

# BULLETIN DE LA S. M. F.

S. DELACHE

## **Les solutions élémentaires hyperboliques d'opérateurs de Tricomi-Clairaut**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 97 (1969), p. 5-79

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1969\\_\\_97\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1969__97__5_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LES SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES HYPERBOLIQUES D'OPÉRATEURS DE TRICOMI-CLAIRAUT

PAR

SOLANGE DELACHE (\*).

---

### Table des matières.

	Pages.
<b>Introduction</b> .....	6
<b>CHAP. I : Les opérateurs strictement hyperboliques et leurs solutions élémentaires (rappels et compléments).</b>	
1. Opérateurs strictement hyperboliques .....	7
2. Noyaux élémentaires. Solutions élémentaires .....	11
3. Une méthode pour calculer les solutions élémentaires d'un opérateur strictement hyperbolique .....	14
4. Une construction de cycles dans l'espace projectif complexe .....	17
<b>CHAP. II : Les opérateurs de Tricomi-Clairaut. Propriétés. Calcul, pour <math>x</math> voisin de <math>y</math>, des solutions élémentaires <math>E(x, y)</math> de certains de ces opérateurs.</b>	
1. Définition. Propriétés de l'ensemble des opérateurs de Tricomi-Clairaut ...	21
2. Propriétés géométriques des opérateurs de Tricomi-Clairaut .....	23
3. Calcul des dérivées d'ordre $m - l$ en $x$ ( $m \geq l$ ) des solutions élémentaires $E(x, y)$ d'opérateurs de Tricomi-Clairaut, pour $x$ voisin de $y$ .....	26
4. Calcul des solutions élémentaires ( $x$ voisin de $y$ , $m \geq l$ ) .....	31
<b>CHAP. III : Propriétés des solutions élémentaires d'opérateurs de Tricomi-Clairaut. Prolongement analytique de ces solutions élémentaires.</b>	
1. Propriétés des solutions élémentaires .....	35
2. Prolongement analytique, si $\alpha$ est un entier $n$ .....	44
3. Transformation des intégrales en vue de leur prolongement analytique, si $\alpha$ n'est pas un entier ( $m \geq l$ ) .....	49
4. Prolongement analytique, si $\alpha = n - \frac{1}{2}$ , $l$ pair .....	56
5. Prolongement analytique, si $\alpha = n - \frac{1}{2}$ , $l$ impair .....	70
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	78

---

(\*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1968.

### Introduction.

L'objet de ce travail est d'expliciter les solutions élémentaires de certains opérateurs différentiels linéaires, strictement hyperboliques, à coefficients variables, et de décrire leur prolongement analytique.

Ces opérateurs appartiennent au type général de Tricomi : les coefficients principaux sont affines, les coefficients sous-principaux sont constants, les autres coefficients sont nuls. Ils sont entièrement caractérisés, s'ils sont auto-adjoints, par leur partie principale  $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ , et s'écrivent :

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = k_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[ \sum_{j=1}^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \right] k_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \alpha = \frac{l+m-1}{2},$$

$k_m(\xi)$ ,  $k_{m-1}(\xi)$  sont des polynômes homogènes, de degré  $m$  et  $m-1$ , à coefficients réels constants. Nous étudierons le cas un peu plus général où  $\alpha$  est un entier ou un demi entier.

L'équation des surfaces caractéristiques est du type de Clairaut : ces surfaces sont donc des hyperplans ou des enveloppes de ces hyperplans. Le conoïde caractéristique  $K(y)$  est confondu avec le cône bicaractéristique  $C(y)$ , comme pour les opérateurs à coefficients constants.

La méthode utilisée pour calculer la solution élémentaire  $E(x, y)$  est rappelée au chapitre I, 3. On en déduit une formule très simple pour  $E(x, y)$ , si  $m \geq l$  et  $|x-y|$  petit [formule (II.38) de la proposition 7].

La formule (II.38) permet de montrer des relations de récurrence [voir (III.12) et (III.12<sub>1</sub>)], utiles pour le prolongement analytique.

Notons  $\Sigma$  l'ensemble des  $x \in \mathbf{R}^l$  tels que la variété  $G^*(x)$  [ $g(x, \eta) = 0$ ], ait un point singulier réel, puis  $\Omega$  une composante connexe de  $\mathbf{R}^l - \Sigma$ , où l'opérateur est strictement hyperbolique (théorème 1).

Si  $\alpha$  est un entier  $n$ , à partir de (II.38), particulièrement simple dans ce cas, on montre que  $E(x, y)$  coïncide pour  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$  [ $\mathcal{E}^+(y)$  émission de  $y$ ] avec une fonction de  $(x, y)$  prolongeable analytiquement dans un ouvert de  $\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l$ , variant avec les positions relatives de  $l, n, m$  (voir proposition 10 et tableau final).

Si  $\alpha$  est un demi-entier,  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ , on transforme l'intégrale (II.38) en la somme de deux intégrales, si  $l$  est pair (proposition 12), en une autre intégrale, si  $l$  est impair (proposition 13). Ces intégrales ne se prêtant pas encore à l'étude du prolongement analytique, on les transforme à nouveau en introduisant deux variables d'intégration supplémentaires [formules (III.43), (III.57), (III.58)]. Le résultat obtenu est le suivant

(voir propositions 14 et 15, et tableau final) :  $E(x, y)$  coïncide pour  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$  avec une fonction de  $(x, y)$  prolongeable analytiquement là où le segment  $[xy]$  est contenu dans  $\Omega$  et  $x \notin K(y)$ , (avec toutefois une réserve si  $l$  est impair).

Nous obtenons même, dans certains cas, la nature des singularités du prolongement sur  $\Sigma$  (voir tableau final).

## CHAPITRE I,

### Les opérateurs strictement hyperboliques et leurs solutions élémentaires (rappels et compléments).

#### 1. Opérateurs strictement hyperboliques.

1° *Hyperbolicité. Domaine d'hyperbolicité.* — Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}'$ , de coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$ ,  $\Xi^l$  l'espace vectoriel sur  $\mathbf{C}$  des formes linéaires complexes sur  $\mathbf{R}'$ , de coordonnées  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l)$ ,  $\Xi^{*,l-1}$  l'espace projectif complexe quotient de  $(\Xi^l - 0)$  par le groupe de ses homothéties de centre  $O$ .

Soit  $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  un opérateur différentiel dans  $\Omega$ , linéaire, d'ordre  $m$  exactement en tout point de  $\Omega$ , dont la partie principale  $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  est à coefficients réels. Au polynôme caractéristique  $g(x, \xi)$ , on associe le cône caractéristique  $G(x)$  de  $\Xi^l$  d'équation

$$g(x, \xi) = 0,$$

et la variété algébrique projective  $G^*(x)$ .

Rappelons la définition d'un opérateur strictement hyperbolique (voir [7], p. 132 à 137).

DÉFINITION 1. —  $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  est strictement hyperbolique au point  $x \in \Omega$  s'il existe  $N \in \text{Re } \Xi^l$ , non nul, ayant la propriété  $P_x : \forall \xi \in \text{Re } \Xi^l$ , non parallèle à  $N$ , le polynôme en  $\tau$ ,  $g(x, \xi + \tau N)$  a  $m$  racines réelles et distinctes.

La variété  $G^*(x)$  est alors sans singularité réelle. On montre que si  $G^*(x)$  est sans singularité réelle, une condition suffisante pour que l'opérateur soit strictement hyperbolique au point  $x$  est qu'il existe  $N \in \text{Re } \Xi^l$ , non nul, ayant la propriété  $P'_x : g(x, N) \neq 0$  et  $\forall \xi \in \text{Re } \Xi^l$ , non parallèle à  $N$ , le polynôme en  $\tau$ ,  $g(x, \xi + \tau N)$ , a toutes ses racines réelles.

Supposons l'opérateur strictement hyperbolique au point  $x$  et notons  $\Delta(x)$  l'ensemble des vecteurs  $N$  non nuls de  $\text{Re } \Xi'$  ayant la propriété  $P_x$ , et  $\Delta^*(x)$  son image projective. On montre que  $\Delta(x)$  est la réunion de deux cônes convexes ouverts, privés de leur sommet  $O$  et symétriques par rapport à  $O$ ; sa frontière est une nappe de  $G(x)$  appelée nappe interne;  $\Delta^*(x)$  est donc un ouvert convexe de  $\text{Re } \Xi^{*,l-1}$  et sa frontière est la nappe interne de  $G^*(x)$ .

**THÉORÈME 1.** — *Supposons  $\Omega$  connexe,  $G^*(x)$  sans singularité réelle  $\forall x \in \Omega$ , les coefficients de la partie principale de l'opérateur continus dans  $\Omega$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{X}$  des points de  $\Omega$  où l'opérateur est strictement hyperbolique, s'il n'est pas vide, coïncide avec  $\Omega$ .*

Prouvons que  $\mathcal{X}$  est ouvert et fermé dans  $\Omega$ . Nous utiliserons le lemme suivant :

**LEMME 1.** — *Sous les hypothèses du théorème 1, la variété  $\text{Re } G^*(x)$  reste homéomorphe à elle-même quand  $x$  décrit  $\Omega$ .*

Pour démontrer ce lemme, utilisons des hypothèses différentes, puis ramenons-nous à ces hypothèses. Indiquons la méthode.

(a) Soient  $\Omega^*$  et  $S$  deux variétés  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ ,  $\Omega^*$  étant connexe,  $S$  étant compacte. Soit  $f = f(p, \eta)$  une application  $C^\infty$  de  $\Omega^* \times S$  dans  $\mathbf{R}$  telle que, pour chaque  $p$  fixé  $\in \Omega^*$ , la différentielle par rapport à  $\eta$ ,  $d_\eta f$ , soit non nulle. Notons alors :

- $V \subset \Omega^* \times S$ , la variété  $C^\infty$  d'équation  $f(p, \eta) = 0$ ;
- $V_p \subset S$ , la variété  $C^\infty$  d'équation  $f(p, \eta) = 0$ ,  $p$  fixé;
- $\pi$ , la projection de  $V$  sur  $\Omega^*$ ,  $\pi(p, \eta) = p$ .

Les hypothèses :  $S$  compacte et  $d_\eta f \neq 0$ ,  $\forall p \in \Omega^*$ , entraînent que  $\pi$  est une submersion propre de  $V$  sur  $\Omega^*$ . Ceci, joint au fait que  $\Omega^*$  est connexe, entraîne :  $\forall p, p' \in \Omega^*$ ,  $V_p$  et  $V_{p'}$  sont difféomorphes. En effet, on le démontre au voisinage de tout point de  $\Omega^*$  en relevant un champ de vecteurs de  $\Omega^*$ , dans  $V$  (voir par exemple [14]); puis globalement dans  $\Omega^*$  en utilisant la relation d'équivalence, dont les classes sont ouvertes :  $p$  équivalent à  $p'$  équivaut à  $V_p$  difféomorphe à  $V_{p'}$ .

(b) Prenons maintenant les hypothèses du théorème 1.  $S$  désigne alors la sphère unité de  $\mathbf{R}^l$ . Considérons l'application continue  $P$  de  $\Omega$  dans la variété des polynômes en  $\eta$  de degré  $\leq m$ , à coefficients réels, qui à  $x \in \Omega$  fait correspondre le polynôme  $g(x, \eta)$ . Notons  $\Omega^*$  l'image connexe  $P(\Omega)$  et définissons  $f(\Omega^* \times S \rightarrow \mathbf{R})$  par

$$f(p, \eta) = g(x, \eta), \quad \text{où } x \in P^{-1}(p);$$

alors  $V_p \subset S$  coïncide avec  $\text{Re } G^*(x)$  [où  $x \in P^{-1}(p)$ ]. De (a), on déduit que  $V_p$  et  $V_{p'}$  sont difféomorphes,  $\forall p, p' \in \Omega^*$ ; il en est donc de même pour  $\text{Re } G^*(x)$  et  $\text{Re } G^*(x')$ ,  $\forall x, x' \in \Omega$ .

$\mathcal{X}$  est ouvert. — Notons, pour  $N$  non nul  $\in \text{Re } \Xi'$  :

$$\mathcal{X}_N = \{ x \in \Omega \mid N^* \in \Delta^*(x) \}.$$

Comme  $\mathcal{X} = \bigcup_N \mathcal{X}_N$ , il nous suffit de montrer que chaque  $\mathcal{X}_N$  est ouvert.

Soit donc  $y \in \mathcal{X}_N$  et montrons que, pour  $x$  voisin de  $y$ ,  $N$  possède la propriété  $P'_x$ . Tout d'abord comme  $g(y, N) \neq 0$ , on a aussi  $g(x, N) \neq 0$  pour  $x$  voisin de  $y$ .

Considérons un hyperplan  $\Pi$  de  $\text{Re } \Xi'$  passant par  $O$  ne contenant pas  $N$  et montrons que, pour  $x$  voisin de  $y$ , et pour tout  $\xi \in \Pi \cap S$  ( $S$ , sphère unité de  $\text{Re } \Xi'$ ), le polynôme en  $\tau$ ,  $g(x, \xi + \tau N)$  a toutes ses racines réelles. En effet, il existerait sinon, dans  $\Omega$  une suite  $x_n$  de points tendant vers  $y$ , et dans  $\Pi \cap S$  une suite  $\xi_n$ , telles que le polynôme en  $\tau$ ,  $g(x_n, \xi_n + \tau N)$  n'ait pas toutes ses racines réelles. De la suite  $\xi_n$ , on peut extraire une suite convergant vers  $\xi$ .

En reprenant les mêmes notations pour les deux suites extraites correspondantes, on obtient ceci : le polynôme  $g(x_n, \xi_n + \tau N)$  tend vers le polynôme  $g(y, \xi + \tau N)$  qui, lui, a toutes ses racines réelles et distinctes, ce qui est absurde.

Considérons maintenant  $\xi \in \text{Re } \Xi'$  non parallèle à  $N$ , et décomposons-le sur  $\Pi \cap S$  et  $N$ .

$$\xi = aN + b\xi_1, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad b \neq 0, \quad \xi_1 \in \Pi \cap S.$$

Comme on a

$$g(x, \xi + \tau N) = b^m g\left(x, \xi_1 + \frac{a + \tau}{b} N\right),$$

le polynôme en  $\tau$ ,  $g(x, \xi + \tau N)$ , a aussi toutes ses racines réelles pour  $x$  voisin de  $y$ ,

C. Q. F. D.

$\mathcal{X}$  est fermé dans  $\Omega$ . — Utilisons ici le lemme 1. Comme  $\text{Re } G^*(x)$  reste homéomorphe à elle-même quand  $x$  décrit  $\Omega$ , on peut définir sa nappe interne,  $\forall x \in \Omega$ . Notons  $\Delta^*(x)$  celui des deux ouverts de  $\text{Re } \Xi^{s, l-1}$  qui a pour frontière cette nappe interne et qui ne contient aucun point de  $\text{Re } G^*(x)$ .

Soit maintenant  $x \in \bar{\mathcal{X}}$ ,  $\Delta^*(x)$ , défini comme ci-dessus, et  $N \in \Delta^*(x)$ . Il existe donc une suite  $x_n$  de points de  $\mathcal{X}$  tendant vers  $x$ , une suite  $N_n$  de points de  $\text{Re } \Xi'$ ,  $N_n \in \Delta^*(x_n)$ , tendant vers  $N$ . Pour tout  $n$ ,  $N_n$  a la propriété  $P'_{x_n}$ , donc  $N$  a la propriété  $P'_x$  et  $x \in \mathcal{X}$ .

C. Q. F. D.

2° Emission d'un opérateur strictement hyperbolique. — Voici quelques définitions classiques (voir [11]), et utiles pour la suite. Nous supposons ceci : les coefficients de l'opérateur  $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  sont analytiques dans  $\Omega$ ,

$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  est hyperbolique strict en tout point de  $\Omega$ , les deux cônes  $\Delta^+(x)$  et  $\Delta^-(x)$  de  $\text{Re } \Xi'$  [dont l'image dans  $\text{Re } \Xi^{*, l-1}$  est  $\Delta^*(x)$ ], d'adhérence  $\Gamma^+(x)$  et  $\Gamma^-(x)$ , peuvent être choisis variant l'un et l'autre continûment avec  $x \in \Omega$ .

On peut définir, en tout point  $x \in \Omega$ , le cône bicaractéristique  $C(x)$ , dual du cône caractéristique réel  $\text{Re } G(x)$ . Ses génératrices sont les droites  $D(\xi)$  de  $\mathbf{R}'$  [ $\xi$  fixé  $\in \text{Re } G(x)$ ] :

$$D(\xi) = \{x' \in \mathbf{R}' \mid x'_j = x_j + \lambda g_{\xi_j}(x, \xi), \lambda \in \mathbf{R}, j = 1, \dots, l\}.$$

Sa nappe externe est celle qui est duale de la nappe interne de  $\text{Re } G(x)$ .

Le cône d'émission  $\omega^+(x)$ , de frontière  $C^+(x)$ , est, par définition, le cône convexe fermé dual de  $\Gamma^+(x)$ , c'est-à-dire l'ensemble des points  $x' \in \mathbf{R}'$  tels que

$$(x' - x) \cdot \xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \Gamma^+(x).$$

Les surfaces caractéristiques de l'opérateur, d'équation  $s(x) = 0$ , sont obtenues en résolvant l'équation de Jacobi :

$$g\left(x, \frac{\partial s}{\partial x}\right) = 0.$$

Une bande bicaractéristique est le lieu du point  $(x(t), \xi(t)) \in \Omega \times \text{Re } \Xi'$  tel que

$$\frac{dx_j}{dt} = g_{\xi_j}(x, \xi); \quad \frac{d\xi_j}{dt} = -g_{x_j}(x, \xi); \quad g(x, \xi) = 0 \quad (j = 1, \dots, l).$$

Une courbe bicaractéristique est la projection sur  $\Omega$  d'une bande bicaractéristique. Le lieu des courbes bicaractéristiques d'origine  $x$  est une surface caractéristique  $K(x)$ , appelée *conoïde caractéristique*, dont  $x$  est un point conique et  $C(x)$  le cône des tangentes en  $x$ .  $K^+(x)$  est, par définition, la partie de  $K(x)$  dont le cône des tangentes en  $x$  est  $C^+(x)$ .

On prouve qu'il existe des courbes dans  $\Omega$ , appelées courbes-temps, telles que leur demi-tangente en tout point  $x \in \Omega$  appartienne à  $\omega^+(x)$ . La réunion des courbes-temps d'origine les points de  $A$  ( $A \subset \Omega$ ), est l'émission de  $A$ ,  $\mathcal{E}^+(A)$ . Supposons que,  $\forall (x, y) \in \Omega \times \Omega$ , la réunion des courbes-temps d'origine  $x$  et d'extrémité  $y$  soit compacte. On montre alors les propriétés suivantes : la frontière de  $\mathcal{E}^+(A)$  est une surface caractéristique; si  $A$  est compact,  $\mathcal{E}^+(A)$  est fermé; si  $A$  est un domaine,  $\mathcal{E}^+(A)$  est un domaine.

Si  $A = \{x\}$ , la frontière de  $\mathcal{E}^+(x)$  est la nappe externe de  $K^+(x)$ . On a des définitions analogues en remplaçant partout  $+$  par  $-$  et

$$x \in \mathcal{E}^+(y) \Leftrightarrow y \in \mathcal{E}^-(x).$$

Une partie  $A$  de  $\Omega$  est dite compacte vers le passé si,  $\forall x \in \Omega$ ,  $A \cap \mathcal{E}^-(x)$  est compact.  $A$  est nécessairement fermé. Si  $A$  est compact vers le passé,  $\mathcal{E}^+(A)$  l'est aussi, et si  $B$  est une partie compacte de  $\Omega$ ,  $A \cap \mathcal{E}^-(B)$  et  $\mathcal{E}^+(A) \cap \mathcal{E}^-(B)$  sont compacts.

3° *Théorème d'existence et d'unicité pour un opérateur strictement hyperbolique.* — Nous faisons les hypothèses de 2°. L'opérateur adjoint  $a^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  de  $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  est défini par ceci :

$$\text{Si } a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_l^{\alpha_l}}, f \in C^\infty(\Omega),$$

$$a^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) f = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_l^{\alpha_l}} [a_\alpha(x) f(x)].$$

En particulier :

$$g^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = (-1)^m g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

On montre le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** —  $\forall F$  partie de  $\Omega$  compacte vers le passé,  $\forall V$  distribution dans  $\Omega$  à support dans  $F$ , il existe une distribution dans  $\Omega$  unique  $U$ , telle que

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) U = V,$$

support  $U \subset \mathcal{E}^+$  (support  $V$ ).

La restriction de  $U$  à tout domaine  $D \subset \Omega$  ne dépend que des restrictions de  $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  et  $V$  à  $\mathcal{E}^-(D)$ .

On peut considérer  $a^*$  au lieu de  $a$ ,  $\mathcal{E}^+$  au lieu de  $\mathcal{E}^-$ , d'où des théorèmes analogues. On peut aussi, plus généralement, prendre  $V$  à support dans  $\mathcal{E}^+(F)$ . Si  $V$  appartient à un espace de Sobolev de type local  $H_{loc}^s(\Omega)$ ,  $U \in H_{loc}^{s+m-1}(\Omega)$  ( $s$  entier  $\geq 0$ ).

## 2. Noyaux élémentaires. Solutions élémentaires.

1° *Rappel sur les noyaux* (voir [15], p. 138 et suiv.). — Un noyau  $K$  sur  $\Omega$  est une distribution sur  $\Omega \times \Omega$ . Nous noterons  $x$  (resp.  $y$ ), la variable du premier facteur  $\Omega$  (resp. deuxième facteur  $\Omega$ ), du produit  $\Omega \times \Omega$ . Soient  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_y)$ ,  $\varphi.K$  la distribution appartenant à  $\mathcal{D}'(\Omega_y)$  définie par  $\varphi.K(\psi) = K(\varphi\psi)$ ,  $L$  l'application linéaire continue de  $\mathcal{D}(\Omega_x)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega_y)$  définie par  $L(\varphi) = \varphi.K$ . On définit de même  $K.\psi \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$

et  ${}^tL$  l'application linéaire continue de  $\mathcal{O}(\Omega_y)$  dans  $\mathcal{O}'(\Omega_x)$ , transposée de  $L$ .

$K$  est dit semi-régulier à droite si  $L(\mathcal{O}(\Omega_x)) \subset \mathcal{E}(\Omega_y)$ , (notations de [15]); alors  $L \in \mathcal{L}\mathcal{C}(\mathcal{O}(\Omega_x), \mathcal{E}(\Omega_y))$  et  ${}^tL$  se prolonge en une application linéaire continue de  $\mathcal{E}'(\Omega_y)$  dans  $\mathcal{O}'(\Omega_x)$  par  ${}^tLV(\varphi) = V(L\varphi)$ , où  $V \in \mathcal{E}'(\Omega_y)$  et  $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega_x)$ . Soient  $y \in \Omega$ ,  $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega_x)$ ,  $\varphi.K(y)$ , la valeur au point  $y$  de la fonction  $\varphi.K$ ,  $k_y$ , distribution appartenant à  $\mathcal{O}'(\Omega_x)$ , définie par  $k_y(\varphi) = \varphi.K(y)$ , est appelée restriction de  $K$  à  $\Omega_x \times y$ .

On définit de façon analogue un noyau semi-régulier à gauche et ses restrictions  $k_x$  à  $x \times \Omega_y$ .

Un noyau est régulier s'il est semi-régulier à gauche et à droite. Un exemple en est le noyau de Dirac  $\Delta$  :

$$\Delta(\Phi) = \int_{\Omega} \Phi(x, x) dx, \quad \Phi \in \mathcal{O}(\Omega \times \Omega).$$

Ses restrictions à  $\Omega \times y$  et  $x \times \Omega$  sont les mesures de Dirac  $\delta_y$  et  $\delta_x$ .

2° *Définition et existence du noyau élémentaire d'un opérateur strictement hyperbolique* (voir [11]). — Nous faisons les hypothèses énoncées dans le paragraphe 1, 2°. On a le théorème ci-après :

**THÉORÈME 3.** — *A l'émission  $\mathcal{E}^+$  est associé un noyau élémentaire  $E_{x,y}^+$ , et un seul, ayant les propriétés :*

- (a) *son support est contenu dans  $\{(x, y) \mid x \in \mathcal{E}^+(y)\}$ .*  
 (b)  $E_{x,y}^+$  *est régulier. Ses restrictions  $e_y$  et  $e_x$  à  $\Omega_x \times y$  et  $x \times \Omega_y$  vérifient*

$$\begin{aligned} a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) e_y &= \delta_y, & \text{support } e_y &\subset \mathcal{E}^+(y), \\ a^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) e_x &= \delta_x, & \text{support } e_x &\subset \mathcal{E}^-(x). \end{aligned}$$

$e_y$  et  $e_x$  sont donc solutions élémentaires en  $y$  et  $x$  de l'opérateur et de son adjoint.

En remplaçant  $\mathcal{E}^+$  par  $\mathcal{E}^-$ , on obtient un noyau élémentaire  $E_{x,y}^-$  qui a des propriétés analogues.

3° *Application au calcul de la solution  $U$  de  $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) U = V$  (voir théorème 2).* —  $E_{x,y}^+$  sera noté  $E^+$ , quand aucune confusion n'est à craindre. Soit  $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega_x)$ , on sait que  $\varphi.E^+ \in \mathcal{E}(\Omega_y)$ ; montrons que le support de  $\varphi.E^+$  est contenu dans  $\mathcal{E}^-$  (support  $\varphi$ ). En effet soit  $y \notin \mathcal{E}^-$  (support  $\varphi$ ), donc  $\mathcal{E}^+(y) \cap (\text{support } \varphi) = \emptyset$ , d'où

$$e_y(\varphi) = 0 = \varphi.E^+(y).$$

On a donc :  $(\text{support } V) \cap (\text{support } \varphi \cdot E^+)$  est compact, (puisque  $\text{support } V$  est compact vers le passé). On peut alors définir la distribution  $E^+ \cdot V$  par

$$E^+ \cdot V(\varphi) = V(\varphi \cdot E^+), \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}(\Omega_x).$$

Son support est contenu dans  $\mathcal{E}^+$  (support  $V$ ) : en effet, si

$$(\text{support } \varphi) \cap \mathcal{E}^+(\text{support } V) = \emptyset,$$

alors

$$\mathcal{E}^-(\text{support } \varphi) \cap (\text{support } V) = \emptyset,$$

donc  $E^+ \cdot V(\varphi) = 0$ .

D'autre part, elle vérifie

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) E^+ \cdot V = V.$$

En effet, soit  $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega_x)$  :

$$\begin{aligned} \left[ a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) E^+ \cdot V \right](\varphi) &= E^+ \cdot V\left(a^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi\right) \\ &= V\left(a^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi \cdot E^+\right) = V\left(\varphi \cdot a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) E^+\right) \\ &= V(\varphi \cdot \Delta) = V(\varphi). \end{aligned}$$

D'où la proposition suivante :

PROPOSITION 1. —  $E^+ \cdot V$  est la solution de  $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) U = V$  à support contenu dans  $\mathcal{E}^+(\text{support } V)$ . De même,  $V \cdot E^+$  est la solution de  $a^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = V$ , à support contenu dans  $\mathcal{E}^-(\text{support } V)$ , si  $V$  est compact vers le futur. On peut aussi considérer  $E^- \cdot V$  et  $V \cdot E^-$ .

