BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN LERAY

Un complément au théorème de N. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 95 (1967), p. 313-374

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1967__95__313_0>

Bull. Soc. math. France,
95, 1967, p. 313 à 374.

UN COMPLÉMENT AU THÉORÈME DE N. NILSSON SUR LES INTÉGRALES DE FORMES DIFFÉRENTIELLES A SUPPORT SINGULIER ALGÉBRIQUE (*)

PAR

JEAN LERAY.

Table des Matières.

Introduction.

Nous nous proposons *d'expliciter et compléter le premier des deux théorèmes que* N. NILSSON *prouve dans* [5] *et applique dans* [6].

1. Les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique.

Notations :

$X = \mathbf{P}^l$ est l'espace projectif complexe, de dimension complexe l;

les coordonnées homogènes d'un point x de X sont les composantes d'un vecteur $\zeta \in Z = \mathbf{C}^{l+1}$, X étant donc le quotient de Z par le groupe de ses homothéties de centre O;

(¹) Ce travail fait partie de la Recherche coopérative sur Programme n° 25 du Centre National de la Recherche Scientifique.

Ξ est le dual de Z, la valeur en ζ de $\xi \in \Xi$ étant notée $\xi.\zeta \in \mathbf{C}$;

T est un espace affin de dimension finie;

(t, X) est la partie de $T \times X$ se projetant en $t \in T$;

on se donne $m \in \{0, \ldots, l\}$;

$\bigcap_j V_j$ est l'intersection de m hypersurfaces algébriques données de $T \times X$, d'équations

$$V_j : \quad v_j(t, \zeta) = 0,$$

où v_j est un polynôme de $(t, \zeta) \in T \times Z$, homogène en ζ, et $j \in \{1, \ldots, m\}$;

$$\bigcap_j V_j = T \times X \qquad \text{si} \quad m = 0;$$

$V_j(t)$ est la projection de $(t, X) \cap V_j$ sur X, c'est-à-dire l'ensemble des x tels que $(t, x) \in V_j$;

$W(t) = \bigcup_H W_H(t)$ est la réunion de n hyperplans de X, dépendant algébriquement de t, d'équations

$$W_H(t) : \quad w_H(t).\zeta = 0,$$

où w_H est une fonction algébrique de t à valeurs dans Ξ, et $H \in \{1, \ldots, n\}$;

$$W(t) \text{ est vide si } n = 0;$$

les intersections $W_{H_1}(t) \cap \ldots \cap W_{H_s}(t)$, où $1 \leqq H_1 < \ldots < H_s \leqq n$, qui sont de dimension r pour t générique, sont notées $W_K^r(t)$ si t est tel que leur dimension soit r; sinon $W_K^r(t)$ n'est pas défini; $W_K^l(t)$ désigne X.

Le support singulier $\mathrm{Ss}[W]$ est l'ensemble des t en lesquels l'un au moins des $w_H(t)$ n'est pas holomorphe.

On se donne :

$t' \in T - \mathrm{Ss}[W]$; $q \in \{m, \ldots, l\}$;

W' : une branche de $W(t')$, c'est-à-dire une branche de chaque $W_H(t')$, telle que les $W_K^r(t')$ soient définis $\forall r \geqq l - q$;

X' : partie ouverte de X;

γ'^{q-m} : $(q-m)$-cycle de $X' \bigcap_j V_j(t')$ relativement à $X' \cap W'$;

$\omega(t, \zeta)$: q-forme différentielle homogène [1] de ζ, fonction de t;

m entiers $\geqq 0$: $p_1, \ldots, p_m$.

---

[1] Produit d'une forme des quotients des coordonnées de ζ par une fonction homogène de ζ.

On suppose ceci :

les hypersurfaces $X' \cap V_j(t')$ de X' sont régulières;

ces hypersurfaces et les $X' \cap W_H(t')$ sont en position générale dans X';

$$(1) \qquad \frac{\omega(t, \zeta)}{v_1^{1+p_1}(t, \zeta) \ldots v_m^{1+p_m}(t, \zeta)} \qquad \text{(pour } m = 0, \text{ c'est } \omega)$$

est une forme différentielle de ζ homogène de degré nul ([2]); c'est donc une forme de x, à coefficients fonctions de t;

cette forme (1) est :

— *holomorphe* en (t, x), près de tout point de (t', X');

— *fermée*, pour $dt = 0$;

— *nulle sur* $X' \cap W(t)$, c'est-à-dire pour : $x \in X'$, t' voisin de t, $W(t)$ voisin de W', $w_H^1.\zeta = w_H.d\zeta = 0$, $\forall H$.

Ces hypothèses ont les conséquences suivantes, vu [3] :

on peut définir, pour $(t, W(t))$ voisin de (t', W'), un $(q-m)$-cycle $\gamma^{q-m}(t)$ de $X' \underset{j}{\cap} V_j(t)$ relativement à $X' \cap W(t)$ variant continûment avec t et tel que

$$\gamma^{q-m}(t') = \gamma'^{q-m};$$

sa classe d'homologie est définie sans ambiguïté;

si $m > 0$, la classe résidu de (1) :

$$(2) \qquad \frac{1}{p_1! \ldots p_m!} \frac{d^{p_1+\ldots+p_m}\omega(t, \zeta)}{[dv_1(t, \zeta)]^{1+p_1} \wedge \ldots \wedge [dv_m]^{1+p_m}}\Bigg|_{(X' \underset{j}{\cap} V_j(t),\, X' \cap W(t))}$$

est définie pour t voisin de t';

l'intégrale

$$(3) \qquad \begin{cases} J(t) = \displaystyle\int_{\gamma^{q-m}(t)} \frac{d^{p_1+\ldots+p_m}\omega(t, \zeta)}{[dv_1(t, \zeta)]^{1+p_1} \wedge \ldots \wedge [dv_m]^{1+p_m}} & \text{si } m > 0, \\ J(t) = \displaystyle\int_{\gamma^q(t)} \omega(t, \zeta) \qquad \text{si } m = 0 \end{cases}$$

est donc définie sans ambiguïté pour t voisin de t'; c'est une fonction numérique holomorphe de t (vu [3], n° 10). Nous allons construire son prolongement analytique, sous des hypothèses appropriées.

Définition des formes et des fonctions à support singulier algébrique. — Si $\omega(t, \zeta)$ [ou $J(t)$] se prolonge en une forme [ou fonction] holomorphe sur le revêtement simplement connexe du complémentaire d'une hypersurface algébrique de $T \times Z$ [ou de T], nous dirons que ω [ou J] est à

([2]) C'est une forme des quotients des coordonnées de ζ.

support singulier algébrique; il existe alors évidemment une plus petite hypersurface ayant cette propriété; elle sera notée

$$\mathrm{Ss}[\omega] \quad [\text{ou } \mathrm{Ss}[J]]$$

et nommée *support singulier* de ω [ou de J]. D'après un théorème d'Hartogs [1], c'est une hypersurface algébrique.

Note. — Il est superflu de supposer (t', X') hors de $\mathrm{Ss}[\omega]$.

Notation. — Notons

$$(4) \qquad V = \mathrm{Ss}[\omega] \bigcup_j V_j, \qquad \text{donc} \quad V = \mathrm{Ss}[\omega] \quad \text{si } m = 0;$$

V est une hypersurface de $T \times X$.

