Bulletin de la S. M. F.

R. Temam

Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 115-152
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__115_0>

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 115 à 152.

UNE MÉTHODE D'APPROXIMATION DE LA SOLUTION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

PAR

ROGER TEMAM

[Paris] (*).

Introduction.

L'objet de ce travail est l'étude de l'approximation par une méthode de différences finies du système de Navier-Stokes :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\,\Delta u + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \operatorname{grad} p = f, \\ t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad \Omega \text{ ouvert de } R^n, \quad n = 2 \text{ ou } 3, \quad u = (u_1, \ldots, u_n), \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(x, t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{donné.} \end{cases}$$

L'approximation du problème (1) fait déjà l'objet de nombreux travaux (dont seulement quelques-uns sont rappelés ci-après). KRŽIVICKI et LADYŽENSKAJA étudient dans [6] l'approximation du problème (1) par des méthodes de différences finies, et démontrent, par des méthodes d'énergie, la stabilité et la convergence des schémas proposés; dans ces schémas, la condition discrétisée $\operatorname{div} u = 0$ est vérifiée à chaque pas, ce qui rend assez difficile la résolution effective des problèmes approchés.

D'autres méthodes d'approximation, évitant les difficultés dues à la contrainte $\operatorname{div} u = 0$, ont été étudiées et utilisées : FROMM [2] évite ces difficultés en introduisant (en dimension 2) la fonction de courant;

(*) Ce travail a été achevé pendant un séjour de l'auteur à l'Université de Sherbrooke, P. Q. (Canada).

Harlow [3] et Janenko [5] proposent aussi des méthodes de différences finies totalement différentes mais pour lesquelles *la condition discrétisée* $\operatorname{div} u = 0$ *n'est pas vérifiée exactement.*

La méthode étudiée ici se rattache à ce point de vue. Le principe de cette méthode est le suivant.

1° On approche le problème (1) par une famille à un paramètre ε ($\varepsilon > 0$) de problèmes similaires mais pour lesquels la contrainte $\operatorname{div} u = 0$ est supprimée

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu\,\Delta u_\varepsilon + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_{\varepsilon_j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{1}{2}(\operatorname{div} u_\varepsilon)\,u_\varepsilon + \operatorname{grad} p_\varepsilon = f, \\ \qquad\qquad t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \\ \qquad\qquad \operatorname{div} u_\varepsilon = -\varepsilon p_\varepsilon, \\ \qquad\qquad u_\varepsilon(x, t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Gamma, \\ \qquad\qquad u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x) \end{array}\right.$$

Le système (2) se réduit évidemment à une seule équation en u_ε, obtenue en éliminant p_ε. Le terme $\frac{1}{2}(\operatorname{div} u_\varepsilon)\,u_\varepsilon$ a été ajouté dans la première des équations pour que le problème (2) soit « bien posé ».

On démontre (en dimension d'espace égale à 2; *cf.* ci-après) que le problème (2) possède une solution unique et que, pour $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to u$, $p_\varepsilon \to p$, u et p étant les solutions de (1); ces résultats font l'objet du paragraphe I.

2° Les problèmes (2) sont approchés ensuite par des méthodes classiques de différences finies. On étudie, par des méthodes d'énergie, la stabilité des solutions des problèmes aux différences finies et l'on démontre la convergence vers u et p de ces solutions, lorsque ε et le pas tendent vers zéro; ces résultats font l'objet du paragraphe II.

Il est évident qu'on peut envisager d'approximer les problèmes (2) par d'autres méthodes de différences finies que celles proposées ici. De même, on peut envisager d'autres problèmes perturbés que (2) (*cf.* ceux de Janenko [5]).

Dans ce travail, nous supposons, pour simplifier, que l'ouvert Ω est borné et que $n = 2$. Toutefois, nos résultats s'étendent au cas où Ω n'est pas borné et, dans une certaine mesure, au cas $n = 3$ (*cf.* I, Remarque 2.1). La méthode étudiée ici fait l'objet d'essais numériques dont il sera rendu compte ultérieurement.

Je tiens à remercier ici M. Lions qui m'a suggéré l'idée de ce travail et s'est intéressé à sa mise au point.

Le plan est le suivant :

I. — Approximation par des fonctions à divergence non nulle.

1. Notations.

Soit Ω un ouvert borné de R^2 de frontière Γ régulière. On ne considère ici que des fonctions à valeurs réelles et l'on appelle $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre 1, et $H_0^1(\Omega)$, le sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions nulles sur la frontière Γ de Ω. On pose

$$G = L_2(\Omega)^2, \qquad W = H_0^1(\Omega)^2;$$

G et W sont des espaces de Hilbert pour les produits scalaires et les normes respectifs :

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega f_i(x)\, g_i(x)\, dx; \qquad |f| = (f, f)^{1/2};$$

$$((u, v)) = \sum_{i, j=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v_j(x)}{\partial x_i}\, dx; \qquad \|u\| = ((u, u))^{1/2}.$$

L'espace W est inclus dans G et dense dans G; l'injection de W dans G est continue (en raison de l'inégalité de Poincaré).

Soit $V = \{ u \mid u \in W, \operatorname{div} u = 0 \}$ et soit H l'adhérence de V dans G.

Pour $u, v \in W$, on pose

$$d(u, v) = \int_\Omega (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v)\, dx; \tag{I; 1.1}$$

d est une forme bilinéaire symétrique continue, sur $W \times W$.

Pour $u, v, w \in W$, on peut définir

$$b(u, v, w) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j - v_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) dx, \tag{I; 1.2}$$

et $b(u, v, w)$ est une forme trilinéaire continue sur $W \times W \times W$.

Plus précisément, soit

$$\begin{aligned} b\,(u, v, w) &= b_1(u, v, w) + b_2(u, v, w), \\ b_1(u, v, w) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j\, dx, \\ b_2(u, v, w) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i v_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\, dx. \end{aligned} \tag{I; 1.3}$$

En raison de l'inégalité de Hölder, $b_1(u, v, w)$ est une forme trilinéaire continue sur $L_4(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)^2 \times L_4(\Omega)^2$, $b_2(u, v, w)$ est une forme trilinéaire continue sur $L_4(\Omega)^2 \times L_4(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)^2$. En raison des inégalités de Sobolev, la dimension d'espace étant égale à 2, $H_0^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$.

Notons que

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j\, dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega (\operatorname{div} u)\, v_j w_j\, dx. \tag{I; 1.4}$$

Cette égalité est évidente si u, v, w sont des vecteurs continûment différentiables à support compact dans Ω; elle est donc vraie par continuité quels que soient u, v, w dans W. Si $u, v, w \in V$ (ou si seulement $u \in V$), on retrouve l'expression usuelle de b :

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j\, dx.$$

2. Énoncé des résultats essentiels du paragraphe I.

Soit $T > 0$ fixé; si X est un espace de Banach, on appelle $\mathcal{C}(0, T; X)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans X, et $L_p(0, T; X)$ $(p \geq 1)$ l'espace des (classes de) fonctions L_p sur $[0, T]$ à valeurs dans X.

Le problème exact, recherche des solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes, est le suivant (*cf.* J. LERAY [7], [8]) :

PROBLÈME I.1. — *Pour* $u_0 \in H$ *et* $f \in L_2(0, T; H)$ *donnés, trouver une fonction* u

$$u \in L_2(0, T; V) \cap L_\infty(0, T; H), \tag{I; 2.1}$$

et vérifiant

$$\int_0^T \{-(u(t), \varphi'(t)) + \nu((u(t), \varphi(t))) + b(u(t), u(t), \varphi(t))\}\, dt = \int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt + (u_0, \varphi(0)), \tag{I; 2.2}$$

pour toute fonction φ *telle que*

$$\varphi \in \mathcal{C}(0, T; V), \qquad \varphi' \in L_2(0, T; H), \qquad \varphi(T) = 0. \tag{I; 2.3}$$

On sait (*cf.* HOPF [4], LIONS [9], LIONS et PRODI [13]) que ce problème possède une solution unique; la fonction u est continue de $[0, T] \mapsto H$, et vérifie $u(0) = u_0$. Nous nous proposons d'approcher cette fonction u.

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on associe au problème I.1, le problème « approché » suivant :

PROBLÈME I.2. — *Trouver une fonction* u_ε

$$u_\varepsilon \in L_2(0, T; W) \cap L_\infty(0, T; G), \tag{I; 2.4}$$

et vérifiant

$$\int_0 \Big\{-(u_\varepsilon(t), \varphi'(t))) + \nu((u_\varepsilon(t), \varphi(t))) + \frac{1}{\varepsilon} d(u_\varepsilon(t), \varphi(t)) + b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), \varphi(t))\Big\}\, dt = \int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt + (u_0, \varphi(0)) \tag{I; 2.5}$$

pour toute fonction φ *telle que*

$$\varphi \in \mathcal{C}(0, T; W), \qquad \varphi' \in L_2(0, T; G), \qquad \varphi(T) = 0. \tag{I; 2.6}$$

On démontre dans les nos 3 à 5, les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I.1. — *Pour* $\varepsilon > 0$ *fixé, le problème* I.2 *possède une solution* u_ε *unique. Cette solution* u_ε *vérifie, en outre,*

$$|u_\varepsilon|_{L_2(0, T; G)} + \|u_\varepsilon\|_{L_2(0, T; W)} + \frac{1}{\varepsilon} |\operatorname{div} u_\varepsilon|_{L_2(\Omega \times [0, T])} \leq L, \tag{I; 2.7}$$

où L *ne dépend pas de* ε *(mais dépend de* ν, T, u_0 *et* f*).*

THÉORÈME I.2. — *Lorsque* $\varepsilon \to 0$, u_ε *tend vers la solution* u *du problème* I.1, *dans* $L_2(0, T; W)$ *fort et dans* $L_\infty(0, T; G)$ *faible* (1).

REMARQUE 2.1. — Les théorèmes I.1 et I.2 redonnent l'existence d'une solution du problème I.2, mais cela n'est pas important car la démonstration du théorème I.1 est assez voisine de la démonstration de l'existence et l'unicité de solution du problème I.1 [9] [13].

REMARQUE 2.2. — Les résultats précédents se généralisent en dimension d'espace égale à 3 mais, pour les problèmes approchés, de même que pour les équations de Navier-Stokes, on ignore s'il y a unicité de la solution. De manière précise, on pose dans ce cas $G = L_2(\Omega)^3$, $W = H_0^1(\Omega)^3$; pour tout $\varepsilon > 0$, le problème I.2 possède une solution u_ε (non nécessairement unique) qui vérifie (I; 2.7), et il existe une sous-suite $\varepsilon' \to 0$, telle que $u_{\varepsilon'} \to u$ dans $L_2(0, T; V)$ faible et $L_\infty(0, T; G)$ faible, u étant une solution du problème I.1.

3. Démonstration de l'existence dans le théorème I.1 (2).

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions, indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe donc une base de W formée d'éléments $w_j \in \mathcal{D}(\Omega)^2$.

Pour m donné, soit $u_{\varepsilon m} = \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j$ la solution du système différentiel

$$(I;\ 3.1) \qquad \frac{d}{dt}(u_{\varepsilon m}(t), w_j) + \nu((u_{\varepsilon m}(t), w_j)) + \frac{1}{\varepsilon} d(u_{\varepsilon m}(t), w_j) + b(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), w_j) = (f(t), w_j) \qquad (j = 1, \ldots, m);$$

$$(I;\ 3.2) \qquad u_{\varepsilon m}(0) = \text{projection, dans } G, \text{ de } u_0 \text{ sur l'espace engendré par } w_1, \ldots, w_m.$$

Ce système possède une solution $u_{\varepsilon m}$ définie sur un certain intervalle $0 \leq t \leq \delta_m$ pouvant dépendre, *a priori*, de m; en raison des estimations *a priori* ci-après, la solution est définie en fait sur tout l'intervalle $[0, T]$.

On multiplie (I; 3.1) par g_{jm}, et l'on ajoute ces égalités pour $j = 1, \ldots, m$; il en résulte, puisque $b(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t)) = 0$,

---

(1) Topologie de dual faible de $L_1(0, T; G)$.

(2) La lecture des nos 3 à 5 n'est pas indispensable pour la compréhension de la suite.

d'après (I; 1.2) :

$$\frac{d}{dt}|u_{\varepsilon m}(t)|^2 + 2\nu\,\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \frac{2}{\varepsilon}\,d(u_{\varepsilon m}(t),\, u_{\varepsilon m}(t)) = 2(f(t),\, u_{\varepsilon m}(t));$$

$$\text{(I; 3.3)}\quad |u_{\varepsilon m}(s)|^2 + 2\int_0^s \left\{\nu\,\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,d(u_{\varepsilon m}(t),\, u_{\varepsilon m}(t))\right\} dt$$
$$= |u_{\varepsilon m}(0)_2| + 2\int_0^s (f(t),\, u_{\varepsilon m}(t))\,dt.$$

Le second membre de (I; 3.3) est majoré par

$$|u_0|^2 + 2\int_0^s |f(t)|.|u_{\varepsilon m}(t)|\,dt \leqq |u_0|^2 + \frac{c_1^2}{\nu}\int_0^s |f(t)|^2\,dt + \frac{\nu}{c_1^2}\int_0^s |u_{\varepsilon m}(t)|^2\,dt$$
$$\leqq |u_0|^2 + \frac{c_1^2}{\nu}\int_0^s |f(t)|^2\,dt + \nu\int_0^s \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2\,dt,$$

où c_1 désigne la norme de l'injection de W dans G (les c_j désigneront plus généralement des constantes positives diverses).