4° Propriétés de symétrie. — Nous supposons l'opérateur autoadjoint

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = (-1)^m a^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Soit  $S$  la symétrie par rapport à la diagonale dans  $\Omega \times \Omega$  et  $SE^+$  la transformée de  $E^+$  par  $S$ . On a

$$SE^+ = (-1)^m E^-.$$

En effet, on a

$$S\left(a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) E^+\right) = a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) SE^+,$$

puisque

$$\begin{aligned}
 S & \left( a \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) E^+ \right) \varphi(x, y) \\
 &= \left( a \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) E^+ \right) \varphi(y, x) = E^+ \left( a^* \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(y, x) \right) \\
 &= E^+ \left( S \left( a^* \left( y, \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi(x, y) \right) \right) = SE^+ \left( a^* \left( y, \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi(x, y) \right) \\
 &= \left( a \left( y, \frac{\partial}{\partial y} \right) SE^+ \right) \varphi(x, y), \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}(\Omega \times \Omega).
 \end{aligned}$$

Si l'opérateur est autoadjoint, on a de plus

$$a \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) E^+ = (-1)^m a \left( y, \frac{\partial}{\partial y} \right) E^+ = \Delta.$$

La symétrie  $S$  donne alors

$$a \left( y, \frac{\partial}{\partial y} \right) SE^+ = (-1)^m a \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) SE^+ = S\Delta = \Delta.$$

Mais on a

$$\text{support } SE^+ = S(\text{support } E^+) = \text{support } E^-,$$

puisque  $x \in \mathcal{E}^+(y) \Leftrightarrow y \in \mathcal{E}^-(x)$ .

Du théorème 3, on déduit donc

$$SE^+ = (-1)^m E^-.$$

Plus généralement, on vérifie facilement que

$$SE_a^+ = E_{a^*}^-.$$

PROPOSITION 2. — *Entre les noyaux élémentaires  $E_a^+$  de  $a \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$  et  $E_{a^*}^-$  de  $a^* \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ , on a la relation de symétrie*

$$(I. 1) \quad SE_a^+ = E_{a^*}^-.$$

### 3. Une méthode pour calculer les solutions élémentaires d'un opérateur strictement hyperbolique.

Pour ce qui suit, voir [7], [8], [9], [10].

1° *Uniformisation.* — L'opérateur est supposé à coefficients analytiques dans  $\Omega$ , mais pas nécessairement hyperbolique. Cette théorie s'étend à des opérateurs non linéaires (voir [3]).

Soit  $\Xi^{l+1}$ , de coordonnées  $(\xi_0, \dots, \xi^l)$ , l'espace vectoriel sur  $\mathbf{C}$  des fonctions complexes affines définies sur  $\mathbf{R}^l$ . La valeur de  $\xi$  au point  $x$  est notée :

$$\xi \cdot x = \xi_0 + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_l x_l.$$

Notons :

$$S(\xi) = \{y \in \Omega \mid \xi \cdot y = 0\}.$$

Soient  $u(\xi, y)$  une fonction complexe de  $(\xi, y)$ , holomorphe en au moins un point  $(\eta, y)$  où  $\eta \cdot y = 0$ ,  $\xi(t, \eta, y)$  une fonction, à valeur dans  $\Xi^{l+1}$ , de  $(t, \eta, y) \in \mathbf{C} \times \Xi^{l+1} \times \Omega$  où  $\eta \cdot y = 0$ , holomorphe pour  $t$  petit, et telle que  $\xi(0, \eta, y) = \eta$ . Notons  $u \circ \xi$  la fonction composée de  $u(\xi, y)$  et  $\xi(t, \eta, y)$ .

DÉFINITION 2. —  $\xi(t, \eta, y)$  uniformise  $u(\xi, y)$  si  $u \circ \xi$  est une fonction de  $(t, \eta, y)$  holomorphe pour  $t$  petit.

Considérons la solution unitaire  $U^*(\xi, y)$  de l'opérateur  $\alpha^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ , c'est-à-dire la solution du problème de Cauchy dans  $\Omega$  :

$$(I.2) \quad \begin{cases} \alpha^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) U^*(\xi, y) = 1, \\ U^*(\xi, y) \text{ s'annule } m \text{ fois sur } S(\xi) = \{y \in \Omega \mid \xi \cdot y = 0\}. \end{cases}$$

On sait qu'au voisinage de chaque point  $y \in S(\xi)$ , non caractéristique,  $g(y, \xi) \neq 0$ , il existe une solution et une seule de (I.2) holomorphe de  $(\xi, y)$ ; c'est le théorème de Cauchy-Kowalewski. Le problème est de compenser l'annulation du polynôme caractéristique aux points caractéristiques de  $S(\xi)$  par un changement de variable, donné par le théorème d'uniformisation suivant (voir [6]).

THÉORÈME 4. —  $U^*(\xi, y)$  et toutes ses dérivées d'ordre  $\leq m-1$ , sont uniformisables quand on choisit  $\xi(t, \eta, y)$  comme suit.  $(\xi(t, \eta, y), x(t, \eta, y))$  est la solution, holomorphe, pour  $t$  petit, du système différentiel

$$(I.3) \quad \begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = g_{\xi_j}(x, \xi), & \frac{d\xi_j}{dt} = -g_{x_j}(x, \xi) \quad (j = 1, \dots, l), \\ \frac{d\xi_0}{dt} = \sum_{j=1}^l x_j g_{x_j}(x, \xi) - g(x, \xi), \end{cases}$$

telle que

$$x(0, \eta, y) = y, \quad \xi(0, \eta, y) = \eta, \quad \eta \in \Xi^{l+1}, \quad \eta \cdot y = 0.$$

On a les propriétés d'homogénéité ( $\theta \in \mathbf{C}$ ) :

$$(I.4) \quad x(\theta^{1-m}t, \theta\eta, y) = x(t, \eta, y) \quad \xi(\theta^{1-m}t, \theta\eta, y) = \theta\xi(t, \eta, y).$$

Nous utiliserons aussi  $U_m^*(\xi, y)$  définie par

$$(I.5) \quad U_m^*(\xi, y) = \left( -\frac{\partial}{\partial \xi_0} \right)^m U^*(\xi, y).$$

$U_m^*(\xi, y)$  n'est pas uniformisée par  $\xi(t, \eta, y)$  mais  $U_m^* = \frac{\partial}{\partial \xi_0} U_{m-1}^*$ , où  $U_{m-1}^*(\xi, y)$  est uniformisée par  $\xi(t, \eta, y)$ .

De la proposition 5.2 de [10], on déduit que la forme différentielle sur  $\Xi^{l+1}$ ,  $U_m^*(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ , est uniformisée par  $\xi(t, \eta, y)$ ; ceci signifie que

$$U_m^*(\xi(t, \eta, y), y) \frac{D(\xi_0, \dots, \xi_l)}{D(t, \eta_1, \dots, \eta_l)}$$

est une fonction holomorphe de  $(t, \eta, y)$ . Notons :

$$(I.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^*(\xi) = \sum_{j=0}^l (-1)^j d\xi_0 \wedge \dots \wedge \hat{d\xi}_j \wedge \dots \wedge d\xi_l, \\ \varpi(t, \eta) = (1-m)t d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l - dt \wedge \omega'(\eta), \\ \omega'(\eta) = \sum_{j=1}^l (-1)^{j-1} \eta_j d\eta_1 \wedge \dots \wedge \hat{d\eta}_j \wedge \dots \wedge d\eta_l. \end{array} \right.$$

De la relation

$$(I.7) \quad \omega^*(\xi(t, \eta, y)) = \frac{D(\xi_0, \dots, \xi_l)}{D(t, \eta_1, \dots, \eta_l)} \varpi(t, \eta),$$

on déduit que la forme différentielle sur  $\Xi^{l+1}$ , de degré  $l$ ,  $U_m^*(\xi, y) \omega^*(\xi)$ , est aussi uniformisée par  $\xi(t, \eta, y)$ .

2° *Calcul des solutions élémentaires.* — Supposons ceci : l'opérateur est strictement hyperbolique par rapport à  $N = (1, 0, \dots, 0)$  en tout point de  $\Omega$ , et son ordre  $m$  est supérieur ou égal à la dimension  $l$  de  $\mathbf{R}^l$ .

*Notations :*

$$\Phi = \{ (t, \eta) \mid t \in \mathbf{C}, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_l) \in \Xi^l \};$$

$\tilde{\Phi}$  = quotient de la partie de  $\Phi$  où  $\eta \neq 0$  par le groupe de transformations :

$$(I.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(t, \eta) = (\theta^{1-m}t, \theta\eta), \theta \in \mathbf{C}; \\ \Psi = \{ (t, \eta) \in \Phi \mid |t| \cdot |\eta|^{m-1} < \text{Cte} \}, \quad \tilde{\Psi} \text{ son image dans } \tilde{\Phi}; \\ \tilde{x} = \left\{ (t, \eta) \in \Psi \mid \xi(t, \eta, y) \cdot x = \xi_0 + \sum_{j=1}^l \xi_j x_j = 0, x \text{ et } y \text{ fixes} \right\}. \end{array} \right.$$

Les formules d'homogénéité (I.4) montrent que  $\tilde{x}$  est un sous-ensemble analytique de  $\tilde{\Psi}$ . On montre aussi que le conoïde  $K(y)$  associé à la projec-

tion  $\xi(t, \eta, y)$ , c'est-à-dire le lieu des points  $x$  tels que  $\tilde{x}$  ait une singularité réelle, coïncide avec le conoïde caractéristique de l'opérateur, défini au paragraphe 1, 2° (voir [10]).

A tout polynôme de dérivation en  $x$ , homogène de degré  $m - l$ ,  $P_{m-l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$ , associons la forme différentielle, de degré  $l - 1$  :

$$(I.9) \quad \Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l}) = - \frac{P_{m-l}(\xi(t, \eta, y)) U_m^*(\xi(t, \eta, y), y) \omega^*(\xi(t, \eta, y))}{d[\xi(t, \eta, y) \cdot x]} \Big|_{\tilde{x}},$$

$\Pi_{m-l}$  est définie et holomorphe sur la partie régulière de  $\tilde{x}$ .

On définit d'autre part sur  $\tilde{x}$ , pour  $x$  voisin de  $y$ , une classe d'homologie compacte  $h$ , de dimension  $l - 1$ , relative à la sous-variété  $\tilde{x} \cap y^* (y^* : t = 0)$  pour la définition de  $h$ , voir [10], n° 41, et pour la construction de cycles appartenant à  $h$ , voir la proposition 8.2.

Notons  $E(x, y)$ , la solution élémentaire au point  $y$ , à support dans  $\mathcal{E}^+(y)$ , de  $a \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$  (notée  $e_y$  au paragraphe 2, 1°). Toute dérivée  $P_{m-l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y)$  s'obtient comme suit. Pour chaque  $y$  fixé, l'intégrale

$$\int_{h=\tilde{h}(\tilde{x}, y^*)} \Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l})$$

définit une distribution en  $x$ , au voisinage de  $y$  et là où  $x_1 > y_1$ . Plus précisément, si  $x \notin K^+(y)$ , cette intégrale définit une fonction holomorphe de  $x$  (théorème 3 de [10]); en étudiant sa partie singulière lorsque  $x \in K^+(y)$ , on montre qu'il existe une distribution, définie au voisinage de  $y$  et là où  $x_1 > y_1$ , coïncidant, hors de  $K^+(y)$ , avec elle. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — La distribution définie pour  $x$  voisin de  $y$  par

$$(I.10) \quad \begin{cases} \text{la distribution} & \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_h \Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l}), & x_1 > y_1, \\ 0, & \text{si } x_1 \leq y_1, \end{cases}$$

est  $P_{m-l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y)$  (voir les formules (12.4), p. 60; (10.3), p. 54; (10.1)<sub>2</sub>, p. 53 de [10]).

Pour expliciter  $h = h(\tilde{x}, y^*)$ , il nous sera utile de considérer des cycles construits dans l'espace projectif complexe  $\mathbf{P}^{l-1}$ .

#### 4. Une construction de cycles dans l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^{l-1}$ .

Notons  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$  les coordonnées homogènes d'un point de  $\mathbf{P}^{l-1}$ . A la partie principale de l'opérateur,  $g \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ , nous avons associé la variété  $G^*(x)$ , d'équation  $g(x, \eta) = 0$ .

Supposons maintenant que le polynôme en  $\eta$  se décompose en le produit de deux polynômes :

$$g(x, \eta) = g_0(\eta) g_1(x, \eta),$$

$g_0$  étant indépendant de  $x$  et  $g_1$  à coefficients continus de  $x$ . Tous les coefficients sont supposés réels.

Supposons que, pour  $x=y$ ,  $G^*(x)$  soit sans singularité réelle. En particulier  $G_0^*[g_0(\eta)=0]$ ,  $G_1^*(y)[g_1(y, \eta)=0]$  sont sans singularité réelle et n'ont pas de point réel commun.

Supposons donné d'autre part un hyperplan  $\pi^*(x)$  dans  $\mathbf{P}^{l-1}$ , dépendant continûment de  $x$ ,  $\text{Re } \pi^*(x)$  étant en position générale par rapport à  $\text{Re } G^*(y)$  pour  $x$  voisin de  $y$ .

La construction qui suit s'inspire de celle du « cobord » si  $l$  est pair (voir [9], p. 107 à 110), de celle « d'un cycle détourné » si  $l$  est impair (voir [10], p. 92 à 94).

1° *Construction d'un fibré  $W^*$  de base  $\text{Re } G^*(y)$ .* — Il existe dans  $\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$  des structures riemaniennes  $C^\infty$ .  $\text{Re } G^*(y)$  et  $\text{Re } \Pi^*(x)$  étant en position générale, on peut en construire une, telle que ces deux surfaces soient orthogonales : on le fait localement, puis globalement à l'aide d'une partition de l'unité. On construit ainsi, en chaque point  $\tau \in \text{Re } G^*(y)$ , une direction réelle,  $g_\tau(y, \tau)$ , orthogonale à  $\text{Re } G^*(y)$ , donc tangente à  $\text{Re } \Pi^*(x)$  si  $\tau \in \text{Re } \Pi^*(x)$ . La droite projective complexe  $d^*(\tau)$ , passant par  $\tau$ , ayant la direction réelle  $g_\tau(y, t)$ , dépend continûment de  $(\tau, x)$ . Quand  $\tau$  décrit  $\text{Re } G^*(y)$ , les droites  $d^*(\tau)$  sont deux à deux disjointes au voisinage de  $\text{Re } G^*(y)$ . Leur réunion, là où elles sont disjointes, est un espace fibré  $W^*$ , de dimension réelle  $l$ , de base  $\text{Re } G^*(y)$ , dont la fibre est un disque contenu dans une droite projective complexe; la fibre est donc une variété analytique complexe et elle a une orientation naturelle.

Comme  $\text{Re } G_0^* \cap \text{Re } G_1^*(y) = \emptyset$ , on a

$$W^* = W_0^* \cup W_1^*, \quad W_0^* \cap W_1^* = \emptyset,$$

$W_0^*$  et  $W_1^*$  étant deux fibrés de base  $\text{Re } G_0^*$  et  $\text{Re } G_1^*(y)$ , dépendant de  $x$ .

2° *Construction d'une coupure  $D_1^*$  dans  $W_1^*$ .* —  $\text{Re } W_1^*$  est un voisinage dans  $\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$  de  $\text{Re } G_1^*(y)$ . Notons, pour  $x$  fixé :

$$D_1^* = \{ \eta \in \text{Re } \mathbf{P}^{l-1} \mid g_1(x, \eta) g_1(y, \eta) \leq 0 \}.$$

Pour  $|x-y|$  petit,  $D_1^* \subset \text{Re } W_1^*$ . Sinon, il existerait une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  de points de  $\mathbf{R}^l$  tendant vers  $y$ , et une suite  $\{\eta_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  de points de

$[\text{Re } \mathbf{P}^{l-1} - W_2^*]$  telles que  $\left[ \text{où } W_2^* = \bigcup_n W_{1, x_n}^* \right]$

$$g(x_n, \eta_n) g(y, \eta_n) \leq 0.$$

Puisque  $[\text{Re } \mathbf{P}^{l-1} - W_2^*]$  est compact, on peut supposer (en considérant des suites extraites, bien sûr) qu'il existe  $\eta \in [\text{Re } \mathbf{P}^{l-1} - W_2^*]$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta.$$

On aurait donc  $g(y, \eta) = 0$ , ce qui est absurde.

Supposons maintenant  $|x - y|$  assez petit pour que

$$D_{1,x}^* \subset \text{Re } W_{1,x}^*.$$

En particulier :

$$\text{Re } G_1^*(x) \subset \text{Re } W_{1,x}^*;$$

et par tout point  $\xi \in \text{Re } G_1^*(x)$  passe une fibre, et une seule, d'origine  $\tau \in \text{Re } G_1^*(y)$ . Inversement, toute fibre  $d^*(\tau)$ , issue de  $\tau$ , coupe  $G_1^*(x)$  en un point, et un seul,  $\xi$  voisin de  $\tau$  : en effet,  $G_1^*(x)$  est une hypersurface voisine de  $G_1^*(y)$ , et  $G_1^*(y)$  coupe  $d^*(\tau)$  en  $\tau$  et est en position générale par rapport à  $d^*(\tau)$ . En particulier,  $\xi$  est réel, donc  $\xi \in \text{Re } G_1^*(x)$ . Les segments réels  $[\tau\xi]$ , d'origine  $\tau \in \text{Re } G_1^*(y)$ , d'extrémité  $\xi \in \text{Re } G_1^*(x)$ , fibrent  $D_1^*$  coupure réelle, de dimension réelle  $l-1$ , construite dans  $W_1^*$ .

3° *Construction de cycles  $\gamma$*  (voir fig. 1).

*Supposons  $l$  pair* : Dans chaque fibre  $d^*(\tau)$  de  $W^*$ , munie de son orientation naturelle, traçons un « contour »  $\gamma(\tau)$  orienté dans le sens direct, autour de  $\tau$ , si  $\tau \in \text{Re } G_0^*$ , autour du segment réel  $[\tau\xi]$ , si  $\tau \in \text{Re } G_1^*(y)$ , ce contour dépendant continûment de  $\tau$ . Supposons  $\text{Re } G^*(y)$  munie d'une orientation changeant sur  $\Pi^*(x)$ , et notons  $h(G^*(y), \Pi^*(x))$  sa classe d'homologie. Lorsque  $\tau$  décrit  $\text{Re } G^*(y)$  ainsi orientée,  $\gamma(\tau)$  engendre  $\gamma$ .  $\gamma$  est situé hors de  $G^*(y)$  et donc de  $G^*(x)$ , pour  $|x - y|$  petit, d'après la construction faite. Sa classe d'homologie  $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y), \Pi^*(x))$  vérifie

$$h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y), \Pi^*(x)) = \delta h(G^*(y), \Pi^*(x)).$$

On peut évidemment décomposer  $\gamma$  en la somme de deux cycles :

$$\gamma = \gamma(W_0^*) + \gamma(W_1^*), \quad \gamma(W_0^*) \subset W_0^*, \quad \gamma(W_1^*) \subset W_1^*.$$

*Supposons  $l$  impair* : Supposons  $\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$  munie d'une orientation changeant sur  $\Pi^*(x)$ . Orientons la partie réelle de la fibre de  $W^*$  de façon naturelle, orientons enfin la base  $\text{Re } G^*(y)$  de  $W^*$  de sorte que le produit de ces deux orientations, avec la convention

(I. 11) orientation fibre  $\times$  orientation base,

soit l'orientation donnée à  $\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$ .

Dans chaque fibre  $d^*(\tau)$  de  $W^*$ , traçons un « détour »  $\gamma(\tau)$ , obtenu en détournant « deux fois sa partie réelle » de  $\tau$ , si  $\tau \in \text{Re } G_0^*$ , du segment  $[\tau\xi]$ , si  $\tau \in \text{Re } G_1^*(y)$ , ce détour dépendant continûment de  $\tau$ .

Quand  $\tau$  décrit  $\text{Re } G^*(y)$  orienté,  $\gamma(\tau)$  engendre  $\gamma(W^*)$  situé hors de  $G^*(y) \cup G^*(x)$ , pour  $|x - y|$  petit. Définissons  $\gamma$  comme suit :

Hors de  $W^*$ ,  $\gamma = \gamma(\mathbf{P}^{l-1} - W^*)$  est deux fois  $\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$  orientée comme ci-dessus. Dans  $W^*$ ,  $\gamma = \gamma(W^*)$  qui vient d'être construit. La classe d'homologie  $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y), \Pi^*(x))$  de  $\gamma$  est donc celle de  $2 \text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$  orientée et détournée de  $G^*(y)$ .

On peut aussi décomposer  $\gamma(W^*)$  en la somme de deux chaînes :

$$\gamma(W^*) = \gamma(W_0^*) + \gamma(W_1^*), \quad \gamma(W_0^*) \subset W_0^*, \quad \gamma(W_1^*) \subset W_1^*.$$

4° Construction d'une famille de cycles  $\gamma(\varepsilon)$ . — Faisons dépendre  $\gamma$ , et plus précisément  $\gamma(W_1^*)$ , d'un paramètre  $\varepsilon > 0$  petit. Utilisons dans chaque fibre de  $W_1^*$  la métrique riemannienne introduite au début.

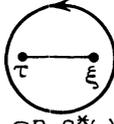
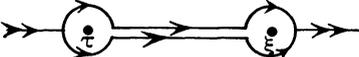
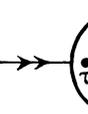
$l$	$\gamma(\tau)$	$\gamma(\tau, \varepsilon)$	$\tau \in \text{Re } G_1^*(y)$	
pair	 $\tau \in \text{Re } G_0^*$	 $\tau \in \text{Re } G_1^*(y)$	 longueur $[\tau \xi] > 2\varepsilon$	 longueur $[\tau \xi] \leq 2\varepsilon$
	 $\tau \in \text{Re } G_0^*$	 longueur $[\tau \xi] > 2\varepsilon$	 longueur $[\tau \xi] \leq 2\varepsilon$	
impair	 $\tau \in \text{Re } G_1^*(y)$			

Figure 1.

Si  $l$  est pair, dans chaque fibre  $d^*(\tau)$  de  $W_1^*$ , le contour  $\gamma(\tau) = \gamma(\tau, \varepsilon)$  est la somme de deux arcs de cercles orientés (centrés en  $\tau$  et  $\xi$ , de rayon  $\varepsilon > 0$ , de sorte que tous les points de l'un des arcs soient à une distance  $\geq \varepsilon$  du centre de l'autre arc), et de deux segments réels situés sur les deux bords du segment  $[\tau \xi]$ . Notons  $\gamma_\varepsilon(W_1^*)$  la chaîne de  $W_1^*$  engendrée par  $\gamma(\tau, \varepsilon)$  quand  $\tau$  décrit  $\text{Re } G_1^*(y)$ .

Si  $l$  est impair, dans chaque fibre  $d^*(\tau)$  de  $W_1^*$ , le détour  $\gamma(\tau) = \gamma(\tau, \varepsilon)$  est aussi la somme de deux arcs de cercles orientés (construits comme

précédemment) et de segments réels situés sur la partie réelle de la fibre. Notons  $\gamma_\varepsilon(W_1^*)$  la chaîne de  $W_1^*$  engendrée par  $\gamma(\tau, \varepsilon)$  quand  $\tau$  décrit  $\text{Re } G_1^*(y)$ . Dans tout ce qui précède, nous avons conservé les mêmes conventions d'orientation qu'au paragraphe précédent.

Posons ensuite :

$$(I.12) \quad \begin{cases} \gamma(\varepsilon) = \gamma(W_0^*) + \gamma_\varepsilon(W_1^*), & \text{si } l \text{ est pair;} \\ \gamma(\varepsilon) = \gamma(\mathbf{P}^{l-1} - W^*) + \gamma(W_0^*) + \gamma_\varepsilon(W_1^*), & \text{si } l \text{ est impair.} \end{cases}$$

Évidemment, la classe d'homologie  $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y), \mathbf{II}^*(x))$  de  $\gamma(\varepsilon)$  est celle :

du cobord de  $\text{Re } G^*(y)$  orientée, si  $l$  est pair;

de 2 fois  $\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$  orienté et détourné de  $G^*(y)$ , si  $l$  est impair.

## CHAPITRE II.

### Les opérateurs de Tricomi-Clairaut. Propriétés.

Calcul, pour  $x$  voisin de  $y$ , des solutions élémentaires  $E(x, y)$  de certains de ces opérateurs.

#### 1. Définition. Propriétés de l'ensemble des opérateurs de Tricomi-Clairaut.

1° *Définition.* — Un opérateur de Tricomi généralisé est un opérateur dont la partie principale  $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  est à coefficients affines :

$$g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sum_{j=1}^l x_j g_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

la partie sous-principale  $g'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  est à coefficients constants, les coefficients des termes de dérivation d'ordre inférieur sont nuls.

Pour de tels opérateurs, la projection  $\xi(t, \eta, y)$  est telle que [voir (I.3)] :

$$(II.1) \quad \begin{cases} d\xi_j = -g_j(\xi) dt & (j = 0, 1, \dots, l), \\ \xi(0, \eta, y) = \eta, & \eta \cdot y = 0. \end{cases}$$

D'autre part, en utilisant le théorème de réciprocity énoncé dans la proposition 13.3 de [10], on peut calculer explicitement  $U_m^*(\xi(t, \eta, y), y)$ . En effet, posons

$$(II.2) \quad V_m(t, \eta, y) = -U_m^*(\xi(t, \eta, y), y) \frac{D(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l)}{D(t, \eta_1, \dots, \eta_l)}.$$

Des formules (13.22) et (13.23), p. 65 de [10], on déduit

$$(II.3) \quad \frac{d}{dt} \log V_m = -g'(\xi), \quad V_m(0, \eta, y) = 1, \quad \eta \cdot y = 0.$$

Simplifions encore la résolution de (II.1) en choisissant

$$g_j(\xi) = \xi_j k_{m-1}(\xi) \quad (j = 1, \dots, l),$$

$k_{m-1}(\xi)$  polynôme homogène de degré  $m - 1$ .

DÉFINITION 3. — Appellons opérateur de Tricomi-Clairaut, un opérateur de Tricomi généralisé  $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  :

$$(II.4_1) \quad a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + g'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

dont la partie principale  $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  vaut

$$(II.4_2) \quad g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = k_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[ \sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] k_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

$k_m(\xi)$ ,  $k_{m-1}(\xi)$ ,  $g'(\xi)$  sont des polynômes homogènes de degré  $m$  et  $m - 1$ . Nous admettrons que  $k_m$  et  $k_{m-1}$  puissent avoir un facteur commun; dans ce cas, nous poserons

$$(II.5_1) \quad g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

où  $g_0(\xi)$  est homogène de degré  $m - p$ , où  $g_1(x, \xi)$  s'écrit :

$$(II.5_2) \quad g_1(x, \xi) = k_p(\xi) + \left[ \sum_1^l x_j \xi_j \right] k_{p-1}(\xi), \quad k_{p-1} \neq 0,$$

$k_p(\xi)$  et  $k_{p-1}(\xi)$  étant homogènes de degré  $p$  et  $p - 1$  et sans facteur commun.

On vérifie que l'opérateur (II.4) est autoadjoint si et seulement si

$$(II.6) \quad g'(\xi) = \alpha k_{m-1}(\xi), \quad \alpha = \frac{l + m - 1}{2}.$$

Un opérateur de Tricomi-Clairaut autoadjoint est donc entièrement déterminé par sa partie principale.