Définition des $(t, W(t))$ s'appuyant sur une hypersurface V de $T \times X$. — Étant donné $t \in T$, nous dirons que $(t, W(t))$ a sur V un appui d'ordre $l - q$ quand l'un au moins des r-plans

$$(t, W_K^r(t)), \qquad \text{où} \quad r \in \{l - q, \ldots, l\}$$

n'est pas défini ou a sur V un appui d'ordre $l - q$, au sens du n° 4.

Note. — Soient $w_K^{l-r}(t) \in \wedge^{l-r} \Xi$ des coordonnées grassmanniennes (n° 3) de $W_K^r(t)$, s'annulant quand $W_K^r(t)$ n'est pas défini; vu le n° 4, l'appui d'ordre $l - q$ de $(t, W(t))$ sur V s'exprime par la condition suivante : au moins l'une des branches de l'un des $w_K^{l-r}(t)$ vérifie l'équation

$$(5) \qquad P^{q+r-l}(t, w_K^{l-r}(t) \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q}) = 0, \qquad \forall \xi_1, \ldots, \xi_{l-q} \in \Xi,$$

où $r \in \{l - q, \ldots, l\}$.

THÉORÈME 1. — *Supposons ceci :*

ω est à support singulier algébrique;

$(t, W(t))$ n'a pas sur $V = \mathrm{Ss}[\omega] \bigcup_j V_j$ un appui d'ordre $l - q$, $\forall t$.

Alors :

$J(t)$ est à support singulier algébrique;

$\mathrm{Ss}[J]$ est une hypersurface algébrique de T, contenue dans la réunion de $\mathrm{Ss}[W]$ et de l'ensemble des t tels que $(t, W(t))$ ait sur V un appui d'ordre $l - q$.

Note. — Si $n = 0$, c'est-à-dire si $W(t)$ est vide, alors cet ensemble est l'ensemble des t tels que (t, X) ait sur V un appui d'ordre $l - q$.

COROLLAIRE 1.1 (N. NILSSON). — Si $n = 0$, c'est-à-dire si $W(t)$ est vide, alors $J(t)$ est à support singulier algébrique.

Preuve. — Par définition, (t, X) ne s'appuie pas sur V, $\forall t$.

On prouve de même ceci :

COROLLAIRE 1.2. — Supposons que T puisse être fibré de façon que les $V_j(t)$ soient constants sur chaque fibre et que W applique chaque fibre sur l'ensemble des réunions de n hyperplans de X; alors $J(t)$ est à support singulier algébrique.

Une preuve détaillée de ce théorème 1 est donnée par les chapitres I, II et III; elle s'abrège considérablement quand on suppose, comme N. NILSSON, $W(t)$ vide ($n=0$). Comme celle de N. NILSSON, notre preuve traite d'abord le cas :

$$m=0 \quad \left(\text{c'est-à-dire : } \bigcap_j V_j = T\times X,\ V=\mathrm{Ss}[\omega]\right), \qquad q=n-1=l;$$

autrement dit, elle établit d'abord ceci : l'intégrale sur un q-simplexe d'une q-forme différentielle à support singulier algébrique est une fonction à support singulier algébrique (chapitre II, lemmes 12 et 16); le théorème 1 en résulte, par application de la formule du résidu (chapitre III), en évitant la construction compliquée que constitue le § 3 de l'article [5] de N. NILSSON.

THÉORÈME 2. — *Adjoignons à l'hypothèse du théorème* 1 *la suivante : toutes les branches de* ω *sont combinaisons linéaires, à coefficients dans un anneau de constantes, d'un nombre fini d'entre elles. Alors toutes les branches de* J *sont combinaisons linéaires, à coefficients dans ce même anneau, d'un nombre fini d'entre elles.*

Preuve. — De cette hypothèse résulte évidemment que toutes les fonctions, construites ultérieurement, possèdent cette propriété; nous ne détaillerons pas cette preuve que N. NILSSON explicite dans le cas qu'il traite : $W(t)$ vide ($n=0$).

THÉORÈME 3 (énoncé hypothétique). — *Adjoignons aux hypothèses des théorèmes* 1 *et* 2 *la suivante : les coefficients de* ω *sont « à croissance lente » quand* (t, x) *tend vers* $\mathrm{Ss}[\omega]$. *Alors* $J(t)$ *est « à croissance lente » quand* t *tend vers* $\mathrm{Ss}[J]$.

On peut *définir « la croissance lente d'une fonction à support singulier algébrique »* par la condition (c) de la première page de N. NILSSON [5]; peut-être existe-t-il des définitions équivalentes plus maniables.

La preuve de ce théorème 3 a été donnée par N. NILSSON dans le cas qu'il traite : $W(t)$ vide ($n=0$); elle reste à faire dans le cas général.

Appliquer les théorèmes précédents au prolongement $\mathcal{L}$ de la transformation de Laplace, que définit [4], est évidemment possible; on peut ainsi, en particulier, obtenir des opérateurs hyperboliques dont la solution élémentaire est à support singulier algébrique; nous ne le ferons pas ici.

Le théorème 1 emploie la notion d'*appui*; le n° 4 la définira à partir de la notion suivante.

2. Équation discriminante.

Soit une équation

$$P(t, \xi) = 0, \tag{2.1}$$

où P est un polynôme de $(t, \xi) \in T \times \Xi$, homogène en ξ, à coefficients appartenant à $\mathbf{C}$.

Rappelons que P est dit réductible quand il est le produit de polynômes, du même type, non constants; rappelons un théorème classique ([7], t. 1, chap. IV, Ganzrat. Funkt.) : tout polynôme est produit de facteurs irréductibles, définis de façon unique, à des facteurs constants près.

Les deux conditions suivantes sont donc équivalentes :

1° l'un de ces facteurs est multiple et de degré > 0 en ξ;

2° l'équation (2.1) équivaut à une équation du même type et de degré moindre en ξ.

Si ces conditions ne sont pas réalisées, et si $P(t, \xi)$ n'est pas identiquement nul, alors nous dirons que *l'équation* (2.1) *est réduite sur T relativement à ξ.*

Le n° 6 (chap. I) prouvera le critère de réduction suivant :

Notations. — Notons ξ et η deux vecteurs de Ξ, ρ une variable numérique complexe et (3) $\operatorname{discr} P(t, \xi + \hat{\rho}\eta)$ le discriminant de $P(t, \xi, + \rho\eta)$, considéré comme un polynôme en ρ. Rappelons que ce discriminant est un polynôme en (t, ξ, η), et qu'il reste invariant quand on transforme (ξ, η) par une substitution unimodulaire; *voir* [7].

Critère de réduction.

1° Pour que l'équation (2.1) soit réduite sur T relativement à ξ, il faut et il suffit que

$$\operatorname{discr} P(t, \xi + \hat{\rho}\eta) \neq 0 \text{ en au moins un point } (t, \xi, \eta) \text{ de } T \times \Xi \times \Xi.$$

2° Plus précisément, si (2.1) est réduite, et si η est donné tel que $P(t, \eta) \neq 0$ en au moins un point t, alors $\operatorname{discr} P(t, \xi + \hat{\rho}\eta) \neq 0$ en au moins un point (t, ξ) de $T \times \Xi$.

