaires de France, 1967 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 32).

[5] Nagata (Masayoshi). — *Local rings* [cité : L. R.]. — New York, Interscience Publishers, 1962 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 13).

[6] Nagata (Masoyoshi). — On the chain problem of prime ideals, *Nagoya math. J.*, t. 10, 1956, p. 51-64.

[7] Nagata (Masayoshi). — Note on a chain condition of prime ideals, *Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto*, Series A, t. 32, 1960, p. 85-90.

[8] Ratliff (Louis J.). — On quasi-unmixed semi-local rings and the altitude formula, *Amer. J. of Math.*, t. 87, 1965, p. 278-284.

[9] Ratliff (Louis J.). — On quasi-unmixed domains, the altitude formula and the chain condition for prime ideals, I and II (à paraître).

[10] Zariski (O.) and Samuel (P.). — *Commutative algebra*, vol. 2. — Princeton, New York, D. Van Nostrand Company, 1960 (*The University Series of higher Mathematics*).

(Texte reçu le 4 juillet 1969.)

Hamet Seydi,
41 rue Gros,
75-Paris 16e