2° *Quelques propriétés de l'ensemble des opérateurs de Tricomi.* — Notons  $\mathfrak{T}_{l,m}$ ,  $\mathfrak{C}_{l,m}$ ,  $\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{l,m}$ , l'ensemble des opérateurs de Tricomi, de Tricomi-Clairaut, ou de Tricomi-Clairaut autoadjoints, et  $\mathfrak{H}_{l,m}$  l'ensemble des opérateurs homogènes à coefficients constants, à  $l$  variables et d'ordre  $m$ . Tous ces ensembles sont stables par changement de coordonnées affine et l'on a

$$\mathfrak{T}_{l,m} \supset \mathfrak{C}_{l,m} \supset \mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{l,m} \supset \mathfrak{H}_{l,m}.$$

Si  $a \in \mathfrak{T}_{l,m}$ ,  $b \in \mathfrak{T}_{l,n}$ , en général  $ab \notin \mathfrak{T}_{l,m+n}$ , sauf si un des deux opérateurs est homogène à coefficients constants. Considérons alors  $b \in \mathfrak{H}_{l,n}$ ; on a

$$\begin{aligned} a \in \mathfrak{T}_{l,m} &\Rightarrow ab \in \mathfrak{T}_{l,m+n}, \\ a \in \mathfrak{C}_{l,m} &\Rightarrow ab \in \mathfrak{C}_{l,m+n}, \end{aligned}$$

mais

$$a \in \mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{l,m} \not\Rightarrow ab \in \mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{l,m+n},$$

[voir la formule (II.6)].

Remarquons aussi que  $\mathfrak{T}_l$ ,  $\mathfrak{C}_{l,m}$ ,  $\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_l$  (on ne précise plus l'ordre, qui est quelconque), sont stables par l'opération crochet. En effet, si on a

$$\begin{aligned} a &= g_0 + \sum_1^l x_j g_j + g', & b &= h_0 + \sum_1^l x_j h_j + h', \\ \text{(II.7)} \quad ab - ba &= \sum_1^l \left[ h_j \frac{\partial g_0}{\partial \bar{z}_j} - g_j \frac{\partial h_0}{\partial \bar{z}_j} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^l x_j \sum_{k=1}^l \left[ h_k \frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}_k} - g_k \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}_k} \right] + \sum_1^l \left[ h_j \frac{\partial g'}{\partial \bar{z}_j} - g_j \frac{\partial h'}{\partial \bar{z}_j} \right]. \end{aligned}$$

## 2. Propriétés géométriques des opérateurs de Tricomi-Clairaut.

1° *Surfaces caractéristiques.* — Les surfaces caractéristiques de l'opérateur, d'équation  $s(x) = 0$ , sont les solutions de l'équation de Jacobi :

$$\text{(II.8)} \quad g\left(x, \frac{\partial s}{\partial x}\right) \equiv g_1\left(x, \frac{\partial s}{\partial x}\right)g_0\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = 0.$$

Tout hyperplan de  $\mathbf{R}^l$ , d'équation  $\eta_0 + \sum_1^l \eta_j x_j = 0$ , est une solution de (II.8) quand le paramètre  $\eta$  vérifie

$$g_0(\eta_1, \dots, \eta_l) = 0 \quad \text{ou} \quad k_p(\eta_1, \dots, \eta_l) = \eta_0 k_{p-1}(\eta_1, \dots, \eta_l).$$

Cette famille d'hyperplans, dépendant de  $l$  paramètres homogènes, est donc une intégrale complète de (II.8), équation dite du type de Clairaut. Toute solution de (II.8) est donc une enveloppe de ces hyperplans (voir [16], t. 1, p. 534 à 538).

2° *Domaine d'hyperbolicité.* — Nous supposons l'opérateur strictement hyperbolique en au moins un point  $y$  et nous utilisons le théorème 1. Cherchons donc à quelle condition  $G^*(x)$ ,  $g(x, \eta) = 0$ , a un point singulier réel. D'après l'hypothèse faite,  $G_0^*$ ,  $g_0(\eta) = 0$ , est sans singularité réelle. Donc tout point singulier réel sur  $G^*(x)$  correspond soit à un point commun à  $\text{Re } G_1^*(x)$  et  $\text{Re } G_0^*$ , soit à un point singulier réel sur  $G_1^*(x)$ . Notons donc

$$(II.9) \quad \begin{cases} \Sigma_0 = \{x \in \mathbf{R}^l \mid \text{Re } G_1^*(x) \cap \text{Re } G_0^* \neq \emptyset\}, \\ \Sigma_1 = \{x \in \mathbf{R}^l \mid G_1^*(x) \text{ a au moins un point singulier réel} \} \end{cases}$$

On peut caractériser les points de  $\Sigma_0$  ou  $\Sigma_1$  par ceci :

$$x \in \Sigma_0 \iff \exists \eta \text{ réel tel que} \\ \eta_0 + \sum_1^l \eta_j x_j = k_p(\eta) - \eta_0 k_{p-1}(\eta) = g_0(\eta) = 0,$$

$$x \in \Sigma_1 \iff \exists \eta \text{ réel tel que}$$

$$k_p(\eta) + [\eta \cdot x] k_{p-1}(\eta) = \frac{\partial k_p}{\partial \eta_j} + [\eta \cdot x] \frac{\partial k_{p-1}}{\partial \eta_j} + x_j k_{p-1}(\eta) = 0, \\ (j = 1, \dots, l).$$

$\Sigma_0$  est une réunion d'hyperplans caractéristiques; sauf si  $l = 2$ , ce n'est pas une hypersurface de  $\mathbf{R}^l$ : c'est un fermé qui peut avoir des points intérieurs. Quant à  $\Sigma_1$ , c'est l'enveloppe des hyperplans caractéristiques :

$$\eta_0 + \sum \eta_j x_j = 0, \quad \text{tels que } k_p(\eta) = \eta_0 k_{p-1}(\eta).$$

C'est donc une surface caractéristique, réunion de l'hypersurface  $[k_{p-1}(\eta) \neq 0]$  :

$$x_j = -\frac{1}{k_{p-1}(\eta)} \left[ \frac{\partial k_p(\eta)}{\partial \eta_j} - \frac{k_p(\eta)}{k_{p-1}(\eta)} \frac{\partial k_{p-1}(\eta)}{\partial \eta_j} \right] \quad (j = 1, \dots, l)$$

et des hyperplans caractéristiques, s'ils existent :

$$\eta_0 + \sum_1^l \eta_j x_j = 0, \quad k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = \frac{\partial k_p}{\partial \eta_j} - \eta_0 \frac{\partial k_{p-1}}{\partial \eta_j} = 0 \\ (j = 1, \dots, l).$$

[Ces hyperplans existent si les hypersurfaces  $K_p^*$ ,  $k_p(\eta) = 0$ ,  $K_{p-1}^*$ ,  $k_{p-1}(\eta) = 0$ , de  $\mathbf{P}^{l-1}$  ont un point de contact réel.]

Notons :

(II. 10)  $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ ,  $\Omega(y)$  la composante connexe  $\ni y$  de  $\mathbf{R}^l - \Sigma$ .

Du théorème 1, on déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *L'opérateur de Tricomi-Clairaut, de partie principale*  
 $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ , *est strictement hyperbolique dans*  $\Omega(y)$ .

3° *Conoïde caractéristique*  $K(y)$ . —  $K(y)$  est l'enveloppe des hyperplans caractéristiques  $\ni y$ ; leur équation est

$$\tau_0 + \sum_1^l \tau_j x_j = 0,$$

$\tau_j$  réel, avec les relations

$$\tau_0 + \sum_1^l \tau_j y_j = g_0(\tau) = 0 \quad \text{ou} \quad \tau_0 + \sum_1^l \tau_j y_j = k_p(\tau) - \tau_0 k_{p-1}(\tau) = 0.$$

Notons :

$$\tau(x - y) = \sum_1^l \tau_j (x_j - y_j).$$

En éliminant  $\tau_0$  entre les relations ci-dessus, on obtient

$$\tau(x - y) = 0, \quad \tau \text{ réel,} \quad \text{avec} \quad g_0(\tau) = 0 \quad \text{ou} \quad g_1(y, \tau) = 0.$$

L'une des deux dernières conditions exclut l'autre, puisque l'opérateur étant strictement hyperbolique en  $y$ , on a

$$\text{Re } G_0^* \cap \text{Re } G_1^*(y) = \emptyset.$$

$K(y)$  est donc l'enveloppe des hyperplans d'équation  $\tau(x - y) = 0$  où  $g_0(\tau) = 0$  ou  $g_1(y, \tau) = 0$  ( $\tau$  réel); pour que  $x \in K(y)$ , il faut et il suffit qu'il existe  $\tau \in \text{Re } \Xi^l$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$  tels que :

$$(II. 11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau(x - y) = 0, \\ g_0(\tau) = 0 \quad [\text{resp. } g_1(y, \tau) = 0], \\ x_j - y_j = \lambda \frac{\partial g_0(\tau)}{\partial \tau_j} \quad \left[ \text{resp. } x_j - y_j = \lambda \frac{\partial g_1(y, \tau)}{\partial \tau_j} \right] \\ (j = 1, \dots, l). \end{array} \right.$$

Soit  $\Pi^*(x-y)$  l'hyperplan de  $\mathbf{P}^{l-1}$  d'équation  $\eta(x-y) = 0$ . (II. 11) exprime que  $\Pi^*(x-y)$  et  $G_0^*$  [resp.  $G_1^*(y)$ ] ont un point de contact réel  $\eta$ . Mais la relation

$$(II. 12) \quad g_1(x, \eta) = g_1(y, \eta) + [\eta(x-y)] k_{p-1}(\eta),$$

entraîne qu'un point de contact entre  $\Pi^*(x-y)$  et  $G_1^*(y)$  est un point de contact entre  $\Pi^*(x-y)$ ,  $G_1^*(y)$ ,  $G_1^*(x)$ . D'autre part, d'après (II. 11), si  $x \in K(y)$ , la droite  $xy$  est contenue dans  $K(y)$ .  $K(y)$  est donc un cône : c'est  $C(y)$ ; Les courbes bicaractéristiques issues de  $y$  sont les génératrices de  $C(y)$ , puisque le long de ces droites, les hyperplans caractéristiques touchent leur enveloppe  $K(y)$ . L'émission  $\mathcal{E}(y)$  est donc confondue avec le cône d'émission  $\mathcal{O}(y)$ .

PROPOSITION 5. — *Supposons l'opérateur de Tricomi-Clairaut strictement hyperbolique en  $y$ . Pour que  $x \in K(y)$ , il faut et il suffit que les hypersurfaces de  $\mathbf{P}^{l-1}$ ,  $\Pi^*(x-y)$  [ $\eta(x-y) = 0$ ] et  $G_0^*$  [ $g_0(\eta) = 0$ ], ou  $\Pi^*(x-y)$  et  $G_1^*(y)$  [ $g_1(y, \eta) = 0$ ], aient un point de contact réel. Le conoïde caractéristique  $K(y)$  est confondu avec le cône bicaractéristique  $C(y)$ .*

**3. Calcul des dérivées d'ordre  $m-l$  en  $x$  ( $m \geq l$ ) des solutions élémentaires  $E(x, y)$  d'opérateurs de Tricomi-Clairaut, pour  $x$  voisin de  $y$ .**

Nous appliquons ici les résultats rappelés dans I, § 3, 2°.

1° *Equation de la variété  $\tilde{x}$  et calcul de la forme différentielle à intégrer sur  $\tilde{x}$ .* — Déterminons donc  $(\xi(t, \eta, y), V_m(t, \eta, y))$  la solution du système différentiel

$$(II. 13_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_0}{k_m(\xi)} = \frac{d\xi_1}{\xi_1 k_{m-1}(\xi)} = \dots = \frac{d\xi_l}{\xi_l k_{m-l}(\xi)} = \frac{d[\log V_m]}{g'(\xi)} = -dt, \\ \xi(0, \eta, y) = \eta \quad \left( \eta \cdot y = \eta_0 + \sum_1^l \eta_j y_j = 0 \right), \quad V_m(0, \eta, y) = 1 \end{array} \right.$$

[voir les formules (II. 1), (II. 2) et (II. 3)].

Utilisons, pour le résoudre, les relations

$$\frac{\xi_j}{\eta_j} = \frac{\xi_k}{\eta_k} \quad (k, j = 1, \dots, l),$$

que nous écrivons

$$(II. 13_2) \quad \xi = \frac{\xi_j}{\eta_j} \eta, \quad \text{où } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_l) \quad \text{et} \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_l).$$

On obtient ainsi, en utilisant l'homogénéité des polynômes :

$$d\tilde{z}_0 = \frac{k_m(\tilde{z})}{\tilde{\xi}_j k_{m-1}(\tilde{z})} d\tilde{z}_j = \frac{k_m(\eta)}{\eta_j k_{m-1}(\eta)} d\eta_j,$$

$$d[\text{Log } V_m] = \frac{g'(\tilde{z})}{\tilde{\xi}_j k_{m-1}(\tilde{z})} d\tilde{z}_j = \frac{g'(\eta)}{\tilde{\xi}_j k_{m-1}(\eta)} d\tilde{z}_j.$$

En fonction de  $\tilde{z}_j$ , on a

$$\tilde{z}_0 = \frac{k_m(\eta)}{\eta_j k_{m-1}(\eta)} (\tilde{\xi}_j - \eta_j) - \sum_1^l \eta_k y_k,$$

$$(II. 14) \quad \tilde{\xi} \cdot x = \frac{1}{k_{m-1}(\eta)} \left[ \frac{\tilde{\xi}_j}{\eta_j} g(x, \eta) - g(y, \eta) \right],$$

$$(II. 15) \quad V_m = \left[ \frac{\tilde{\xi}_j}{\eta_j} \right]^{\frac{g'(\eta)}{k_{m-1}(\eta)}}$$

Si  $k_{m-1}(\eta) = 0$ , on a

$$(II. 16) \quad \begin{cases} \tilde{\xi} \cdot x = \eta(x - y), \\ V_m = \exp(-g'(\eta)t) \end{cases}$$

Dans le cas général, on peut aussi donner les expressions de  $\tilde{\xi} \cdot x$  et  $V_m$  en fonction de  $(\eta, t)$ . En effet,

$$(II. 17_1) \quad \frac{d\tilde{z}_j}{\tilde{\xi}_j^m} = - \frac{k_{m-1}(\eta)}{\eta_j^{m-1}} dt,$$

$$(II. 17_2) \quad \tilde{z}_j = \eta_j [1 + (m-1) k_{m-1}(\eta) t]^{\frac{1}{1-m}},$$

la détermination du radical valant 1 pour  $t = 0$ .  $\tilde{x}$  est le lieu des points  $(t, \eta)$  où  $\tilde{\xi} \cdot x = 0$ ,  $x$  et  $y$  étant fixés [voir (I. 8)]. D'après (II. 17), une équation de  $\tilde{x}$  là où  $k_{m-1}(\eta) \neq 0$  est

$$(II. 18) \quad [1 + (m-1) k_{m-1}(\eta) t]^{\frac{1}{1-m}} g(x, \eta) - g(y, \eta) = 0,$$

et d'après (II. 16), l'intersection de  $\tilde{x}$  avec la variété d'équation  $k_{m-1}(\eta) = 0$ , a pour équations

$$k_{m-1}(\eta) = \eta(x - y) = 0.$$

Il est facile de vérifier, en utilisant (II. 18), que pour que  $\tilde{x}$  ait un point singulier réel  $(t, \eta)$ , il faut et il suffit que  $x \in K(y)$  : on retrouve en effet les conditions énoncées dans la proposition 5.

Sur la partie de  $\tilde{x}$  où  $\frac{g(x, \eta)}{g(y, \eta)}$  reste voisin de 1 pour  $x$  voisin de  $y$ , par exemple là où

$$\left| \frac{g(x, \eta)}{g(y, \eta)} - 1 \right| < k \leq 1,$$

on peut calculer explicitement  $t$  comme suit. Utilisons (II. 18) et la relation

$$(II. 19) \quad g(x, \eta) - g(y, \eta) = [\eta(x - y)] k_{m-1}(\eta).$$

On obtient

$$(m-1) k_{m-1}(\eta) t = \left[ 1 + \frac{[\eta(x-y)] k_{m-1}(\eta)}{g(y, \eta)} \right]^{m-1} - 1;$$

le polynôme en  $k_{m-1}(\eta)$  au second membre étant divisible par  $k_{m-1}(\eta)$ , on a

$$(II. 20) \quad t = \frac{\eta(x-y)}{g(y, \eta)} \left[ 1 + P\left(\frac{\eta(x-y)}{g(y, \eta)}, k_{m-1}(\eta)\right) \right],$$

où  $P(u, v)$  est un polynôme de degré  $m-2$  en  $u$  et  $v$ .

Pour calculer la forme différentielle sur  $\tilde{x}$ , on utilise (I. 7) et (II. 2) :

$$U_m^*(\xi(t, \eta, y), y) \omega^*(\xi(t, \eta, y)) = -V_m(t, \eta, y) \varpi(t, \eta).$$

Supposons maintenant  $\eta_1 = 1$ . Donc

$$\varpi(t, \eta) = -dt \wedge d\eta_2 \wedge \dots \wedge d\eta_l \quad [\text{voir (I. 6)}],$$

$$P_{m-l}(\xi(t, \eta, y)) \Big|_{\tilde{x}} = \xi_1^{m-l} P_{m-l}(\eta) \Big|_{\tilde{x}} \quad [\text{voir (II. 13}_2\text{)}],$$

$$V_m(t, \eta, y) \Big|_{\tilde{x}} = \xi_1^{\frac{g'(\eta)}{k_{m-1}(\eta)}} \Big|_{\tilde{x}} \quad [\text{voir (II. 15)}].$$

Pour avoir, dans l'expression de  $V_m$ , un exposant indépendant de  $\eta$ , nous choisissons :  $g'(\eta) = \alpha k_{m-1}(\eta)$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

DÉFINITION 4. — La classe des opérateurs de Tricomi-Clairaut que nous étudierons maintenant est définie par

$$(II. 21) \quad a_\alpha \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = k_m \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left[ \sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \right] k_{m-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Cette classe d'opérateurs est stable par multiplication à droite par un opérateur homogène à coefficients constants et par l'opération crochet [voir (II. 7)]. Et on a

$$a_\alpha^* \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = a_\beta \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \alpha + \beta = m + l - 1.$$

Poursuivons le calcul pour ces opérateurs :

$$V_m(t, \eta, y) \Big|_{\tilde{x}} = \xi_1^\alpha \Big|_{\tilde{x}}.$$

Mais, d'après (II. 14), sur la partie de  $\tilde{x}$  où  $\frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}$  reste voisin de 1, pour  $x$  voisin de  $y$ , on a

$$\xi_1 = \frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}.$$

D'où, (voir formule (2.3), p. 83 de [9]) :

$$\Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l}) = - \left[ \frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)} \right]^{m-l+\alpha} P_{m-l}(\eta) \frac{d\eta_2 \wedge \dots \wedge d\eta_l}{\frac{\partial}{\partial t}(\xi \cdot x) \Big|_{\tilde{x}}}.$$

Or, d'après (II. 13) ( $x$  et  $y$  sont fixes) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi \cdot x) \Big|_{\tilde{x}} = -\xi_1^m g(x, \eta) = - \left[ \frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)} \right]^m g(x, \eta).$$

D'où

$$\Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l}) = P_{m-l}(\eta) \left[ \frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)} \right]^{x-l} \frac{d\eta_2 \wedge \dots \wedge d\eta_l}{g(x, \eta)},$$

et en revenant aux coordonnées homogènes  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$ ,

$$(II. 22) \quad \Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l}) = P_{m-l}(\eta) \left[ \frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)} \right]^{x-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)},$$

sur la partie de  $\tilde{x}$  où  $\frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}$  reste voisin de 1 pour  $|x - y|$  petit, la détermination du radical valant 1 pour  $x = y$ .

2° *Expression des dérivées en  $x$ , d'ordre  $m - l$ , de  $E(x, y)$ , pour  $|x - y|$  petit.* — Rappelons que  $y^*$  est la sous-variété :  $t = 0$  de  $\tilde{V}$  et que  $G^*(y)$  est la sous-variété  $t = g(y, \eta) = 0$  de  $y^*$ . Identifions  $y^*$  à  $\mathbf{P}^{l-1}$  et  $G^*(y)$  à  $G^*(y)$ . Soit  $\tilde{x}_1$  la partie de  $\tilde{x}$  où

$$\left| \frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)} - 1 \right| < 1.$$

Sur  $\tilde{x}_1$ ,  $\Pi_{m-l}$  a l'expression (II. 22). D'autre part, la formule (II. 20) montre que, lorsque  $x$  tend vers  $y$  le long d'une droite non contenue dans  $C(y)$ ,  $\tilde{x}_1$  devient voisine de  $\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y)$ .

Reprenons la construction des cycles  $\gamma$  (voir I, § 3, 3°), en remplaçant  $\Pi^*(x)$  par  $\Pi^*(x - y)$ ; elle est valable pourvu que  $x \notin K(y)$  (voir prop. 5).

Si  $l$  est pair, donnons à  $\text{Re } G^*(y)$  l'orientation, hors de  $\Pi^*(x - y)$  :

$$(II. 23) \quad \frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x - y)]^{l-1} dg(y, \eta)} > 0.$$

Si  $l$  est impair, donnons à  $\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$  l'orientation, hors de  $\Pi^*(x-y)$  :

$$(II.24) \quad \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0.$$

Soit  $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y), \Pi^*(x-y))$  la classe d'homologie de  $\gamma$ . Il existe des applications  $\Phi_x$  de  $[\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y)]$  dans  $\tilde{x}_1$ , telles que  $\Phi_x(h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y), \Pi^*(x-y))) = h(\tilde{x}, y^*)$ , (voir prop. 8.2, p. 51 de [10]). Donc  $\Phi_x(\gamma) \in h(\tilde{x}, y^*)$ . Or, pour  $\Phi_x$ , on peut prendre l'application qui à  $\eta \in [\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y)]$  fait correspondre le point  $(t, \eta) \in \tilde{x}_1$ , la valeur de  $t$  étant donnée par la formule (II.20). Notons alors

$$\Omega_{m-l}(\eta, x, y); P_{m-l} = \Phi_x^{-1}(\Pi_{m-l});$$

$\Omega_{m-l}$  a donc la même expression (II.22) que  $\Pi_{m-l}$ . De

$$\int_{\Phi_x(\gamma)} \Pi_{m-l} = \int_{\gamma} \Omega_{m-l},$$

nous déduisons [voir (I.10)], si  $x$  est voisin de  $y$  et  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$  :

$$P_{m-l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\gamma} \Omega_{m-l}(\eta, x, y; P_{m-l}),$$

PROPOSITION 6. — Supposons l'opérateur de Tricomi-Clairaut (II.21), de partie principale  $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ , d'ordre  $m \geq l$ , strictement hyperbolique en  $y$ . Les dérivées d'ordre  $m-l$  en  $x$  de sa solution élémentaire  $E(x, y)$  au point  $y$  sont les fonctions de  $x$ , là où  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$  est voisin de  $y$ , définies par les intégrales

$$(II.25) \quad P_{m-l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\gamma} P_{m-l}(\eta) \left[ \frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)} \right]^{x-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)};$$

$\gamma$  est un cycle compact de  $\mathbf{P}^{l-1}$ , relatif à  $\Pi^*(x-y)$ , situé hors de  $G^*(x) \cup G^*(y)$ , dont la classe d'homologie  $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y), \Pi^*(x-y))$  est celle :

$$(II.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{— du cobord de } \text{Re } G^*(y), \text{ orienté par (II.23), si } l \text{ est pair;} \\ \text{— de } {}_2\text{Re } \mathbf{P}^{l-1} \text{ orienté par (II.24) et détourné de } G^*(y), \\ \text{si } l \text{ est impair.} \end{array} \right.$$

Remarque. — Nous avons supposé l'opérateur strictement hyperbolique par rapport à  $N = (1, 0, \dots, 0)$  au voisinage de  $y$ , mais nous constatons que l'orientation de  $\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$ , quand  $l$  est impair, est indépendante de ce choix des axes.

3° Une remarque sur l'orientation de  $\text{Re } G^*(y)$ , si  $l$  est pair. — On suppose donc que  $(1, 0, \dots, 0) \in \Delta^+(y)$ . Calculons la forme différentielle résidu :

$$\frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1} dg(y, \eta)}.$$

Supposons  $\eta_l = 1$ . Elle s'écrit :

$$(-1)^{l-1} \frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_{l-1}}{[\eta(x-y)]^{l-1} dg(y, \eta)} = - \frac{d\eta_2 \wedge \dots \wedge d\eta_{l-1}}{[\eta(x-y)]^{l-1}},$$

(d'après la formule (2.3) de [9]).

Revenons, aux coordonnées homogènes. Elle vaut

$$-\sum_{j=2}^l \frac{(-1)^j \eta_j d\eta_2 \wedge \dots \wedge \widehat{d\eta_j} \wedge \dots \wedge d\eta_l}{[\eta(x-y)]^{l-1}}.$$

Or le produit intérieur gauche du 1-vecteur  $N$ ,  $N = (1, 0, \dots, 0)$ , de  $\Xi^l$ , par la  $(l-1)$ -forme  $\omega'(\eta)$  sur  $\Xi^l$  est la  $(l-2)$ -forme

$$N \lrcorner \omega'(\eta) = - \sum_{j=2}^l (-1)^j \eta_j d\eta_2 \wedge \dots \wedge \widehat{d\eta_j} \wedge \dots \wedge d\eta_l,$$

(voir [2], chap. III, § 8, n° 4).

L'orientation de  $\text{Re } G^*(y)$  en dehors de  $\Pi^*(x-y)$  est

$$(II.27) \quad \frac{N \lrcorner \omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}} > 0, \quad N \in \Delta^+(y).$$

Sous cette forme, elle est indépendante du choix particulier des axes fait au début.

#### 4. Calcul des solutions élémentaires $E(x, y)$ d'opérateurs de Tricomi-Clairaut ( $|x-y|$ est petit, $m \geq l$ ).

Si  $m = l$ , de (II.25) on déduit

$$(II.28) \quad E(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\gamma} \left[ \frac{g(x, \eta)}{g(y, \eta)} \right]^{l-x-1} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

Si  $m > l$ , nous allons intégrer  $(m-l)$  fois par rapport à  $x$  l'intégrale figurant au second membre de (II.25).

1° *Méthode d'intégration.* — Nous supposons  $y$  fixe,  $|x-y|$  petit,  $x \notin K(y)$ . Plus précisément,  $x$  varie au voisinage de  $y$  à l'intérieur d'un cône étranger à  $K(y)$ . A chaque intégration, nous utiliserons le résultat :  $E(x, y)$  et toutes ses dérivées d'ordre  $\leq m-l-1$  s'annulent pour  $x = y$

(théorème 4 a, p. 66 de [10]). Nous utiliserons aussi la formule suivante, « dérivation sous le signe somme ».

Soit  $\Omega(\eta, x)$  une forme différentielle de degré  $l-1$  en  $\eta$ , holomorphe de  $(\eta, x)$  pour  $\eta$  voisin de  $\gamma$  et  $x$  voisin de  $y$ , dont les coefficients sont nuls sur  $\Pi^*(x-y)$ ; puisque  $\partial\gamma \subset \Pi^*(x-y)$ , on a

$$(II.29) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\gamma} \Omega(\eta, x) = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_j} \Omega(\eta, x),$$

(voir formule (16.3), p. 69 de [10]).