D'où

$$|u_{\varepsilon m}(s)|^2 + \int_0^s \left\{\nu\,\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \frac{2}{\varepsilon}\,d(u_{\varepsilon m}(t),\, u_{\varepsilon m}(t))\right\} dt$$
$$\leqq |u_0|^2 + \frac{c_1^2}{\nu}\int_0^T |f(t)|^2\,dt, \quad \forall\, s \in [0,\, T];$$

$$\text{(I; 3.4)}\quad |u_{\varepsilon m}|^2_{L_\infty(0,\,T;\,H)} + \nu\,\|u_{\varepsilon m}\|^2_{L_2(0,\,T;\,V)} + \frac{2}{\varepsilon}\,|\operatorname{div} u_{\varepsilon m}|^2_{L_2(\Omega\times[0,\,T])}$$
$$\leqq |u_0|^2 + \frac{c_1^2}{\nu}\int_0^T |f(t)|^2\,dt.$$

Soit à présent $\tilde{u}_{\varepsilon m}$ (resp. $\tilde{f}$) la fonction égale à $u_{\varepsilon m}$ (resp. f) sur $[0,\, T]$, et à 0 en dehors de cet intervalle; on a, au sens des distributions sur R, l'égalité

$$\text{(I; 3.5)}\quad \frac{d}{dt}(\tilde{u}_{\varepsilon m},\, w_j) + \nu((\tilde{u}_{\varepsilon m},\, w_j)) + \frac{1}{\varepsilon}\,d(\tilde{u}_{\varepsilon m},\, w_j) + b(u_{\varepsilon m},\, \tilde{u}_{\varepsilon m},\, w_j)$$
$$= (\tilde{f},\, w_j) + (u_{\varepsilon m}(0),\, w_j)\,\delta_{(0)} - (u_{\varepsilon m}(T),\, w_j)\,\delta_{(T)},$$

où $\delta_{(a)}$ désigne la distribution de Dirac au point a.

Pour tout t, la forme linéaire $v \mapsto b(\tilde{u}_{\varepsilon m}(t),\, \tilde{u}_{\varepsilon m}(t),\, v)$ est continue sur V, et il existe donc $\tilde{\varphi}_{\varepsilon m}(t) \in V$ tel que

$$\text{(I; 3.6)}\quad b(\tilde{u}_{\varepsilon m}(t),\, \tilde{u}_{\varepsilon m}(t),\, v) = ((\tilde{\varphi}_{\varepsilon m}(t),\, v)), \quad \forall\, v \in V.$$

La fonction $t \mapsto \tilde{\varphi}_{\varepsilon m}(t)$ est mesurable dans V, et puisque

$$\| \tilde{\varphi}_{\varepsilon m}(t) \| \leqq c_2 \| \tilde{u}_{\varepsilon m}(t) \|^2,$$

$\tilde{\varphi}_{\varepsilon m} \in L_1(-\infty, +\infty; V)$.

On peut alors écrire (I; 3.5) sous la forme

$$\frac{d}{dt}(\tilde{u}_{\varepsilon m}, w_j) + \nu((u_{\varepsilon m}, w_j)) + \frac{1}{\varepsilon} d(\tilde{u}_{\varepsilon m}, w_j) + ((\tilde{\varphi}_{\varepsilon m}, w_j))$$
$$= (\tilde{f}, w_j) + (u_{\varepsilon m}(0), w_j)\,\delta_{(0)} - (u_{\varepsilon m}(T), w_j)\,\delta_{(T)},$$

et, par transformation de Fourier, on obtient ($\hat{u}_{\varepsilon m}, \ldots$, désigne la transformée de Fourier en t de $u_{\varepsilon m}, \ldots$) :

$$i\tau(\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau), w_j) + \nu((\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau), w_j)) + \frac{1}{\varepsilon} d(\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau), w_j) + ((\hat{\varphi}_{\varepsilon m}(\tau), w_j))$$
$$= (\hat{f}(\tau), w_j) + (u_{\varepsilon m}(0), w_j) - (u_{\varepsilon m}(T), w_j)\exp(-iT\tau).$$

On multiplie ces égalités par $\hat{g}_{jm}(\tau)$, et l'on somme en j. Prenant ensuite les modules des parties imaginaires du résultat, on obtient :

$$|\tau| . |\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)|^2 \leqq |\hat{f}(\tau)| . |\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)| + |u_{\varepsilon m}(0)| . |\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)|$$
$$+ |u_{\varepsilon m}(T)| . |\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)| + \| \hat{\varphi}_{\varepsilon m}(\tau) \| . \| \hat{u}_{\varepsilon m}(\tau) \|.$$

Mais

$$|\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)| \leqq c_1 \| \hat{u}_{\varepsilon m}(\tau) \|, \qquad |u_{\varepsilon m}(0)| \leqq |u_0|,$$

et, avec (I; 3.4) et (I; 3.6)

$$\| \hat{\varphi}_{\varepsilon m}(\tau) \| \leqq c_2, \qquad |u_{\varepsilon m}(T)| \leqq c_3;$$

d'où

$$|\tau| . |\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)|^2 \leqq |\hat{f}(\tau)| . |\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)| + c_4 \| \hat{u}_{\varepsilon m}(\tau) \|.$$

On en déduit alors, comme dans LIONS [10] (chap. IV, n° 2) :

$$\text{(I; 3.7)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)|^2 \, d\tau \leqq c_5 \qquad \text{pour} \quad 0 < \gamma < \frac{1}{4},$$

où la constante c_5 ne dépend pas de ε ni de m (mais dépend de γ, ν, T, u_0 et f).

Le paramètre ε est actuellement fixé. D'après (I; 3.4), on peut extraire de $u_{\varepsilon m}$ une suite (encore notée $u_{\varepsilon m}$) telle que

(I; 3.8) $\qquad u_{\varepsilon m} \to u_\varepsilon$ dans $L_2(0, T; W)$ faible et $L_\infty(0, T; G)$ faible, u_ε vérifiant (I; 2.7).

Puisque Ω est borné, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ est compacte et donc aussi l'injection de W dans G. Avec (I; 3.7) et un théorème de compacité de LIONS [10] (chap. IV, prop. 4.2), on peut donc choisir la sous-suite de manière que

(I; 3.9) $\qquad u_{\varepsilon m} \to u_\varepsilon$ dans $L_2(0, T; G)$ fort.

On va montrer que u_ε est solution du problème I.2. Pour cela, on multiplie (I; 3.1) par $\psi(t)$, où ψ est une fonction réelle continûment différentiable sur $[0, T]$, avec $\psi(T) = 0$; on intègre de 0 à T, et l'on en déduit :

$$\text{(I; 3.10)} \quad \int_0^T \Big\{ -(u_{\varepsilon m}(t), \psi'(t)\, w_j) + \nu((u_{\varepsilon m}(t), \psi(t)\, w_j)) + \frac{1}{\varepsilon} d(u_{\varepsilon m}(t), \psi(t)\, w_j) + b(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), \psi(t)\, w_j) \Big\} dt = \int_0^T (f(t), \psi(t)\, w_j)\, dt + (u_{\varepsilon m}(0), \psi(0)\, w_j).$$

Grâce à (I; 3.8), on peut passer à la limite dans les termes linéaires; grâce à (I; 3.8) et (I; 3.9), on peut passer à la limite dans le terme non linéaire (*cf.* lemme 3.1 ci-après); par ailleurs, $u_{\varepsilon m}(0) \to u_0$ dans G fort. On obtient à la limite :

$$\int_0^T \Big\{ -(u_\varepsilon(t), \varphi'(t)) + \nu((u_\varepsilon(t), \varphi(t))) + \frac{1}{\varepsilon} d(u_\varepsilon(t), \varphi(t)) + b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), \varphi(t)) \Big\} dt = \int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt + (u_0, \varphi(0)),$$

où $\varphi = \psi w_j$, $j \geq 1$, est quelconque. Cette égalité est donc aussi valable pour toute fonction φ combinaison linéaire finie de ψw_j, et, par continuité, pour toute fonction φ vérifiant (I; 2.6).

Cela montre que u est une solution du problème I.2.

Dans ce qui précède, on a utilisé le lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Soit v_m une suite de fonctions de $L_2(0, T; W)$, avec $v_m \to v$ dans $L_2(0, T; G)$ fort et $L_2(0, T; W)$ faible. Alors,*

$$\int_0^T b(v_m(t), v_m(t), \varphi(t))\, dt \to \int_0^T b(v(t), v(t), \varphi(t))\, dt$$

quel que soit le vecteur $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_i \in \mathcal{C}^1(\Omega \times [0, T])$.

La vérification de ce lemme est immédiate.

REMARQUE 3.1. — En raison de (I; 3.7), on a

$$\text{(I; 3.11)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{u}_\varepsilon(\tau)|^2\, d\tau \leq c_5,$$

la constante c_5 étant indépendante de ε.

4. Démonstration de l'unicité dans le théorème I.1.

4.1. *Un résultat de régularité.* — Nous introduisons tout d'abord quelques nouvelles notations.

On appelle $W^{1/2}$ l'espace d'interpolation $[W, G]_{1/2}$ (*cf.* LIONS [12]); on a $W \subset W^{1/2} \subset G$ et, pour tout $u \in W$,

$$(I;\ 4.1) \qquad |u|_{W^{1/2}} \leq c_6 |u|^{1/2} \| u \|^{1/2}.$$

Puisque $W \subset H^1(\Omega)^2$, on voit, par interpolation, que

$$[W,\ G]_{1/2} \subset [H^1(\Omega)^2,\ L_2(\Omega)^2]_{1/2} = H^{1/2}(\Omega)^2,$$

où $H^{1/2}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev d'ordre fractionnaire $1/2$. En dimension d'espace 2, $H^{1/2}(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ et ainsi $W^{1/2} \subset L_4(\Omega)^2$, l'injection étant continue.

La forme trilinéaire $b_1(u, v, w)$ étant continue sur

$$L_4(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)^2 \times L_4(\Omega)^2,$$

est aussi continue sur $W^{1/2} \times W \times W^{1/2}$ et, d'après (I; 4.1),

$$(I;\ 4.2) \qquad |b_1(u,\ v,\ w)| \leq c_7 |u|_{W^{1/2}} \|v\|\ |w|_{W^{1/2}}.$$

De même, $b_2(u, v, w)$ est une forme trilinéaire continue sur $W^{1/2} \times W^{1/2} \times W$ et

$$(I;\ 4.3) \qquad |b_2(u,\ v,\ w)| \leq c_8 |u|_{W^{1/2}} |v|_{W^{1/2}} \|w\|.$$

On peut identifier G à son dual; $(W^{1/2})'$ (resp. W') désignant le dual de $W^{1/2}$ (resp. W), on a

$$W \subset W^{1/2} \subset G \subset (W^{1/2})' \subset W',$$

les injections étant continues, et chaque espace étant dense dans le suivant.

Pour $u \in W$, on appelle respectivement Au, Du, $B_i u \in W'$, les formes linéaires $v \mapsto ((u, v))$, $v \mapsto d(u, v)$, $v \mapsto b_i(u, u, v)$ $(i = 1, 2)$. D'après ce qui précède, on a même $B_1 u \in (W^{1/2})'$ et

$$(I;\ 4.4) \qquad \begin{cases} |B_1 u|_{(W^{1/2})'} \leq c_7 |u|_{W^{1/2}} \|u\|, \\ |B_2 u|_{W'} \quad\ \leq c_8 |u|^2_{W^{1/2}}. \end{cases}$$

Si $u \in L_2(0, T; W)$, on vérifie que Au et $Du \in L_2(0, T; W')$ et que $B_i u \in L_1(0, T; W')$ (au moins).

LEMME 4.1. — *Toute solution u_ε du problème* I.2 *vérifie aussi*

$$\text{(I; 4.5)} \qquad \begin{cases} u_\varepsilon \in L_2(0, T; W) \cap L_4(0, T; W^{1/2}), \\ u'_\varepsilon \in L_2(0, T; W') + L_{4/3}(0, T; (W^{1/2})'); \end{cases}$$

$$\text{(I; 4.6)} \qquad u'_\varepsilon(t) + \nu A u_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon} D u_\varepsilon(t) + B u_\varepsilon(t) = f(t), \text{ p. p. } t \in [0, T];$$

u_ε est p. p. égale à une fonction continue de $[0, T] \mapsto G$ *et*

$$\text{(I; 4.7)} \qquad u_\varepsilon(0) = u_0.$$

Démonstration. — D'après (I; 2.4), et par interpolation,

$$u_\varepsilon \in [L_2(0, T; W), L_\infty(0, T; G)]_{1/2} = L_4(0, T; W^{1/2}).$$

Écrivons (I; 2.5) avec $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[; W)$, espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact de $]0, T[\mapsto W$; on en déduit que u_ε vérifie l'égalité

$$u'_\varepsilon + \nu A u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} D u_\varepsilon + B u_\varepsilon = f$$

au sens des distributions vectorielles sur $]0, T[$ à valeurs dans W' (*cf.* SCHWARTZ [15]). Mais

$$A u_\varepsilon \in L_2(0, T; W'), \qquad D u_\varepsilon \in L_2(0, T; W');$$

d'après (I; 4.4),

$$B_1 u_\varepsilon \in L_{4/3}(0, T; (W^{1/2})'), \qquad B_2 u_\varepsilon \in L_2(0, T; W')$$

et ainsi

$$u'_\varepsilon \in L_{4/3}(0, T; (W^{1/2})') + L_2(0, T; W');$$

(I; 4.5) est établie.