Bien entendu, l'expression : « l'équation (2.1) est réduite sur le point $t \in T$ » signifiera : « cette équation est réduite quand on choisit pour espace T ce point t ».

---

(3) $\operatorname{discr} P$ n'est pas fonction de la variable coiffée par $\hat{}$.

Le 1° du critère de réduction a pour conséquence évidente ceci :

LEMME 2 (localisation).

1° Pour que l'équation (2.1) soit réduite sur T, relativement à ξ, il faut et il suffit qu'elle le soit sur au moins un point de T.

2° Les points t sur lesquels cette équation n'est pas réduite sont ceux qui vérifient la condition

$$\operatorname{discr} P(t, \xi + \hat{\rho}\eta) = 0, \qquad \forall\, \xi,\ \eta \in \Xi;$$

l'ensemble de ces points est donc une variété algébrique de T.

Définition. — Donnons-nous une équation (2.1) qui ne soit pas vérifiée $\forall\,(t, \xi)$; formons avec les facteurs irréductibles de $P(t, \xi)$, une équation équivalente, réduite sur T relativement à ξ :

$$Q(t, \xi) = 0. \tag{2.2}$$

Considérons l'ensemble des points t de T sur lesquels cette équation (2.2) n'est pas réduite relativement à ξ. Vu le lemme 2, cet ensemble est différent de T, et est une sous-variété algébrique de T définie par la condition

$$\operatorname{discr} Q(t, \xi + \hat{\rho}\eta) = 0, \qquad \forall\, \xi,\ \eta \in \Xi.$$

Cette sous-variété est l'ensemble des points t où le degré de l'hypersurface de Ξ d'équation (2.1) n'est pas maximum; elle ne dépend donc que de cette équation. Seule nous intéressera la plus grande hypersurface contenue dans cette sous-variété ([4]); son équation sera

$$\operatorname{discr}_T P(t, \hat{\xi}) = 0, \tag{2.3}$$

où $\operatorname{discr}_T P(t, \hat{\xi})$ est le polynôme ([3]) en t de degré maximum qui divise

$$\operatorname{discr} Q(t, \xi + \hat{\rho}\eta), \qquad \forall\, \xi,\ \eta \in \Xi;$$

c'est-à-dire le plus grand commun diviseur des coefficients de discr $Q(t, \xi + \hat{\rho}\eta)$, considéré comme un polynôme en (ξ, η), ayant pour coefficients des polynômes en t. L'équation (2.3) est nommée *équation discriminante de l'équation* (2.1). Elle n'est jamais vérifiée $\forall\, t$.

Note. — En général, l'hypersurface (2.3) est vide; mais, dans ce qui suit, ce « cas général » se trouvera être exceptionnel.

Note. — Dans les définitions précédentes, l'espace affin T et l'espace vectoriel Ξ ne peuvent pas être remplacés par des variétés algébriques quelconques, car, sur de telles variétés, un polynôme n'est pas un produit unique de polynômes irréductibles.

([4]) Car, d'après un théorème d'Hartogs [1], si le support singulier d'une fonction analytique appartient à cette sous-variété, alors il appartient à cette hypersurface.

3. **Grassmanniennes** (*voir* [2]).

Pour repérer les q-plans complexes x^q de X, nous emploierons l'algèbre extérieure $\wedge\Xi$ qu'engendre l'espace vectoriel Ξ; les éléments de $\wedge\Xi$ homogènes de degré r sont nommés r-vecteurs, et notés ξ^r; leur ensemble est le sous-espace vectoriel $\wedge^r\Xi$ de l'algèbre $\wedge\Xi$; bien entendu :

$$\wedge^0\Xi = \mathbf{C}, \qquad \wedge^1\Xi = \Xi, \qquad \wedge^{l+1}\Xi = \mathbf{C};$$

Z peut être identifié à $\wedge^l\Xi$ par la bijection

$$\zeta \leftrightarrow \xi^l \tag{3.1}$$

telle que la valeur de ζ en ξ soit

$$\xi.\zeta = \xi\wedge\xi^l, \qquad \forall\,\xi\in\Xi.$$

Nommons classe (ξ^r) de $\xi^r\neq 0$ l'ensemble des r-vecteurs non nuls, parallèles à ξ^r. L'ensemble des classes (ξ^r) est l'espace projectif $(\wedge^r\Xi)$, quotient de l'espace vectoriel $\wedge^r\Xi$ par le groupe de ses homothéties de centre O.

La bijection (3.1) induit une bijection

$$x \leftrightarrow (\xi^l), \tag{3.2}$$

qui identifie X à $(\wedge^l\Xi)$.

Un hyperplan x^{l-1} de X est l'ensemble des $x\in X$ dont les coordonnées homogènes ζ vérifient une équation

$$x^{l-1}:\quad \xi.\zeta = 0\,;$$

d'où une bijection

$$x^{l-1} \leftrightarrow (\xi) \tag{3.3}$$

qui identifie l'ensemble des hyperplans de X à l'espace projectif (Ξ).

Étant donné un q-plan complexe x^q de X, soient $l-q$ hyperplans $x_1^{l-1}, \ldots, x_{l-q}^{l-1}$ de X tels que

$$x^q = x_1^{l-1}\cap\ldots\cap x_{l-q}^{l-1};$$

soient $l-q$ vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_{l-q}$ de Ξ tels que $x_j^{l-1}\leftrightarrow(\xi_j)$; notons;

$$\xi^{l-q} = \xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_{l-q};$$

évidemment, (ξ^{l-q}) dépend de x^q sans dépendre des choix des x_j^{l-1} et ξ_j : nous avons une injection naturelle

$$x^q \mapsto (\xi^{l-q}), \qquad \text{où} \quad q\in\{0, \ldots, l-1\}, \tag{3.4}$$

de l'ensemble des q-plans de X dans l'espace projectif $(\bigwedge^{l-q}\Xi)$; elle est telle que, si

$$x^q \mapsto (\xi^{l-q}) \quad \text{et} \quad x^{l-1} \mapsto (\xi),$$

alors la condition

$$(3.5) \qquad x^q \subset x^{l-1} \ \text{équivaut à}\ \xi^{l-q} \wedge \xi = 0.$$

L'injection (3.4) est pour $q = 0$ la bijection (3.2), pour $q = l - 1$ la bijection (3.3).

L'image par (3.4) de l'ensemble des q-plans x^q de X est une sous-variété algébrique $\Gamma^q(X)$ de $(\bigwedge^{l-q}\Xi)$; on la nomme *q-grassmannienne* de X. On nomme *coordonnées grassmanniennes* du q-plan $x^q \mapsto (\xi^{l-q})$ les coordonnées du $(l-q)$ vecteur ξ^{l-q}, ou, par abus de langage, ce $(l-q)$-vecteur lui-même.

Rappelons que la dimension de $\Gamma^q(X)$ est

$$(3.6) \qquad \dim \Gamma^q(X) = (q+1)(l-q).$$

Preuve de (3.6). — L'espace des q-simplexes de X, fibré par l'ensemble des q-simplexes d'un même q-plan, a pour base $\Gamma^q(X)$; or cet espace et sa fibre ont pour dimensions respectives $(q+1)\,l$ et $(q+1)\,q$.