Posons

$$(II.30) \quad F_{m-l}(u, v) = \frac{1}{v} \left[ \frac{v}{u} \right]^{\alpha-l+1}, \quad F_{m-l}(v, v) = \frac{1}{v}.$$

$F_{m-l}(u, v)$  est donc une fonction homogène de  $(u, v)$  de degré  $(-1)$ , holomorphe pour  $uv \neq 0$  et  $\frac{u}{v}$  voisin de 1. D'après (II.25), on a donc

$$(II.31) \quad P_{m-l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\gamma} P_{m-l}(\eta) F_{m-l}(g(x, \eta), g(y, \eta)) \omega'(\eta).$$

Notre but est d'explicitier  $E(x, y)$  par une formule du même type que celle-ci. Pour le faire, nous allons montrer qu'il existe  $F_p(u, v)$ ,  $0 \leq p \leq m-l$ , fonction homogène de  $(u, v)$  de degré  $(-1)$ , holomorphe pour  $uv \neq 0$  et  $\frac{u}{v}$  voisin de 1, telle que,  $\forall P_p \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$  polynôme homogène de dérivation d'ordre  $p$ , on ait

$$(II.32) \quad P_p \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int P_p(\eta) F_p(g(x, \eta), g(y, \eta)) [\eta(x-y)]^{m-l-p} \omega'(\eta).$$

Les propriétés de  $F_p(u, v)$  entraînent que la forme différentielle est holomorphe au voisinage de  $\gamma$ , qu'elle s'annule pour  $x=y$  et pour  $\eta(x-y)=0$ , dès que  $p \geq 1$ . D'après (II.29) une condition suffisante pour  $F_p$  est donc

$$\frac{\partial}{\partial x_j} ([\eta(x-y)]^{m-l-p} F_p(g(x, \eta), g(y, \eta))) \\ = \eta_j [\eta(x-y)]^{m-l-p-1} F_{p+1}(g(x, \eta), g(y, \eta)).$$

Or on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g(x, \eta) = \eta_j k_{m-1}(\eta) = \eta_j \frac{g(x, \eta) - g(y, \eta)}{\eta(x-y)}.$$

En divisant par  $\eta_j[\eta(x-y)]^{m-l-p-1}$ , on obtient donc

$$(u-v) \frac{\partial}{\partial u} F_p(u, v) + (m-l-p) F_p(u, v) = F_{p+1}(u, v),$$

ce qui peut s'écrire :

$$(II. 33) \quad \frac{\partial}{\partial u} ((u-v)^{m-l-p} F_p(u, v)) = (u-v)^{m-l-p-1} F_{p+1}(u, v).$$

Cette relation détermine entièrement  $F_p(u, v)$ ,  $0 \leq p \leq m-l$ . En effet, pour  $p = m-l$ ,  $F_p(u, v)$  est déterminé par (II.30). Supposons  $F_{p+1}(u, v)$  déterminé, holomorphe pour  $u=v$  et  $uv \neq 0$ , homogène de degré  $(-1)$ . (II.33) détermine  $F_p(u, v)$  unique, ayant les mêmes propriétés :  $(u-v)^{m-l-p} F_p(u, v)$  est la primitive en  $u$ , nulle pour  $u=v$ , de  $(u-v)^{m-l-p-1} F_{p+1}(u, v)$ .

2° Calcul de  $E(x, y)$ . — D'après (II.32), on a donc besoin de  $F_0(u, v)$ , qui, d'après (II.33) vérifie

$$\frac{\partial^{m-l}}{\partial u^{m-l}} ((u-v)^{m-l} F_0(u, v)) = F_{m-l}(u, v) = \frac{1}{v} \left[ \frac{v}{u} \right]^{\alpha-l+1};$$

on sait aussi que  $(u-v)^{m-l} F_0(u, v)$  s'annule  $(m-l)$  fois pour  $u=v$ . On a ainsi, en général :

$$(II. 34_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_0(u, v) = c_\alpha \frac{v^{\alpha-l} u^{m-\alpha-1} - Q_\alpha(u, v)}{(u-v)^{m-l}}, \\ c_\alpha = \frac{1}{(l-\alpha)(l-\alpha+1)\dots(l-\alpha+m-l-1)}. \end{array} \right.$$

$Q_\alpha(u, v)$  est un polynôme d'intégration en  $u$  de degré  $m-l-1$ . Étant nécessairement homogène de degré  $m-l-1$  en  $(u, v)$ , c'est aussi un polynôme en  $v$ . La formule (II.34<sub>1</sub>) vaut sauf s'il existe un entier  $k$  tel que

$$-1 \leq k \leq m-l-2 \quad \text{et} \quad l-\alpha+k=-1,$$

c'est-à-dire lorsque  $\alpha$  est un entier  $n$  tel que

$$l \leq \alpha = n \leq m-1.$$

On obtient alors

$$(II. 34_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_0(u, v) = c_n \frac{v^{n-l} u^{m-n-1} \log \left[ \frac{u}{v} \right] - Q_n(u, v)}{(u-v)^{m-l}}, \\ c_n = \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!(m-n-1)!} \quad \left( \log \left[ \frac{u}{v} \right] = 0 \text{ pour } \frac{u}{v} = 1 \right) \end{array} \right.$$

où, pour les mêmes raisons que précédemment,  $Q_n(u, v)$  est un polynôme homogène de degré  $m-l-1$  en  $(u, v)$ , parfaitement déterminé. Précisons

comment on peut obtenir ces polynômes. Posons  $\lambda = \frac{u}{v}$  dans les formules (II.34). Nous obtenons au second membre :

$$F_0(u, v) = \frac{c_\alpha}{v} \frac{\lambda^{m-\alpha-1} - Q_\alpha(\lambda, \mathfrak{I})}{(\lambda - \mathfrak{I})^{m-l}},$$

ou

$$F_0(u, v) = \frac{c_n}{v} \frac{\lambda^{m-n-1} \log \lambda - Q_n(\lambda, \mathfrak{I})}{(\lambda - \mathfrak{I})^{m-l}}.$$

$Q_\alpha(\lambda, \mathfrak{I})$  [resp.  $Q_n(\lambda, \mathfrak{I})$ ], est la somme des  $(m-l)$  premiers termes du développement de Taylor autour du point  $\lambda = \mathfrak{I}$  de  $\lambda^{m-\alpha-1}$  (resp.  $\lambda^{m-n-1} \log \lambda$ ). De l'homogénéité de  $F_0(u, v)$ , on déduit

$$(II.35) \quad F_0(u, v) = \frac{1}{v} F_0\left(\frac{u}{v}, \mathfrak{I}\right) = \frac{1}{u} F_0\left(\mathfrak{I}, \frac{v}{u}\right).$$

Posons

$$(II.36) \quad \lambda = \frac{g(x, \gamma)}{g(y, \gamma)}.$$

Au voisinage de  $\gamma$ ,  $\lambda$  est voisin de  $\mathfrak{I}$  et vaut  $\frac{g_1(x, \gamma)}{g_1(y, \gamma)}$ .

$$(II.37) \quad F(\lambda) = F_0(\lambda, \mathfrak{I}) = \frac{1}{\lambda} F_0\left(\mathfrak{I}, \frac{\mathfrak{I}}{\lambda}\right).$$

De (II.32), (II.35), (II.36) et (II.37), nous déduisons

$$E(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\gamma} F(\lambda) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

PROPOSITION 7. — *Supposons l'opérateur*

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left[ k_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(\sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha\right) k_{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right] g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

de partie principale  $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ , d'ordre  $m \geq l$ , strictement hyperbolique au point  $y$ . Sa solution élémentaire au point  $y$ ,  $E(x, y)$ , est la fonction de  $x$ , pour  $x \in \mathcal{S}^+(y) - K(y)$ , définie pour  $x$  voisin de  $y$  par

$$(II.38) \quad E(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\gamma} F(\lambda) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)},$$

où  $\lambda = \frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)}$  est voisin de  $\mathfrak{I}$  sur  $\gamma$  ( $\gamma$  cycle construit comme dans la propo-

sition 6), où  $F(\lambda)$  est holomorphe au voisinage de  $\lambda = 1$  et est donnée par les formules

$$(II.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\lambda) = \lambda^{l-\alpha-1}, \quad \text{si } m = l; \\ F(\lambda) = c_\alpha \frac{\lambda^{m-\alpha-1} - Q_\alpha(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}}, \\ \quad c_\alpha = \frac{1}{(l-\alpha)(l-\alpha+1)\dots(m-\alpha-1)}, \quad \text{si } m > l \\ \text{et } \alpha \text{ n'est pas un entier appartenant à } [l, m-1]; \\ F(\lambda) = c_n \frac{\lambda^{m-n-1} \log \lambda - Q_n(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}}, \quad c_n = \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!(m-n-1)!} \\ \text{si } m > l \text{ et } \alpha \text{ est un entier } n \in [l, m-1]; \end{array} \right.$$

$Q_\alpha(\lambda, 1)$  [resp.  $Q_n(\lambda, 1)$ ], est le polynôme en  $\lambda$ , de degré  $m-l-1$ , somme des  $m-l$  premiers termes du développement de Taylor pour  $\lambda = 1$  de  $\lambda^{m-\alpha-1}$ , (resp.  $\lambda^{m-n-1} \log \lambda$ ), cette fonction valant 1 (resp. 0), pour  $\lambda = 1$ .

### CHAPITRE III.

#### Propriétés des solutions élémentaires d'opérateurs de Tricomi-Clairaut.

#### Prolongement analytique de ces solutions élémentaires.

##### 1. Propriétés des solutions élémentaires.

1° Opérateurs homogènes à coefficients constants ( $m \geq l$ ). — Écrivons la formule (II.25) :

$$P_{m-l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\gamma} P_{m-l}(\eta) \left[ \frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)} \right]^{\alpha-l+1} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)},$$

avec

$$g(y, \eta) \equiv g_0(\eta), \quad \text{donc } \frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)} \equiv 1.$$

Les calculs d'intégration sont valables à condition de poser

$$F_{m-l}(u, v) = \frac{1}{v}, \quad \alpha = l-1.$$

D'où

$$F_0(u, v) = \frac{1}{(m-l)! v},$$

$$F(\lambda) = F(1) = \frac{1}{(m-l)!}.$$

Choisissons  $y$  à l'origine; la forme différentielle

$$[\eta \cdot x]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g_0(\eta)}$$

étant holomorphe hors de  $G_0^*$ , on peut l'intégrer sur la classe d'homologie  $h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^*, \Pi^*(x))$  de  $\gamma$ .

Si  $l$  est pair, utilisons la formule du résidu (théorème 1, p. 88 de [9]) :

$$2\pi i \int_{h(G_0^*, \Pi^*(x))} [\eta \cdot x]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{dg_0(\eta)} = \int_{\partial h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^*, \Pi^*(x))} [\eta \cdot x]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g_0(\eta)}.$$

PROPOSITION 8. — L'opérateur  $g_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$ , homogène à coefficients constants, d'ordre  $m \geq l$ , strictement hyperbolique, a pour solution élémentaire  $E(x)$  la fonction valant pour  $x \in \mathcal{S}^+(o) - C(o)$  :

$$(III. 1) \quad E(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-2}} \int_{h(G_0^*, \Pi^*(x))} \frac{[\eta \cdot x]^{m-l} \omega'(\eta)}{(m-l)! dg_0(\eta)},$$

si  $l$  est pair,  $h(G_0^*, \Pi^*(x))$  étant la classe d'homologie compacte de  $\text{Re } G_0^*$ , orientée en dehors de  $\Pi^*(x)$  par  $\frac{N \lrcorner \omega'(\eta)}{[\eta \cdot x]^{l-1}} > 0$ , où  $N \in \Delta^+(o)$ ;

$$(III. 2) \quad E(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^*, \Pi^*(x))} \frac{[\eta \cdot x]^{m-l} \omega'(\eta)}{(m-l)! g_0(\eta)},$$

si  $l$  est impair,  $h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^*, \Pi^*(x))$  étant la classe d'homologie compacte de  $2\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$ , orientée en dehors de  $\Pi^*(x)$  par  $\frac{\omega'(\eta)}{[\eta \cdot x]^l} > 0$ , et détournée de  $G_0^*$ .

Comparons ces formules à celles d'HERGLOTZ si  $l$  est pair, à celles de PETROWSKY si  $l$  est impair (voir [11]). La formule (III. 1) est, à la notation près, celle d'HERGLOTZ (théorèmes 43.1 et 44.1, p. 82-83 de [11]). Si  $l$  est impair, la formule de PETROWSKY (théorème 46.1, p. 87 de [11]) fait aussi intervenir la forme résidu

$$\frac{[\eta \cdot x]^{m-l} \omega'(\eta)}{(m-l)! dg_0(\eta)}.$$

Prouvons que  $h$  est aussi un cobord dans ce cas. En effet, on a

$$H_C(\mathbf{P}^{l-1}, \Pi^*(x)) = H_C(\mathbf{C}^{l-1}) = 0.$$

Soit  $i$ , l'immersion de  $(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^*)$  dans  $\mathbf{P}^{l-1}$ . On a donc

$$ih \in H_C(\mathbf{P}^{l-1}, \Pi^*(x)) = 0.$$

Ceci est une condition suffisante pour que  $h$  soit un cobord (voir [9], p. 85). Il existe donc  $h_1 \in H_c(G_0^*, \Pi^*(x))$  tel que  $h = \delta h_1$ . PETROWSKY construit des cycles appartenant à  $h_1$ , dont la définition n'est pas très simple. Il peut être intéressant d'avoir comme dans (III. 2) une intégrale supplémentaire et un cycle plus simple.

$E(x)$  est une fonction analytique de  $x$  pour  $x \in \mathcal{E}^+(o) - C(o)$  (théorème 3, p. 97 de [9]).

2° Opérateurs où  $\alpha$  est un entier  $n$  ( $m \geq l$ ). — Considérons les opérateurs :

$$a_n \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = k_m \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left[ \sum_{j=1}^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + n \right] k_{m-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

notons  $E_n(x, y)$  leur solution élémentaire.

Distinguons deux cas :

(a)  $n$  n'appartient pas à l'intervalle  $(l, m - 1)$  (lequel est vide si  $m = l$ ).

Si  $n \leq l - 1$ , posons  $n = l - 1 - k$ ,  $k$  entier  $\geq 0$ . D'après (II. 39), on a

$$F_n(\lambda) = c_n \frac{\lambda^{m-l+k} - Q_n(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}};$$

$F_n(\lambda)$  est donc un polynôme en  $\lambda$  de degré  $k$ , que nous notons  $P_k(\lambda)$ .

Pour  $k = 0$ , on a  $P_0(\lambda) = \frac{1}{(m-1)!}$ . La forme différentielle

$$P_k \left( \frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)} \right) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}$$

est holomorphe hors de  $G^*(y)$ , où elle a une singularité polaire [d'ordre 1 sur  $G_0^*$ , d'ordre  $k + 1$  sur  $G_1^*(y)$ ], et on peut l'intégrer sur la classe d'homologie  $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y), \Pi^*(x-y))$  de  $\gamma$ . D'où

$$(III. 3) \quad E_{l-1-k}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_h P_k \left( \frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)} \right) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)},$$

où  $h$  est la classe d'homologie :

— du cobord de  $\text{Re } G^*(y)$ , orienté en dehors de  $\Pi^*(x-y)$  par  $\frac{N \lrcorner \omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}} > 0$ , si  $N \in \Delta^+(y)$  et si  $l$  est pair,

— de  $2\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$ , orienté en dehors de  $\Pi^*(x-y)$  par  $\frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0$  et détourné de  $G^*(y)$ , si  $l$  est impair.

Si  $n \geq m$ , posons  $n = m + k$ ,  $k$  entier  $\geq 0$ . D'après (II. 39), on a

$$\lambda F_n(\lambda) = c_n \frac{\lambda^{-k} - \lambda Q_n(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}} = c_n \frac{\left( \frac{1}{\lambda} \right)^{m-l+k} - Q_n \left( 1, \frac{1}{\lambda} \right)}{\left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right)^{m-l}}.$$

Comme  $\lambda F_n(\lambda)$  est holomorphe au voisinage de  $\lambda = 1$ , comme  $Q_n\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$  est un polynôme en  $\frac{1}{\lambda}$  de degré  $m-l-1$ ,  $\lambda F_n(\lambda)$  est un polynôme de degré  $k$  en  $\frac{1}{\lambda}$ , notons-le  $P'_k\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ . Évidemment, pour une même valeur de  $k$ ,  $P_k$  et  $P'_k$  sont proportionnels. En particulier pour  $k = 0$ ,  $P'_0 = \frac{1}{(m-l)!}$ . La forme

$$P'_k\left(\frac{g_1(y, \eta)}{g_1(x, \eta)}\right) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)}$$

étant holomorphe hors de  $G^*(x)$ , où elle a une singularité polaire, on peut l'intégrer sur la classe d'homologie  $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(x), \Pi^*(x-y))$  de  $\gamma$ , et l'on obtient

$$(III.4) \quad E_{m+k}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_h P'_k\left(\frac{g_1(y, \eta)}{g_1(x, \eta)}\right) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)},$$

où  $h$  est la classe d'homologie :

— du cobord de  $\text{Re } G^*(x)$ , orienté en dehors de  $\Pi^*(x-y)$  par  $\frac{N \lrcorner \omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}} > 0$ , si  $N \in \Delta^+(x)$  et si  $l$  est pair;

— de  $2\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$ , orienté en dehors de  $\Pi^*(x-y)$  par  $\frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0$  et détourné de  $G^*(x)$ , si  $l$  est impair.

(b)  $n$  appartient à l'intervalle  $(l, m-1)$ , donc  $m \geq l+1$ .

D'après (II.39),  $F_n(\lambda)$  contient  $\log \lambda$ . L'expression de  $E(x, y)$  ne sera donc pas commode en particulier pour l'étude du prolongement analytique, mais nous allons démontrer que des dérivées d'un certain ordre de  $E(x, y)$  auront des expressions simples. Il y a évidemment les dérivées d'ordre  $m-l$  [formule (II.25)]; mais considérons aussi les dérivées d'ordre  $m-n$ , et montrons que

$$F_{m-n}(u, v) = \frac{1}{(n-l)! u}.$$

En effet, d'après (II.30) et (II.33), on a

$$\frac{\partial^{n-l}}{\partial u^{n-l}} ((u-v)^{n-l} F_{m-n}(u, v)) = F_{m-l}(u, v) = \frac{1}{u} \left(\frac{u}{v}\right)^{l-n};$$

et une primitive d'ordre  $n-l$  en  $u$  de  $\frac{1}{u} \left(\frac{u}{v}\right)^{l-n}$ , s'annulant  $(n-l)$  fois pour  $\frac{u}{v} = 1$ , est évidemment  $\frac{(u-v)^{n-l}}{(n-l)! u}$ . De (II.32), on déduit

$$(III.5) \quad P_{m-n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_n(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_h P_{m-n}(\eta) \frac{[\eta(x-y)]^{n-l} \omega'(\eta)}{(n-l)! g(x, \eta)},$$

$h$  étant défini comme dans (III.4), (III.5) peut s'écrire d'une autre façon : considérons l'opérateur homogène à coefficients constants  $g\left(x, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ , où  $x$  est un paramètre et  $t$  la variable, et sa solution élémentaire en  $O$ ,  $E_x(t)$ . On a

$$P_{m-n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E_n(x, y) = P_{m-n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x(t) \Big|_{t=x-y}.$$

3° *Relations de symétrie. Relations de récurrence.* — Nous supposons  $k_m$  et  $k_{m-1}$  fixés.

(a) *Relations de symétrie* : Nous avons vu que si

$$\begin{aligned} a_x\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) &= k_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[ \sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \right] k_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \\ a_x^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) &= a_\beta\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \alpha + \beta = l + m - 1. \end{aligned}$$

De (I.1), nous déduisons donc

$$(III.6) \quad E_x^+(x, y) = (-1)^m E_{\bar{\beta}}^-(y, x), \quad \alpha + \beta = l + m - 1;$$

(III.6) est vraie sans hypothèse sur  $l$  et  $m$ , et on la vérifie facilement à partir des formules (II.3g) pour  $m \geq l$  et  $|x - y|$  petit.

(b) *Relations de récurrence* : Nous allons démontrer ceci [voir (III.12)] :

$$(l - \alpha) E_x(x, y) = \left[ m - \alpha - \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] E_{x-1}(x, y).$$

Nous supposons d'abord :  $m \geq l$ ,  $x \in \mathcal{S}^+(y) - K(y)$ ,  $|x - y|$  petit,  $\alpha$  et  $\alpha - 1$  ne sont pas des entiers appartenant à  $\{l, m - 1\}$ , donc  $\alpha$  n'est pas un entier appartenant à  $\{l, m\}$ . Posons

$$\mathcal{F}_\alpha(\lambda) = \frac{\lambda^{m-\alpha-1} - Q_\alpha(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}}, \quad d_\alpha = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} c_\alpha.$$

D'où, en utilisant les formules (II.38) et (II.3g) :

$$(III.7) \quad \begin{cases} E_x(x, y) = d_\alpha \int_\gamma \mathcal{F}_\alpha(\lambda) [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}, \\ E_{x-1}(x, y) = d_{\alpha-1} \int_\gamma \mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda) [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}. \end{cases}$$

Cherchons une relation entre  $\mathcal{F}_\alpha(\lambda)$  et  $\mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda)$ . Si  $m > l$ , on a

$$Q_\alpha(\lambda, \mathfrak{I}) = \mathfrak{I} + (m - \alpha - 1)(\lambda - \mathfrak{I}) + \dots \\ + \frac{(m - \alpha - 1)(m - \alpha - 2) \dots (l - \alpha + 1)}{(m - l - 1)!} (\lambda - \mathfrak{I})^{m-l-1}.$$

$$Q_{\alpha-1}(\lambda, \mathfrak{I}) = \mathfrak{I} + (m - \alpha)(\lambda - \mathfrak{I}) + \dots \\ + \frac{(m - \alpha)(m - \alpha - 1) \dots (l - \alpha + 2)}{(m - l - 1)!} (\lambda - \mathfrak{I})^{m-l-1}.$$

D'où la relation, évidemment valable si  $m = l$  ( $Q_\alpha = Q_{\alpha-1} = 0$ ) :

$$(III. 8) \quad Q_{\alpha-1}(\lambda, \mathfrak{I}) - Q_\alpha(\lambda, \mathfrak{I}) = \frac{\lambda - \mathfrak{I}}{m - \alpha} \frac{\partial Q_{\alpha-1}(\lambda, \mathfrak{I})}{\partial \lambda}.$$

Écrivons

$$\mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda) = \frac{\lambda^{m-\alpha-1}(\mathfrak{I} + \lambda - \mathfrak{I}) - Q_{\alpha-1}(\lambda, \mathfrak{I})}{(\lambda - \mathfrak{I})^{m-l}} \\ = \mathcal{F}_\alpha(\lambda) \frac{\lambda^{m-\alpha-1}(\lambda - \mathfrak{I}) + Q_\alpha(\lambda, \mathfrak{I}) - Q_{\alpha-1}(\lambda, \mathfrak{I})}{(\lambda - \mathfrak{I})^{m-l}}.$$

De (III. 8), on déduit

$$(III. 9) \quad \mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda) = \mathcal{F}_\alpha(\lambda) + \frac{\mathfrak{I}}{m - \alpha} \frac{(m - \alpha) \lambda^{m-\alpha-1} - \frac{\partial Q_{\alpha-1}(\lambda, \mathfrak{I})}{\partial \lambda}}{(\lambda - \mathfrak{I})^{m-l-1}}.$$

Démontrons

$$(III. 10) \quad \left[ \sum_{j=1}^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] E_{\alpha-1}(x, y) \\ = d_{\alpha-1} \int_\gamma \frac{(m - \alpha) \lambda^{m-\alpha-1} - \frac{\partial Q_{\alpha-1}(\lambda, \mathfrak{I})}{\partial \lambda}}{(\lambda - \mathfrak{I})^{m-l-1}} [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

D'après (III. 9), cette forme différentielle est holomorphe au voisinage de  $\gamma$ .

Remarquons que

$$(III. 11) \quad \left[ \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] [\eta(x - y)] = \eta(x - y).$$

Dans l'expression (III. 7) de  $E_{\alpha-1}$ , on peut dériver sous le signe somme par rapport à  $x$  : en effet, si  $m > l$ , la forme différentielle s'annule sur  $\partial\gamma$ , puisque  $\eta(x - y) = 0$  et si  $m = l$ , on utilise (III. 11) et la formule (16.3)

de [9]. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] E_{\alpha-1}(x, y) \\ &= d_{\alpha-1} \int_{\gamma} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda)}{\partial \lambda} \left[ \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right] \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + (m-l) \mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda) \right\} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha-1}}{\partial \lambda} &= \frac{(m-\alpha) \lambda^{m-\alpha-1} - \frac{\partial Q_{\alpha-1}}{\partial \lambda}}{(\lambda-1)^{m-l}} + \frac{l-m}{\lambda-1} \mathcal{F}_{\alpha-1} \quad (\lambda \neq 1), \\ \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} &= \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\eta_j k_{m-1}(\eta)}{g(y, \eta)} = \frac{[\eta(x-y)] k_{m-1}(\eta)}{g(y, \eta)} = \lambda - 1. \end{aligned}$$

D'où la formule (III. 10). De (III. 7), (III. 9) et (III. 10), on déduit

$$(III. 12) \quad (l-\alpha) E_{\alpha}(x, y) = \left[ m-\alpha - \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] E_{\alpha-1}(x, y).$$

Si  $\alpha$  et  $\alpha-1$  sont entiers et appartiennent à  $\{l, m-1\}$ , c'est-à-dire si  $\alpha$  est un entier appartenant à  $\{l+1, m-1\}$ , la démonstration de (III. 12) est analogue, la relation entre  $Q_n(\lambda, 1)$  et  $Q_{n-1}(\lambda, 1)$  étant

$$(m-n)[Q_{n-1}(\lambda, 1) - Q_n(\lambda, 1)] = (\lambda-1) \left[ \frac{\partial Q_{n-1}(\lambda, 1)}{\partial \lambda} - \lambda^{m-n-1} \right].$$

Restent les cas où  $\alpha = l$  ou  $\alpha = m$ . Dans le premier cas, on a

$$(III. 13) \quad E_{l-1}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\gamma} \frac{[\eta(x-y)]^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

D'où la relation

$$(III. 14) \quad \left[ \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] E_{l-1}(x, y) = (m-l) E_{l-1}(x, y);$$

c'est une relation d'homogénéité : pour  $y$  fixé, d'après (III. 13)  $E_{l-1}(x, y)$  est une fonction de  $(x-y)$  homogène de degré  $m-l$ .

Si  $\alpha = m$ , on a

$$(III. 15) \quad E_m(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\gamma} \frac{[\gamma(x-y)]^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\omega'(\gamma)}{g(x, \gamma)},$$

$$E_{m-1}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{(-1)^{m-l-1}}{(m-l-1)!} \\ \times \int_{\gamma} \frac{\log \lambda - Q_{m-1}(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}} [\gamma(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\gamma)}{g(y, \gamma)},$$

puisque  $\mathcal{F}_m(\lambda) = \frac{(-1)^{m-l}}{\lambda}$ ,  $\mathcal{F}_{m-1}(\lambda) = \frac{\log \lambda - Q_{m-1}(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}}$ ,

$$Q_m(\lambda, 1) + (-1)^{m-l} (\lambda-1)^{m-l-1} = \frac{\partial Q_{m-1}(\lambda, 1)}{\partial \lambda}.$$

D'où, par des calculs analogues :

$$(III. 16) \quad (m-l) E_m(x, y) = \left[ \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] E_{m-1}(x, y).$$

Supposons maintenant  $m < l$ . Multiplions l'opérateur  $a_x \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$  par un opérateur  $b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$ , homogène, à coefficients constants, strictement hyperbolique, de sorte que  $a_x b$  soit strictement hyperbolique au point  $y$  et d'ordre  $m' \geq l$ . Entre  $E_{x,ab}(x, y)$ , solution élémentaire en  $y$  de  $a_x b$ , et  $E_x(x, y)$ , solution élémentaire en  $y$  de  $a_x$ , on a la relation

$$E_x(x, y) = b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_{x,ab}(x, y),$$

puisque la distribution (en  $x$ ) au second membre a son support dans  $\mathcal{E}_a^+(y)$  et vérifie

$$a_x \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_{x,ab}(x, y) \right] = \delta_y.$$

On a donc, d'après (III. 12) :

$$(l-\alpha) E_{x,ab}(x, y) = \left[ m' - \alpha - \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] E_{x-1,ab}(x, y).$$

Faisons opérer  $b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$  sur les deux membres de cette relation, en utilisant la relation

$$b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} = \left[ \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) + \sum_1^l \xi_j b_{\xi_j} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ = \left[ \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} + m' - m \right] b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

On obtient exactement (III. 12) :

$$(l - \alpha) E_{\alpha}(x, y) = \left[ m - \alpha - \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] E_{\alpha-1}(x, y).$$

En utilisant la relation de symétrie (III. 6) dans (III. 12), on obtient

$$(III. 12_1) \quad (m - \alpha) E_{\alpha-1}(x, y) = \left[ l - \alpha - \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial y_j} \right] E_{\alpha}(x, y).$$

(III. 12) et (III. 12<sub>1</sub>) sont deux relations différentielles entre  $E_{\alpha}$  et  $E_{\alpha-1}$ , sauf si  $\alpha = l$  ou  $\alpha = m$ . Résumons les résultats.