Il résulte de LIONS [11] que toute fonction vérifiant (I; 4.5) est p. p. égale à une fonction continue de $[0, T] \mapsto G$. Il ne reste donc à montrer que (I; 4.7).

Multiplions (I; 4.6) par $\varphi(t)$, φ vérifiant (I; 2.6), et intégrons de 0 à T; il vient :

$$\int_0^T \Big\{ \langle u'_\varepsilon(t), \varphi(t) \rangle + \nu((u_\varepsilon(t), \varphi(t))) + \frac{1}{\varepsilon} d(u_\varepsilon(t), \varphi(t)) + b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), \varphi(t)) \Big\} dt$$
$$= \int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt,$$

$\langle\ ,\ \rangle$ désignant la dualité entre W' et W. On peut intégrer par parties le premier terme :

$$\int_0^T \langle u'_\varepsilon(t), \varphi(t)\rangle\, dt = -(u_\varepsilon(0), \varphi(0)) - \int_0^T (u_\varepsilon(t), \varphi'(t))\, dt.$$

Par comparaison avec (I; 2.5), on a alors

$$(u_\varepsilon(0) - u_0, \varphi(0)) = 0,$$

et, puisque $\varphi(0)$ est quelconque dans W, $u_\varepsilon(0) = u_0$.

4.2. *Démonstration de l'unicité.* — Soient u_ε et v_ε deux solutions du problème I.2, et soit $w = u_\varepsilon - v_\varepsilon$. D'après le lemme 4.1, $w(0) = 0$ et

$$w'(t) + \nu A\, w(t) + \frac{1}{\varepsilon} D\, w(t) + B\, u_\varepsilon(t) - B\, v_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{p. p.}$$

On multiplie scalairement cette égalité par $w(t)$:

$$\text{(I; 4.8)} \qquad \langle w'(t), w(t)\rangle + \nu \,\| w(t)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} d(w(t), w(t)) + \langle B\, u_\varepsilon(t) - B\, v_\varepsilon(t), w(t)\rangle = 0.$$

D'après LIONS [11], et pour toute fonction vérifiant (I; 4.5),

$$\langle w'(t), w(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}| w(t)|^2.$$

Puisque $b(u, v, v) = 0$, $\forall\, v \in W$, on a

$$\langle B\, u_\varepsilon(t) - B\, v_\varepsilon(t), w(t)\rangle = b(w(t), u_\varepsilon(t), w(t)),$$

et (I; 4.8) devient

$$\frac{d}{dt}| w(t)|^2 + 2\nu \,\| w(t)\|^2 = -2\, b(w(t), u_\varepsilon(t), w(t)).$$

A l'aide de (I; 4.1), (I; 4.2) et (I; 4.3), on peut majorer le second membre de cette inégalité par

$$c_8\, | w(t)|^{1/2}\, \| w(t)\|^{3/2}\, | u_\varepsilon(t)|^{1/2}\, \| u_\varepsilon(t)\|^{1/2} + c_8\, | w(t)| \,.\, \| w(t)\| \,.\, \| u_\varepsilon(t)\|$$
$$\leq \nu\, \| w(t)\|^2 + c_{10}(1 + | u_\varepsilon(t)|^2)\, \| u_\varepsilon(t)\|^2\, | w(t)|^2.$$

D'où

$$\frac{d}{dt}| w(t)|^2 \leq c_{10}(1 + | u_\varepsilon(t)|^2)\, \| u_\varepsilon(t)\|^2\, | w(t)|^2 \quad \text{p. p.;}$$

puisque $F(t) = c_{10}(1 + | u_\varepsilon(t)|^2)\, \| u_\varepsilon(t)\|^2$ est une fonction sommable sur $[0, T]$, il résulte du lemme de Gronwall que $w(t) = 0$ p. p.

Cela termine la démonstration du théorème I.1.

5. Démonstration du théorème I.2.

5.1. *Un lemme.* — $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne comme précédemment l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω.

LEMME 5.1.

$$\mathcal{V} = \mathcal{D}(\Omega)^2 \cap V = \{ \varphi / \varphi = (\varphi_1, \varphi_2),\ \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{div}\varphi = 0 \}$$

est un sous-espace dense de V,

$$V = \{ u \mid u = (u_1, u_2),\ u_i \in H_0^1(\Omega),\ \operatorname{div} u = 0 \}.$$

Ce résultat est classique.

5.2. *Première partie de la démonstration.* — La solution u_ε du problème I.2 vérifie les majorations (I; 2.7) et (I; 3.11) indépendantes de ε. Il existe donc, pour $\varepsilon \to 0$, une sous-suite extraite de u_ε (encore notée u_ε) telle que

$$\text{(I; 5.1)} \qquad \begin{cases} u_\varepsilon \to w & \text{dans } L_2(0, T; W) \text{ faible et } L_\infty(0, T; G) \text{ faible,} \\ u_\varepsilon \to w & \text{dans } L_2(0, T; G) \text{ fort.} \end{cases}$$

(On a utilisé LIONS [10], comme pour (I; 3.9).)

D'après (I; 2.7), $\operatorname{div} u_\varepsilon \to 0$ dans $L^2(\Omega \times [0, T])$ fort; mais il résulte de (I; 5.1) que $\operatorname{div} u_\varepsilon \to \operatorname{div} w$ dans $L_2(\Omega \times [0, T])$ faible, et ainsi $\operatorname{div} w = 0$; puisque $\operatorname{div} w(t) = 0$ pour presque tout t, $w(t) \in V$ p. p. et alors

$$w \in L_2(0, T; V) \cap L_\infty(0, T; H).$$

Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)^2 \cap V$, et soit ψ une fonction scalaire continûment différentiable sur $[0, T]$, $\psi(T) = 0$; $\varphi = \psi v$ vérifie (I; 2.6), et l'on peut donc écrire (I; 2.5) avec cette fonction φ; on a $\operatorname{div} v = 0$ et donc $d(u_\varepsilon(t), v) = 0$ et il reste :

$$\int_0^T \{ -(u_\varepsilon(t), \varphi'(t)) + \nu((u_\varepsilon(t), \varphi(t))) + b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), \varphi(t)) \}\, dt$$
$$= \int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt + (u_0, \varphi(0)).$$

On peut passer à la limite dans cette égalité en utilisant (I; 5.1) et, pour le terme non linéaire, le lemme 3.1; on obtient

$$\text{(I; 5.2)} \qquad \int_0 \{ -(w(t), \varphi'(t)) + \nu((w(t), \varphi(t))) + b(w(t), w(t), \varphi(t)) \}\, dt$$
$$= \int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt + (u_0, \varphi(0)),$$

où $\varphi = \psi v$, $v \in \mathcal{D}(\Omega)^2 \cap V$, $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T])$, $\psi(T) = 0$.

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)^2 \cap V$ étant dense dans V (lemme 5.1), l'égalité (I; 5.2) est encore vraie par continuité pour $v \in V$ quelconque. L'égalité (I; 5.2) est aussi valable pour φ combinaison linéaire finie de fonctions ψv et, par continuité pour toute fonction φ vérifiant (I; 2.3).

Il en résulte que w est solution du problème I.1. Puisque ce problème possède une solution unique, $w = u$ et c'est la suite u_ε toute entière (et non une suite extraite) qui donne lieu aux convergences (I; 5.1).

5.3. *Deuxième partie de la démonstration; résultat de convergence forte.* — Considérons l'expression

$$X_\varepsilon = |u_\varepsilon(T) - u(T)|^2 + 2\nu \int_0^T \| u_\varepsilon(t) - u(t) \|^2 \, dt + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^T d(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) \, dt.$$

On peut écrire $X_\varepsilon = X^1 + X_\varepsilon^2 + X_\varepsilon^3$, avec

$$X^1 = |u(T)|^2 + 2\nu \int_0^T \| u(t) \|^2 \, dt,$$

$$X_\varepsilon^2 = -2(u_\varepsilon(T), u(T)) - 4\nu \int_0^T ((u_\varepsilon(t), u(t))) \, dt,$$

$$X^3 = |u_\varepsilon(T)|^2 - 2 \int_0^T \left\{ \nu \| u_\varepsilon(t) \|^2 + \frac{1}{\varepsilon} d(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) \right\} dt.$$

On vérifie dans le lemme 5.2 ci-après que $(u_\varepsilon(T), v) \to (u(T), v)$, $\forall v \in H$, et donc $(u_\varepsilon(T), u(T)) \to |u(T)|^2$; avec (I; 5.1) (où $w = u$), on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} X_\varepsilon^2 = -2X^1.$$

La fonction u_ε vérifie une égalité d'énergie qu'on obtient en multipliant scalairement (I; 4.6) par $u_\varepsilon(t)$ et en intégrant de 0 à T. D'après Lions [11] et en raison de (I; 4.5),

$$2 \int_0^T \langle u'_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle \, dt = |u_\varepsilon(T)|^2 - |u_\varepsilon(0)|^2;$$

on obtient alors

$$X_\varepsilon^3 = 2 \int_0^T (f(t), u_\varepsilon(t)) \, dt + |u_0|^2,$$

et ainsi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} X_\varepsilon^3 = X^3 = 2 \int_0^T (f(t), u(t)) \, dt + |u_0|^2,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} X_\varepsilon = X^3 - X^1$$

$$= |u_0|^2 + 2 \int_0^T (f(t), u(t)) \, dt - |u(T)|^2 - 2\nu \int_0^T \| u(t) \|^2 \, dt.$$

L'expression $X^3 - X^1$ est nulle en raison de l'égalité d'énergie vérifiée par u (*cf.* LIONS [10]). Il en résulte que $X_\varepsilon \to 0$ et donc $u_\varepsilon \to u$ dans $L_2(0, T; W)$ fort.

REMARQUE 5.1. — Il en résulte aussi que

$$\text{(I; 5.3)} \qquad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{div} u_\varepsilon \to 0 \quad \text{dans } L_2(\Omega \times [0, T]) \text{ fort.}$$

Il reste à démontrer le lemme suivant :

LEMME 5.2.

$$(u_\varepsilon(T), v) \to (u(T), v), \quad \forall\, v \in H.$$

Démonstration. — D'après le lemme 3.1, la fonction u_ε est continue de $[0, T] \mapsto G$ et avec (I; 2.7), $|u_\varepsilon(T)| \leq L$.

Il suffit donc de démontrer le lemme pour des $v \in \mathcal{D}(\Omega)^2 \cap V$, sous-espace dense de V, donc de H (lemme 5.1). Pour v ainsi choisi, on multiplie scalairement (I; 4.6) par v, et l'on intègre de 0 à T; il vient

$$(u_\varepsilon(T), v) = (u_0, v) + \int_0^T \{ (f(t), v) - \nu((u_\varepsilon(t), v)) - b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), v) \}\, dt.$$

D'après (I; 5.1) (où $w = u$) et le lemme 3.1, le second membre de cette égalité converge, pour $\varepsilon \to 0$, vers

$$(u_0, v) + \int_0^T \{ (f(t), v) - \nu((u(t), v)) - b(u(t), u(t), v) \}\, dt,$$

et le lemme 5.2 est démontré.

6. Approximation de la pression.

On sait que si u est solution du problème I.1, alors il existe $p \in \mathcal{D}'(Q)$, espace des distributions scalaires sur $Q = \Omega \times]0, T[$, tel que

$$\text{(I; 6.1)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\, \Delta u + \sum_{i=1}^{2} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = f,$$

au sens de $\mathcal{D}'(Q)$.