Notation. — Nous noterons $P(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q})$, et nous nommerons « *polynôme de* $t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q}$ » tout polynôme de $(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q})$, homogène en chaque ξ_j, dont la valeur est fonction seulement de $(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q})$. Nous ne nous soucierons pas de l'existence d'un polynôme de $(t, \xi^{l-q}) \in T \times \bigwedge^{l-q}\Xi$ qui soit égal à $P(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q})$ pour $\xi^{l-q} = \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q}$, car un tel polynôme n'est pas unique ([5]).

Le n° 7 prouvera le lemme suivant, que le n° 4 va employer implicitement :

LEMME 3. — Si $P(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi)$ est un polynôme de $(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi)$, alors $\operatorname{discr}_{T\times\Xi^{l-q}} P(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \hat{\xi})$ est un polynôme de $(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q})$.

4. L'appui d'un q-plan sur une sous-variété algébrique V de $T \times X$.

Soit V une sous-variété algébrique de $T \times X$, dont toutes les composantes algébriques ont la même dimension; notons

$$r = \dim V - \dim T < l.$$

Soit (t, x^q) le q-plan de $T \times X$, ayant pour projections respectives sur T et sur X le point t et le q-plan x^q, de coordonnées grassmanniennes

$$\xi^{l-q} = \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q}, \qquad \text{où} \quad \xi_j \in \Xi; \quad q \in \{0, \ldots, l\}.$$

([5]) En effet, les composantes de ξ^{l-q} sont liées par des relations quadratiques. quand $\xi^{l-q} = \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q}$: *voir* [2].

Nous dirons que ce *q-plan s'appuie sur* V quand il satisfait une équation

(4.1) $$P^q(t, \xi^{l-q}) = 0 \qquad [P^l(t) \text{ ne dépend que de } t],$$

qui va être définie par récurrence sur q; P^q sera un polynôme de $(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q})$.

Définition. — *Si* $q < l - r - 1$, alors aucun q-plan ne s'appuie sur V : l'équation (4.1) est impossible.

Définition. — *Supposons* $q = l - r - 1$; (t, x^{l-r-1}) s'appuie sur V si et seulement si (t, x^{l-r-1}) coupe une composante algébrique de V dont la projection sur T est de codimension 0 ou 1.

Si V est l'intersection complète de $l - r$ hypersurfaces, se projetant chacune sur T tout entier, alors l'équation (4.1) résulte donc de l'élimination de ζ entre

$$\begin{cases} \text{les } l - r \text{ équations de } V, \\ \text{les } l - q = r + 1 \text{ équations de } x^q : \xi_1 . \zeta = \ldots = \xi_{l-q} . \zeta = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire entre $l + 1$ équations homogènes en ζ, à coefficients fonctions de $t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q}$. Plus précisément : le résultant de ce système de $l + 1$ équations homogènes à $l + 1$ inconnues (*voir* [7], chap. XI) est un polynôme de $(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q})$; vu le lemme 7.1, c'est un polynôme de $(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q})$; on le nomme » *forme de Cayley de V* » (*voir* [2]); en l'annulant on obtient l'équation (4.1).

Si V est une composante algébrique d'une intersection complète d'hypersurfaces, alors la forme de Cayley de cette intersection complète se décompose en facteurs, qui sont encore des polynômes de $(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q})$, vu le lemme 7.1; le produit de certains d'entre eux est la forme de Cayley de V; c'est-à-dire qu'en annulant ce produit on obtient l'équation (4.1) qui exprime que (t, x^{l-r-1}) coupe V.

Si V se projette sur une hypersurface S de T, alors (t, x^{l-r-1}) s'appuie sur V si et seulement si $t \in S$: l'équation (4.1), qui est alors indépendante de ξ^{l-q}, est celle de S.

Si V se projette par une sous-variété de T de codim > 1, alors aucun q-plan ne s'appuie sur V.

Exemple : si $r = l - 1$ et $q = 0$, c'est-à-dire si V est une hypersurface et (t, x^q) un point (t, x) de $T \times X$, alors ce point s'appuie sur V s'il appartient à V et seulement dans ce cas : la condition d'appui

$$P^0(t, \xi^l) = 0$$

est l'équation de V,

$$P(t, \zeta) = 0,$$

où l'on substitue ξ^l à ζ.

Exemple. — Si $r < -1$, alors aucun q-plan ne s'appuie sur V.

Exemple. — Si $r = -1$, alors les q-plans s'appuyant sur V sont des l-plans (t, X); leur équation $P^l(t) = 0$ est celle de la plus grande hypersurface contenue dans l'ensemble des t tels que $V(t)$ ne soit pas vide.

Définition. — *Si* $q > l - r - 1$, alors l'équation

$$(4.1)_q \qquad P^q(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q}) = 0,$$

qui exprime l'appui de (t, x^q) sur V, est l'équation discriminante

$$\operatorname{discr}_{T\times\Xi^{l-q}} P^{q-1}\big((t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \hat{\xi}\big) = 0$$

de l'équation

$$(4.1)_{q-1} \qquad P^{q-1}(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi) = 0$$

qui exprime qu'un hyperplan (t, x^{q-1}) de (t, x^q) s'appuie sur V.

Note. — Il serait donc naturel de noter $(4.1)_q$ comme suit :

$$\operatorname{discr}^{q+r-l+1}_{T\times\Xi^{l-q}} P\big(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \hat{\xi}_{l-q+1} \wedge \ldots \wedge \hat{\xi}_{r+1}\big) = 0,$$

où $P(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{r+1})$ est la forme de Cayley de V.

Définition de l'appui d'ordre ρ. — Soit $\rho \in \{0, \ldots, q\}$. Nous dirons que *le q-plan* (t, x^q) *de* $T \times X$ *a sur* V *un appui d'ordre* ρ quand tous ses $(q-\rho)$-plans $(t, x^{q-\rho})$ s'appuient sur V; c'est-à-dire quand t et les coordonnées grassmanniennes ξ^{l-q} de x^q vérifient

$$(4.2)_\rho \qquad P^{q-\rho}(t, \xi^{l-q} \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_\rho) = 0, \qquad \forall\, \xi_1, \ldots, \xi_\rho \in \Xi.$$

Note. — L'appui d'ordre 0 est l'appui; l'appui d'ordre ρ n'est possible que si $\rho \leqq q + r - l + 1$. Une variété V n'a en général aucun q-plan d'appui d'ordre > 0.

LEMME 4. — L'appui d'ordre ρ implique les appuis d'ordres $\rho - 1, \ldots, 0$.

Preuve. — Une équation identiquement vérifiée n'est pas réduite; donc $(4.2)_\rho$ implique

$$\operatorname{discr}_{T\times\Xi^{l-q+\rho-1}} P^{q-\rho}\big(t, \xi^{l-q} \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{\rho-1} \wedge \hat{\xi}\big) = 0, \qquad \forall\, \xi_1, \ldots, \xi_{\rho-1}.$$

Autrement dit : $(4.2)_\rho$ implique $(4.2)_{\rho-1}$.