PROPOSITION 9. — Soit la famille des opérateurs de Tricomi-Clairaut :

$$\alpha_{\alpha} \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = k_m \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left[ \sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \right] k_{m-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

de partie principale  $g \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ . Supposons  $k_m, k_{m-1}$  fixés et  $\alpha$  réel variant. Entre les solutions élémentaires hyperboliques  $E_{\alpha}(x, y)$  de ces opérateurs, on a les relations

$$\begin{aligned} E_{\alpha}^{\pm}(x, y) &= (-1)^m E_{\beta}^{\mp}(y, x), \quad \alpha + \beta = l + m - 1; \\ (l - \alpha) E_{\alpha}(x, y) &= \left[ m - \alpha - \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] E_{\alpha-1}(x, y); \\ (m - \alpha) E_{\alpha-1}(x, y) &= \left[ l - \alpha - \sum_1^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial y_j} \right] E_{\alpha}(x, y). \end{aligned}$$

Pour  $\alpha = l$  (resp.  $\alpha = m$ ), la deuxième formule (resp. troisième formule) est une formule d'homogénéité. Si  $m \geq l$ , on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} E_{l-1}(x, y) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(\mathbf{P}^{l-1-G^*(y)}, \Pi^*(x-y))} \frac{[\eta(x-y)]^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}, \\ E_m(x, y) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(\mathbf{P}^{l-1-G^*(x)}, \Pi^*(x-y))} \frac{[\eta(x-y)]^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)}. \end{aligned}$$

Si  $n$  est un entier appartenant à  $(l, m - 1)$ , on a

$$\begin{aligned} P_{m-n} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_n(x, y) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \\ &\quad \times \int_{h(\mathbf{P}^{l-1-G^*(x)}, \Pi^*(x-y))} P_{m-n}(\eta) \frac{[\eta(x-y)]^{n-l}}{(n-l)!} \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)}. \end{aligned}$$

**2. Prolongement analytique des solutions élémentaires, si  $\alpha$  est un entier  $n$ ,**

Soit  $\Omega$  une composante connexe de  $\mathbf{R}^l - \Sigma$  où l'opérateur est strictement hyperbolique (théorème 1). Lorsque  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ , la valeur de la solution élémentaire  $E_n(x, y)$  est donnée par une intégrale. Nous étudions le prolongement analytique de cette intégrale.

1°  $n \leq l - 1$ . — Pour  $m \geq l$ , l'intégrale figurant au second membre de la formule (III.3) est prolongeable analytiquement en tout point  $(x, y)$  tel que  $y \in \Omega$  et  $x \in \mathbf{R}^l - K(y)$ . En effet, en un tel point,  $\text{Re } G^*(y)$  est sans singularité,  $\text{Re } G^*(y)$  et  $\text{Re } \Pi^*(x - y)$  sont en position générale; ceci reste vrai pour les variétés complexes correspondantes au voisinage de leur partie réelle (nous utiliserons souvent ceci par la suite). Le théorème 3, p. 97 de [9] prouve que, dans ces conditions, l'intégrale (III.3) est une fonction holomorphe dans un voisinage complexe de l'un de ces points  $(x, y)$ , d'où le résultat.

Pour  $m < l$ , la solution élémentaire est aussi égale, pour  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$  à une fonction prolongeable analytiquement dans le même domaine réel. En effet, multiplions l'opérateur  $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  par  $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ , homogène à coefficients constants, de sorte que  $ab$  soit strictement hyperbolique en  $y$  et d'ordre  $m' = l$ , ou  $m' = l + 1$  : c'est possible en choisissant  $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  produit d'opérateurs hyperboliques d'ordre 2. Calculons, pour  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ ,  $E_n(x, y) = b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{ab}(x, y)$  comme suit, en supposant  $n = l - 1$  ou  $n = m - 1$  : l'analyticité du prolongement pour ces deux valeurs de  $n$  et la relation de récurrence (III.12<sub>1</sub>) montrent alors l'analyticité du prolongement pour toute valeur de  $n \leq l - 1$ . Supposons aussi que  $m' = l$  : après une dérivation, si  $m' = l + 1$ , les calculs sont les mêmes. D'après (III.3), on a

$$E_{l-1, ab}(x, y) = \text{Cte} \int_{h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y) \cup B^*, \Pi^*(x, y))} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta) b(\eta)},$$

$$E_{m-1, ab}(x, y) = \text{Cte} \int_{h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y) \cup B^*, \Pi^*(x, y))} P_{l-m} \left( \frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)} \right) \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta) b(\eta)}$$

$P_{l-m}(\lambda)$  étant un polynôme de degré  $l - m$ ,  $B^*$  ayant pour équation  $b(\eta) = 0$ . Utilisons les formules de dérivation (16.3), p. 69 de [10], et (10.6), p. 97 de [9].  $P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  étant de degré 1, on a

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{l-1, ab}(x, y) = \text{Cte} \int_{\partial h} \frac{P_1(\eta)}{g(y, \eta) b(\eta)} \frac{\omega'(\eta)}{d[\eta(x - y)]},$$

$$P_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_{m-1, ab}(x, y) = \text{Cte} \int_h \frac{P_1(\eta) k_{p-1}(\eta)}{g_1(y, \eta)} \frac{dP_{l-m}}{d\lambda} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta) b(\eta)} \\ + \text{Cte} \int_{\partial h} \frac{P_1(\eta) P_{l-m}(\eta)}{g(y, \eta) b(\eta)} \frac{\omega'(\eta)}{d[\eta(x-y)]}.$$

$b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$  étant homogène de degré  $l - m$ , on obtient finalement

$$(III. 17_1) \quad E_{l-1}(x, y) = b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_{l-1, ab}(x, y) = \text{Cte} \int_{\partial h} \frac{d^{l-m-1} \left[ \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \right]}{d[\eta(x-y)]^{l-m}},$$

$$(III. 17_2) \quad E_{m-1}(x, y)$$

$$= b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_{m-1, ab}(x, y) \\ = \text{Cte} \int_h \left[ \frac{k_{p-1}(\eta)}{g(y, \eta)} \right]^{l-m} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ + \text{Cte} \int_{\partial h} \left\{ \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta) d[\eta(x-y)]} \right. \\ \left. + \frac{d \left[ \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \right]}{d[\eta(x-y)]^2} + \dots + \frac{d^{l-m-1} \left[ \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \right]}{d[\eta(x-y)]^{l-m}} \right\}.$$

$b(\eta)$  a disparu de toutes ces intégrales, qui sont prolongeables analytiquement pour  $y \in \Omega$  et  $x \in \mathbf{R}^l - K(y)$ , d'après le même théorème 3, p. 97 de [9],

C. Q. F. D.

2°  $n \geq m$ . — Utilisons alors la relation de symétrie (III. 6) et le résultat précédent :  $E_n(x, y)$  coïncide pour  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$  avec une fonction prolongeable analytiquement en tous les points  $(x, y)$  tels que  $y \in \mathbf{R}^l$  et  $x \in \Omega - K(y)$ . Ce qui précède est valable sans hypothèse sur  $l$  et  $m$ .

Supposons maintenant :  $m < l$  et  $m \leq n \leq l - 1$ . On a un résultat plus fort dans ce cas : la formule (III. 17<sub>1</sub>) montre que, pour  $n = l - 1$ , l'intégrale se prolonge analytiquement en tout point  $(x, y)$  tel que  $x \notin K(y)$ ; la relation de récurrence (III. 12<sub>1</sub>) montre qu'il en est ainsi pour tout  $n \in \{m, l - 1\}$ .

3°  $n \in \{l, m - 1\}$  et  $m \geq l + 1$ . — Considérons d'abord  $n = l$ . On rappelle que

$$P_{m-l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_l(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_h \frac{P_{m-l}(\eta) \omega'(\eta)}{(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(x), \Pi^*(x-y))} \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)}.$$

$E_l(x, y)$  est solution d'un système différentiel à coefficients constants, dont les seconds membres sont des fonctions analytiques de  $(x, y)$

pour  $y \in \mathbf{R}'$  et  $x \in \Omega - K(y)$ . Les conditions d'intégrabilité d'un tel système sont (voir [13]) :

$$(III.18) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \int_h \gamma_k P_{m-l-1}(\gamma) \frac{\omega'(\gamma)}{g(x, \gamma)} = \frac{\partial}{\partial x_k} \int_h \gamma_j P_{m-l-1}(\gamma) \frac{\omega'(\gamma)}{g(x, \gamma)},$$

pour  $j \neq k$ ,  $P_{m-l-1}(\gamma)$  étant un polynôme arbitraire homogène de degré  $m-l-1$ . Or (III.18) est vrai pour  $x \in \Omega$  voisin de  $y$  et  $x \notin K(y)$ , la valeur commune des deux termes étant

$$-\int_h \frac{\gamma_j \gamma_k k_{m-1}(\gamma) P_{m-l-1}(\gamma) \omega'(\gamma)}{[g(x, \gamma)]^2} + \int_{\partial h} \frac{\gamma_j \gamma_k P_{m-l-1}(\gamma) \omega'(\gamma)}{g(x, \gamma) d[\gamma(x-y)]},$$

fonction analytique de  $(x, y)$ . Donc (III.18) reste vrai quand  $x$  décrit tout segment d'origine  $y$ , contenu dans  $\Omega - K(y)$ ; il existe une forme différentielle  $\omega(z)$  de degré 1 en  $z$ , à coefficients analytiques de  $(x, y)$  telle que :

$$P_{m-l-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_l(x, y) = \int_y^x \omega(z).$$

$P_{m-l-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_l(x, y)$  est donc une fonction analytique de  $(x, y)$ , et l'on poursuit les intégrations;  $E_l(x, y)$ , donc  $E_n(x, y)$ , pour  $n \in (l, m-1)$ , [en utilisant (III.12)], coïncide pour  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$  avec une fonction prolongeable analytiquement en tous les points  $(x, y)$  tels que le segment  $[xy]$  soit contenu dans  $\Omega$  et  $x \notin K(y)$ .

4° *Singularités de la solution élémentaire sur  $\Sigma$ .* — Nous allons préciser la nature des singularités, lorsqu'elles existent, sur  $\Sigma_1 - \Sigma_0$ , des prolongements obtenus précédemment pour la solution élémentaire. Nous supposons d'abord  $m \geq l$ . Nous utiliserons le théorème 4, p. 98 de [9].

(a) *Singularité de  $E_{l-1}(x, y)$  pour  $y \in \Sigma_1$  ( $m \geq l$ ):* Nous supposons  $x$  fixe,  $y \in \Omega$  tendant vers  $\Sigma_1 - \Sigma_0$ ;  $G_1^*(y)$  a donc un point singulier réel lorsque  $y \in \Sigma_1$ . Nous supposons qu'il est quadratique et qu'il n'appartient pas à  $\Pi^*(x-y)$ . Rappelons que [voir (III.3)] :

$$E_{l-1}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_h \frac{[\gamma(x-y)]^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\omega'(\gamma)}{g(y, \gamma)};$$

mais nous savons que  $k(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y), \Pi^*(x-y))$  est un cobord :  $h = \partial h_1$  (voir II, § 1, 1°). Écrivons donc

$$E_{l-1}(x, y) = \text{Cte} \int_{h_1} [\gamma(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\gamma)}{d g(y, \gamma)}.$$

Avec les hypothèses faites, le théorème rappelé [appliqué pour  $q = 1$ ,  $p = 0$ , degré  $\omega'(\eta) = l - 1$ ], s'applique à cette intégrale, et l'on obtient

$$\begin{aligned} E_{l-1}(x, y) &= \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) \log s(y) && (\text{si } l \text{ est impair}), \\ &= \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{\frac{l-3}{2}} && (\text{si } l \text{ est pair}), \end{aligned}$$

$s(y)$  étant une équation locale de  $\Sigma_1$ ,  $\text{Hol}(y)$  désignant une fonction holomorphe de  $y$ .

*Remarque.* — On vérifie facilement que si le point singulier de  $G_1^*(y) \in \Pi^*(x - y)$ , cela entraîne, en général  $y \in K(x)$ . En effet, s'il existe  $\eta$  réel tel que

$$g_1(y, \eta) = \eta(x - y) = \frac{\partial k_p}{\partial \eta_j} + [\eta \cdot y] \frac{\partial k_{p-1}}{\partial \eta_j} + y_j k_{p-1} = 0 \quad (j = 1, \dots, l),$$

cela entraîne, si  $k_{p-1}(\eta) \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} g_1(x, \eta) = \eta(x - y) &= \frac{\partial k_p}{\partial \eta_j} + [\eta \cdot x] \frac{\partial k_{p-1}}{\partial \eta_j} + x_j k_{p-1} + (y_j - x_j) k_{p-1} = 0 \\ & \quad (j = 1, \dots, l). \end{aligned}$$

C'est la condition  $x \in K_1(y)$  (voir prop. 5).

Si  $k_{p-1}(\eta) = 0$ ,  $\eta$  est aussi singulier sur  $\text{Re } G_1^*(x)$  et  $x \in \Sigma_1$ . Nous avons donc à écarter aussi le cas où  $x$  et  $y$  appartiennent à un des hyperplans dont peut être constitué  $\Sigma_1$ , hyperplan correspondant aux points de contact réels, s'ils existent, entre  $K_p^*$  et  $K_{p-1}^*$ .

(b) *Singularité de  $E_n(x, y)$  pour  $x$  ou  $y \in \Sigma_1$ ,  $n \notin \{l, m - 1\}$  ( $m \geq l$ ) :* Utilisons (III. 12<sub>1</sub>) et (III. 6). D'où ( $k$  entier  $\geq 0$ ), si  $y \in \Sigma_1 - \Sigma_0 - K(x)$  :

$$(III. 19_1) \quad \begin{cases} E_{l-1-k}(x, y) = \text{Hol}(y) \log s(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{-k} & (l \text{ impair}), \\ = \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{\frac{l-3}{2}-k} & (l \text{ pair}); \end{cases}$$

si  $x \in \Sigma_1 - \Sigma_0 - K(y)$  :

$$(III. 19_2) \quad \begin{cases} E_{m+k}(x, y) = \text{Hol}(x) \log s(x) + \text{Hol}(x) [s(x)]^{-k} & (l \text{ impair}), \\ = \text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) [s(x)]^{\frac{l-3}{2}-k} & (l \text{ pair}). \end{cases}$$

(c) *Singularité de  $E_n(x, y)$  pour  $n \in \{l, m - 1\}$  ( $m \geq l + 1$ ) :* Utilisons  $P_{m-n} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_n(x, y)$  et (III. 6). D'où :

— si  $y \in \Sigma_1$ ,

$$(III. 20_1) \quad \begin{cases} P_{n-l+1} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) E_n(x, y) = \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) \log s(y) & (l \text{ impair}), \\ = \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{\frac{l-3}{2}} & (l \text{ pair}); \end{cases}$$

— si  $x \in \Sigma_1$ ,

$$(III. 20_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{m-n} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_n(x, y) = \text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) \log s(x) \quad (l \text{ impair}), \\ = \text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) [s(x)]^{\frac{l-3}{2}} \quad (l \text{ pair}). \end{array} \right.$$

(d) Cas où  $m < l$  : Si  $n \in \{m, l-1\}$ , nous savons que le prolongement de  $E_n$  n'est pas singulier sur  $\Sigma_1$ . Sinon, étudions d'abord le cas  $n = m-1$ , en utilisant la formule explicite (III. 17<sub>2</sub>). Seule la première intégrale est singulière; la forme différentielle étant cohomologue à des formes ayant sur  $G^*(y)$  une singularité polaire d'ordre 1, on a, si  $y \in \Sigma_1$  :

$$\begin{aligned} E_{m-1}(x, y) &= \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) \log s(y) \quad (l \text{ impair}), \\ &= \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{\frac{l-3}{2}} \quad (l \text{ pair}). \end{aligned}$$

Utilisons les relations de récurrence et symétrie. Pour  $k$  entier  $\geq 0$ , on a :

— si  $y \in \Sigma_1$  :

$$(III. 21_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{m-1-k}(x, y) = \text{Hol}(y) \log s(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{-k} \quad (l \text{ impair}), \\ = \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{\frac{l-3}{2}} \quad (l \text{ pair}); \end{array} \right.$$

— si  $x \in \Sigma_1$  :

$$(III. 21_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{l+k}(x, y) = \text{Hol}(x) \log s(x) + \text{Hol}(x) [s(x)]^{-k} \quad (l \text{ impair}), \\ = \text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) [s(x)]^{\frac{l-3}{2}} \quad (l \text{ pair}). \end{array} \right.$$

On obtient ces formules à partir des formules (III. 19) en échangeant  $l$  et  $m$ .

*Remarques.* — 1° Si  $l = 2$ ,  $\Sigma_0$  est une réunion finie de droites de  $\mathbf{R}^2$  et les résultats précédents s'appliquent lorsque  $x$  ou  $y \in \Sigma_0 - \Sigma_1$ .

2° L'indice  $\alpha$  des opérateurs auto-adjoints,  $\alpha = \frac{l+m-1}{2}$ , est entier si  $m$  et  $l$  sont de parité différente. On a alors : si  $m \leq l-1$ , le prolongement de  $E(x, y)$  est analytique pour  $x \notin K(y)$ , si  $m \geq l+1$ , il est analytique pour  $[xy] \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ , et singulier pour  $x$  ou  $y \in \Sigma$ .

**PROPOSITION 10.** — *Les solutions élémentaires  $E_n(x, y)$  des opérateurs de Tricomi-Clairaut ( $n$  entier positif ou négatif) :*

$$a_n \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = k_m \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left[ \sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + n \right] k_{m-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

sont égales pour  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$  à des fonctions de  $(x, y)$ , prolongeables analytiquement dans les ouverts suivants ( $\Omega$ , composante connexe de  $\mathbf{R}^l - \Sigma$ , où l'opérateur est strictement hyperbolique) :

- (a)  $y \in \Omega$ ,  $x \in \mathbf{R}^l - K(y)$ , si  $n \leq \inf(l, m) - 1$ ;
- (b)  $y \in \mathbf{R}^l$ ,  $x \in \Omega - K(y)$ , si  $n \geq \sup(l, m)$ ;
- (c)  $x \notin K(y)$ , si  $m \leq n \leq l - 1$ ;
- (d) segment  $xy \subset \Omega$ ,  $x \notin K(y)$ , si  $l \leq n \leq m - 1$ .

Quand  $m$  et  $l$  sont de parité différente, tous les opérateurs autoadjoints correspondants sont du type (c) ou (d). Les singularités du prolongement, lorsqu'elles existent, sont données, pour  $x$  ou  $y \in \Sigma_1$ , par les formules (III. 19), (III. 20), (III. 21).

*Remarque.* — A la fin du paragraphe 4 suivant, nous étudierons le problème du prolongement à travers  $\Sigma$  (au sens des distributions).

### 3. Transformation des intégrales en vue de leur prolongement analytique, lorsque $\alpha$ n'est pas entier ( $m \geq l$ ).

1° *Position du problème.* — L'intégrale (II.38) définit une fonction analytique de  $(x, y)$  pour  $x$  voisin de  $y$  et  $x \notin K(y)$ , d'après le théorème 3, p. 97 de [9]. Mais, sauf si  $\alpha$  est entier ou si l'opérateur est homogène à coefficients constants, nous ne pouvons conclure que pour  $x$  voisin de  $y$ . On peut alors penser utiliser le théorème de Nilsson-Leray (voir [12]) : sa conclusion serait que l'intégrale définit une fonction analytique de  $(x, y)$  hors d'une hypersurface algébrique. Malheureusement, on ne peut l'appliquer dans ce cas; en effet, supposons par exemple  $y$  fixe, et soit  $\Omega$  un voisinage de  $y$  dans  $\mathbf{R}^l$ . Il est possible que

$$\forall x_0 \in \Omega, \quad \{x_0\} \times \Pi^*(x_0 - y) \subset \Omega \times \mathbf{P}^{l-1}$$

s'appuie sur la sous-variété de  $\Omega \times \mathbf{P}^{l-1}$ ,

$$\{(x, \eta) \mid g_1(x, \eta) = g_1(y, \eta) = 0\}$$

qui fait partie du support singulier de la forme différentielle : il peut en effet exister,  $\forall x_0 \in \Omega$ ,  $\eta$  réel tel que  $\eta(x_0 - y) = g_1(x_0, \eta) = 0$ , alors on a aussi  $g_1(y, \eta) = 0$  et de plus ( $j = 1, \dots, l$ ) :

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j} g_1(x_0, \eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_j} g_1(y, \eta) + k_{p-1}(\eta) (x_{0j} - y_j).$$

Puisque nous ne pouvons pas appliquer le théorème cité, nous allons transformer l'intégrale (II.38) en vue de son prolongement analytique.

2° *Étude de limites d'intégrales.* — Intégrons, dans (II.38), sur n'importe quel cycle  $\gamma(\varepsilon)$  construit comme au chapitre I, paragraphe 4, 4°.

Notons  $\gamma'_\varepsilon(W_1^*)$  la partie de  $\gamma_\varepsilon(W_1^*)$  engendrée, lorsque  $\tau$  décrit  $\text{Re } G_1^*(y)$  orientée, par la somme  $\gamma'(\tau, \varepsilon)$  des deux arcs de cercles de la fibre  $d^*(\tau)$ , centrés en  $\tau$  et  $\xi$  et de rayon  $\varepsilon$ , orientés de façon convenable. Posons

$$I(\varepsilon) = \int_{\gamma'_\varepsilon(W_1^*)} F(\lambda) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

Nous allons démontrer que, si  $l - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq m - \frac{1}{2}$ , on a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = 0$ .

En effet, choisissons comme coordonnées locales réelles d'un point  $\eta \in W_1^*$   $(\tau_1, \dots, \tau_{l-2}, \text{Re } z, \text{Im } z)$ , où  $(\tau_i)_{1 \leq i \leq l-2}$  est un système de coordonnées locales réelles de  $\tau \in \text{Re } G_1^*(y)$ , où  $z = g(y, \eta)$  est l'affixe du point  $\eta$  dans la fibre  $d^*(\tau)$ , après avoir choisi un des  $\eta_i$  égal à 1. Les  $(l-1)$  autres coordonnées  $(\eta_i)$  du point  $\eta$  sont donc des fonctions complexes différentiables de  $(\tau_1, \dots, \tau_{l-2}, z)$ . De plus, pour tout  $(\tau_1, \dots, \tau_{l-2})$  fixé, ce sont des fonctions holomorphes de  $z$  puisque toute fibre  $d^*(\tau)$  est une sous-variété analytique complexe de dimension 1 de l'espace projectif complexe  $\mathbf{P}^{l-1}$ , dans laquelle on peut prendre  $z$  comme coordonnée d'un point. Donc  $[\eta(x-y)]^{m-l} \omega'(\eta)$  (après avoir choisi un des  $\eta_i$  égal à 1) s'écrit :

$$[\eta(x-y)]^{m-l} \omega'(\eta) = \omega_1(\tau, z) \wedge \omega_{l-2}(\tau),$$

$\omega_1(\tau, z)$  étant une forme différentielle en  $z$ , holomorphe, à coefficients continus de  $\tau$ ;  $\omega_{l-2}(\tau)$  s'écrivant :

$$\omega_{l-2}(\tau) = d\tau_1 \wedge \dots \wedge d\tau_{l-2}.$$

$\lambda$  est une fonction continue de  $(\tau, z)$ , holomorphe en  $z$  pour chaque  $\tau$  fixé, sur  $\gamma'(\tau, \varepsilon)$ .

Posons [en utilisant (II.35) et (II.37)] :

$$(III.22) \quad A(\eta) = \frac{F(\lambda)}{g(y, \eta)} = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} F(\lambda)}{[g(x, \eta) g(y, \eta)]^{\frac{1}{2}}},$$

où  $\lambda^{\frac{1}{2}} = 1$  et  $[g(x, \eta) g(y, \eta)]^{\frac{1}{2}} = g(y, \eta)$  pour  $x = y$ .

$I(\varepsilon)$  s'écrit donc

$$I(\varepsilon) = \int_{\text{Re } G_1^*(y)} \omega_{l-2}(\tau) \int_{\gamma'(\tau, \varepsilon)} A(\tau, z) \omega_1(\tau, z).$$

Notons  $z_0(\tau)$ , la valeur réelle de  $g(y, \eta)$  au point  $\xi$  où  $d^*(\tau)$  coupe  $G_1^*(x)$ . De (III.22), nous déduisons, si  $\lambda^{\frac{1}{2}} F(\lambda)$  est borné :

$$(III.23) \quad |I(\varepsilon)| \leq \text{Cte} \int_{\text{Re } G_1^*(y)} |\omega_{l-2}(\tau)| \int_{\gamma'(\tau, \varepsilon)} \frac{|dz|}{|z(z - z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}}$$

[où  $\int_{\text{Re } G_1^*(y)} |\omega_{l-2}(\tau)|$  désigne l'intégrale du module du coefficient de  $\omega_{l-2}(\tau)$ , quand on a orienté  $\text{Re } G_1^*(y)$  par  $\omega_{l-2}(\tau) > 0$ ].

Considérons les expressions (II.39) de  $F(\lambda)$ .  $\lambda^{\frac{1}{2}} F(\lambda)$  est holomorphe sauf au voisinage de 0 ou  $\infty$ . Il suffit donc qu'elle soit bornée au voisinage de ces points, c'est-à-dire que

$$\left(\frac{1}{2} + m - \alpha - 1\right) \geq 0 \quad \text{et} \quad (1 + m - \alpha - 1 - m) + l \leq 0;$$

c'est-à-dire

$$(III.24) \quad l - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq m - \frac{1}{2}.$$

Nous supposons cette condition réalisée, donc nous avons l'inégalité (III.23). Nous allons démontrer que

$$(a) \int_{\gamma'(\tau, \varepsilon)} \frac{|dz|}{|z(z - z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}} \leq \text{Cte (indépendante de } \tau, \varepsilon);$$

$$(b) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma'(\tau, \varepsilon)} \frac{|dz|}{|z(z - z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{pour presque tout } \tau \in \text{Re } G_1^*(y).$$

Le théorème de Lebesgue montre que l'intégrale au second membre de (III.23) tend vers zéro, donc il en est de même pour  $I(\varepsilon)$ .