De manière analogue, si l'on écrit (I; 2.5) avec $\varphi \in \mathcal{D}(Q)^2$ [$\mathcal{D}(Q)$, espace des fonctions scalaires indéfiniment différentiables à support compact dans Q], on voit que u_ε vérifie

$$\text{(I; 6.2)} \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu\, \Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{2} u_{\varepsilon i} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{1}{2} (\operatorname{div} u_\varepsilon)\, u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} u_\varepsilon = f,$$

au sens de $\mathcal{D}'(Q)$. En posant

(I; 6.3) $$p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div} u_\varepsilon,$$

(I; 6.2) devient

(I; 6.4) $$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu\,\Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{2} u_{\varepsilon i}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}(\operatorname{div} u_\varepsilon)\, u_\varepsilon + \operatorname{grad} p_\varepsilon = f.$$

Les résultats de convergence du théorème I.2 s'interprètent ainsi

(I; 6.5) $$\left\{\begin{array}{ll} u_{\varepsilon i} \to u_i & \text{dans } L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \text{ faible et } L_2(Q) \text{ fort,} \\ \dfrac{\partial u_{\varepsilon i}}{\partial x_j} \to \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} & \text{dans } L_2(Q) \text{ fort, } i, j = 1,\ 2. \end{array}\right.$$

On peut donner aussi maintenant, un résultat d'approximation de p (la pression). D'après (I; 6.5),

$$\frac{\partial u_{\varepsilon i}}{\partial t} \to \frac{\partial u_i}{\partial t}, \qquad \Delta u_{\varepsilon i} \to \Delta u_i, \qquad \sum_{j=1}^{2} u_{\varepsilon j}\frac{\partial u_{\varepsilon i}}{\partial x_j} \to \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$
$$(\operatorname{div} u_\varepsilon)\, u_{\varepsilon i} \to 0,$$

dans $\mathcal{D}'(Q)$ et même dans $H^{-1}(Q)$, espace dual de $H_0^1(Q)$.

Par comparaison avec (I; 6.1) et (I; 6.4), il vient

(I; 6.6) $$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\operatorname{div} u_\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_i} \to \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \text{dans } H^{-1}(Q) \qquad (i = 1,\ 2). \right.$$

II. — Approximation par des différences finies.

1. Notations.

Soit $h = (h_1, h_2)$, $h_i > 0$, le pas en les variables d'espace. Nous introduisons les notations suivantes :

— R_h, l'ensemble des points de R^2 de coordonnées $(j_1 h_1, j_2 h_2)$, j_i entiers de signe quelconque;

— $\tau_h(M, 0)$, $M = (\mu_1, \mu_2)$,

le pavé $\left]\mu_1 - \frac{h_1}{2}, \mu_1 + \frac{h_1}{2}\right[\times \left]\mu_2 - \frac{h_2}{2}, \mu_2 + \frac{h_2}{2}\right[$;

— $\tau_h(M, 1) = \bigcup_{\substack{j_1 = 0,1 \\ j_2 = 0,1}} \tau_h(M + (j_1 h_1, j_2 h_2), 0)$;

— w_{hm}, la fonction caractéristique du pavé $\tau_h(M, 0)$;

— ∇_i, $\overline{\nabla}_i$, $i = 1, 2$, les opérateurs de différences finies

$$\nabla_i \varphi(x) = \frac{\varphi(x + \vec{h}_i) - \varphi(x)}{h_i}, \qquad \overline{\nabla}_i \varphi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x - \vec{h}_i)}{h_i},$$

où $\vec{h}_1 = (h_1, 0)$, $\vec{h}_2 = (0, h_2)$.

On associe à l'ouvert Ω, l'ensemble de points Ω_h :

$$\Omega_h = \{ M \mid M \in R_h, \tau_h(M, 1) \subset \Omega \}.$$

Soit à présent V_h l'espace des fonctions étagées u_h :

$$u_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h} u_h(M)\, w_{hM}(x), \qquad u_h(M) \in R^2.$$

L'espace V_h est de dimension finie, mais sa dimension $N(h) \to +\infty$ lorsque $h \to 0$. On définit sur V_h deux produits scalaires

$$(u_h, v_h)_h = \int_\Omega u_h(x)\, v_h(x)\, dx; \qquad |u_h|_h = (u_h, u_h)_h^{\frac{1}{2}};$$

$$((u_h, v_h))_h = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega (\nabla_i u_h(x))\, (\nabla_i v_h(x))\, dx; \qquad \|u_h\|_h = ((u_h, u_h))_h^{\frac{1}{2}}.$$

Ces produits scalaires sont hilbertiens, le second en raison de l'inégalité de Poincaré discrète qui donne ici

(II; 1.1) $$|u_h|_h \leq c_0 \|u_h\|_h, \quad \forall\, u_h \in V_h,$$

où c_0 est égal au diamètre de Ω (*cf.* J. Cea [1]).

Puisque V_h est de dimension finie, les normes $|u_h|_h$ et $\|u_h\|_h$ sont équivalentes; plus précisément, on a les inégalités (II; 1.1) et

(II; 1.2) $$\|u_h\|_h \leq S(h)\, |u_h|_h, \qquad S(h) = 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit encore, pour chaque h,

— ρ_h, opérateur linéaire de H dans V_h; $\rho_h u = u_h$ avec

$$u_h(M) = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\tau_h(M, 0)} u(x)\, dx, \quad \forall\, M \in \Omega_h.$$

On vérifie aisément que

(II; 1.3) $$|\rho_h|_h = \sup_{\substack{u \in H \\ |u| = 1}} |\rho_h u|_h \leq 1;$$

— $d_h(u_h, v_h)$, forme bilinéaire symétrique sur $V_h \times V_h$:

$$d_h(u_h, v_h) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{2} \nabla_i u_{ih}(x) \right) \left(\sum_{j=1}^{2} \nabla_j v_{jh}(x) \right) dx.$$

On a

(II; 1.4) $$|d_h(u_h, v_h)| \leq (d_h(u_h, u_h))^{1/2} (d_h(v_h, v_h))^{1/2};$$

(II; 1.5) $$d_h(u_h, u_h) \leq 2 \| u_h \|_h^2;$$

— $b_h(u_h, v_h, w_h)$, forme trilinéaire continue sur $V_h \times V_h \times V_h$:

$$b_h(u_h, v_h, w_h) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} \int_\Omega u_{ih} \{ (\nabla_i v_{jh}) (w_{jh}) - (v_{jh}) (\nabla_i w_{jh}) \} dx.$$

Évidemment

(II; 1.6) $$b_h(u_h, v_h, v_h) = 0, \quad \forall\, u_h, v_h \in V_h.$$

2. Les schémas de différences finies.

Soit N un entier destiné à tendre vers l'infini et $k = T/N$; on pose

(II; 2.1) $$f_h^n = \frac{1}{k} \int_{(n-1)k}^{nk} \rho_h f(s)\, ds \qquad (n = 1, \ldots, N).$$

On associe au problème I.2, les schémas aux différences finies suivants :

On pose

(II; 2.2) $$u_h^0 = \rho_h u_0,$$

puis on définit de proche en proche, $u_h^1, \ldots, u_h^N$; $u_h^0, \ldots, u_h^{n-1}$ étant supposés déterminés, on définit u_h^n de la manière suivante :

Schéma (I).

u_h^n est la solution dans V_h de

(II; 2.3) $$\frac{1}{k}(u_h^n - u_h^{n-1}, v_h)_h + \nu ((u_h^n, v_h))_h + \frac{1}{\varepsilon} d_h(u_h^n, v_h) + b_h(u_h^{n-1}, u_h^n, v_h) = (f_h^n, v_h)_h, \quad \forall\, v_h \in V_h.$$

Schéma (II).

u_h^n est la solution dans V_h de

(II; 2.4) $$\frac{1}{k}(u_h^n - u_h^{n-1}, v_h)_h + \nu ((u_h^n, v_h))_h + \frac{1}{\varepsilon} d_h(u_h^n, v_h) + b_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, v_h) = (f_h^n, v_h)_h, \quad \forall\, v_h \in V_h.$$

SCHÉMA (III).

u_h^n est la solution dans V_h de

(II; 2.5)
$$\frac{1}{k}(u_h^n - u_h^{n-1}, v_h)_h + \nu((u_h^{n-1}, v_h))_h$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} d_h(u_h^{n-1}, v_h) + b_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, v_h)$$
$$= (f_h^n, v_h)_h, \quad \forall v_h \in V_h.$$

L'existence et l'unicité de u_h^n vérifiant (II; 2.5) est évidente.

Pour les deux premiers schémas, la détermination de u_h^n se ramène à la résolution d'un *problème linéaire* du type :

(II; 2.6)
$$a_h(u_h^n, v_h) = L_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

où $a_h(u_h, v_h)$ est une forme bilinéaire sur $V_h \times V_h$ et où $L_h \in V_h'$ est connu. En raison de (II; 1.6) on a, dans les deux cas,

$$a_h(u_h, u_h) \geqq \frac{1}{k} | u_h |_h^2;$$

l'existence et l'unicité de u_h^n vérifiant (II; 2.6) [c'est-à-dire (II; 2.3) ou (II; 2.4)], résulte alors du lemme classique de Lax-Milgram.

REMARQUE 2.1. — Le schéma (III) est explicite. Les schémas (I) et (II) sont implicites; la détermination de u_h^n nécessite l'inversion d'un certain opérateur linéaire A_h^n, symétrique dans le cas du schéma (II), non symétrique dans le cas du schéma (I).

3. **Estimations** *a priori.*

3.1. *Étude du schéma* (I).

LEMME 3.1. — *Les u_h^n définis par* (II; 2.2) *et* (II; 2.3) *vérifient les majorations suivantes :*

(II; 3.1)
$$\begin{cases} | u_h^n |_h \leqq C \qquad (n = 0, \ldots, N), \\ k \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left\{ \| u_h^n \|_h^2 + \frac{1}{\varepsilon} d_h(u_h^n, u_h^n) \right\} \leqq C, \end{cases}$$

où C est indépendant de ε, k et h.

Démonstration. — On écrit (II; 2.3) avec $v_h = u_h^n$ et, avec (II; 1.6), on obtient

$$(u_h^n - u_h^{n-1}, u_h^n)_h + k\nu \| u_h^n \|_h^2 + \frac{k}{\varepsilon} d_h(u_h^n, u_h^n) = k(f_h^n, u_h^n)_h.$$

D'où

$$|u_h^n|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2 + |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 + 2k\nu \|u_h^n\|_h^2 + \frac{2k}{\varepsilon} d_h(u_h^n, u_h^n)$$
$$= 2k(f_h^n, u_h^n)_h \leq 2k|f_h^n|_h |u_h^n|_h \leq 2kc_0 |f_h^n|_h \|u_h^n\|_h$$
$$\leq k\|u_h^n\|_h^2 + k\frac{c_0^2}{\nu}|f_h^n|_h^2$$

et

$$\text{(II; 3.2)} \quad |u_h^n|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2 + |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 + k\nu\|u_h^n\|_h^2 + \frac{2k}{\varepsilon} d_h(u_h^n, u_h^n) \leq k\frac{c_0^2}{\nu}|f_h^n|_h^2.$$

Ajoutant ces inégalités pour $n = 1, \ldots, m$, on obtient

$$|u_h^m|_h^2 \leq |u_h^0|_h^2 + k\frac{c_0^2}{\nu}\sum_{n=1}^{m}|f_h^n|_h^2 \leq |u_h^0|_h^2 + k\frac{c_0^2}{\nu}\sum_{n=1}^{N}|f_h^n|_h^2,$$

puis, ajoutant ces inégalités pour $n = 1, \ldots, N$:

$$|u_h^N|_h^2 + k\sum_{n=1}^{N}\left\{\nu\|u_h^n\|_h^2 + \frac{2}{\varepsilon}d_h(u_h^n, u_h^n)\right\} \leq |u_h^0|_h^2 + k\frac{c_0^2}{\nu}\sum_{n=1}^{N}|f_h^n|_h^2.$$

Il nous suffit, à présent, de démontrer que le second membre de ces inégalités est majoré indépendamment de ε, k et h.

Or, d'après (II; 1.3), (II; 2.1) et (II; 2.2),

$$\text{(II; 3.3)} \qquad |u_h^0|_h^2 \leq |u_0|^2,$$

$$k\sum_{n=1}^{N}|f_h^n|_h^2 = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{N}\left|\int_{(n-1)k}^{nk}\rho_h f(s)\,ds\right|_h^2 \leq \sum_{n=1}^{N}\int_{(n-1)k}^{nk}|\rho_h f(s)|_h^2\,ds;$$

$$\text{(II; 3.4)} \qquad k\sum_{n=1}^{N}|f_h^n|_h^2 \leq \int_0^T |f(s)|^2\,ds.$$

D'où

$$|u_h^0|_h^2 + k\frac{c_0^2}{\nu}\sum_{n=1}^{N}|f_h^n|_h^2 \leq |u_0|^2 + \frac{c_0^2}{\nu}\int_0^T|f(s)|^2\,ds,$$

et le lemme est établi.

3.2. *Étude du schéma* (II).

LEMME 3.2. — *Supposons que k et h vérifient*

$$\text{(II; 3.5)} \qquad k\,S^2(h) \leq \eta,$$

où η est une constante dépendant des données (ν, T, u_0, f) et définie ci-après.