Exemple. — Supposons que V se projette sur une sous-variété $(\neq T)$ de T; soit S la plus grande hypersurface de T contenue dans cette sous-variété; alors (t, x^q) s'appuie sur V si et seulement si $t \in S$ et $q \geqq l - r - 1$; cet appui est d'ordre $q + r - l + 1$.

Les théorèmes qu'énonce le nº 1 et leurs preuves (chapitres I, II, III) n'emploient que l'appui sur une hypersurface; mais l'étude de l'appui sur une hypersurface exige celle de l'appui sur une variété de dimension quelconque; c'est ce que montre la proposition suivante, que le n° 10 (chap. I) prouvera :

PROPOSITION 1. — *Soit V une hypersurface algébrique de* $T \times X$; *soit* V_k *une composante algébrique, de dimension homogène, de l'intersection d'un nombre quelconque de composantes algébriques de V. L'appui sur* V_k *implique l'appui sur V.*

Note 4. — Il existe *d'autres cas où l'appui sur une partie singulière de V implique l'appui sur V;* nous ne les expliciterons pas (*voir* la note 22).

5. Propriétés géométriques de l'appui.

Nous obtiendrons, comme suit, de telles propriétés : nous définirons, par des propriétés locales de géométrie différentielle, les appuis réguliers, semi-réguliers et très réguliers; puis nous relierons (propositions 2 et 3) ces trois nouveaux types d'appui à l'appui que le n° 4 a défini par une propriété globale et algébrique.

Notations. — V sera une sous-variété algébrique *irréductible* de $T \times X$; notons :

$$r = \dim V - \dim T < l,$$

$V(t)$ la projection de $(t, X) \cap V$ sur X;
$x \in V(t)$ signifie donc $(t, x) \in V$.

t sera dit *régulier* quand il sera hors de la plus petite variété algébrique de T hors de laquelle :

1° $V(t)$ a une dimension indépendante de t, qui est r ou -1 (dimension du vide);

2° l'ensemble des hyperplans de X tangents à $V(t)$ *a une dimension* s indépendante de t.

Évidemment : $s \leqq l-1$; si $s \neq l-1$, alors $V(t)$ sera dite *développable.*

Définition. — *Si* $V(t)$ *est vide* quand t est régulier (en particulier si $r < 0$), alors l'exemple précédent (n° 4) a défini géométriquement les q-plans s'appuyant sur V; nous conviendrons que ces q-plans, s'appuyant sur V, sont les q-plans d'appui régulier, semi-régulier et très régulier.

Supposons $V(t)$ non vide pour t régulier, c'est-à-dire

$$\dim V(t) = r \geqq 0 \quad \text{pour } t \text{ régulier.} \tag{5.1}$$

Soit t régulier; soit x un point régulier de $V(t)$; soit $x^r(x)$ le r-plan de X tangent [6] à $V(t)$ en x. Soit x^{l-1} un hyperplan tangent réguliè-

[6] Rappelons qu'un q-plan x^q est tangent à $V(t)$ en x quand

$$x^q \subseteq x^r(x) \text{ si } q \leqq r; \qquad x^r(x) \subseteq x^q \text{ si } r \leqq q.$$

rement à $V(t)$: x^{l-1} est tangent à $V(t)$ le long d'un $(l-s-1)$-plan $x^{l-s-1}(x^{l-1})$ qui est nommé (7) « plan caractéristique de x^{l-1} ». Si x^{l-1} est tangent à $V(t)$ en x, x et x^{l-1} étant réguliers, alors

$$x \in x^{l-s-1}(x^{l-1}) \subseteq x^r(x) \subseteq x^{l-1}.$$

Donc

$$\sup(r, s) \leqq l - 1 \leqq r + s. \tag{5.2}$$

Note. — Pour que $l-1=r+s$, il faut et il suffit que $V(t)$ soit un r-plan.

Note. — Une polarité (8) commute r et s, x et x^{l-1}, $x^r(x)$ et $x^{l-s-1}(x^{l-1})$; il résulte du lemme 23.1 qu'elle conserve l'appui régulier sur V, dont voici la définition :

Définition. — Supposons (5.1) vérifié. Alors le q-plan (t, x^q) *s'appuie régulièrement sur* V, au point (t, x), quand il satisfait aux trois conditions suivantes :

1° $l-r-1 \leqq q \leqq s$;

2° t est régulier; $x \in x^q$; (t, x) est point régulier de V;

3° en ce point, si $l-r \leqq q$, le q-plan tangent à (t, x^q) et le $(r + \dim T)$-plan tangent à V ne sont pas en position générale.

Note. — Si $l-r-1=q$, alors la condition 3° n'existe pas, et il est évident que l'appui régulier implique l'appui.

Note. — Supposons $l-r \leqq q$; la condition 3° signifie que le q-plan tangent à (t, x^q) et le $(r + \dim T)$-plan tangent à V ont une intersection de dimension $> q+r-l$. Cette condition s'exprime en annulant $q+r+1-l$ polynômes des coordonnées de ces plans; le second de ces plans est fonction de (t, x), où $x \in x^q \cap V(t)$; or $\dim x^q \cap V(t) = q+r-l$. En éliminant de ces $q+r+1-l$ équations les $q+r-l$ coordonnées de $x \in x^q \cap V(t)$, on obtient *une équation*, que les coordonnées de (t, x^q) vérifient donc quand (t, x^q) s'appuie régulièrement sur V. La proposition 2 va compléter ce résultat en explicitant une telle équation : celle qui exprime l'appui de (t, x^q) sur V.

La définition précédente ne vaut pas quand $q=l$; elle sera alors remplacée par deux autres, l'une moins stricte, l'autre plus stricte :

---

(7) *Voir* la théorie des enveloppes.

(8) Transformation de contact induite par un isomorphisme : $\Xi \leftrightarrow Z$; elle transforme un q-plan de X en un $(l-1-q)$-plan de X.

Définition. — Supposons (5.1) vérifié. Alors le l-plan (t, X) *s'appuie semi-régulièrement sur* V, au point (t, x), quand il satisfait aux deux conditions suivantes :

1° t est régulier; (t, x) est point régulier de V;

2° en ce point, le l-plan tangent à (t, X) et le $(r + \dim T)$-plan tangent à V ne sont pas en position générale.

Voici une définition plus stricte.

Définition. — Supposons (5.1) vérifié. Alors le l-plan (t', X) s'appuie *très régulièrement sur* V, au point (t', x'), quand il satisfait aux deux conditions suivantes :

1° t' est régulier; (t', x') est point régulier de V;

2° X possède des coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_l)$ d'origine x' et V possède au voisinage de (t', x') des équations locales holomorphes :

$$(5.3)\qquad \begin{cases} F(t, y_1, \ldots, y_{r+1}) = 0, \\ y_h = F_h(t, y_1, \ldots, y_{r+1}), \qquad \text{où} \quad h \in \{ r+2, \ldots l \}, \end{cases}$$

telles que

$$(5.4)\qquad \begin{cases} F(t', y_1, \ldots, y_{r+1}) \equiv 0, \qquad F_h(t', y_1, \ldots, y_{r+1}) \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} y^2), \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(t, y_1, \ldots, y_{r+1}) \neq 0, \qquad \operatorname{Hess}_y F(t, y_1, \ldots, y_{r+1}) \neq 0. \end{cases}$$

Note. — $\operatorname{Hess}_y F$ désigne le déterminant $\operatorname{dét}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_i\, \partial y_j}\right)$ où i, $j \in \{ 1, \ldots, r+1 \}$.