*Démonstration de (a).* — La construction de  $\gamma(\tau, \varepsilon)$  a été faite de telle sorte que, sur  $\gamma'(\tau, \varepsilon)$ , on ait

$$|z| \geq \text{Cte } \varepsilon, \quad |z - z_0(\tau)| \geq \text{Cte } \varepsilon \quad (\text{Cte indépendante de } \tau, \varepsilon).$$

Donc sur  $\gamma'(\tau, \varepsilon)$ , on a

$$\frac{1}{|z(z - z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\text{Cte}}{\varepsilon}.$$

Comme  $\int_{\gamma'(\tau, \varepsilon)} |dz| \leq \text{Cte } \varepsilon$ , le résultat (a) est acquis.

*Démonstration de (b).* — Fixons  $\tau$ , supposons  $z_0(\tau) \neq 0$ , c'est-à-dire  $\tau \notin G_1^*(x)$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, nous avons, par construction sur l'arc de cercle centré en  $\tau$  :

$$|z| \geq \text{Cte } \varepsilon \quad \text{et} \quad |z - z_0(\tau)| \geq \text{Cte},$$

donc sur  $\gamma'(\tau, \varepsilon)$ , nous avons

$$\frac{1}{|z(z - z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\text{Cte}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (\text{Cte peut être fonction de } \tau),$$

d'où

$$\int_{\gamma'(\tau, \varepsilon)} \frac{|dz|}{|z(z - z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}} \leq \text{Cte} \sqrt{\varepsilon}.$$

Or l'ensemble des points  $\tau \in \text{Re } G_1^*(y)$  où  $z_0(\tau) = 0$  est de mesure nulle sur  $\text{Re } G_1^*(y)$ , puisque  $G_1^*(x)$  et  $G_1^*(y)$  n'ont pas de nappe réelle commune. Ceci démontre (b).

PROPOSITION 11. — Si  $l - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq m - \frac{1}{2}$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma'_\varepsilon(W_1^*)} F(\lambda) [\gamma(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\gamma)}{g(y, \gamma)} = 0,$$

$\gamma'_\varepsilon(W_1^*)$  étant la chaîne de  $W_1^*$  engendrée par la somme des deux arcs de cercle orientés, de rayon  $\varepsilon$ , centrés aux extrémités de la coupure  $D_1^*$  dans  $W_1^*$ .

Précisons les déterminations de la forme différentielle.

3° Déterminations de la forme différentielle sur les bords de la coupure  $D_1^*$ .

— Notons  $[F(\lambda)]_+$  et  $[F(\lambda)]_-$  les déterminations de  $F(\lambda)$  sur les bords supérieur et inférieur de la coupure  $D_1^*$ . Dans une fibre  $d^*(\tau)$  où  $z_0(\tau)$

est  $> 0$ , on a, puisque  $\lambda = \frac{g(x, \gamma)}{g(y, \gamma)}$ :

$$\begin{aligned} [\lambda^{m-\alpha-1}]_+ &= |\lambda|^{m-\alpha-1} e^{i\pi(m-\alpha-1)}, \\ [\lambda^{m-\alpha-1}]_- &= |\lambda|^{m-\alpha-1} e^{-i\pi(m-\alpha-1)}. \end{aligned}$$

D'où, si  $z_0(\tau) > 0$ :

$$(III. 25) \quad \begin{cases} [F(\lambda)]_+ = c_\alpha \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1} e^{i\pi(m-\alpha-1)} - Q(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}}, \\ [F(\lambda)]_- = c_\alpha \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1} e^{-i\pi(m-\alpha-1)} - Q(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}}; \end{cases}$$

si  $z_0(\tau) < 0$ , nous devons échanger ces valeurs de  $[F(\lambda)]_+$  et  $[F(\lambda)]_-$ . On en déduit

$$(III. 26) \quad [F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- = (-1)^{m-1} 2 c_\alpha \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1} \cos \pi\alpha - Q(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}};$$

$$(III. 27) \quad [F(\lambda)]_+ - [F(\lambda)]_- = \pm (-1)^m 2 i c_\alpha \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1} \sin \pi\alpha}{(\lambda - 1)^{m-l}},$$

le signe étant  $+$  si  $z_0(\tau) > 0$  et  $-$  si  $z_0(\tau) < 0$ .

4° Supposons  $l$  pair. — Par construction,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\gamma'_\varepsilon(W_1^*) - \gamma'_\varepsilon(W_1^*)]$  est la somme de deux chaînes de  $W_1^*$ : chacune d'elles est fibrée par le segment réel  $[\tau_\varepsilon^i]$  orienté, et a pour base  $\text{Re } G_1^*(y)$ . Précisons les orientations.

Celle de  $\text{Re } G_1^*(y)$  est donnée par (II. 23) que nous pouvons écrire aussi :

$$(III. 28) \quad \frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1} d g_1(y, \eta)} > 0.$$

La fibre de la première chaîne est le bord supérieur de la coupure, orienté par  $dz < 0$ , la fibre de la deuxième chaîne est le bord inférieur de la coupure, orienté par  $dz > 0$  [ $z = g(y, \eta)$ , un des  $\eta_j$  valant 1]. Notons  $D_1'^*$  (resp.  $D_1''^*$ ), la chaîne de  $W_1^*$  fibrée par les segments  $[\tau\xi]$  tels que  $z_0(\tau) < 0$  [resp.  $z_0(\tau) < 0$ ], orientés par  $dz < 0$ ,  $\text{Re } G_1^*(y)$  étant orientée par (III. 28). De la proposition 11, on déduit que, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la limite de

$$\int_{\gamma_\varepsilon(W_1^*) - \gamma'_\varepsilon(W_1^*)} F(\lambda) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}$$

existe et vaut

$$(III. 29) \quad \int_{D_1'^* + D_1''^*} \{ [F(\lambda)]_+ - [F(\lambda)]_- \} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

Précisons l'orientation de  $D_1'^*$  et  $D_1''^*$  (fig. 2).



Fig. 2.

Si sur  $D_1'^*$ , on a  $\frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \neq 0$ , son orientation est

$$(III. 30) \quad \frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1} g_1(y, \eta)} < 0,$$

d'après la règle d'orientation 2.9, p. 84 de [9]. Nous allons montrer que c'est vrai pour  $x$  voisin de  $y$ . En effet, l'hyperbolicité au point  $y$  par rapport à  $N = (1, 0, \dots, 0)$  entraîne  $\frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} \neq 0$  pour  $g(y, \eta) = 0$  et  $\eta$  réel non nul. Or sur  $\text{Re } G_1^*(y)$ , on a

$$\frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} = g_0(\eta) \frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1}, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \neq 0.$$

Il existe par suite un voisinage réel  $\mathcal{V}_1^*$  de  $\text{Re } G_1^*(y)$  dans  $\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$  tel que

$$\eta \in \mathcal{V}_1^* \Rightarrow \frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \neq 0.$$

Il suffit de prendre  $|x - y|$  assez petit pour avoir  $D_1^* \subset \mathcal{V}_1^*$ . L'orientation de  $D_1^{*}$  étant l'opposée de celle définie par (III.30),  $D_1^* = D_1^{*'} - D_1^{*}$  a l'orientation (III.30). De (III.27) et (III.29), on déduit

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon(W_1^*) - \gamma'_\varepsilon(W_1^*)} F(\lambda) [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ = (-1)^m {}_2 i c_\alpha \sin \pi \alpha \int_{D_1^*} \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}}{(\lambda - 1)^{m-1}} [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}. \end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu, si  $l - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq m - \frac{1}{2}$ , d'après la proposition 11 :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon(W_1^*)} F(\lambda) [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ = (-1)^m {}_2 i c_\alpha \sin \pi \alpha \int_{D_1^*} \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}}{(\lambda - 1)^{m-1}} [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\gamma = \gamma(\varepsilon)$  a une partie  $\gamma(W_0^*)$  dans  $W_0^*$ , dont la classe d'homologie  $h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^*, \Pi^*(x - y))$  est celle du cobord de  $\text{Re } G_0^*$  orienté par  $\frac{N \lrcorner \omega'(\eta)}{[\eta(x - y)]^{l-1}} > 0$ . On a donc

$$\int_{\gamma(W_0^*)} F(\lambda) [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} = 2 \pi i \int_{\text{Re } G_0^*} F(\lambda) [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{dg(y, \eta)},$$

la forme différentielle est holomorphe sur  $\text{Re } G_0^*$  puisque  $\lambda = \frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)}$  est  $\neq 0, \infty$  sur  $\text{Re } G_0^*$ .

De (II.38) et de ce qui précède, on déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 12. — *L'opérateur de Tricomi-Clairaut :*

$$\alpha \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \left\{ k_p \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left[ \sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \right] k_{p-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\} g_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

de partie principale  $g \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = g_1 \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) g_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$ , d'ordre  $m \geq l$ ,  $l$  étant pair,  $l - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq m - \frac{1}{2}$ ,  $\alpha$  non entier, strictement hyperbolique en  $y$  par rapport à  $N = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $a$  pour solution élémentaire  $E(x, y)$  la fonction définie pour  $x$  voisin de  $y$  et  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$  par

$$\begin{aligned} E(x, y) = E_0(x, y) + E_1(x, y), \\ \text{(III.31)} \quad E_0(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2 \pi i)^{l-2}} \int_{\text{Re } G_0^*} F(\lambda) [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{dg(y, \eta)}, \end{aligned}$$

Re  $G_0^*$  étant orienté, en dehors de  $\Pi^*(x-y)$ , par  $\frac{N_- \omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}} > 0$ ,  
 $F(\lambda)$  étant donné par (II.39), avec  $\lambda = \frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)}$ ;

$$(III.32) \quad E_1(x, y) = \frac{(-1)^m}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-2}} c_\alpha \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \\ \times \int_{D_1^*} \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}}{(\lambda-1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}, \\ D_1^* = \{ \eta \in \text{Re } \mathbf{P}^{l-1} \mid g_1(x, \eta) g_1(y, \eta) < 0 \},$$

orienté par  $\frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1} g_1(y, \eta)} < 0$ ,  $c_\alpha$  étant donné par (II.39).

Remarques. — 1° Si l'opérateur est homogène à coefficients constants,  $D_1^*$  est vide, donc  $E_1(x, y) = 0$ . C'est la formule d'Herglotz.

2° Si  $\alpha$  est un entier  $n$  compris entre  $l$  et  $m-1$ , on peut aussi décomposer  $E(x, y)$  comme précédemment, avec

$$E_1(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-2}} c_n \int_{D_1^*} \frac{\lambda^{m-n-1}}{(\lambda-1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

5° Supposons  $l$  impair. — Par construction,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\gamma_\varepsilon(W_1^*) - \gamma'_\varepsilon(W_1^*)]$  est la somme de trois chaînes réelles de  $W_1^*$ . L'une est fibrée par la partie réelle de la fibre extérieure au segment  $[\tau_\varepsilon^+]$ , les deux autres sont fibrées par les deux bords du segment  $[\tau_\varepsilon^+]$  : rappelons que la partie réelle de chaque fibre a l'orientation naturelle de la fibre et que la base  $\text{Re } G_1^*(y)$  est orientée de telle sorte que l'orientation produit soit  $\frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0$ .

Notons :

$$(III.33) \quad \begin{cases} D_1^* = \{ \eta \in \text{Re } \mathbf{P}^{l-1} \mid g_1(x, \eta) g_1(y, \eta) < 0 \}, \\ \Delta_1^* = \{ \eta \in \text{Re } \mathbf{P}^{l-1} \mid g_1(x, \eta) g_1(y, \eta) > 0 \}, \end{cases}$$

ces deux ouverts ayant l'orientation, en dehors de  $\Pi^*(x-y)$ ,

$\frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0$ . Comme

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\gamma_\varepsilon(W_1^*) - \gamma'_\varepsilon(W_1^*)] = 2(\Delta_1^* \cap W_1^*) + D_1^{*+} + D_1^{*-},$$

de la proposition 11, on déduit, si  $l - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq m - \frac{1}{2}$  :

$$\int_{\gamma_\varepsilon(W_1^*)} F(\lambda) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon(W_1^*) - \gamma'_\varepsilon(W_1^*)} F(\lambda) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ = \int_{\Delta_1^* \cap W_1^* + D_1^*} \{ [F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- \} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)},$$

où

$$(III.34) \quad \begin{cases} [F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- = {}_2F(\lambda) \text{ est donné par (II.3g) si } \eta \in \Delta_1^*, \\ [F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- \text{ est donné par (III.26) si } \eta \in D_1^*. \end{cases}$$

Comme  $\gamma = \gamma(\varepsilon) = \gamma_\varepsilon(W_1^*) + \gamma(W_0^*) + {}_2\text{Re}(\mathbf{P}^{l-1} - W^*)$ , et comme  $\gamma(W_0^*) + {}_2\text{Re}(\mathbf{P}^{l-1} - W^*)$  coïncide, hors de  $W_1^*$ , avec des cycles dont la classe d'homologie  $h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^*, \Pi^*(x-y))$  est celle de «  ${}_2\Delta_1^*$ , détourné de  $G_0^*$  », nous écrivons :

$$(III.35) \quad \int_{\Delta_1^* \cap W_1^* + D_1^* + \gamma(W_0^*) + {}_2\text{Re}(\mathbf{P}^{l-1} - W^*)} \{ [F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- \} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ = \int_{D_1^* + \Delta_1^* \text{ détourné de } G_0^*} \{ [F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- \} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

PROPOSITION 13. — *L'opérateur de Tricomi-Clairaut :*

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\{ k_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[ \sum_j^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \right] k_{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

de partie principale  $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ , d'ordre  $m \geq l$ ,  $l$  impair,

$l - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq m - \frac{1}{2}$ ,  $\alpha$  non entier,  $a$  pour solution élémentaire  $E(x, y)$ , la fonction définie pour  $x$  voisin de  $y$ , et  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$  par

$$(III.36) \quad E(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{D_1^* + \Delta_1^* \text{ détourné de } G_0^*} \{ [F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- \} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)},$$

l'intégrale ayant le sens de (III.35), la valeur de  $[F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_-$  étant donnée par (III.34), la définition de  $D_1^*$ ,  $\Delta_1^*$  étant donnée par (III.33).

Remarque. — Pour un opérateur homogène à coefficients constants,  $D_1^*$  est vide et  $\Delta_1^* = \text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$  : c'est la formule de PETROWSKY.

**4. Prolongement analytique des solutions élémentaires lorsque  $l$  est pair et  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  $n$  entier positif ou négatif.**

Utilisons donc la décomposition de  $E(x, y)$  donnée dans la proposition 11.

1° *Prolongement analytique de  $E_0(x, y)$ .* — Notons  $\Omega_0$  une composante connexe de  $\mathbf{R}^l - \Sigma_0$ . Quand  $x$  et  $y$  varient dans  $\Omega_0$ , on sait que  $\text{Re } G_1^*(x) \cap \text{Re } G_0^*$  et  $\text{Re } G_1^*(y) \cap \text{Re } G_0^*$  sont vides. Donc dans l'intégrale (III.31),  $\lambda$  reste  $\neq 0$ ,  $\infty$  sur  $\text{Re } G_0^*$ . Elle définit donc une fonction analytique de  $(x, y)$  pourvu que  $\text{Re } G_0^*$  et  $\text{Re } \Pi^*(x - y)$  soient en position générale, c'est-à-dire  $x \notin K_0(y)$ , (théorème 3, p. 97 de [9]).

2° *Étude de l'intégrale donnant  $E_1(x, y)$ .* — (III.32) est l'intégrale réelle, convergente, sur un ouvert de  $\text{Re } \mathbf{P}^{l-1}$ , d'une forme différentielle singulière au bord, ceci ne se prêtant pas de façon commode à l'étude de son prolongement analytique, nous allons la transformer en l'intégrale d'une forme différentielle holomorphe sur un cycle compact.

(a) *Transformation de l'intégrale  $J(x, y)$  ( $x$  voisin de  $y$ ) :* Posons donc, si  $l - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq m - \frac{1}{2}$ :

$$E_1(x, y) = \frac{(-1)^m}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-2}} c_x \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} J(x, y).$$

Soit  $D^{**}$  l'ouvert de  $S^{l-1}$  (sphère unité de  $\text{Re } \Xi^l : \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0$ ),

où  $g(x, \eta) g(y, \eta) < 0$ , orienté par  $\frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1} g(x, \eta)} > 0$ .

D'où

$$(III.37) \quad J(x, y) = \frac{1}{2} \int_{D^{**}} \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}}{(\lambda-1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

Introduisons deux variables supplémentaires; dans le produit  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^{l+1}$ , de coordonnées  $(t, w, \eta)$ , considérons la variété  $V(x, y)$  :

$$(III.38) \quad tw - g(x, \eta) = w + tg(y, \eta) = \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0.$$

Posons

$$(III.39) \quad \varpi(t, w, \eta) = \frac{dt \wedge dw \wedge d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l}{d[tw - g(x, \eta)] \wedge d[w + tg(y, \eta)] \wedge d\left[\sum_1^l \eta_j^2\right]} \Big|_{V(x, y)}$$

qui, on le vérifie, vaut

$$(III.40) \quad \varpi(t, w, \eta) = \frac{\omega'(\eta)}{4w}.$$

$\varpi(t, w, \eta)$  est holomorphe sur la partie régulière de  $V(x, y)$ . Sur la partie de  $V(x, y)$ , où  $\eta$  est réel et  $g(x, \eta) g(y, \eta) < 0$ , on a, puisque

$t^2 = -\frac{g(x, \eta)}{g(y, \eta)} = -\lambda$ ,  $t$  et  $w$  réels,  $|\lambda| = t^2$  et

$$\begin{aligned} \text{(III.41)} \quad & \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}}{(\lambda-1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ &= (-1)^{m-l-1} \frac{t^{2(m-\alpha-1)}}{(t^2+1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{t\omega'(\eta)}{w} \\ &= (-1)^{m-1} \times 4 \times \frac{t^{2(m-\alpha)-1}}{(t^2+1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \varpi(t, w, \eta), \end{aligned}$$

où  $t^{2(m-\alpha)-1}$  a le signe de  $t$ .

Notons :  $\Gamma(x, y)$  la partie de  $\text{Re } V(x, y)$  où  $\eta \in D^{**}(x, y)$ , orientée par

$$\text{(III.42)} \quad t \frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} [\eta(x-y)] \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)} > 0,$$

$\Gamma^+(x, y)$ , [resp.  $\Gamma^-(x, y)$ ], la partie de  $\Gamma(x, y)$  où  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ),  
 $p$  la projection :

$$p(t, w, \eta) = \eta.$$

On a donc

$$p(\Gamma^+(x, y)) = D^{**} \quad \text{et} \quad p(\Gamma^-(x, y)) = -D^{**}.$$

D'où

$$J(x, y) = (-1)^{m-1} \int_{\Gamma(x, y)} \frac{t^{2(m-\alpha)-1}}{(t^2+1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \varpi(t, w, \eta)$$

à condition que l'intégrale ait un sens. Nous allons choisir :  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  
 $n$  entier appartenant à  $\{l, m\}$ , de façon à avoir une forme différentielle  
holomorphe sur la partie régulière de  $V(x, y)$ , puis nous allons démontrer  
que  $\Gamma(x, y)$  est un cycle à support compact de  $\text{Re } V(x, y)$ , qu'on peut  
décomposer en la somme de  $p$  cycles disjoints  $\Gamma_j(x, y)$ , chacun d'eux étant  
relatif à la sous-variété de  $V(x, y)$  où  $\eta(x-y) = 0$ ; que  $\text{Re } V(x, y)$  est  
en général sans singularité ainsi que sa sous-variété où  $\eta(x-y) = 0$ .  
Supposant ceci démontré, on aura

$$\text{(III.43)} \quad \begin{cases} J(x, y) = \sum J_j(x, y), \\ J_j(x, y) = (-1)^{m-1} \int_{\Gamma_j} \frac{t^{2(m-n)}}{(t^2+1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \varpi(t, w, \eta), \end{cases}$$

chaque  $J_j(x, y)$  ayant la forme désirée.

(b) *Le support  $S(\Gamma)$  de  $\Gamma$  est compact.* En effet pour que  $(t, w, \eta) \in S(\Gamma)$ , il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} \eta &\in \bar{D}^{**}, \\ w^2 &= -g(x, \eta) g(y, \eta), \\ t^2 &= -\frac{g(x, \eta)}{g(y, \eta)}, \end{aligned}$$

Donc la projection de  $S(\Gamma)$  sur  $\text{Re } \Xi'$ ,  $\text{pr}_{\text{Re } \Xi'} S(\Gamma)$ , est compacte, sa projection sur  $\mathbf{R}$  (coordonnée  $w$ ), l'est donc aussi, puisque c'est la réunion des deux compacts images de  $\bar{D}^{**}$  par les deux applications continues sur  $\bar{D}^{**}$  :

$$\eta \rightsquigarrow [-g(x, \eta) g(y, \eta)]^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \eta \rightsquigarrow -[-g(x, \eta) g(y, \eta)]^{\frac{1}{2}}.$$

$$S(\Gamma) \subset \text{Re } \mathbf{P}^1 \times \text{proj}_R S(\Gamma) \times \text{proj}_{\text{Re } \Xi'} S(\Gamma)$$

est fermé dans un compact, donc compact.

(c) *Décomposition de  $\Gamma$  pour  $|x - y|$  petit.* — Décomposons  $D^{**}$ . Nous supposons l'opérateur strictement hyperbolique en  $y$  par rapport à  $N = (1, 0, \dots, 0)$ . Pour chaque  $\hat{\eta} = (\eta_2, \dots, \eta_l)$  réel non nul,  $g(y, \eta) = g(y, \eta_1, \hat{\eta})$  a  $m$  racines réelles distinctes en  $\eta_1, \eta_{1j}(y, \hat{\eta}), 1 \leq j \leq m$  (que nous supposons par exemple croissantes avec  $j$ ). De plus  $g_{\eta_1}(y, \eta_1, \hat{\eta})$  a, pour  $\hat{\eta}$  réel non nul,  $(m - 1)$  racines réelles en  $\eta_1$  séparant les  $\eta_{1j}(y, \hat{\eta})$ . Les racines en  $\eta_1$  de  $g(x, \eta_1, \hat{\eta})$  dépendant continûment de  $(x, \hat{\eta}) \forall \hat{\eta}_0$  réel,  $\exists \varepsilon(\hat{\eta}_0) > 0$  tel que

$$\begin{aligned} |x - y| < \varepsilon(\hat{\eta}_0) \quad \text{et} \quad |\hat{\eta} - \hat{\eta}_0| < \varepsilon(\hat{\eta}_0) \\ \Rightarrow \text{les } (m - 1) \text{ racines réelles en } \eta_1 \text{ de } g_{\eta_1}(y, \eta_1, \hat{\eta}) \text{ séparent les } m \text{ racines} \\ \text{réelles } \eta_{1j}(x, \hat{\eta}) \text{ de } g(x, \eta_1, \hat{\eta}). \end{aligned}$$

On en déduit :

il existe  $\varepsilon > 0$  tel que les  $(m - 1)$  racines réelles en  $\eta_1$  de  $g_{\eta_1}(y, \eta_1, \hat{\eta})$  séparent les  $m$  racines réelles  $\eta_{1j}(x, \hat{\eta})$  de  $g(x, \eta_1, \hat{\eta})$  pour  $|x - y| < \varepsilon$ .

En effet, à cause de l'homogénéité en  $\eta$  de  $g(x, \eta)$ , il suffit de supposer  $\hat{\eta} \in S^{l-2}$ . Du recouvrement de  $S^{l-2}$  par les ouverts  $|\hat{\eta} - \hat{\eta}_0| < \varepsilon(\hat{\eta}_0), \hat{\eta}_0 \in S^{l-2}$ , extrayons un recouvrement fini  $(\hat{\eta}_i^l)$ , et prenons  $\varepsilon = \inf \varepsilon(\hat{\eta}_i^l)$ . Ceci entraîne, pour  $|x - y|$  petit, sur chaque droite  $\mathcal{D}(\hat{\eta})$  réelle ( $\eta_1$  varie,  $\hat{\eta}$  est réel fixé), la situation suivante (fig. 3) :

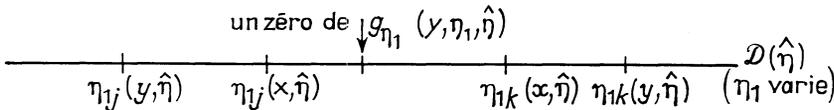


Fig. 3.

Les intervalles  $(\eta_{1j}(y, \hat{\eta}), \eta_{1j}(x, \hat{\eta}))$  sont deux à deux disjoints, ils peuvent être réduits à des points, en particulier quand  $\eta_{1j}(y, \hat{\eta})$  est racine de  $g_0(\eta_{1j}, \hat{\eta})$ . Sur chacun de ces intervalles, on a  $g(x, \eta) g(y, \eta) \leq 0$ ,  $g_{\eta_{1j}}(y, \eta)$  ne s'annule pas et a un signe fixe. En dehors de la réunion de ces intervalles, on a  $g(x, \eta) g(y, \eta) > 0$ . Précisons le signe de  $g_{\eta_{1j}}(y, \eta_{1j}, \hat{\eta})$  sur le premier intervalle  $(\eta_{11}(y, \hat{\eta}), \eta_{11}(x, \hat{\eta}))$ . De la relation

$$g(y, \eta) = [\eta_{11} - \eta_{11}(y, \hat{\eta})] g_{\eta_{11}}(y, \eta_{11}, \hat{\eta}) + \dots,$$

on déduit que le signe cherché est l'opposé du signe qu'a  $g(y, \eta)$  lorsque  $\eta_{11} < \eta_{11}(y, \hat{\eta})$ , c'est-à-dire l'opposé du signe de  $g(y, \eta)$  lorsque  $\eta_{11} \rightarrow -\infty$  sur  $\mathcal{D}(\hat{\eta})$ . D'où

$$\begin{aligned} \text{signe } g_{\eta_{11}}(y, \eta_{11}, \hat{\eta}) \text{ sur } [\eta_{11}(y, \hat{\eta}), \eta_{11}(x, \hat{\eta})] \\ &= - \text{signe } g(y, -1, 0, \dots, 0) \\ &= (-1)^{m+1} \text{signe } g(y, 1, 0, \dots, 0) \\ &= (-1)^{m+1} \text{signe } g(y, N) \quad \text{où } N \in \Delta^+(y). \end{aligned}$$

Plus généralement, on a

$$(III.44) \quad \text{signe } g_{\eta_{1j}}(y, \eta) \text{ sur } [\eta_{1j}(y, \hat{\eta}), \eta_{1j}(x, \hat{\eta})] = (-1)^{m+j} \text{signe } g(y, N).$$

Notons alors (pour  $x$  voisin de  $y$ ) :

$$(III.45) \quad \begin{cases} D_j(x, y) = \{ \eta \in \text{Re } \Xi^l \mid \eta_{11} \in ] \eta_{1j}(y, \hat{\eta}), \eta_{1j}(x, \hat{\eta})[ \}, \\ D_j^*(x, y) \text{ sa trace sur la sphère } \sum_k \eta_k^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Il y a autant de cônes  $D_j(x, y)$  que de nappes à  $\text{Re } G_1(x)$ , c'est-à-dire  $p$ . Remarquons que

$$(III.46) \quad D_j(x, y) = \Delta_j(y) \cup \Delta_j(x) - \Delta_j(y) \cap \Delta_j(x),$$

$$(III.47_1) \quad \Delta_j(x) = \{ \eta \in \text{Re } \Xi^l \mid \eta_{11} < \eta_{1j}(x, \hat{\eta}) \},$$

$$(III.47_2) \quad \partial \Delta_j(x) = G_j(x) = \{ \eta \in \text{Re } \Xi^l \mid \eta_{11} = \eta_{1j}(x, \hat{\eta}) \}.$$

On a les propriétés

$$(III.48) \quad \begin{aligned} \eta \in D_{m-j+1}(x, y) &\Leftrightarrow -\eta \in D_j(x, y), \\ \begin{cases} \bar{D}_j^*(x, y) \cap \bar{D}_k^*(x, y) = \emptyset, & \text{si } j \neq k, \\ \bar{D}_j^*(x, y) \cap G_{0l}^* = \emptyset, & \text{si } j \neq l, \end{cases} \\ \eta \in D^{**} &\Leftrightarrow \exists_j \text{ tel que } \eta \in D_j^*(x, y), \end{aligned}$$

$g_{\eta_{1j}}(y, \eta) \neq 0$  sur  $\bar{D}_j^*(x, y)$ , et son signe est  $(-1)^{j+m}$  signe  $g(y, N)$ .