Alors, les u_h^n, définis par (II; 2.2) *et* (II; 2.4), *vérifient*

$$\text{(II; 3.6)}\qquad \left\{\begin{array}{l} |u_h^n| \leq c \qquad (n = 0, \ldots, N), \\ k\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \| u_h^n \|_h^2 + \frac{1}{\varepsilon} d_h(u_h^n, u_h^n) \leq c, \end{array}\right.$$

où c est une constante indépendante de ε, *k et h.*

Démonstration. — On écrit (II; 2.4) avec $v_h = u_h^n$:

$$\text{(II; 3.7)}\quad |u_h^n|_h - |u_h^{n-1}|_h^2 + |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 + 2k|u_h^n|_h^2 + \frac{2k}{\varepsilon} d_h(u_h^n, u_h^n)$$
$$= -2k\, b_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, u_h^n) + 2k(f_h^n, u_h^n)_h.$$

On a, avec (II; 1.1),

$$2k(f_h^n, u_h^n)_h \leq 2k\, c_0\, |f_h^n|_h \| u_h^n \|_h \leq k\nu \| u_h^n \|_h^2 + \frac{kc_0^2}{\nu} |f_h^n|_h^2.$$

On peut écrire, d'après (II; 1.6) :

$$2k\, b_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, u_h^n) = 2k\, b_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, u_h^n - u_h^{n-1}),$$

et avec (II; 1.2) et le lemme 3.4 ci-après :

$$\begin{aligned} &2k\,|b_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, u_h^n - u_h^{n-1})| \\ &\leq k\sqrt{2}\,\{ |u_h^{n-1}|_h^{1/2} \| u_h^{n-1} \|_h^{3/2} |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^{1/2} \| u_h^n - u_h^{n-1} \|_h^{1/2} \\ &\qquad + |u_h^{n-1}|_h \| u_h^{n-1} \|_h \| u_h^n - u_h^{n-1} \|_h \} \\ &\leq 2\sqrt{2}\, k\, S(h)\, |u_h^{n-1}|_h \| u_h^{n-1} \|_h |u_h^n - u_h^{n-1}|_h \\ &\leq \frac{1}{2} |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 + 4k^2 S^2(h) |u_h^{n-1}|_h^2 \| u_h^{n-1} \|_h^2. \end{aligned}$$

Reportant ces majorations dans (II; 3.7), on obtient

$$\text{(II; 3.8)}\quad |u_h^n|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2 + \frac{1}{2}|u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 + k\nu \| u_h^n \|_h^2 + \frac{2k}{\varepsilon} d_h(u_h^n, u_h^n)$$
$$\leq \frac{kc_0^2}{\nu} |f_h^n|_h^2 + 4k^2 S^2(h) |u_h^{n-1}|_h^2 \| u_h^{n-1} \|_h^2.$$

Ajoutons ces inégalités pour $n = 1, \ldots, m$; il vient

$$\text{(II; 3.9)}\quad |u_h^m|_h^2 + k\nu \sum_{n=1}^{m} \| u_h^n \|_h^2 - 4k^2 S^2(h) \sum_{n=2}^{m} |u_h^{n-1}|_h^2 \| u_h^{n-1} \|_h^2$$
$$+ \frac{2k}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{m} d_h(u_h^n, u_h^n) \leq L_m,$$

où $L_m = |u_h^0|_h^2 + \dfrac{kc_0^2}{\nu} \displaystyle\sum_{n=1}^{m} |f_h^n|_h^2 + 4k^2 S^2(h) |u_h^0|_h^2 \| u_h^0 \|_h^2.$

Supposons qu'on ait

$$\text{(II; 3.10)} \qquad 4k\, S^2(h)\, L_N \leqq \nu - \delta, \qquad \delta \text{ fixé}, \quad 0 < \delta < \nu.$$

Il est alors facile de montrer, par récurrence sur m, que

$$\text{(II; 3.11)} \qquad \begin{cases} |u_h^m|_h^2 + k\delta \sum_{n=1}^{m} \| u_h^n \|_h^2 + \frac{2k}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{m} d_h(u_h^n, u_h^n) \leqq L_m \\ (m = 1, \ldots, N). \end{cases}$$

(II; 3.11) est en effet évident pour $m = 1$ [considérer (II; 3.8) avec $n = 1$, et noter que $L_1 \leqq L_N$]; si (II; 3.11) est vrai pour les entiers $1, \ldots, m-1$, alors on a

$$|u_h^n|_h^2 \leqq L_n \ (\leqq L_N) \qquad (n = 1, \ldots, m-1),$$

d'où, avec (II; 3.10) :

$$\begin{aligned} &4k^2\, S^2(h) \sum_{n=2}^{m} |u_h^{n-1}|_h^2 \, \| u_h^{n-1} \|_h^2 \\ &\leqq 4k^2\, S^2(h)\, L_N \sum_{n=2}^{m} \| u_h^{n-1} \|_h^2 \leqq 4k^2\, S^2(h)\, L_N \sum_{n=1}^{m} \| u_h^n \|_h^2 \\ &\leqq (\nu - \delta) k \sum_{n=1}^{m} \| u_h^n \|_h^2. \end{aligned}$$

Portant cette majoration dans (II; 3.9), on obtient précisément (II; 3.11) pour l'entier m.

D'après (II; 1.2), (II; 3.3) et (II; 3.4),

$$L_N \leqq |u_0|^2 + \frac{c_0^2}{\nu} \int_0^T |f(t)|^2\, dt + 4k^2\, S^4(h)\, |u_0|^4$$

et pour que la condition (II; 3.10) soit réalisée, il suffit donc qu'on ait

$$4k\, S^2(h) \left\{ |u_0|^2 + \frac{c_0^2}{\nu} \int_0^T |f(t)|^2\, dt + 4k^2\, S^4(h)\, |u_0|^4 \right\} \leqq \nu - \delta.$$

Cela a lieu si $k\, S^2(h)$ est assez petit, c'est-à-dire $k\, S^2(h) \leqq \eta$, où η ne dépend que de δ et des données [3].

---

[3] η est la plus petite racine positive de l'équation

$$16\, |u_0|^4 X^3 + 4 \left\{ |u_0|^2 + \frac{c_0^2}{\nu} \int_0^T |f(t)|^2\, dt \right\} X + \delta - \nu = 0.$$

Cette condition étant réalisée, les L_m sont majorés indépendamment de ε, k et h et le lemme résulte de (II; 3.11).

3.3. *Étude du schéma* (III).

LEMME 3.3. — *S'il existe un* $\delta > 0$ *fixé (arbitrairement petit) tel que*

$$\text{(II; 3.12)} \qquad \frac{k\,S^2(h)}{\varepsilon} \leq \frac{1}{4} - \delta,$$

et si

$$\text{(II; 3.13)} \qquad k\,S^2(h) \leq \frac{\nu}{16}\left\{\frac{\nu^2}{2} + |u_0|^2 + \left(\frac{c_0^2}{\nu} + 4T\right)\int_0^T |f(t)|^2\,dt\right\}^{-1} \quad [4],$$

alors, les u_h^n *définis par* (II; 2.2) *et* (II; 2.5) *vérifient*

$$\text{(II; 3.14)} \qquad \left\{\begin{array}{l} |u_h^n|_h \leq c \qquad (n = 0, \ldots, N), \\ k\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\|u_h^n\|_h^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,d_h(u_h^n, u_h^n)\right\} \leq c, \end{array}\right.$$

c, constante indépendante de ε, k *et* h.

Démonstration. — On remplace v_h par u_h^{n-1} dans (II; 2.5); cela donne

$$\text{(II; 3.15)} \qquad |u_h^n|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2 - |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2$$
$$+ 2k\nu\,\|u_h^{n-1}\|_h^2 + \frac{2k}{\varepsilon}\,d_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}) = 2k(f_h^n, u_h^{n-1})_h.$$

Il nous faut majorer le terme $|u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2$, qui apparaît ici précédé du signe négatif. Pour cela, on remplace v_h par $u_h^n - u_h^{n-1}$ dans (II; 2.5) :

$$\text{(II; 3.16)} \qquad 2\,|u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2$$
$$= -2k\nu\,((u_h^{n-1}, u_h^n - u_h^{n-1}))_h - \frac{2k}{\varepsilon}\,d_h(u_h^{n-1}, u_h^n - u_h^{n-1})$$
$$- 2k\,b_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, u_h^n - u_h^{n-1}) + 2k(f_h^n, u_h^n - u_h^{n-1})_h,$$

et l'on écrit :

$$\begin{aligned} 2\nu k\,|((u_h^{n-1}, u_h^n - u_h^{n-1}))_h| &\leq 2\nu k\,\|u_h^{n-1}\|_h\,\|u_h^n - u_h^{n-1}\|_h \\ &\leq 2\nu k\,S(h)\,\|u_h^{n-1}\|_h\,|u_h^n - u_h^{n-1}|_h \\ &\leq \frac{1}{4}\,|u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 + 4\nu^2 k^2\,S^2(h)\,\|u_h^{n-1}\|_h^2 \end{aligned}$$

---

[4] La condition (II; 3.13) est une conséquence de (II; 3.12) si ε est assez petit.

[on a utilisé (II; 1.2)];

$$\frac{2k}{\varepsilon}\,|\,d_h(u_h^{n-1},\,u_h^n-u_h^{n-1})\,|\leq\frac{2k}{\varepsilon}\{d_h(u_h^{n-1},u_h^{n-1})\}^{1/2}\{d_h(u_h^n-u_h^{n-1},u_h^n-u_h^{n-1}\}^{1/2}$$

$$\leq\frac{2\sqrt{2}\,k}{\varepsilon}\{\,d_h(u_h^{n-1},\,u_h^{n-1})\,\}^{1/2}\,\|\,u_h^n-u_h^{n-1}\,\|_h$$

$$\leq\frac{2\sqrt{2}\,k}{\varepsilon}\,S(h)\,\{\,d_h(u_h^{n-1},\,u_h^{n-1})\,\}^{1/2}\,|\,u_h^n-u_h^{n-1}\,|_h$$

$$\leq\frac{1}{4}\,|\,u_h^n-u_h^{n-1}\,|_h^2+\frac{8k^2}{\varepsilon^2}\,S^2(h)\,d_h(u_h^{n-1},\,u_h^{n-1})$$

[on a utilisé (II; 1.2) et (II; 1.5)];

$$2k\,|\,b_n(u_h^{n-1},\,u_h^{n-1},\,u_h^n-u_h^{n-1})\,|$$
$$\leq\frac{1}{4}\,|\,u_h^n-u_h^{n-1}\,|_h^2+8k^2\,S^2(h)\,|\,u_h^{n-1}\,|_h^2\,\|\,u_h^{n-1}\,\|_h^2$$

(même majoration que dans le lemme 3.2);

$$2k\,|\,(f_h^n,\,u_h^n-u_h^{n-1})_h\,|\leq 2k\,|\,f_h^n\,|_h\,|\,u_h^n-u_h^{n-1}\,|_h$$
$$\leq\frac{1}{4}\,|\,u_h^n-u_h^{n-1}\,|_h^2+4k^2\,|\,f_h^n\,|_h^2.$$

Dans ces conditions, (II; 3.16) devient

$$\text{(II; 3.17)}\quad |\,u_h^n-u_h^{n-1}\,|_h^2\leq 4k^2\,S^2(h)\,\{\,\nu^2+2\,|\,u_h^{n-1}\,|_h^2\,\}\,\|\,u_h^{n-1}\,\|_h^2$$
$$+\frac{8k^2\,S^2(h)}{\varepsilon^2}\,d_h(u_h^{n-1},\,u_h^{n-1})+4k^2\,|\,f_h^n\,|_h^2,$$

et pour (II; 3.15), on a alors

$$|\,u_h^n\,|_h^2-|\,u_h^{n-1}\,|_h^2+k\,\{\,2\nu-4k\,S^2(h)\,(\nu^2+2\,|\,u_h^{n-1}\,|_h^2)\,\}\,\|\,u_h^{n-1}\,\|_h^2$$
$$+\frac{2k}{\varepsilon}\left(1-\frac{4k^2\,S^2(h)}{\varepsilon}\right)d_h(u_h^{n-1},\,u_h^{n-1})$$
$$\leq 2k(f_h^n,\,u_h^{n-1})_h+4k^2\,|\,f_h^n\,|_h^2.$$

Le second membre de cette inégalité est inférieur ou égal à

$$2k\,|\,f_h^n\,|_h\,|\,u_h^{n-1}\,|_h+4k^2\,|\,f_h^n\,|_h^2$$
$$\leq 2kc_0\,|\,f_h^n\,|_h\,\|\,u_h^{n-1}\,\|_h+4k^2\,|\,f_h^n\,|_h^2\leq k\nu\,\|\,u_h^{n-1}\,\|_h^2+k\left(\frac{c_0^2}{\nu}+4T\right)|\,f_h^n\,|_h^2$$

[on a écrit $k\leq T$ et l'on a utilisé (II; 1.1) ([5])].

([5]) Il est possible en améliorant cette dernière majoration, d'améliorer (II; 3.13). Toutefois, cela n'est pas essentiel puisque pour ε assez petit, la condition (II; 3.12) est beaucoup plus restrictive que (II; 3.13) [*cf.* note ([3])].