Note. — x' est évidemment point double quadratique de $V(t')$.

Notations. — Dans les deux propositions suivantes, V désignera *une hypersurface* de $T \times X$ et V_k une quelconque des composantes algébriques irréductibles de l'intersection d'un nombre quelconque de composantes algébriques de V; t sera dit régulier quand il sera régulier pour chaque V_k.

Le chapitre IV établira ceci :

Proposition 2. — *Soit (t, x^q) un q-plan s'appuyant sur l'un des V_k, régulièrement si $q < l$, très régulièrement si $q = l$; ce q-plan s'appuie sur V.*

Le chapitre V établira une réciproque partielle :

Proposition 3. — *Supposons ceci : aucun des V_k n'est développable; t est régulier; le q-plan (t, x^q) s'appuie sur V, sans couper la partie singulière d'aucun des V_k. Alors ce q-plan s'appuie sur l'un au moins des V_k régulièrement si $q < l$, semi-régulièrement si $q = l$.*

Cette proposition 3 facilite évidemment l'emploi du théorème 1.

Chapitre I.

Appui sur une variété algébrique.

Ce chapitre I emploie les définitions et prouve les propriétés que les nos 2, 3 et 4 ont énoncées : critère de réduction, lemme 3, proposition 1. En outre, il énonce et établit les propriétés d'appui d'un q-simplexe et d'un q-èdre, qu'emploiera le chapitre II.

6. **Preuve du critère de réduction**, qu'énonce le no 2. Ce critère concerne l'équation

$$(6.1)\qquad P(t, \xi) = 0.$$

Il est évident quand $P(t, \xi) = 0$, $\forall (t, \xi)$; nous supposerons que cela n'a pas lieu.

1° *Si l'équation* (6.1) *n'est pas réduite* sur T relativement à ξ, alors l'équation en ρ,

$$P(t, \xi + \rho\eta) = 0 \qquad (\rho \in \mathbf{C})$$

a évidemment une racine multiple, $\forall (t, \xi, \eta) \in T \times \Xi \times \Xi$ tel que $P(t, \eta) \neq 0$; le discriminant, relatif à ρ, de son premier membre est donc nul :

$$(6.2)\qquad \operatorname{discr} P(t, \xi + \hat{\rho}\eta) = 0 \qquad \forall (t, \xi, \eta) \in T \times \Xi \times \Xi.$$

2° *Réciproquement*, supposons donné $\eta \in \Xi$ tel que

$$P(t, \eta) \neq 0 \quad \text{pour } t \text{ générique},$$
$$\operatorname{discr} P(t, \xi + \hat{\rho}\eta) = 0, \qquad \forall (t, \xi) \in T \times \Xi.$$

Choisissons des coordonnées telles que

$$\eta = (1, 0, \ldots, 0);$$

notons $(w_0, w_1, \ldots, w_l)$ les coordonnées de ξ; l'équation en w_0,

$$P(t, w_0, w_1, \ldots, w_l) = 0$$

a donc au moins une racine double, $\forall t \in T$, $w_1, \ldots, w_l \in \mathbf{C}$, tels que $P(t, \eta) \neq 0$; les polynômes en w_0,

$$P(t, w_0, w_1, \ldots, w_l), \quad \frac{\partial P}{\partial w_0}(t, w_0, w_1, \ldots, w_l)$$

ont donc un facteur commun, de degré > 0 en w_0, dans l'algèbre des polynômes en w_0, sur le corps des fonctions rationnelles de $t, w_1, \ldots, w_l$: leur plus grand commun diviseur, qui s'obtient par division de polynômes en w_0. On sait (*voir* [7], t. 1, chap. IV, no 23, Hilfsatz 2) qu'à toute décomposition d'un polynôme de $(t, w_0, \ldots, w_l)$ en facteurs dans cette algèbre correspond une décomposition en facteurs, ayant les mêmes degrés en w_0, dans l'algèbre des polynômes de $(t, w_0, \ldots, w_l)$. Les polynômes

$$P(t, w_0, \ldots, w_l), \quad \frac{\partial P}{\partial w_0}(t, w_0, \ldots, w_l)$$

ont donc des facteurs communs qui sont des polynômes de $(t, w_0, \ldots, w_l)$ dont le degré en w_0 est > 0; il en existe d'irréductibles; soit $p(t, w_0, \ldots, w_l)$ l'un d'eux; il est facteur de

$$P = p.q \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial w_0} - p.\frac{\partial q}{\partial w_0} = q\frac{\partial p}{\partial w_0},$$

sans pouvoir être facteur de $\frac{\partial p}{\partial w_0}$, dont le degré en w_0 est moindre; il est donc facteur de q; il est donc facteur multiple de P : l'équation (6.1) n'est donc pas réduite sur T, relativement à ξ.

Nous avons ainsi prouvé le critère de réduction qu'énonce le n° 2; rappelons que ce critère prouve le lemme 2, qui sert à définir (n° 2) l'équation discriminante.

7. **Preuve du lemme** 3.

Notons a la substitution unimodulaire

$$(7.1) \qquad a: \ \{\xi_j\} \to \left\{\xi'_j = \sum_i a^i_j \xi_i\right\},$$

où $i, j \in \{1, \ldots, l-q\}$, $a^i_j \in \mathbf{C}$, $\text{dét}(a^i_j) = 1$, ξ_j, $\xi'_j \in \Xi$.

Lemme. — Pour que le polynôme $P(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q})$ vérifie la relation, où $\chi(a)$ est une fonction numérique de a :

$$(7.2) \qquad P(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q}) = \chi(a) P(t, \xi'_1, \ldots, \xi'_{l-q}),$$

$\forall \xi_j$, ξ'_j, a vérifiant (7.1), il faut et suffit que chacun des facteurs irréductibles de $P(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q})$ soit un polynôme de $(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q})$, au sens du n° 3.

Note. — P sera donc un tel polynôme, et l'on aura $\chi(a) = 1$.

Preuve. — Soit

$$P(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q}) = \prod_\alpha P_\alpha(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q})$$

la décomposition de P en facteurs irréductibles; (7.2) implique évidemment :

$$P_\alpha(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q}) = \chi_\alpha(a) P_\alpha(t, \xi'_1, \ldots, \xi'_{l-q}),$$

$\forall a$ suffisamment voisin de l'identité, donc $\forall a$. Évidemment :

$$\chi_\alpha(a.a') = \chi_\alpha(a).\chi_\alpha(a');$$

χ_α est donc un caractère du groupe linéaire unimodulaire; ce groupe étant simple a pour seul caractère

$$\chi(a) = 1, \qquad \forall a.$$

Donc (7.2) implique ceci : chaque facteur P_α de P est invariant; autrement dit :

$$P_\alpha(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q}) = P_\alpha(t, \xi'_1, \ldots, \xi'_{l-q})$$

quand il existe une substitution unimodulaire a vérifiant (7.1), c'est-à-dire quand

$$\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} = \xi'_1 \wedge \ldots \wedge \xi'_{l-q}.$$

Donc (7.2) implique ceci : chaque $P_\alpha(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q})$ est fonction des seules variables $(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q})$; c'est-à-dire : chaque P_α est un polynôme de $(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q})$, au sens du nº 3.