On a donc décomposé  $D^{**} = \sum_j D_j^{**}(x, y)$ , l'orientation de  $D_j^{**}(x, y)$  étant

$$(-1)^{j+m} \text{ signe } g(y, N) [\eta(x-y)] \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)} > 0.$$

On a donc décomposé  $\Gamma(x, y) = \sum_j \Gamma_j(x, y)$ , de telle sorte que  $\Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset$ ,

pour  $j \neq k$ , et l'orientation de  $\Gamma_j(x, y)$  sur  $V(x, y)$  est

$$(III.49) \quad (-1)^{j+m} \text{ signe } g(y, N) [\eta(x-y)] \varpi(t, w, \eta) > 0,$$

d'après (III.40) et (III.42).

(d) *Régularité de  $\text{Re } V(x, y)$*  : Un point  $(t, w, \eta)$  réel est singulier sur  $V(x, y)$  si, et seulement si, il existe  $\alpha, \beta, \gamma$  réels non tous nuls tels que

$$tw - g(x, \eta) = w + tg(y, \eta) = \sum_1 \eta_j^2 - 1 = 0,$$

$$\alpha d[tw - g(x, \eta)] + \beta d[w + tg(y, \eta)] + \gamma [\eta d\eta] = 0,$$

si  $t$  n'est pas voisin de l'infini ( nous notons  $\eta d\eta$  la forme différentielle  $\sum_{j=1}^l \eta_j d\eta_j$  ). On en déduit :

$$\alpha w + \beta g(y, \eta) = \alpha t + \beta = -\alpha dg(x, \eta) + \beta t dg(y, \eta) + \gamma [\eta d\eta] = 0.$$

Des deux premières équations, on déduit :

$$w - tg(y, \eta) = 0,$$

puis en tenant compte des équations de  $V(x, y)$  :

$$w = g(x, \eta) = tg(y, \eta) = 0.$$

*Premier cas :  $t \neq 0$ .*

$$w = g(x, \eta) = g(y, \eta) = -\alpha [dg(x, \eta) + t^2 dg(y, \eta)] + \gamma [\eta d\eta] = 0.$$

Le point  $z = \frac{x + t^2 y}{1 + t^2}$  est réel et appartient à  $]x, y[$ . On a donc

$$g(z, \eta) = -\alpha (1 + t^2) dg(z, \eta) + \gamma [\eta d\eta] = 0.$$

On en déduit  $dg(z, \eta) = 0$ .

En effet, multiplions la forme  $-\alpha(1+t^2)dg(z, \eta) + \gamma[\eta d\eta]$  par le vecteur  $\eta$ , et utilisons l'homogénéité en  $\eta$  de  $g(z, \eta)$ , puis  $g(z, \eta) = 0$ ; on obtient

$$\gamma\eta \cdot \eta d\eta = \gamma = 0 \quad \left( \text{puisque } \sum \eta_j^2 = 1 \right).$$

D'où  $\alpha dg(z, \eta) = 0$ ;  $\alpha$  ne pouvant être aussi nul, on a le résultat.

*Remarque.* — Nous utiliserons plusieurs fois par la suite ce raisonnement; nous le mentionnerons comme ceci : tel terme (ici  $\gamma[\eta d\eta]$ ) est supprimé par produit intérieur par le vecteur  $\eta$ .

Résumons : Pour que  $(t, w, \eta)$  soit un point singulier réel sur  $\text{Re } V(x, y)$ ,  $t \neq 0, \infty$ , il faut et il suffit qu'il existe  $z \in ]x, y[$  tel que  $G^*(z)$  ait le point singulier réel  $\eta$ ; le point  $(t, 0, \eta)$ , où  $(1+t^2)z = x + t^2y$ , est alors singulier sur  $\text{Re } V(x, y)$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que cela ait lieu est que  $]x, y[$  coupe  $\Sigma$ .

*Deuxième cas :  $t = 0$ .*

$$w = g(x, \eta) = t = -\alpha dg(x, \eta) + \gamma[\eta d\eta] = 0.$$

D'où (par produit intérieur par  $\eta$ ) :  $dg(x, \eta) = 0$ . Cela équivaut à  $x \in \Sigma$ .

Au voisinage de  $t = \infty$ , nous prendrons pour équations de  $V(x, y)$  :

$$w - tg(x, \eta) = wt + g(y, \eta) = \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0.$$

Les calculs sont analogues aux précédents, à condition d'échanger  $x$  et  $y$ , remarque que nous utiliserons fréquemment par la suite.

On a donc obtenu ceci : pour que  $V(x, y)$  ait un point singulier réel, il faut et il suffit que le segment fermé  $(x, y)$  coupe  $\Sigma$  en  $z$ .  $G^*(z)$  a alors un point singulier réel  $\eta$ ; si  $z \neq x$  et  $y$ , on en déduit deux points singuliers distincts sur  $V(x, y)$ ,  $(t, 0, \eta)$  et  $(-t, 0, \eta)$ . Si  $z = x$ , le point singulier correspondant sur  $V(x, y)$  est  $(0, 0, \eta)$ ; si  $z = y$ , c'est  $(\infty, 0, \eta)$ .

Pour le moment, nous supposons l'opérateur strictement hyperbolique au voisinage de  $y$  :  $(x, y)$  ne coupe pas  $\Sigma$  et  $\text{Re } V(x, y)$  est donc sans singularité.

(e) *Régularité de  $\text{Re } P(x, y)$ .* — Notons  $P(x, y)$ , la sous-variété de  $V(x, y)$  où  $\eta(x-y) = 0$ . [Chaque  $\Gamma_j$  est relatif à  $P(x, y)$ , mais comme  $\Gamma_j$  est réel il nous suffit de considérer  $\text{Re } P(x, y)$ ]. Un point  $(t, w, \eta)$  de  $\text{Re } P(x, y)$  est singulier, s'il existe  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  réels non tous nuls tels que

$$w = g(x, \eta) = g(y, \eta) = \eta(x-y) = \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0,$$

$$\alpha d[tw - g(x, \eta)] + \beta d[w + tg(y, \eta)] + \gamma[(x-y) d\eta] + \delta[\eta d\eta] = 0.$$

D'où

$$\alpha[t dw - dg(x, \eta)] + \beta[dw + t dg(y, \eta)] + \gamma[(x - y) d\eta] + \delta[\eta d\eta] = 0.$$

Soit  $\alpha t + \beta = 0$ , et de la relation

$$dg(x, \eta) = dg(y, \eta) + k_{m-1}(\eta)[(x - y) d\eta],$$

on déduit

$$-\alpha(1 + t^2) dg(y, \eta) + [\gamma - \alpha k_{m-1}(\eta)][\eta d\eta] + \delta[\eta d\eta] = 0$$

Le dernier terme est supprimé par produit intérieur par  $\eta$ , et la condition écrite exprime ceci :  $\text{Re } G^*(y)$  et  $\text{Re } \Pi^*(x - y)$  ne sont pas en position générale, c'est-à-dire  $x \in K(y)$ .

Le calcul précédent suppose  $t$  non voisin de l'infini. Sinon, d'après la remarque faite, on échange  $x$  et  $y$  et la conclusion  $x \in K(y)$  est la même.

*Remarque.* —  $\Gamma_j$  est en fait relatif à la nappe de  $\text{Re } P(x, y)$  où

$$w = g_j(x, \eta) = g_j(y, \eta) = \eta(x - y) = \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0,$$

qui est sans singularité si  $x \notin K_j(y)$ , nappe de  $K(y)$  associée à la nappe  $G_j(y)$  de  $G(y)$ .

*Conclusion.* — Les intégrales  $J_j(x, y)$  [définies par (III.43)], ont un sens; elles définissent des fonctions analytiques de  $(x, y)$  pour  $x$  voisin de  $y$  et  $x \notin K_j(y)$  (théorème 3, p. 97 de [9]);  $J(x, y)$  [donc  $E_1(x, y)$ ], est donc une fonction analytique de  $(x, y)$  pour  $x$  voisin de  $y$  et  $x$  n'appartenant pas à la partie de  $K(y)$  associée à la variété  $G_1(y)$ .

3° *Prolongement analytique de  $E_1(x, y)$ .* — Nous allons prolonger la définition de  $\Gamma(x, y)$ . Supposons d'abord  $y$  fixe et  $x$  variant dans  $\Omega(y)$ , réunion des segments  $[x, y]$  qui ne coupent pas  $\Sigma$ .  $\Omega(y)$  est étoilé par rapport à  $y$ , donc simplement connexe et contenu dans  $\Omega$  composante connexe de  $\mathbf{R}' - \Sigma \ni y$ .

D'après le lemme 1, on peut définir, pour tout  $x \in \Omega(y)$ ,  $m$  nappes  $G_j(x)$ , disjointes (hors de 0), de  $G(x)$  et  $m$  domaines  $\Delta_j(x)$  de  $\text{Re } \Xi'$ , de bord  $G_j(x)$ , coïncidant au voisinage de  $y$  avec ceux définis au n° 2 précédent. Définissons alors  $D_j(x, y)$ , pour  $x \in \Omega(y)$ , par (III.46). De la relation  $g(x, \eta) - g(y, \eta) = [\eta(x - y)] k_{m-1}(\eta)$ , on déduit

$$G(x) \cap \Pi(x - y) = G(y) \cap \Pi(x - y).$$

$G(x) \cap \Pi(x - y)$  est donc indépendant de  $x$ , quand  $x$  décrit un segment d'origine  $y$ . On a donc,  $\forall x \in \Omega(y)$  :

$$(III.50) \quad \begin{cases} G_j(x) \cap \Pi(x - y) = G_j(y) \cap \Pi(x - y), \\ \Delta_j(x) \cap \Pi(x - y) = \Delta_j(y) \cap \Pi(x - y). \end{cases}$$

Montrons que cela entraîne  $G_j(x) \cap G_k(y) = \{o\}$ , si  $j \neq k$  et  $x \in \Omega(y)$ .

Supposons en effet qu'il existe  $\eta \neq o \in G_j(x) \cap G_k(y)$ . Ou bien  $\eta(x-y) = o$ , et (III. 50) entraîne  $\eta \in G_j(y) \cap G_k(y)$ ; ce qui est impossible. Ou bien  $k_{m-1}(\eta) = k_m(\eta) = o$ , et  $\eta \in G(x) \forall x \in \Omega(y)$ , donc  $\eta \in G_k(x)$ , c'est aussi impossible.

Par suite, on a, puisque  $\Delta_j(x)$  dépend continûment de  $x$ , son bord étant  $G_j(x)$  :

$$(III. 51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Delta}_j(x) \subset \{o\} \cup \Delta_k(y), \quad \bar{\Delta}_j(y) \subset \{o\} \cup \Delta_k(x), \\ \forall x \in \Omega(y), \quad \forall j < k. \end{array} \right.$$

D'où

$$\bar{D}_j^*(x, y) \cap \bar{D}_k^*(x, y) = \emptyset, \quad \forall x \in \Omega(y), \quad \forall j \neq k.$$

En effet, supposons  $j \neq k$ . De (III. 46), on déduit

$$\begin{aligned} \bar{D}_k(x, y) &\subset \bar{\Delta}_k(x) \cup \bar{\Delta}_k(y) - \Delta_k(x) \cap \Delta_k(y), \\ \bar{D}_j(x, y) &\subset \bar{\Delta}_j(x) \cup \bar{\Delta}_j(y) - \Delta_j(x) \cap \Delta_j(y). \end{aligned}$$

D'où, d'après (III. 51) :

$$\bar{D}_j(x, y) \subset \{o\} \cup \Delta_k(x) \cap \Delta_k(y).$$

C. Q. F. D.

De façon analogue, on a

$$\bar{D}_j^*(x, y) \cap G_{ol}^* = \emptyset, \quad \forall x \in \Omega(y), \quad \forall j \neq l.$$

*Conclusion.* — La décomposition de  $D^{**} = \sum_j D_j^{**}$ , faite au 2° précédent (donc la décomposition de  $\Gamma = \sum \Gamma_j$ ), est valable  $\forall x \in \Omega(y)$ . On peut aussi la prolonger en faisant varier  $y$ , de sorte que le segment  $(x, y)$  soit contenu dans  $\Omega$ . L'intégrale (III. 43) où  $\Gamma_j(x, y)$  a l'orientation (III. 49), définit un prolongement de  $J_j(x, y)$ . L'étude faite dans les paragraphes (d) et (e) précédents montrent l'analyticité du prolongement en tous les points  $(x, y)$  tels que  $(x, y) \subset \Omega$ ,  $x \notin K_j(y)$ ,  $\text{Re } V(x, y)$  étant sans singularité,  $\text{Re } P(x, y)$  étant une sous-variété régulière de  $V(x, y)$ .

*Remarques.* — 1° Dans  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^{l+1}$ , on peut aussi introduire  $V_1(x, y)$  :

$$tw - g_1(x, \eta) = w + tg_1(y, \eta) = \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0,$$

puis  $\varpi_1(t, w, \eta)$ , obtenue en remplaçant  $g(x, \eta)$  et  $g(y, \eta)$  par  $g_1(x, \eta)$  et  $g_1(y, \eta)$  dans  $\varpi(t, w, \eta)$ , puis de façon analogue  $\Gamma_1$ . D'où

$$(III.43) \quad E_1(x, y) = \text{Cte} \int_{\Gamma_1} \frac{t^{2(m-n)}}{(t^2 + 1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\varpi_1(t, w, \eta)}{g_0(\eta)},$$

$g_0$  ne s'annulant pas sur  $\Gamma_1$  si  $x$  et  $y \in \Omega$ .

2° Si  $\alpha$  est un entier appartenant à  $(l, m-1)$ ,  $m \geq l+1$ , on peut démontrer de façon analogue la décomposition de  $E_1(x, y)$  en somme de  $p$  fonctions analytiques pour  $x \notin K_1(y)$ .

3° J'ignore si l'on peut appliquer aux intégrales (III.43) le théorème de Nilsson-Leray (voir [12]) déjà cité, en le modifiant puisque la forme différentielle n'est pas définie sur un espace projectif. Pour  $(x, y)$  réel, le support singulier de la forme différentielle  $Ss[\omega]$  est vide. Mais pour  $(x, y)$  complexe,  $Ss[\omega]$  contient les deux hyperplans  $t+i=0$ ,  $t-i=0$ ; ce sont des surfaces développables. La proposition 3 de [13] ne peut être utilisée et l'on n'a que des conditions suffisantes d'appui. Ceci est gênant pour savoir si le théorème est effectivement applicable.

4° *Prolongement analytique des solutions élémentaires.* — Notons donc  $\Omega$  une composante connexe de  $\mathbf{R}^l - \Sigma$  où l'opérateur est strictement hyperbolique (théorème 1).

(a) Si  $m \geq l$ , utilisons les résultats des nos 1° et 3° précédents, par exemple pour  $\alpha = l - \frac{1}{2}$ . La somme des deux intégrales  $E_0(x, y)$ , (III.31), et  $E_1(x, y)$ , (III.32), se prolonge analytiquement en tout point  $(x, y)$  tel que  $(x, y) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ . Les relations de récurrence (III.12) et (III.12<sub>1</sub>) montrent qu'on a la même conclusion pour  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  $n$  entier positif ou négatif.

(b) Si  $m < l$ , multiplions  $a_\alpha \left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  par  $b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  homogène, de sorte que  $a_\alpha b$  soit strictement hyperbolique en  $y$ , et d'ordre  $m' \geq l$ . Supposons  $\alpha = l - \frac{1}{2}$  et  $m' = l$ . D'après (III.31) et (III.43<sub>1</sub>), on a

$$(III.52) \quad E_{l-\frac{1}{2}, ab} = \text{Cte} \int_{h(G_0^*, \Pi^*(x-y))} \frac{\left[ \frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)} \right]^{-\frac{1}{2}}}{g_1(y, \eta) b(\eta)} \frac{\omega'(\eta)}{dg_0(\eta)} \Big|_{G_0^*} \\ + \text{Cte} \int_{h(B^*, \Pi^*(x-y))} \frac{\left[ \frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)} \right]^{-\frac{1}{2}}}{g_1(y, \eta) g_0(\eta)} \frac{\omega'(\eta)}{db(\eta)} \Big|_{B^*} \\ + \text{Cte} \int_{h(r_+, P_1(x, y))} \frac{dt \wedge dw \wedge d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l}{\left\{ \begin{array}{l} b(\eta) g_0(\eta) d[tw - g_1(x, \eta)] \\ \wedge d[w + tg_1(y, \eta)] \wedge d\Sigma \eta_j^2 \end{array} \right\}} \Big|_{r_+}.$$

Calculons maintenant  $E_{l-\frac{1}{2}}(x, y) = b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E_{l-\frac{1}{2}, ab}$ , en utilisant les formules (16.3), p. 69 de [10] et (10.6), p. 97 de [9]. Nous obtenons, en dérivant la première intégrale, la somme d'une intégrale sur  $h$  et d'une intégrale sur  $\partial h$  de classes de formes différentielles où  $b(\eta)$  ne figure plus; en dérivant la deuxième intégrale, 0; en dérivant la troisième intégrale, une intégrale dans laquelle  $b(\eta)$  ne figure plus. Ces intégrales se prolongent donc analytiquement en tout point  $(x, y)$  tel que  $(xy) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ .

On obtient la même conclusion que pour  $m \geq l$  et pour tout  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ .

### 5° Singularités du prolongement sur $\Sigma$ .

(a) Si  $m \geq l$ , supposons d'abord  $l - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq m - \frac{1}{2}$  et utilisons la décomposition de  $E(x, y)$ . D'après (III.31), le prolongement de l'intégrale  $E_0(x, y)$  n'est pas singulier si  $x$  ou  $y \in \Sigma_1 - \Sigma_0$ . Étudions donc les singularités du prolongement de  $E_1(x, y)$ . Supposons que le point singulier réel de  $G_1^*(x)$ , pour  $x \in \Sigma_1$ , est quadratique. Pour nous ramener exactement aux hypothèses du théorème 4, p. 98 de [9], nous considérons dans  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^{l+1}$ ,  $\mathfrak{V}_1(y) : w + tg_1(y, \eta) = \sum \eta_j^2 - 1 = 0$ , qui est sans point singulier réel, puis  $V_1(x, y)$  sous variété de  $\mathfrak{V}_1(y)$  où  $tw - g_1(x, \eta) = 0$ . On vérifie que le point singulier  $(0, 0, \eta)$  sur  $V_1(x, y)$ , si  $x \in \Sigma_1$ , est alors quadratique aussi, si et seulement si  $g_1(y, \eta) \neq 0$ , c'est-à-dire pour  $x$  n'appartenant pas à la partie de  $\Sigma_1$  constituée des hyperplans caractéristiques, s'ils existent, correspondant aux points de contact réels de  $K_p^*$  et  $K_{p-1}^*$  (voir II, § 2, 2°). Faisons cette hypothèse. Nous avons donc, en posant

$$\pi(t, w, \eta) = \frac{t^{2(m-n)}}{(t^2 + 1)^{m-l}} \frac{[\eta(x-y)]^{m-l}}{g_0(\eta)} \frac{dt \wedge dw \wedge d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l}{d[w + tg_1(y, \eta)] \wedge d[\sum \eta_j^2]} \Big|_{\mathfrak{V}_1(y)}$$

$$E_1(x, y) = \text{Cte} \int_{\Sigma \Gamma_j} \frac{\pi(t, w, \eta)}{d[tw - g_1(x, \eta)]} \Big|_{V_1(x, y)}$$

Appliquons à cette intégrale le théorème cité (avec  $q = 1$ ,  $p = 0$ , degré de la forme différentielle =  $l$  pair). Nous obtenons ceci, après avoir aussi utilisé les relations de récurrence.

Si  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  $n \in (l, m)$ ,

$$(III.53_1) \quad \begin{cases} E_{n-\frac{1}{2}}(x, y) = \text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) \log s(x), & x \in \Sigma_1 - \Sigma_0 - K(y) \\ = \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) \log s(y), & y \in \Sigma_1 - \Sigma_0 - K(y); \end{cases}$$

Si  $\alpha = l - \frac{1}{2} - k$ ,  $k$  entier  $\geq 0$ ,

$$(III.53_2) \quad \begin{cases} E_{l-\frac{1}{2}-k}(x, y) = \text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) \log s(x), & x \in \Sigma_1, \\ = \text{Hol}(y) \log s(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{-k}, & y \in \Sigma_1; \end{cases}$$

Si  $\alpha = m - \frac{1}{2} + k$ ,  $k$  entier  $\geq 0$  :

$$(III.53_3) \quad \begin{cases} E_{m-\frac{1}{2}+k}(x, y) = \text{Hol}(x) \log s(x) + \text{Hol}(x) [s(x)]^{-k}, & x \in \Sigma_1, \\ = \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) \log s(y), & y \in \Sigma_1. \end{cases}$$

(b) Si  $m < l$ , reprenons le calcul de  $E_{l-\frac{1}{2}}(x, y)$  à l'aide de (III.52); seule la dernière intégrale est singulière, si  $x \in \Sigma_1$ , et l'on se ramène à une forme différentielle à singularité polaire d'ordre 1 là où  $tw - g_1(x, \eta) = 0$ . On obtient donc des résultats analogues aux précédents que nous précisons comme suit; posons  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  $n$  entier positif ou négatif. Si  $n$  est compris entre  $l$  et  $m$ ,  $E(x, y)$  a une singularité logarithmique si  $x$  ou  $y \in \Sigma_1$ ; si  $n = \inf(l, m) - k$ ,  $k$  entier  $> 0$ ,  $E(x, y)$  a une singularité logarithmique si  $x \in \Sigma_1$  et logarithmique et polaire d'ordre  $k$  si  $y \in \Sigma_1$ ; si  $n = \sup(l, m) + k$ ,  $k$  entier  $> 0$ ,  $E(x, y)$  a une singularité logarithmique si  $y \in \Sigma_1$  et logarithmique et polaire d'ordre  $k$  si  $x \in \Sigma_1$ .

*Remarques.* — 1° Les opérateurs autoadjoints concernés par cette étude sont nécessairement d'ordre  $m$  pair, et  $\alpha = n - \frac{1}{2}$  est tel que  $n \in (l, m)$ .

2° Si  $l = 2$ , on peut aussi avoir la nature de la singularité du prolongement pour  $x$  ou  $y \in \Sigma_0 - \Sigma_1$ . Supposons  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  $n \in (2, m)$ ; on décompose  $E = E_0 + E_1$ . Pour  $E_1$ , ce qui précède s'applique à condition d'intégrer sur  $V(x, y)$ , le polynôme en  $\theta$ ,  $g(x, \theta)$ , ayant une racine double pour  $x \in \Sigma_0, \theta_0$ . Pour  $E_0$ , il suffit de faire un calcul explicite, en utilisant la formule du résidu. D'où

$$E_0 = \text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) [g_1(x, \theta_0)]^{m-n-\frac{1}{2}}.$$

Or  $g_1(x, \theta_0) = 0$  est l'équation de  $\Sigma_0$  au voisinage de  $x$ . D'où

$$(III.54) \quad E(x, y) = \text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) \log s(x) + \text{Hol}(x) [s(x)]^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in \Sigma_0.$$

Pour les autres valeurs de  $\alpha$ , on utilisera les relations de récurrence.

PROPOSITION 14. — *Les solutions élémentaires  $E_\alpha(x, y)$  des opérateurs de Tricomi-Clairaut ( $l$  pair) :*

$$a_\alpha \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = k_m \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left[ \sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \right] k_{m-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  $n$  entier, de partie principale :

$$g \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = g_1 \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) g_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

sont des fonctions de  $(x, y)$ , coïncidant pour  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ , ( $y$  point où l'opérateur est hyperbolique), avec des fonctions prolongeables analytiquement en tous les points  $(x, y)$  tels que le segment  $(x, y)$  soit contenu dans  $\Omega$  et  $x \notin K(y)$  ( $\Omega$  composante connexe de  $\mathbf{R}^l - \Sigma \ni y$ , où l'opérateur est hyperbolique). Les prolongements ont des singularités si  $x$  ou  $y \in \Sigma$ . La nature des singularités pour  $x$  ou  $y \in \Sigma_1 - \Sigma_0$  est donnée par les formules (III.53).

Lorsque  $l \leq n \leq m$ , on a la décomposition  $E = E_0 + E_1$ ,  $E_0$  étant défini par l'intégrale (III.31),  $E_1$  par l'intégrale (III.43) fonctions analytiques de  $(x, y)$  pour  $[xy] \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ .

6° *Étude du prolongement à travers  $\Sigma_1$ .* — Nous supposons le prolongement singulier sur  $\Sigma_1$ . Montrons qu'on peut définir au voisinage de  $\Sigma_1$  une distribution prolongeant l'intégrale, annulée par l'opérateur. Supposons que si  $x \in \Sigma_1 - \Sigma_0 - K(y)$ , on ait

$$E_1(x, y) = \text{Hol}(x) \log s(x) + \text{Hol}(x).$$

Supposons aussi  $l = 2$ , pour simplifier, et choisissons en un point de  $\Sigma_1$  des coordonnées locales  $(u, v)$  telles que  $u = s(x)$ ,  $v = t(x)$ ,

$$a \left( u, v, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = -u \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + H \left( \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, u, v \right),$$

$H$  étant un opérateur différentiel du premier ordre, à coefficients analytiques de  $(u, v)$ . Pour  $u > 0$ , on a

$$E_1(u, v) = \alpha(u, v) \log u + \beta(u, v),$$

$\alpha(u, v)$  et  $\beta(u, v)$  étant analytiques. Considérons un prolongement analytique quelconque  $\tilde{E}_1$  de  $E_1$  pour  $u < 0$ . Comme les coefficients de  $a$  sont analytiques, on a aussi  $a\tilde{E}_1 = 0$  pour  $u < 0$ . Or

$$\alpha(u, v) (\log |u| \pm i\pi) + \beta(u, v),$$

sont deux telles solutions, donc aussi

$$\alpha(u, v) \log |u| + \beta(u, v),$$

puisque les coefficients de  $a$  sont réels. Définissons, au voisinage de  $u = 0$ , la distribution  $T$  par la fonction localement sommable  $\alpha(u, v) \log |u| + \beta(u, v)$ .  $T$  est un prolongement de  $E_1$ . Montrons que  $T$  annule  $a$ . De

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial u} &= \frac{\partial \alpha}{\partial u} \log |u| + \alpha \operatorname{Pf} \frac{1}{u} + \frac{\partial \beta}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} &= 2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} \operatorname{Pf} \frac{1}{u} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} \log |u| - \alpha \operatorname{Pf} \left( \frac{1}{u^2} \right) + \frac{\partial^2 \beta}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} \log |u| + \frac{\partial^2 \beta}{\partial v^2}, \\ u \operatorname{Pf} \left( \frac{1}{u} \right) &= 1, \quad u \operatorname{Pf} \left( \frac{1}{u^2} \right) = \operatorname{Pf} \left( \frac{1}{u} \right),\end{aligned}$$

on déduit

$$aT = \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v) \log |u| + \varphi_3(u, v) \operatorname{Pf} \left( \frac{1}{u} \right),$$

les  $\varphi_i(u, v)$  étant analytiques. Or pour  $u > 0$  ou pour  $u < 0$ , on a

$$aT = \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v) \log |u| + \frac{1}{u} \varphi_3(u, v),$$

ce qui est nul d'après le début du paragraphe. D'où

$$\varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v) \log |u| = - \frac{\varphi_3(u, v)}{u}, \quad u \neq 0.$$

La fonction au premier membre étant localement sommable au voisinage de  $u = 0$ , la fonction au second membre l'est aussi et  $\varphi_3(u, v)$  a nécessairement, pour chaque  $v$ , un ordre en  $u > 1$  :

$$\varphi_3(u, v) = u \varphi_4(u, v), \quad \varphi_4(u, v) \text{ analytique.}$$

D'où

$$aT = \varphi_5(u, v) + \varphi_2(u, v) \log |u|.$$

Comme  $\varphi_5(u, v) = -\varphi_2(u, v) \log |u|$ ,  $u \neq 0$ , les ordres en  $u$ , de  $\varphi_5$  et  $\varphi_2$ , pour  $v$  fixé, ne peuvent être ni égaux ni différents s'ils sont finis. On a donc

$$\varphi_5 = \varphi_2 = 0 \quad \text{et} \quad aT = 0,$$

C. Q. F. D.

*Remarque.* — Le raisonnement précédent se généralise au cas où la dimension  $l$  est plus grande que 2, l'ordre  $m$  est quelconque et aux types de singularités rencontrés.