Il vient ainsi

$$\text{(II; 3.18)}\quad |u_h^n|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2 + k\{\nu - 4kS^2(h)(\nu^2 + 2|u_h^{n-1}|_h^2)\}\|u_h^{n-1}\|_h^2 + \frac{2k}{\varepsilon}\left(1 - \frac{4kS^2(h)}{\varepsilon}\right) d_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}) \leq k\left(\frac{c_0^2}{\nu} + 4T\right)|f_h^n|_h^2.$$

Ajoutons ces inégalités pour $n = 1, \ldots, m$; cela donne

$$\text{(II; 3.19)}\quad |u_h^n|_h^2 + k\sum_{n=1}^{m}\{\nu - 4kS^2(h)(\nu^2 + 2|u_h^{n-1}|_h^2)\}\|u_h^{n-1}\|_h^2 + \frac{2k}{\varepsilon}\left(1 - \frac{4kS^2(h)}{\varepsilon}\right)\sum_{n=1}^{m} d_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}) \leq L'_m,$$

où $L'_m = |u_h^0|_h^2 + k\left(\frac{c_0^2}{\nu} + 4T\right)\sum_{n=1}^{m}|f_h^n|_h^2$.

Supposons à présent que les conditions (II; 3.12) et (II; 3.13) soient réalisées; nous allons démontrer, par récurrence sur m, que

$$\text{(II; 3.20)}\quad \left\{ \begin{array}{l} |u_h^m|_h^2 + \dfrac{k\nu}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\|u_h^{n-1}\|_h^2 + \dfrac{8k}{\varepsilon}\delta\sum_{n=1}^{m} d_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}) \leq L'_m \\ \qquad\qquad (m = 1, \ldots, N). \end{array}\right.$$

Notons que

$$\text{(II; 3.21)}\quad L'_m \leq L'_N = |u_h^0|_h^2 + k\left(\frac{c_0^2}{\nu} + 4T\right)\sum_{n=1}^{N}|f_h^n|_h^2 \leq |u_0|^2 + \left(\frac{c_0^2}{\nu} + 4T\right)\int_0^T |f(t)|^2\,dt \qquad (m = 1, \ldots, N),$$

en raison de (II; 3.3) et (II; 3.4).

L'inégalité (II; 3.20) est immédiate pour $m = 1$ [on écrit (II; 3.19) avec $n = 1$]. Si elle est vraie pour les entiers $1, \ldots, m-1$, alors on a

$$|u_h^n|_h^2 \leq L'_n \quad (\leq L'_N) \qquad (n = 1, \ldots, m-1),$$

d'où, avec (II; 3.12), (II; 3.13) et (II; 3.21) :

$$\nu - 4kS^2(h)(\nu^2 + 2|u_h^{n-1}|_h^2) \geq \nu - 4kS^2(h)(\nu^2 + 2L'_N) \geq \frac{\nu}{2},$$

et

$$1 - \frac{4kS^2(h)}{\varepsilon} \geq 4\delta;$$

avec ces inégalités, (II; 3.19) donne exactement (II; 3.20).

L'inégalité (II; 3.20) est ainsi démontrée pour $m = 1, \ldots, N$. Les majorations (II; 3.14) s'en déduisent immédiatement puisque, d'après (II; 3.21), les L'_m sont majorés indépendamment de ε, k et h.

3.4. *Lemmes.* — On a utilisé pour la démonstration des lemmes 3.2 et 3.3, le lemme suivant :

LEMME 3.4. — *Pour* $u_h, v_h, w_h \in V_h$:

$$(\text{II}; 3.22) \quad |b_h(u_h, v_h, w_h)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |u_h|_h^{1/2} \|u_h\|_h^{1/2} \times \{ \|v_h\|_h |w_h|_h^{1/2} \|w_h\|_h^{1/2} + |v_h|_h^{1/2} \|v_h\|_h^{1/2} \|w_h\|_h \}.$$

Démonstration. — Cela résulte, par un calcul facile, des inégalités de Schwarz et de Hölder, et du lemme 3.5 ci-après.

Le lemme 3.5 donne la version discrète d'une inégalité de Cagliardo et Niremberg.

LEMME 3.5. — *Soit* $g : R^2 \mapsto R$, *une fonction étagée à support compact, de la forme*

$$g = \sum_{M \in R_h} g(M)\, w_{hM}, \qquad g(M) \in R.$$

Alors

$$(\text{II}; 3.23) \quad \int_{R^2} |g(x)|^4\, dx \leq 2 \left\{ \int_{R^2} |g(x)|^2\, dx \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_{R^2} |\nabla_i g(x)|^2\, dx \right\}.$$

Démonstration. — Soit $x = (x_1, x_2)$; x appartient à un pavé $\tau_h(P, 0)$, où $P = (p_1 h_1, p_2 h_2) \in R_h$. On vérifie que

$$\int_{\left(p_1 - \frac{3}{2}\right) h_1}^{\left(p_1 - \frac{1}{2}\right) h_1} \left\{ g\left(\xi_1 + \frac{h_1}{2}, x_2\right) \right\} \{ \nabla_1 g(\xi_1, x_2) \}\, d\xi_1 = \frac{1}{2} \left\{ |g(P)|^2 - \left| g\left(P - \frac{\vec{h}_1}{2}\right) \right|^2 \right\},$$

et, par addition,

$$|g(x)|^2 = |g(P)|^2 = 2 \int_{-\infty}^{\left(p_1 - \frac{1}{2}\right) h_1} \left\{ g\left(\xi_1 + \frac{h_1}{2}, x_2\right) \right\} \{ \nabla_1 g(\xi_1, x_2) \}\, d\xi_1;$$

d'où

$$|g(x)|^2 \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| g\left(\xi_1 + \frac{h_1}{2}, x_2\right) \right| . |\nabla_1 g(\xi_1, x_2)|\, d\xi_1,$$

$$(\text{II}; 3.24) \quad |g(x)|^2 \leq \sup_{\xi_1 \in R} |g(\xi_1, x_2)|^2 \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| g\left(\xi_1 + \frac{h_1}{2}, x_2\right) \right| . |\nabla_1 g(\xi_1, x_2)|\, d\xi_1.$$

On a évidemment une inégalité analogue pour la variable x_2 :

$$\text{(II; 3.25)} \quad |g(x)|^2 \leqq \sup_{\xi_2 \in R} |g(x_1, \xi_2)|^2$$
$$\leqq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| g\left(x_1, \xi_2 + \frac{h_2}{2}\right) \right| . |\nabla_2 g(x_1, \xi_2)| \, d\xi_2.$$

On peut alors écrire

$$\int_{R^2} |g(x)|^4 \, dx \leqq \int_{R^2} \left\{ \sup_{\xi_1 \in R} |g(\xi_1, x_2)|^2 \right\} \left\{ \sup_{\xi_2 \in R} |g(x_1, \xi_2)|^2 \right\} dx_1 \, dx_2$$
$$\leqq \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\xi_1 \in R} |g(\xi_1, x_2)|^2 \, dx_2 \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\xi_2 \in R} |g(x_1, \xi_2)|^2 \, dx_1 \right\}.$$

Avec (II; 3.24) et (II; 3.25), on obtient :

$$\int_{R^2} |g(x)|^4 \, dx \leqq 4 \left\{ \int_{R^2} \left| g\left(\xi_1 + \frac{h_1}{2}, x_2\right) \right| . |\nabla_1 g(\xi_1, x_2)| \, d\xi_1 \, dx_2 \right\}$$
$$\times \left\{ \int_{R^2} \left| g\left(x_1, \xi_2 + \frac{h_2}{2}\right) \right| . |\nabla_2 g(x_1, \xi_2)| \, dx_1 \, d\xi_2 \right\},$$

$$\int_{R^2} |g(x)|^4 \, dx \leqq 2 \left\{ \int_{R^2} |g(x)|^2 \, dx \right\} . \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_{R^2} |\nabla_i g(x)|^2 \, dx \right\}.$$

4. Théorèmes de stabilité.

On appelle u_h la fonction étagée définie sur $[0, T[$, à valeurs dans V_h, et dont les valeurs sont les suivantes :

$$\text{(II; 4.1)} \quad \begin{cases} u_h(t) = u_h^{n+1} & \text{pour } t \in [nk, (n+1)k[\quad (n = 0, \ldots, N-1), \\ & \text{dans le cas des schémas (I) et (II),} \end{cases}$$

$$\text{(II; 4.2)} \quad \begin{cases} u_h(t) = u_h^{n} & \text{pour } t \in [nk, (n+1)k[\quad (n = 0, \ldots, N-1), \\ & \text{dans le cas du schéma (III).} \end{cases}$$

Soit F l'espace de Hilbert $L_2(\Omega)^6$, et soit $\varpi \in \mathcal{L}(W, F)$ $(W = H_0^1(\Omega)^2)$, l'application linéaire

$$u = (u_1, u_2) \mapsto \varpi u = \left(u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right);$$

on définit, de manière analogue, $p_h \in \mathcal{L}(V_h, F)$:

$$u_h = (u_{1h}, u_{2h}) \mapsto p_h u_h$$
$$= (u_{1h}|_\Omega, u_{2h}|_\Omega, \nabla_1 u_{1h}|_\Omega, \nabla_1 u_{2h}|_\Omega, \nabla_2 u_{1h}|_\Omega, \nabla_2 u_{2h}|_\Omega) \quad (^6),$$

(6) Une fonction $u_h \in V_h$ est une application de R^2 dans R ; toutefois, son support et celui des fonctions $\nabla_i u_h$ sont inclus dans Ω.

où $g|_\Omega$ désigne la restriction à Ω d'une fonction définie sur R^2. Soit enfin $q_h \in \mathcal{L}(V_h, G)$ $(G = L_2(\Omega)^2)$, l'application linéaire

$$u_h \mapsto q_h u_h = u_h|_\Omega.$$

D'après le lemme 3.1, les u_h^n définis par le schéma (I), vérifient

$$|u_h^n|_h \leq c, \qquad k\sum_{n=1}^{N} \|u_h^n\|_h^2 \leq c;$$

on a donc aussi

$$k\sum_{n=1}^{N} |u_h^n|_h^2 \leq kNc^2 = Tc^2 = c'.$$

Avec les notations qui précèdent, il est possible d'interpréter ce résultat comme suit :

Dans le cas du schéma (I),

$$\begin{cases} \textit{la fonction } q_h u_h \textit{ est majorée dans } L_\infty(0, T; G), \\ \qquad\qquad \textit{indépendamment de } \varepsilon, k \textit{ et } h; \\ \textit{la fonction } p_h u_h \textit{ est majorée dans } L_2(0, T; G), \\ \qquad\qquad \textit{indépendamment de } \varepsilon, k \textit{ et } h. \end{cases}$$

Dans le cas des schémas (II) *et* (III), *les lemmes* 3.2 *et* 3.3 *donnent des résultats analogues, lorsque la condition* (II; 3.5) *est réalisée* [ou respectivement lorsque les conditions (II; 3.12) et (II; 3.13) sont réalisées].

On a ainsi démontré les théorèmes de stabilité suivants :

THÉORÈME II.1. — *Dans le cas du schéma* (I),

$$\text{(II; 4.3)} \qquad \begin{cases} q_h u_h \textit{ est } L_\infty(0, T; G) \textit{ stable}, \\ p_h u_h \textit{ est } L_2(0, T; F) \textit{ stable}. \end{cases}$$

THÉORÈME II.2. — *Dans le cas du schéma* (II), *il existe une constante* η, *dépendant uniquement des données* (ν, T, u_0, f), *telle que si*

$$\text{(II; 4.4)} \qquad kS^2(h) = 4k\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) \leq \eta,$$

alors (II; 4.3) *a lieu.*

THÉORÈME II.3. — *Dans le cas du schéma* (II), *si* ε, k *et* h *vérifient*

$$\text{(II; 4.5)} \qquad \begin{cases} \dfrac{kS^2(h)}{\varepsilon} = \dfrac{4k}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{h_1^2} + \dfrac{1}{h_2^2}\right) \leq \dfrac{1}{4} - \delta, \\ \delta > 0 \quad \textit{fixé arbitrairement petit}, \end{cases}$$

et

$$(II;\ 4.6)\qquad kS^2(h) \leq \frac{\nu}{16}\left\{\frac{\nu^2}{2} + |u_0|^2 + \left(\frac{c_0^2}{\nu} + 4T\right)\int_0^T |f(t)|^2\,dt\right\}^{-1},$$

alors (II; 4.3) *a lieu.*

5. Théorèmes de convergence.

Nous allons étudier dans ce numéro, la convergence de la fonction u_h *définie précédemment vers la solution* u *du problème* I.1, *lorsque* ε, k *et* h *tendent vers zéro.* Nous utiliserons sans les rappeler, les notations des nos 1 et 2 du paragraphe I.

5.1. *Énoncé des théorèmes de convergence.*

THÉORÈME II.4. — *Dans le cas du schéma* (I), *lorsque* ε, k *et* h *tendent vers zéro,*

$$(II;\ 5.1)\qquad \begin{cases} q_h u_h \to u & \text{dans } L_\infty(0, T;\ G) \text{ faible et } L_2(0, T;\ G) \text{ fort,}\\ p_h u_h \to u & \text{dans } L_2(0, T;\ F) \text{ faible,}\end{cases}$$

u, solution du problème I.1 [7].

THÉORÈME II.5. — *Dans le cas du schéma* (II), *si* ε, k *et* h *tendent vers zéro en vérifiant* (II; 4.4), *alors* (II; 5.1) *a lieu.*

THÉORÈME II.6. — *Dans le cas du schéma* (III), *si* ε, k *et* h *tendent vers zéro en vérifiant* (II; 4.5) *et* (II; 4.6), *alors* (II; 5.1) *a lieu.*

Les démonstrations de ces trois théorèmes sont évidemment très voisines; nous nous contenterons de donner, par exemple, la démonstration du théorème II.6 [c'est-à-dire d'établir la convergence du schéma (III)].