Le lemme précédent a pour conséquence évidente les deux lemmes suivants :

LEMME 7.1. — Pour que toute substitution linéaire (7.1) laisse invariante une équation

$$P(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q}) = 0,$$

où P est un polynôme de $(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q})$, il faut et suffit que P soit un polynôme de $(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q})$.

LEMME 7.2. — Soit une équation

$$P(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi) = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme de $(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi)$. Toute équation équivalente est du même type.

Le *lemme* 3 résulte évidemment du lemme 7.2 et de la définition de l'équation discriminante.

Rappelons que le nº 4 emploie le lemme 7.1 et ce lemme 3, pour définir l'appui. Nous allons maintenant déduire de cette définition quelques propriétés de l'appui.

8. **Les propriétés des équations réduites** que nous allons établir seront transformées par le nº 9 en propriétés des équations discriminantes, puis, par les nºs 10 et 11, en propriétés de l'appui.

LEMME 8.1. — Supposons ceci :

— le polynôme $p(t, \xi)$ divise le polynôme $P(t, \xi)$;

— l'équation $P(t, \xi) = 0$ est réduite sur T relativement à ξ.

Alors l'équation $p(t, \xi) = 0$ l'est aussi.

Preuve. — Si l'équation $p = 0$ ne l'était pas, alors, par définition (nº 2, 1º), le polynôme $p(t, \xi)$ aurait un facteur multiple de degré > 0 en ξ; donc $P(t, \xi)$ aussi; l'équation $P = 0$ ne serait donc pas réduite.

On prouve de même ceci :

LEMME 8.2. — Pour que l'équation $\prod_\alpha P_\alpha(t, \xi) = 0$ soit réduite sur T relativement à ξ, il faut et suffit que les deux conditions suivantes soient simultanément vérifiées :

— chacune des équations $P_\alpha(t, \xi) = 0$ est réduite sur T relativement à ξ;

— il n'existe pas de polynôme $p(t, \xi)$, homogène en ξ et de degré > 0, qui divise deux des $P_\alpha(t, \xi)$.

L'application du lemme 8.2 est aisée dans le cas suivant :

LEMME 8.3. — Soit un polynôme

$$P(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi) = \prod_\alpha P_\alpha(t, \xi^\alpha \wedge \xi),$$

où

$$\xi_1, \ldots, \xi_q, \xi \in \Xi, \qquad \xi^\alpha = \xi_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{\alpha_{|\alpha|}}, \qquad 1 \leqq \alpha_1 < \ldots < \alpha_{|\alpha|} \leqq q,$$

les $\alpha = \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_{|\alpha|} \}$ étant tous distincts.

1º Pour que l'équation $P(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi) = 0$ soit réduite sur $T \times \Xi^q$ relativement à ξ, il faut et suffit que chacune des équations $P_\alpha(t, \xi^\alpha \wedge \xi) = 0$ soit réduite sur $T \times \Xi^{|\alpha|}$ relativement à ξ.

2º Les points $(t, \xi_1, \ldots, \xi_q)$ de $T \times \Xi^q$ sur lesquels l'équation $P(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi) = 0$ n'est pas réduite relativement à ξ appartiennent à l'ensemble des points $(t, \xi_1, \ldots, \xi_q)$ sur lesquels :

ou bien l'une des équations $P_\alpha(t, \xi^\alpha \wedge \xi) = 0$ n'est pas réduite relativement à ξ;

ou bien l'une des équations suivantes est vérifiée :

$$(8.1) \quad P_\alpha(t, \xi^\alpha \wedge \xi_j) = 0, \qquad \text{où } j \in \{1, \ldots, q\}, \quad \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\alpha|}\}.$$

Preuve. — Ce lemme est évident quand l'un des polynômes P_α est identiquement nul. Écartons ce cas. Donc $|\alpha| \leqq l$.

Preuve de 2º. — Supposons qu'il existe un point $(t, \xi_1, \ldots, \xi_q)$ de $T \times \Xi^q$ sur lequel l'équation $P(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi) = 0$ n'est pas réduite relativement à ξ, alors que chacune des équations $P_\alpha(t, \xi^\alpha \wedge \xi) = 0$ est réduite sur ce point relativement à ξ. Vu le lemme 8.2, il existe deux valeurs β et $\gamma (|\gamma| \leqq |\beta|)$ de α, telles que, en ce point, $P_\beta(t, \xi^\beta \wedge \xi)$ et $P_\gamma(t, \xi^\gamma \wedge \xi)$ aient un facteur commun $p(\xi)$, homogène en ξ et de degré > 0. Choisissons pour vecteurs de base $\xi_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_{|\beta|}}, \ldots$; $P_\beta(t, \xi^\beta \wedge \xi)$, donc $p(\xi)$ ne dépend pas des $|\beta|$ premières coordonnées de ξ ; donc

$$p(\xi_{\beta_j}) = 0 \quad \text{et} \quad P_\gamma(t, \xi^\gamma \wedge \xi_{\beta_j}) = 0, \quad \forall \beta_j.$$

Or l'ensemble β des β_j n'est pas contenu dans l'ensemble γ des γ_k car $\beta \neq \gamma$ et $|\gamma| \leq |\beta|$. L'une des équations (8.1) est donc vérifiée.

Preuve de 1°. — Supposons chacune des équations $P_\alpha(t, \xi^\alpha \wedge \xi) = 0$ réduite sur $T \times \Xi^q$ relativement à ξ : les points $(t, \xi_1, \ldots, \xi_q)$ de $T \times \Xi^q$ sur lesquels l'une des équations $P_\alpha = 0$ n'est pas réduite relativement à ξ et ceux sur lesquels l'une des équations (8.1) est vérifiée constituent une sous-variété algébrique de $T \times \Xi^q$; d'après 2°, hors de cette sous-variété, l'équation $P(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi) = 0$ est réduite relativement à ξ; vu le lemme 2, 1° (localisation), cette équation est donc réduite sur $T \times \Xi^q$ relativement à ξ.

Réciproquement, vu le lemme 8.1, cette dernière propriété implique que chacune des équations $P_\alpha(t, \xi^\alpha \wedge \xi) = 0$ est réduite sur $T \times \Xi^q$ relativement à ξ.

C. Q. F. D.

9. Propriétés des équations discriminantes.

LEMME 9.1 (facteur). — Supposons que

$$p(t, \xi) = 0 \quad \text{implique} \quad P(t, \xi) = 0;$$

alors

$$\mathrm{discr}_T p(t, \hat{\xi}) = 0 \quad \text{implique} \quad \mathrm{discr}_T P(t, \hat{\xi}) = 0.$$

Preuve. — Ce lemme est une conséquence évidente du lemme 8.1, dans le cas particulier où les équations $p(t, \xi) = 0$ et $P(t, \xi) = 0$ sont réduites sur T relativement à ξ. Le cas général se ramène à ce cas particulier en remplaçant ces deux équations par des équations réduites équivalentes.