5. Prolongement analytique des solutions élémentaires lorsque  $l$  est impair et  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  $n$  entier positif ou négatif.

Montrons que l'intégrale dans (III.36),  $l \leq n \leq m$ , peut, en général, être décomposée aussi en la somme de deux intégrales. Notons  $\Omega$  une composante connexe de  $\mathbf{R}^l - \Sigma \ni y$  où l'opérateur est strictement hyperbolique.

1° Étude d'une intégrale. — De (III.26), on déduit

$$[F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- = (-1)^m \frac{2}{\left(l - n + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(m - n - \frac{1}{2}\right)} \frac{Q(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}}.$$

Posons

$$(III.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{(-1)^m}{\left(l - n + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(m - n - \frac{1}{2}\right)} \\ \quad \times \int_{D^{**}} \frac{Q(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}} [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}, \\ D^{**} = \left\{ \eta \in \text{Re } \Xi^l \mid \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0, g(x, \eta) g(y, \eta) < 0 \right\}, \\ \text{muni de l'orientation, là où } \eta(x - y) \neq 0, \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x - y)]^l} > 0. \end{array} \right.$$

Pour montrer que l'intégrale (III.55) a un sens, nous allons la transformer (comme dans le cas où  $l$  est pair). Introduisons, dans  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^{l+1}$ , la variété  $V_1(x, y)$ ,

$$wt - g_1(x, \eta) = w + tg_1(y, \eta) = \sum_i \eta_i^2 - 1 = 0,$$

le cycle  $\Gamma_1$  compact réel de  $V_1(x, y)$ ,

$$\Gamma_1(x, y) = \{ (t, w, \eta) \mid \eta \in D^{**} \},$$

muni de l'orientation  $[\eta(x - y)] \omega'(\eta) > 0$ . Sur  $V_1(x, y)$ , cette orientation est donc définie par

$$\begin{aligned} w[\eta(x - y)] \varpi(t, w, \eta) &> 0, \\ \varpi(t, w, \eta) &= \frac{dt \wedge dw \wedge d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l}{d[tw - g_1(x, \eta)] \wedge d[w + tg_1(y, \eta)] \wedge d\left[\sum \eta_j^2\right]} = \frac{\omega'(\eta)}{4w}. \end{aligned}$$

$\Gamma_1(x, y)$  est donc relatif à  $W_1(x) \cup W_1(y) \cup W_1(x, y)$ ,

$$(III. 56) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1(x) : t = w = g_1(x, \eta) = \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0, \\ W_1(y) : t = \infty, \quad w = g_1(y, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0, \\ W_1(x, y) : w = g_1(x, \eta) = g_1(y, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0, \end{array} \right.$$

car la sous-variété de  $V_1(x, y)$  où  $w = 0$  est  $W_1(x) \cup W_1(y) \cup W_1(x, y)$ , et sur  $\text{Re } V_1(x, y)$ ,  $\eta(x - y) = 0$  entraîne  $w = 0$ . D'où

$$(III. 57) \quad E_1(x, y) = \frac{-1}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{\left(l - n + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(m - n - \frac{1}{2}\right)} \\ \times \int_{\Gamma_1(x, y)} \frac{tQ(-t^2, 1)}{(t^2 + 1)^{m-l}} [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega(t, w, \eta)}{g_0(\eta)};$$

*Remarque.* — Sur  $\Gamma_1$ , on a  $g_0 \neq 0$ .

Nous savons que  $\text{Re } V_1(x, y)$  est sans singularité si  $(xy) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$  (même étude que pour  $l$  pair). Si  $\text{Re } W_1(x)$ ,  $\text{Re } W_1(y)$ ,  $\text{Re } W_1(x, y)$  sont des sous-variétés régulières de  $V_1(x, y)$ , et en position générale, (III. 57) aura un sens (théorème 3, p. 97 de [9]).

(a) *Régularité de  $\text{Re } W_1(x)$  et  $\text{Re } W_1(y)$*  : Un point  $(t, w, \eta) \in \text{Re } W_1(x)$  est singulier si

$$t = w = g_1(x, \eta) = \sum \eta_j^2 - 1 = 0,$$

et si, en ce point, les différentielles

$$dt, \quad d[wt - g_1(x, \eta)] = dg_1(x, \eta), \\ d[w + tg_1(y, \eta)] = dw + g_1(y, \eta) dt, \quad \eta d\eta,$$

sont linéairement dépendantes. D'où l'on déduit

$$dg_1(x, \eta) = 0, \quad \text{soit } x \in \Sigma_1.$$

Le résultat pour  $\text{Re } W_1(y)$  s'obtient en échangeant  $x$  et  $y$  :  $\text{Re } W_1(y)$  est singulière si  $y \in \Sigma_1$ .

(b) *Régularité de  $\text{Re } W_1(x, y)$*  : Il est équivalent d'étudier la régularité de  $\text{Re } \hat{W}_1(x, y)$ ,

$$\hat{W}_1(x, y) : w = g_1(x, \eta) = g_1(y, \eta) = 0, \quad \text{dans } \hat{V}_1(x, y), \\ \hat{V}_1(x, y) : wt - g_1(x, \eta) = w + tg_1(y, \eta) = 0 \\ \left( \text{on supprime } \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0 \right).$$

$(t, w, \eta)$  réel est singulier s'il existe  $\alpha, \beta, \gamma$  réels non tous nuls tels que :

$$w = g_1(x, \eta) = g_1(y, \eta) = \alpha dw \\ + \beta[t dw - dg_1(x, \eta)] + \gamma[dw + t dg_1(y, \eta)] = 0.$$

D'où

$$\alpha + \beta t + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad -\beta dg_1(x, \eta) + \gamma t dg_1(y, \eta) = 0.$$

Cette condition exprime ceci :

$\exists \eta \in \text{Re } G_1(x) \cap \text{Re } G_1(y)$  et en ce point les surfaces ne sont pas en position générale.

Ceci peut se produire dans l'un des trois cas suivants :

— si  $k_{p-1}(\eta) \neq 0$ , alors  $\eta(x-y) = 0$ , et de

$$dg_1(x, \eta) = dg_1(y, \eta) + k_{p-1}(\eta)[(x-y) d\eta],$$

on déduit  $x \in K(y)$ ;

— si  $k_{p-1}(\eta) = k_p(\eta) = 0$ ,  $\eta(x-y) \neq 0$ , de

$$dg_1(x, \eta) = dk_p(\eta) + [\eta x] dk_{p-1}(\eta), \quad dg_1(y, \eta) = dk_p(\eta) + [\eta y] dk_{p-1}(\eta),$$

on déduit  $K_p[k_p(\eta) = 0]$  et  $K_{p-1}[k_{p-1}(\eta) = 0]$  ont un point de contact réel;

— si  $k_{p-1}(\eta) = k_p(\eta) = \eta(x-y) = 0$ , puisque

$$dg_1(x, \eta) = dg_1(y, \eta).$$

En conclusion,  $\text{Re } W_1(x, y)$  est régulière pour  $(xy) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ , s'il n'existe aucun point  $\eta$  réel tel que  $k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = 0$ .

(c) *Positions relatives de*  $\text{Re } W_1(x)$ ,  $\text{Re } W_1(y)$ ,  $\text{Re } W_1(x, y)$  : Tout d'abord,  $\text{Re } W_1(x) \cap \text{Re } W_1(y) = \emptyset$ . Étudions  $\text{Re } \hat{W}_1(x)$  et  $\text{Re } \hat{W}_1(x, y)$ . Prenons, au voisinage d'un point  $t = 0$ , dans  $\hat{V}_1(x, y)$ , les coordonnées locales  $t$ ,  $(l-1)$  coordonnées de  $\eta$ ,  $\eta_1$  par exemple étant déterminé par

$$g_1(x, \eta) + t^2 g_1(y, \eta) = 0,$$

[ce qui est possible puisque  $\text{Re } G_1^*(x)$  est sans singularité],  $w$  est alors déterminé par  $w = -t g_1(y, \eta)$ .

Une équation de  $\hat{W}_1(x)$  est  $t = 0$ , une équation de  $\hat{W}_1(x, y)$  est  $g_1(x, \eta) - g_1(y, \eta) = 0$ . En exprimant qu'en un point appartenant à  $\hat{W}_1(x) \cap \hat{W}_1(x, y)$ , les différentielles  $dt$  et  $dg_1(x, \eta) - dg_1(y, \eta)$  sont linéairement dépendantes [en utilisant les coordonnées locales précédemment choisies dans  $\hat{V}_1(x, y)$ ], on trouve les mêmes conditions qu'en (b).

En conclusion, s'il n'existe pas de point  $\eta$  réel tel que  $k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = 0$  (III.57) définit une fonction analytique de  $(x, y)$  si  $(xy) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ .

*Remarque.* — Nous aurions pu utiliser  $V(x, y)$  au lieu de  $V_1(x, y)$ ; en effet, les points singuliers appartenant à  $\text{Re } W(x, y)$ , ou les points où  $\text{Re } W(x)$  et  $\text{Re } W(x, y)$  ne sont pas en position générale, qui correspondent aux racines réelles de  $g_0(\eta)$  (points communs à  $K_m$  et  $K_{m-1}$ !) ne sont pas voisins de support de  $\Gamma$  si  $(xy) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ .

2° *Étude d'une deuxième intégrale.* — Faisons, à partir de maintenant, l'hypothèse suivante :  $\text{Re } K_p^* \cap \text{Re } K_{p-1}^* = \emptyset$ , hypothèse équivalente à celle-ci :

$$\text{Re } G_1^*(x) \cap \text{Re } G_1^*(y) \text{ non en position générale} \iff x \in K(y).$$

Posons

$$(III.58) \left\{ \begin{aligned} E_0(x, y) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{\left(l - n + \frac{1}{2}\right) \dots \left(m - n - \frac{1}{2}\right)} \\ &\times \int_{\Delta^{**} \text{ détourné de } G_0^{**}} \frac{\lambda^{m-n-\frac{1}{2}} - Q(\lambda, \mathbf{1})}{(\lambda - 1)^{m-l}} \\ &\times [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ \Delta^{**} &= \left\{ \eta \in \text{Re } \Xi^l \mid \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0, g(x, \eta) g(y, \eta) > 0 \right\}, \\ &\text{muni de l'orientation, là où } \eta(x-y) \neq 0, \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0. \end{aligned} \right.$$

Rappelons qu'il s'agit de la détermination positive de  $\lambda^{m-n-\frac{1}{2}}$ . Nous allons montrer que (III.58) a un sens en transformant, encore une fois, l'intégrale. Considérons dans  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^{l+1}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1(x, y) : tw - g_1(x, \eta) &= w - tg_1(y, \eta) = \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0, \\ \varpi(t, w, \eta) &= \frac{dt \wedge dw \wedge d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l}{d[tw - g_1(x, \eta)] \wedge d[w - tg_1(y, \eta)] \wedge d\left[\sum_j \eta_j^2\right]} \Bigg|_{\tilde{V}_1(x, y)} = \frac{\omega'(\eta)}{4w}, \end{aligned}$$

$\tilde{\Gamma}_1(x, y) = \{(t, w, \eta) \mid \eta \in \Delta^{**}, t > 0, \text{ détourné de la sous-variété } \tilde{G}_0 \text{ de } \tilde{V}_1(x, y) \text{ où } g_0(\eta) = 0\}$  muni de l'orientation :

$$w [\eta(x-y)] \varpi(t, w, \eta) > 0.$$

$\tilde{\Gamma}_1$  est un cycle compact relatif à  $\tilde{W}_1(x) \cup \tilde{W}_1(y) \cup \tilde{P}_1(x, y)$ ,

$$(III.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}_1(x) : t = w = g_1(x, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0; \\ \tilde{W}_1(y) : t = \infty, \quad w = g_1(y, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0; \\ \tilde{P}_1(x, y) : \text{sous-variété de } \tilde{V}_1(x, y) \text{ où } \eta(x = y) = 0, \end{array} \right.$$

car la sous-variété de  $\tilde{V}_1(x, y)$  où  $w = 0$  est  $\tilde{W}_1(x) \cup \tilde{W}_1(y) \cup \tilde{W}_1(x, y)$ ,

$$\tilde{W}_1(x, y) : w = g_1(x, \eta) = g_1(y, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0,$$

mais l'hypothèse faite entraîne  $\text{Re } \tilde{W}_1(x, y) \subset \text{Re } \tilde{P}_1(x, y)$ .

Comme sur  $\tilde{\Gamma}_1$ , on a

$$(III.60) \quad \begin{aligned} & \frac{\lambda^{m-n-\frac{1}{2}} - Q(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(\eta, \eta)} \\ &= 4t \frac{(t^{2(m-n)-1} - Q(t^2, 1))}{(t^2 - 1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\varpi(t, w, \eta)}{g_0(\eta)}, \quad (t^{2(m-n)-1} > 0), \\ E_0(x, y) &= \frac{2}{(2\pi i)^{l-1} \left(l - n + \frac{1}{2}\right) \dots \left(m - n - \frac{1}{2}\right)} \\ & \times \int_{\tilde{\Gamma}_1} \frac{t^{2(m-n)} - tQ(t^2, 1)}{(t^2 - 1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\varpi(t, w, \eta)}{g_0(\eta)}. \end{aligned}$$

Les calculs faits précédemment montrent que  $\text{Re } \tilde{V}_1(x, y)$ ,  $\text{Re } \tilde{W}_1(x)$ ,  $\text{Re } \tilde{W}_1(y)$ ,  $\text{Re } \tilde{P}_1(x, y)$  sont régulières pour  $(xy) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ . Étudions la régularité de  $\text{Re } \tilde{G}_0$  et les positions relatives de  $\text{Re } \tilde{W}_1(x)$ ,  $\text{Re } \tilde{W}_1(y)$ ,  $\text{Re } \tilde{P}_1(x, y)$ ,  $\text{Re } \tilde{G}_0$ .

(a) *Régularité de  $\text{Re } \tilde{G}_0$*  : Considérons  $\hat{G}_0$  (on supprime  $\sum_j \eta_j^2 - 1 = 0$ ) dans  $\hat{V}_1$ .  $(t, w, \eta)$  est singulier, sur  $\text{Re } \hat{G}_0$ , s'il existe  $\alpha, \beta, \gamma$  réels non tous nuls tels que

$$\begin{aligned} tw - g_1(x, \eta) &= w - tg_1(y, \eta) = g_0(\eta) \\ &= \alpha d[tw - g_1(x, \eta)] + \beta d[w - tg_1(y, \eta)] + \gamma dg_0(\eta) = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha t + \beta = \alpha w - \beta g_1(y, \eta) = 0,$$

puis

$$w + tg_1(y, \eta) = 0 \quad \text{et} \quad w = tg_1(y, \eta) = g_1(x, \eta) = g_0(\eta) = 0.$$

Si  $(xy) \subset \Omega$ , c'est impossible car  $\text{Re } G_1^*(x) \cap \text{Re } G_0^* = \emptyset$ .

*Conclusion.* — Re  $\tilde{G}_0$  est régulière si  $(xy) \subset \Omega$ .

(b) *Positions de* Re  $\tilde{G}_0$ , Re  $\tilde{W}_1(x)$ , Re  $\tilde{W}_1(y)$ , Re  $\tilde{P}_1(x, y)$  : Tout d'abord, Re  $\tilde{G}_0 \cap$  Re  $\tilde{W}_1(x) = \emptyset$ , Re  $\tilde{G}_0 \cap$  Re  $\tilde{W}_1(y) = \emptyset$ , si  $(xy) \subset \Omega$ . Étudions donc Re  $\tilde{G}_0$  et Re  $\tilde{P}_1(x, y)$ , en se ramenant à Re  $\hat{G}_0$  et Re  $\hat{P}_1$ . En un point appartenant à Re  $\hat{G}_0 \cap$  Re  $\hat{P}_1$ , on peut prendre les équations  $g_0(\eta) = 0$ ,  $\eta(x - y) = 0$  ( $\eta_1, \dots, \eta_l$ ) étant des coordonnées dans  $\hat{V}_1$ . Ces deux surfaces ne sont donc pas en position générale si et seulement si  $x \in K_0(y)$ , partie de  $K(y)$  associée à  $G_0^*$ .

*En conclusion*, s'il n'existe aucun point  $\eta$  réel tel que  $k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = 0$ , l'intégrale (III. 60) se prolonge analytiquement pour  $(xy) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ .

3° *Prolongement analytique des solutions élémentaires.* — Nous supposons Re  $K_p^* \cap$  Re  $K_{p-1}^* = \emptyset$ . Si  $m \geq l$ ,  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  $n \in (l, m)$ , (III. 36) a été décomposée en la somme de deux intégrales prolongeables analytiquement en tous les points  $(x, y)$  tels que  $(xy) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ . Dans tous les autres cas, en utilisant les mêmes méthodes qu'en dimension paire, on obtient ceci : la solution élémentaire  $E(x, y)$ ,  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  $n$  entier, coïncide, pour  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ , avec une fonction prolongeable analytiquement en tous les points  $(x, y)$  tels que  $(xy) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ .

PROPOSITION 15. — *Supposons  $l$  impair,  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  $n$  entier. Pour l'opérateur de Tricomi-Clairaut :*

$$a\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\{ k_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[ \sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \right] k_{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

de partie principale  $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ , supposons qu'il n'existe aucun point  $\eta$  réel vérifiant  $k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = 0$ . Sa solution élémentaire  $E(x, y)$  coïncide pour  $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ , avec une fonction prolongeable analytiquement en tous les points  $(x, y)$  tels que  $(xy) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$ ,  $\Omega$  désignant une composante connexe de  $\mathbf{R}^l - \Sigma$ , où l'opérateur est strictement hyperbolique.

Si de plus  $l \leq n \leq m$ , le prolongement se décompose,

$$E(x, y) = E_0(x, y) + E_1(x, y),$$

$E_0, E_1$  étant les fonctions analytiques de  $(x, y)$  pour  $(xy) \subset \Omega$  et  $x \notin K(y)$  définies par les intégrales (III. 58) et (III. 57).

Ces résultats sont valables pour les opérateurs de Tricomi-Clairaut autoadjoints, si  $m$  et  $l$  sont impairs.

TABLEAU DES RÉSULTATS.

$\alpha = n.$	Prolongement analytique des intégrales.	Nature des singularités du prolongement si $x$ ou $y \in \Sigma_1 - \Sigma_0$ et $x \notin K(y).$
$n \leq \inf(l, m) - 1$	$y \in \Omega, x \in \mathbf{R}',$ $x \notin K(y).$	$m \geq l, n = l - 1 - k$ ou $m < l, n = m - 1 - k$  $y \in \Sigma_1 :$ $\text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{\frac{l-3}{2}-k}$ ( $l$ pair), $\text{Hol}(y) \log s(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{-k}$ ( $l$ impair)  $x \in \Sigma_1 :$ Sans singularité.
$n \geq \sup(l, m)$	$y \in \mathbf{R}', x \in \Omega,$ $x \notin K(y).$	$m \geq l, n = m + k$ ou $m < l, n = l + k$  $y \in \Sigma_1 :$ Sans singularité. $x \in \Sigma_1 :$ $\text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) [s(x)]^{\frac{l-3}{2}-k}$ ( $l$ pair), $\text{Hol}(x) \log s(x) + \text{Hol}(x) [s(x)]^{-k}$ ( $l$ impair).
$m \leq n \leq l - 1$	$x \notin K(y)$	Sans singularité

$l \leq n \leq m - 1$	$(xy) \subset \Omega,$ $x \notin K(y)$	$y \in \Sigma_1 :$ $P_{n-l+1} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) E_n = \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{\frac{l-3}{2}} \quad (l \text{ pair}),$ $= \text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) \log s(y) \quad (l \text{ impair})$ $x \in \Sigma_1 :$ $P_{m-n} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) E_n = \text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) [s(x)]^{\frac{l-3}{2}} \quad (l \text{ pair})$ $= \text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) \log s(x) \quad (l \text{ impair}),$
$\alpha = n - \frac{1}{2}$ $n \text{ compris entre } l \text{ et } m$		$y \in \Sigma_1 :$ $\text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) \log s(y) \quad (l \text{ pair})$ $x \in \Sigma_1 :$ $\text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) \log s(x) \quad (l \text{ pair})$
$n = \inf(l, m) - k$	$(xy) \subset \Omega,$ $x \notin K(y).$	$y \in \Sigma_1 :$ $\text{Hol}(y) \log s(y) + \text{Hol}(y) [s(y)]^{-k} \quad (l \text{ pair})$ $x \in \Sigma_1 :$ $\text{Hol}(x) + \text{Hol}(x) \log s(x) \quad (l \text{ pair})$
$n = \sup(l, m) + k$		$y \in \Sigma_1 :$ $\text{Hol}(y) + \text{Hol}(y) \log s(y) \quad (l \text{ pair})$ $x \in \Sigma_1 :$ $\text{Hol}(x) \log s(x) + \text{Hol}(x) [s(x)]^{-k} \quad (l \text{ pair})$

*Remarques.* — 1° La décomposition (obtenue pour  $l \leq n \leq m$ ), n'est pas valable si  $\alpha$  est entier : le logarithme intervenant dans les formules ne peut être uniformisé par la méthode utilisée.

2° S'il existe  $\eta$  réel tel que  $k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = 0$ , les intégrales intervenant dans la décomposition divergent sans doute. Peut-on trouver une autre décomposition ?

3° Pour les singularités des intégrales (III.57) et (III.58) sur  $\Sigma_1 - \Sigma_0$ , on se heurte à la difficulté suivante pour l'application du théorème 4, p. 98 de [9] : le point singulier réel qu'a  $V_1(x, y)$  [ou  $\tilde{V}_1(x, y)$ ], si  $x \in \Sigma_1$ , vérifie toujours  $w = 0$ , donc appartient à  $W_1(x)$  [ou  $\tilde{W}_1(x)$ ], variété à laquelle est relatif  $\Gamma_1$ , (ou  $\tilde{\Gamma}_1$ ).

4° Nous avons introduit deux variables ( $t, w$ ) pour étudier les intégrales, si  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ . La plus « naturelle » des deux, qui intervient dès le début, est  $t(t^2 = \lambda$ , ou  $t^2 = -\lambda$ ). On peut se demander pourquoi introduire seulement  $t$  et la variété

$$t^2 g_1(y, \eta) \pm g_1(x, \eta) = \sum_i \eta_i^2 - 1 = 0,$$

ne suffit pas. En fait, dans ce cas, certaines variétés, relativement auxquelles on doit intégrer, sont singulières; par exemple la variété où  $g_1(x, \eta) = 0$  est singulière en les points où  $t = 0$ . Il y a des cas où il serait sans doute possible d'utiliser seulement  $t$ , mais nous avons préféré donner une démonstration plus générale.

5° Si l'indice  $\alpha$  de l'opérateur est un nombre rationnel compris entre  $l - \frac{1}{2}$  et  $m - \frac{1}{2}$ , et  $m \geq l$ , nous pensons qu'il est possible de faire des transformations sur les intégrales en ajoutant deux variables. Quant aux valeurs irrationnelles de  $\alpha$ , la méthode n'est plus applicable : c'est particulièrement pour ces cas qu'il serait intéressant de savoir si le théorème de Nilsson-Leray s'applique.

Dressons un tableau des résultats obtenus ( $k$  désigne toujours un entier  $\geq 0$ ); et dans le cas où  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ ,  $l$  impair, nous supposons  $\text{Re } K_p^* \cap \text{Re } K_{p-1}^* = \emptyset$ .

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BATEMAN (Harry). — *Higher transcendental functions*, Vol. 1. — New York, Toronto, London, Mc Graw-Hill Book Company, 1953.  
 [2] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre*, Chap. 1 à 9. — Paris, Hermann, 1942 à 1964 (*Act. scient. et ind.*, 1044, 1102, 1144, 1179, 1236, 1261, 1272; *Bourbaki*, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 23 et 24).

- [3] CHOQUET-BRUHAT (Yvonne). — Uniformisation de la solution d'un problème de Cauchy non linéaire à données holomorphes, *Bull. Soc. math. France*, t. 94, 1966, p. 25-48.
- [4] DELACHE (Solange). — Calcul de solutions élémentaires de l'opérateur de Tricomi-Clairaut à deux variables, autoadjoint, d'ordre  $m \geq 2$ , *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 259, 1964, p. 30-33.
- [5] DELACHE (Solange). — Calcul de solutions élémentaires d'opérateurs de Tricomi-Clairaut, auto-adjoints, à  $l$  variables,  $l \geq 3$ , d'ordre  $m$ , et où  $m = l$ , *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, Série A, 1966, p. 233-236.
- [6] GÄRDING (Lars), KOTAKE (T.) et LERAY (J.). — Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire... (Problème de Cauchy, I bis et VI), *Bull. Soc. math. France*, t. 94, 1966, p. 263-361.
- [7] HÖRMANDER (Lars). — *Linear partial differential operators*. — Berlin, Springer-Verlag, 1953 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 116).
- [8] LERAY (Jean). — La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire, *Bull. Soc. math. France*, t. 86, 1958, p. 75-96.
- [9] LERAY (Jean). — Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 81-180.
- [10] LERAY (Jean). — Un prolongement de la transformation de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élémentaire, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 39-156.
- [11] LERAY (Jean). — *Hyperbolic differential equations*. — Princeton, Institute for advanced Study, 1963 (multigr.).
- [12] LERAY (Jean). — Un complément au théorème de N. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique, *Bull. Soc. math. France*, t. 95, 1967, p. 313-374.
- [13] MALGRANGE (Bernard). — Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, *Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Les équations aux dérivées partielles* [1962, Paris], p. 113-122. — Paris, C. N. R. S., 1963.
- [14] NOMIZU (Katsumi). — *Lie groups and differential geometry*. — Tokyo, The mathematical Society of Japan, 1956 (*Publications of the mathematical Society of Japan*, 2).
- [15] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions*. — Paris, Hermann, 1967.
- [16] VALIRON (Georges). — *Théorie des fonctions*. — Paris, Masson, 1948 (*Cours d'Analyse mathématique*, Tome 1).

(Texte reçu le 2 mai 1968.)

M<sup>me</sup> Solange DELACHE,  
 Département de Mathématiques,  
 Faculté des Sciences,  
 Parc Valrose,  
 06-Nice.