REMARQUE 5.1. — Nous pourrions montrer également certains résultats de convergence dans $L_2(0, T;\ F)$ *fort.*

5.2. — D'après le théorème II.3, il existe une sous-suite ε', k', h' tendant vers zéro, telle que

$$(II;\ 5.2)\qquad \begin{cases} q_{h'} u_{h'} \to w & \text{dans } L_\infty(0, T;\ G) \text{ faible,}\\ p_{h'} u_{h'} \to \varphi & \text{dans } L_2(0, T;\ F) \text{ faible.}\end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, on notera cette suite ε, k, h au lieu de ε', k', h'.

---

(7) Pour la signification de p_h, q_h, ϖ et F, *cf.* les notations du no 4.

LEMME 5.1.

$$w \in L_2(0, T; V) \cap L_\infty(0, T; H); \tag{II; 5.3}$$

$$\varphi = \varpi w. \tag{II; 5.4}$$

Démonstration. — Explicitons les composantes de u_h, w et φ :

$$u_h = (u_{1h}, u_{2h}), \qquad w = (w_1, w_2), \qquad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_6).$$

Soit $Q = \Omega \times]0, T[$; on peut interpréter (II; 5.2) ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{ih}|_Q \to w_i \quad \text{dans } L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \text{ faible,} \\ u_{ih}|_Q \to \varphi_i, \quad \nabla_1 u_{ih}|_Q \to \varphi_{2+i}, \quad \nabla_2 u_{ih}|_Q \to \varphi_{4+i} \\ \quad \text{dans } L_2(0, T; L_2(\Omega)) = L_2(Q) \text{ faible} \quad (i = 1, 2). \end{array}\right. \tag{II; 5.2}$$

Il est clair que $w_1 = \varphi_1$ et $w_2 = \varphi_2$. D'autre part, puisque les fonctions u_{ih} et $\nabla_j u_{ih}$ sont à support compact dans $\Omega \times [0, T]$, les convergences précédentes impliquent aussi

$$\left\{\begin{array}{l} u_{ih} \to \tilde{w}_i, \qquad \nabla_1 u_{ih} \to \tilde{\varphi}_{2+i}, \qquad \nabla_2 u_{ih} \to \varphi_{4+i}, \\ \quad \text{dans } L_2(R^2 \times [0, T]) \text{ faible,} \end{array}\right. \tag{II; 5.5}$$

où $\tilde{\psi}$ désigne la fonction égale à ψ dans Ω et à 0 dans $\complement\Omega$.

On vérifie aisément que $\nabla_j u_{ih} \to \dfrac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_j}$ dans l'espace des distributions scalaires sur $R^2 \times]0, T[$, et, par comparaison avec (II; 5.5),

$$\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_1} = \tilde{\varphi}_{2+i} \in L_2(R^2 \times [0, T]),$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_2} = \tilde{\varphi}_{4+i} \in L_2(R^2 \times [0, T]).$$

Il en résulte que $w_i \in L_2(0, T; H^1(R^2))$; pour presque tout t, $\tilde{w}_i(t) \in H^1(R^2)$ et est nulle p. p. dans $\complement\Omega$, donc sa restriction à Ω, c'est-à-dire $w_i(t)$ appartient à $H_0^1(\Omega)$; ainsi $w_i \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $w \in L_2(0, T; W)$ et, en outre,

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_6) = \left(w_1, w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1}, \frac{\partial w_1}{\partial x_2}, \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) = \varpi w.$$

Il reste à montrer que $w(t) \in V$ p. p., c'est-à-dire que

$$\operatorname{div} w = 0 \quad \text{p. p.}$$

On utilise pour cela une des majorations (II; 3.14)

$$\frac{k}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{N-1} d_h(u_h^n, u_h^n) \leq c,$$

qui s'interprète ainsi

$$\int_0^T \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{2} \nabla_i u_{ih}(x, t) \right\}^2 dx\, dt \leq c\varepsilon.$$

Alors, lorsque ε, k et h tendent vers zéro,

$$\sum_{i=1}^{2} \nabla_i u_{ih} |_Q \to 0 \quad \text{dans } L_2(Q) \text{ fort},$$

mais, d'après (II; 5.2′) et (II; 5.4),

$$\sum_{i=1}^{2} \nabla_i u_{ih} |_Q \to \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} (= \operatorname{div} w) \quad \text{dans } L_2(Q) \text{ faible};$$

par comparaison, on a bien $\operatorname{div} w = 0$.

LEMME 5.2. — *Un résultat de convergence forte*

(II; 5.6) $\qquad q_h u_h \to w$ *dans* $L_2(0, T; G)$ *fort.*

La démonstration de ce lemme est donnée dans la suite (n° 5.4).

5.3. — Nous allons maintenant démontrer que la fonction w, apparue en (II; 5.2), n'est autre que la solution u du problème I.1.

Introduisons avec J. CÉA [1] l'opérateur linéaire r_h qui applique (en particulier) $\mathcal{V} = \mathcal{D}(\Omega)^2 \cap V$, dans V_h :

(II; 5.7)
$$\begin{cases} r_h v = v_h = (v_{1h}, v_{2h}): \\ v_{1h}(M) = \dfrac{1}{h_2} \displaystyle\int_{\left(m_2 - \frac{1}{2}\right) h_2}^{\left(m_2 + \frac{1}{2}\right) h_2} v_1(m_1 h_1, x_2)\, dx_2, \\ v_{2h}(M) = \dfrac{1}{h_1} \displaystyle\int_{\left(m_1 - \frac{1}{2}\right) h_1}^{\left(m_1 + \frac{1}{2}\right) h_1} v_2(x_1, m_2 h_2)\, dx_1, \\ \forall M = (m_1 h_1, m_2 h_2) \in \Omega_h; \end{cases}$$

On a

(II; 5.8) $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \nabla_i v_{ih} = 0 \quad$ si $\quad v_h = r_h v \quad$ et $\quad v \in \mathcal{D}(\Omega)^2 \cap V$ [8].

Soit $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T])$, avec $\psi(T) = 0$; posons

$$\psi^n = \psi(nk) \qquad (n = 0, \ldots, N).$$

---

[8] Autrement dit, cet opérateur r_h associe, à un vecteur v à divergence nulle, une fonction étagée v_h dont la « divergence discrète » est nulle.

Soit v choisi dans $\mathcal{V} = \mathcal{D}(\Omega)^2 \cap V$; on écrit (II; 2.5) avec $v_h = r_h v$, on multiplie (II; 2.5) par ψ^{n-1}, et l'on ajoute toutes ces égalités pour $n = 1, \ldots, N$. Il en résulte ($\psi^N = \psi(T) = 0$) :

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n=1}^{N} (u_h^n, (\psi^n - \psi^{n-1})\, v_h)_h + k\nu \sum_{n=1}^{N} ((u_h^{n-1}, \psi^{n-1} v_h))_h \\
&+ k \sum_{n=1}^{N} b_h(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, \psi_h^{n-1} v_h) \\
&= (u_h^0, \psi^0 v_h)_h + k \sum_{n=1}^{N} (f_h^n, \psi^{n-1} v_h)_h.
\end{aligned}$$

Les termes en $d_h(u_h^{n-1}, v_h)$ sont nuls en raison de (II; 5.8).

Soit ψ_k (resp. f_h) la fonction étagée égale à ψ^n(resp. f_h^{n+1}) sur l'intervalle $[nk, (n+1)k[$. L'égalité précédente s'interprète ainsi :

$$\text{(II; 5.9)} \quad \begin{aligned}
&\int_0^T \left\{ -\left(u_h(t+k), \frac{\psi_k(t+k) - \psi_k(t)}{k} r_h v \right)_h \right. \\
&\qquad \left. + \nu((u_h(t), \psi_k(t)\, r_h v))_h + b_h(u_h(t), u_h(t) \psi_k(t) r_h v) \right\} dt \\
&\qquad = (u_h^0, \psi(0)\, r_h v)_h + \int_0^T (f_h(t), \psi_k(t)\, r_h v)_h dt.
\end{aligned}$$

On vérifiera par la suite (*cf.* n° 5.5) le lemme suivant :

LEMME 5.3. — *Lorsque ε, k et h tendent vers zéro,*

$$\begin{gathered}
\int_0^T \left(u_h(t+k), \frac{\psi_k(t+k) - \psi_k(t)}{k} r_h v \right)_h dt \to \int_0^T (w(t), \psi(t)\, v)\, dt, \\
\int_0^T ((u_h(t), \psi_k(t)\, r_h v))_h dt \to \int_0^T ((w(t), \psi(t)\, v))\, dt, \\
\int_0^T b_h(u_h(t), u_h(t), \psi_k(t)\, r_h v)\, dt \to \int_0^T b(w(t), w(t), \psi(t)\, v)\, dt, \\
(u_h^0, \psi(0) r_h v)_h \to (u_0, \psi(0) v), \\
\int_0^T (f_h(t), \psi_k(t)\, r_h v)_h dt \to \int_0^T (f(t), \psi(t) v)\, dt.
\end{gathered}$$

Ces résultats étant admis provisoirement, on passe à la limite dans (II; 5.9), et l'on obtient ceci :

$$\text{(II; 5.10)} \quad \begin{aligned}
&\int_0^T \left\{ -(w(t), \varphi'(t)) + \nu((w(t), \varphi(t)) + b(w(t), w(t), \varphi(t)) \right\} dt \\
&\qquad = \int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt + (u_0, \varphi(0)),
\end{aligned}$$

où $\varphi = \psi v$, $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T])$, $\psi(T) = 0$, $v \in \mathcal{V} = \mathcal{D}(\Omega)^2 \cap V$.

On en déduit, par un raisonnement de continuité déjà utilisé, que (II; 5.10) est encore vérifiée pour toute fonction φ qui satisfait à (I; 2.3), *et w est donc solution du problème* I.1.

Puisque ce problème possède une solution unique, $w = u$, et les convergences (II; 5.2) et (II; 5.6) ont lieu pour la suite ε, k, h elle-même (et non pour une suite extraite).

Il ne reste plus à présent qu'à démontrer les lemmes 5.2 et 5.3.

5.4. *Démonstration du lemme* 5.2. — Le principe de cette démonstration est dû à RAVIART [14].

Soit $\chi_k(t)$ la fonction égale à $1/k$ sur $[-k, 0[$, et à 0 ailleurs ; de même, soit χ_k^T la fonction égale à $1/k$ sur $[T-k, T[$, et à 0 ailleurs.

Toutes les fonctions étant prolongées par 0 en dehors de l'intervalle $[0, T[$, les égalités (II; 2.5) s'interprètent ainsi :

$$\text{(II; 5.11)}\quad \frac{1}{k}(u_h(t+k) - u_h(t), v_h)_h + \nu((u_h(t), v_h))_h + \frac{1}{\varepsilon} d_h(u_h(t), v_h) + b_h(u_h(t), u_h(t), v_h) = (f_h(t), v_h)_h + (u_h^0, v_h)_h \chi_k(t) - (u_h^N, v_h)_h \chi_k^T(t),$$
$$\forall v_h \in V_h, \quad \forall t \in R.$$

Soit g_h la fonction définie par

$$g_h(t) \in v_h, \qquad ((g_h(t), v_h))_h = b_h(u_h(t), u_h(t), v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Il résulte en particulier de (II; 3.22) que

$$\text{(II; 5.12)}\qquad \| g_h(t) \|_h \leq c_1' \, \| u_h(t) \|_h^2, \quad \forall t,$$

c_1', constante convenable. On vérifie aisément que

$$\frac{d}{dt}(\chi_k \star u_h) = \frac{u_h(t+k) - u_h(t)}{k}$$

et alors (II; 5.11) devient

$$\text{(II; 5.13)}\quad \frac{d}{dt}(\chi_k \star u_h(t), v_h)_h + \nu((u_h(t), v_h))_h + \frac{1}{\varepsilon} d_h(u_h(t), v_h) + ((g_h(t), v_h))_h = (f_h(t), v_h)_h + (u_h^0, v_h)_h \chi_k(t) - (u_h^N, v_h)_h \chi_k^T(t).$$

Soit à présent $\hat{u}_h, \ldots$, la transformée de Fourier en t de $u_h, \ldots$. Par transformation de Fourier de (II; 5.13), on obtient

$$\text{(II; 5.14)}\quad i\tau(\hat{\chi}_k(\tau)\, \hat{u}_h(\tau), v_h)_h + \nu((\hat{u}_h(\tau), v_h))_h + \frac{1}{\varepsilon} d_h(\hat{u}_h(\tau), v_h) + ((\hat{g}_h(\tau), v_h))_h = (\hat{f}_h(\tau), v_h)_h + (u_h^0, v_h)_h \hat{\chi}_k(\tau) - (u_h^N, v_h)_h \chi_k^T(\tau).$$

Nous remplaçons, pour presque tout τ, v_h par $\hat{\chi}_k(\tau)\,\hat{u}_h(\tau)$, et nous prenons les modules de l'égalité obtenue :

$$|\tau|.|\hat{\chi}_k(\tau)\,\hat{u}_h(\tau)|^2 \leqq \nu\,\|u_h(\tau)\|_h^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,d_h(\hat{u}_h(\tau),\,\hat{u}_h(\tau))$$
$$+\|\hat{g}_h(\tau)\|_h\|\hat{u}_h(\tau)\|_h + |\hat{f}_h(\tau)|_h|\hat{u}_h(\tau)|_h + \{|u_h^0|_h + |u_h^N|_h\}.|\hat{u}_h(\tau)|_h.$$

Nous avons utilisé les inégalités

$$|\hat{\chi}_k(\tau)| \leqq 1, \qquad |\hat{\chi}_k^T(\tau)| \leqq 1, \quad \forall\,\tau.$$

Nous divisons les deux membres de cette inégalité par $1 + |\tau|^\beta$, $\beta > 1/2$ et intégrons en τ; nous en déduisons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau|}{1+|\tau|^\beta}\,|\hat{\chi}_k(\tau)\,\hat{u}_h(\tau)|_h^2\,d\tau$$
$$\leqq \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{u}_h(\tau)\|_h^2\,d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} d_h(\hat{u}_h(\tau),\,\hat{u}_h(\tau))\,d\tau$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_h(\tau)_h|_h^2\,d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}_h(\tau)|_h^2\,d\tau$$
$$+\frac{1}{2}\left\{(|u_h^0|_h + |u_h^N|_h)^2 + \left(\sup_\tau \|\hat{g}_h(\tau)\|_h^2\right)\right\}.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^\beta)^2}.$$

Avec (II; 5.12) et les majorations *a priori* du lemme 3.3 on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau|}{1+|\tau|^\beta}\,|\hat{\chi}_k(\tau)\,\hat{u}_h(\tau)|_h^2\,d\tau \leqq c_2',$$

où c_2' ne dépend pas de ε, k et h. On a aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\chi}_k(\tau)\,u_h(\tau)|_h^2\,d\tau \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}_h(\tau)|_h^2\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |u_h(t)|_h^2\,dt \leqq \text{Cte},$$

et il en résulte

$$\text{(II; 5.15)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\tau|^{2\gamma})\,|\hat{\chi}_k(\tau)\,\hat{u}_h(\tau)|_h^2\,d\tau \leqq c_3' \qquad \text{pour} \quad 0 < \gamma < \frac{1}{4}.$$

D'après un théorème de compacité de Raviart [14] (théor. 9.1, chap. I) [9], on en déduit que

$$\text{(II; 5.16)} \qquad q_h\chi_k \star u_h|_0^T \to w \quad \text{dans } L_2(0,\,T;\,G) \text{ fort} \quad [10],$$

où $g|_0^T$ désigne la restriction à $[0,\,T]$ d'une fonction g définie sur R.

[9] Ce théorème de compacité utilise le fait également démontré dans Raviart [14] que la boule $B = \{q_h u_h \mid u_h \in V_h,\ |h| \leqq h_0,\ \|p_h u_h\|_F \leqq 1\}$ est relativement compacte dans G.

[10] Plus précisément, on peut choisir la suite ε', k', h' extraite de ε, k, h, de manière à avoir (II; 5.16).

On démontre ensuite comme dans Raviart [14] que

$$\int_0^T |q_h \chi_k \star u_h(t) - q_h u_h(t)|^2 dt \leq \sqrt{\frac{k}{3}} \left\{ |u_h^0|_h^2 + |u_h^N|_h^2 + \sum_{n=1}^{N} |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 \right\}.$$

Il résulte de (II; 3.14) et de (II; 3.17) que l'expression comprise entre les accolades est majorée indépendamment de ε, k et h; donc

$$\int_0^T |q_h \chi_k \star u_h(t) - q_h u_h(t)|^2 dt \to 0,$$

ce qui montre avec (II; 5.16) que

$$q_h u_h \to w \quad \textit{dans } L_2(0, T; G) \textit{ fort.}$$

5.5. *Démonstration du lemme* 5.3. — Nous allons démontrer que

$$\text{(II; 5.17)} \qquad \int_0^T b_h(u_h(t), u_h(t), \psi_k(t) r_h v)\, dt \to \int_0^T b(w(t), w(t), \psi(t) v)\, dt,$$

les autres résultats de convergence étant immédiats.

Notons, pour simplifier, φ_{1h}, φ_{2h} les composantes de $\psi_k(t) r_h v$; soient u_{1h}, u_{2h} celles de u_h, w_1, w_2, celles de w, φ_1, φ_2, celles de $\varphi = \psi v$. Nous devons montrer essentiellement ceci :

$$\text{(II; 5.18)} \qquad \int_0^T \int_\Omega u_{ih}(x, t)\, \nabla_i u_{jh}(x, t)\, \varphi_{jh}(x, t)\, dx\, dt$$

$$\to \int_0^T \int_\Omega w_i(x, t) \frac{\partial w_j}{\partial x_i}(x, t)\, \varphi_j(x, t)\, dx\, dt;$$

$$\text{(II; 5.19)} \qquad \int_0^T \int_\Omega u_{ih}(x, t)\, u_{jh}(x, t)\, \nabla_i \varphi_{jh}(x, t)\, dx\, dt$$

$$\to \int_0^T \int_\Omega w_i(x, t)\, w_j(x, t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x, t)\, dx\, dt.$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega \times [0, T]})$ (et même plus), on vérifie facilement que φ_{jh} est essentiellement bornée sur $\Omega \times [0, T]$ indépendamment de $(\varepsilon)\, k$ et h, et que

$$\varphi_{jh}(x, t) \to \varphi(x, t) \quad \text{p. p. dans } \Omega \times [0, T] \qquad (k, h \to 0).$$

D'après (II; 5.6), $u_{ih} \to w_i$ dans $L_2(\Omega \times [0, T])$ fort, et, utilisant le théorème de Lebesgue et ce qui précède, on voit que $u_{ih} \varphi_{jh} \to w_i \varphi_j$

dans $L_2(\Omega\times[0, T])$ fort. D'après (II; 5.2) et le lemme 5.2, $\nabla_i u_{jh} \to \dfrac{\partial w_i}{\partial w_j}$ dans $L_2(\Omega\times[0, T])$ faible et (II; 5.18) en résulte.

La vérification de (II; 5.19) est plus simple; la fonction $\nabla_i \varphi_{jh}$ est essentiellement bornée sur $\Omega\times[0, T]$ indépendamment de (ε)k et h et

$$\nabla_i \varphi_{jh}(x, t) \to \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x, t) \quad \text{p. p. dans } \Omega\times[0, T] \qquad (k, h \to 0);$$

(II; 5.19) résulte alors de (II; 5.6) et du théorème de Lebesgue.

6. Approximation de la pression.

Soient ∇_0 et $\overline{\nabla}_0$, les opérateurs de différences finies

$$\nabla_0 \psi(t) = \frac{\psi(t+k) - \psi(t)}{k}, \qquad \overline{\nabla}_0 \psi(t) = \frac{\psi(t) - \psi(t-k)}{k}.$$

Les fonctions $u_h = (u_{1h}, u_{2h})$ définies au n° 4 sont solutions des équations suivantes :

Schéma (I).

$$\text{(II; 6.1)} \quad \overline{\nabla}_0 u_{ih}(t) - \nu \sum_{j=1}^{2} \overline{\nabla}_j \nabla_j u_{ih}(t) - \frac{1}{\varepsilon} \overline{\nabla}_i \left(\sum_{j=1}^{2} \nabla_j u_{jh}(t) \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} u_{jh}(t-k) \nabla_j u_{ih}(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \overline{\nabla}_j (u_{jh}(t-k)\, u_{ih}(t)) = f_{ih}(t),$$

$i = 1, 2$, $t \in [0, T[$ (en convenant que $u_h(t) = u_h^0$, $t \in [-k, 0[$).

Schéma (II).

$$\text{(II; 6.2)} \quad \overline{\nabla}_0 u_{ih}(t) - \nu \sum_{j=1}^{2} \overline{\nabla}_j \nabla_j u_{ih}(t) - \frac{1}{\varepsilon} \overline{\nabla}_i \left(\sum_{j=1}^{2} \nabla_j u_{jh}(t) \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} u_{jh}(t-k) \nabla_j u_{ih}(t-k) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \overline{\nabla}_j (u_{jh}(t-k)\, u_{ih}(t-k)) = f_{ih}(t),$$

$i = 1, 2$, $t \in [0, T[$ (en convenant que $(u_h(t) = u_h^0$, $t \in [-k, 0[$)).

SCHÉMA (III).

$$(\text{II}; 6.3)\quad \nabla_0 u_{ih}(t) - \nu \sum_{j=1}^{2} \overline{\nabla}_j \nabla_j u_{ih}(t) - \frac{1}{\varepsilon} \overline{\nabla}_i \left(\sum_{j=1}^{2} \nabla_j u_{jh}(t) \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} u_{jh}(t) \nabla_j u_{ih}(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \overline{\nabla}_j (u_{jh}(t), u_{ih}(t)) = f_{ih}(t),$$

$i = 1, 2$, $t \in [0, T[$ (en convenant que $u_h(t) = u_h^N$, $t \in [T, T + k[$).

Les théorèmes II.4, II.5 et II.6 donnent, pour chacun de ces schémas, les résultats de convergence suivants :

$$(\text{II}; 6.4)\quad \begin{cases} u_{ih} \to u_i & \text{dans } L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \text{ faible et } L_2(Q) \text{ fort} \\ \nabla_j u_{ih} \to \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} & \text{dans } L_2(Q) \text{ faible} \quad (i, j = 1, 2). \end{cases}$$

D'après (II; 6.4),

$$\overline{\nabla}_0 u_{ih} \to \frac{\partial u_{ih}}{\partial t}, \qquad \sum_{j=1}^{2} \overline{\nabla}_j \nabla_j u_{ih} \to \Delta u_i,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \{ u_{jh}(t-k) \nabla_i u_{ih}(t) - \overline{\nabla}_i (u_{jh}(t-k) u_{ih}(t)) \} \to \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

dans $H^{-1}(Q)$ faible [espace dual de $H_0^1(Q)$]. Par comparaison avec (I; 6.4) et (II; 6.1), on en déduit que, dans le cas du schéma (I) :

$$(\text{II}; 6.5)\quad -\frac{1}{\varepsilon} \overline{\nabla}_i \left(\sum_{j=1}^{2} \nabla_j u_{jh} \right) \to \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \text{dans } H^{-1}(Q) \text{ faible} \qquad (i = 1, 2).$$

On a un résultat semblable pour les schémas (II) et (III).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CEA (J.). — Approximation variationnelle des problèmes aux limites, *Ann, Inst. Fourier*, Grenoble, t. 14, 1964, fasc. 2, p. 345-444 (Thèse Sc. math., Paris. 1964).

[2] FROMM (J. E.). — *A method for computing nonsteady incompressible viscous fluid flows*, Report La 2910, Los Alamos scientific Laboratory of the University of California. — Los Alamos (N. M.), 1963.

[3] HARLOW (F. H.). — *The Mac method*, Report La 3425, Los Alamos scientific Laboratory of the University of California. — Los Alamos (N. M.), 1965.

[4] HOPF (E.). — Ueber die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, *Math. Nachr.*, t. 4, 1950-1951, p. 213-231.

[5] Janenko (N. M.). — *Méthode des pas fractionnaires pour la résolution numérique des problèmes de la physique mathématique* [en russe]. — Novosibirsk, 1966.

[6] Kržvicki (A.) et Ladyženskaja (O. A.). — Méthode des mailles pour les équations de Navier-Stokes [en russe], *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 167, 1966, p. 309-311.

[7] Leray (J.). — Études de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 12, 1933, p. 1-82.

[8] Leray (J.). — Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 13, 1934, p. 331-418.

[9] Lions (J.-L.). — Quelques résultats d'existence dans des équations aux dérivées partielles non linéaires, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 245-273.

[10] Lions (J.-L.). — *Équations différentielles, opérationnelles et problèmes aux limites.* — Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1961 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 111).

[11] Lions (J.-L.). — Quelques remarques sur les équations différentielles opérationnelles du 1er ordre, *Rend. Semin. math. Padova*, t. 33, 1963, p. 213-225.

[12] Lions (J.-L.). — Une construction d'espaces d'interpolation, *C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 1853-1855.

[13] Lions (J.-L.) et Prodi (G.). — Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2, *C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 1959, p. 3519-3521.

[14] Raviart (P. A.). — Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 46, 1967, p. 11-107 (Thèse Sc. math., Paris).

[15] Schwartz (L.). — Théorie des distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 7, 1957, p. 1-139 et t. 8, 1958, p. 1-209.

[16] Temam (R.). — Sur l'approximation des solutions des équations de Navier-Stokes, *C. R. Acad. Sc.*, t. 262, série A, 1966, p. 219-221.

(Manuscrit reçu le 2 décembre 1967.)

Roger Temam,
9, boulevard Malleret-Joinville,
92-Chatillon-sous-Bagneux
(Hauts-de-Seine).