LEMME 9.2 (produit). — Soit un polynôme

$$P(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi) = \prod_\alpha P_\alpha(t, \xi^\alpha \wedge \xi),$$

où

$$\xi_1, \ldots, \xi_q, \xi \in \Xi, \qquad \xi^\alpha = \xi_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{\alpha_{|\alpha|}} \qquad 1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_{|\alpha|} \leq q,$$

les $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\alpha|}\}$ étant tous distincts. L'équation

$$\mathrm{discr}_{T \times \Xi^q} P(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \hat{\xi}) = 0$$

implique l'équation

$$\prod_{\alpha} \operatorname{discr}_{T\times\Xi^q} P_\alpha(t, \xi^\alpha \wedge \hat{\xi}) . \prod_{\alpha, j} P_\alpha(t, \xi^\alpha \wedge \xi_j) = 0,$$

où $j \in \{1, \ldots, q\}$, $\notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\alpha|}\}$.

Preuve. — Ce lemme est une conséquence évidente du lemme 8.3, dans le cas particulier où chacune des équations $P_\alpha(t, \xi^\alpha \wedge \xi) = 0$ est réduite sur $T\times\Xi^{|\alpha|}$ relativement à ξ. Le cas général se ramène à ce cas particulier en remplaçant ces équations par des équations réduites équivalentes, compte tenu du lemme 7.2.

10. L'appui sur une hypersurface réductible.

Nous allons déduire la proposition 1 du lemme 9.1 et du suivant.

Notations. — V désignera une sous-variété algébrique de $T\times X$, dont toutes les composantes ont la même dimension $r + \dim T$.

LEMME 10.1. — Soit $V = V_0 \cup V_1$, V_1 étant une réunion de composantes algébriques de V dont la projection $\mathrm{pr}_T V_1$ sur T est de codim $\geqq 1$, V_0 étant la réunion des autres composantes algébriques de V.

1° Pour que le q-plan (t, x^q) s'appuie sur V, il faut et suffit qu'il s'appuie sur V_0 ou sur V_1.

2° Pour que (t, x^q) s'appuie sur V_1, il faut et suffit que $l - r - 1 \leqq q$ et que t appartienne à la plus grande hypersurface algébrique contenue dans $\mathrm{pr}_T V_1$.

Preuve. — Soit $P_1(t) = 0$ l'équation de cette hypersurface; soit $p_0^q(t, \xi^{l-q}) = 0$ une équation polynomiale exprimant que (t, x^q) s'appuie sur V_0; il s'agit de prouver qu'on peut choisir

$$P^q(t, \xi^{l-q}) = P_1(t) . P_0^q(t, \xi^{l-q}).$$

C'est évident pour $q = l - r - 1$. C'est donc vrai $\forall q$, par récurrence sur q, vu la propriété évidente de l'équation discriminante :

$$\operatorname{discr}_T P_1(t)\, P(t, \hat{\xi}) = P_1(t) \operatorname{discr}_T P(t, \hat{\xi}).$$

LEMME 10.2. — Tout q-plan (t, x^q) s'appuyant sur une composante algébrique V_k de V s'appuie sur V.

Preuve. — Soit $P_k^q(t, \xi^{l-q}) = 0$ une équation exprimant que (t, x^q) s'appuie sur V_k; il s'agit de prouver que

$$P_k^q(t, \xi^{l-q}) = 0 \qquad \text{implique} \quad P^q(t, \xi^{l-q}) = 0.$$

C'est évident pour $q=l-r-1$. C'est donc vrai $\forall q$, par récurrence sur q, vu le lemme 9.1.

Notons (n° 5) $V(t)$ la projection de $(t, X) \cap V$ sur X.

LEMME 10.3. — Supposons $r \geq 0$. Soit V' une sous-variété algébrique singulière de V telle que :

1° $\dim V' = \dim V - 1$;

2° tout point de $(t, x^{l-r}) \cap V'$ est point multiple de l'intersection $(t, x^{l-r}) \cap V$; cela signifie qu'après avoir déplacé légèrement (t, x^{l-r}), de façon qu'il devienne générique, on a, au voisinage de ce point multiple, plusieurs points de

$$(t, x^{l-r}) \cap V.$$

Alors tout q-plan s'appuyant sur V' s'appuie sur V.

Preuve pour $q=l-r$. — Notons $\xi^r \wedge \xi$ les coordonnées grassmanniennes d'un $(l-r-1)$-plan de X : x^{l-r-1}. La condition que (t, x^{l-r-1}) s'appuie sur V, c'est-à-dire

$$P^{l-r-1}(t, \xi^r \wedge \xi) = 0$$

signifie que x^{l-r-1} coupe $V(t)$; elle signifie donc ceci : le $(l$-$1)$-plan x^{l-1}, de coordonnées homogènes ξ, contient l'un des points où $V(t)$ coupe le $(l-r)$-plan x^{l-r} de coordonnées grassmanniennes ξ^r. Vu la définition de l'équation discriminante (n° 2), l'équation

$$\mathrm{discr}_{T\times\Xi^r} P(t, \xi^r \wedge \hat{\xi}) = 0$$

est donc l'équation de la plus grande hypersurface algébrique de $T \times \Gamma^{l-r}(X)$ contenue dans l'ensemble des (t, x^{l-r}) vérifiant la condition suivante :

l'intersection $(t, x^{l-r}) \cap V$ contient un point multiple.

Or les (t, x^{l-r}) s'appuyant sur V' vérifient cette condition, et leur ensemble est une hypersurface algébrique.

C. Q. F. D.

Preuve pour $q > l-r$. — Soit $P'^q(t, \xi^{l-q}) = 0$ une équation exprimant que (t, x^q) s'appuie sur V'; il s'agit de prouver que

$$P'^q(t, \xi^{l-q}) = 0 \quad \text{implique} \quad P^q(t, \xi^{l-q}) = 0.$$

Nous venons de le prouver pour $q=l-r$. C'est donc vrai $\forall q$, par récurrence sur q, vu le lemme 9.1.

Rappelons la proposition que nous voulons prouver (*voir* n° 1).

PROPOSITION 1. — Soit V une hypersurface algébrique de $T \times X$; soit V_k une composante algébrique, de dimension homogène, de l'intersection d'un nombre quelconque de composantes algébriques de V. L'appui sur V_k implique l'appui sur V.

Preuve. — Notons :

$V^r_{\star k}$ tout V_k irréductible de dimension r;
V^r_{1k} tout $V^r_{\star k}$ dont la projection sur T est de codimension $\geqq 1$;
V^r_{2k} tout V^r_{1k} appartenant à l'un des V^{r+1}_{1h};
V^r_{0k} tout $V^r_{\star k}$ qui n'est pas un V^r_{2k};

$$V^r = \bigcup_k V^r_{\star k}; \qquad V^r_i = \bigcup_k V^r_{ik}, \qquad \text{où} \quad i \in \{0, 1, 2\}.$$

Les hypothèses du lemme 10.3 sont évidemment vérifiées quand on y remplace V et V' par V^{r+1} et V^r_0; donc

(10.1) tout q-plan (t, x^q) s'appuyant sur V^r_0 s'appuie sur V^{r+1}.

Soit (t, x^q) un q-plan s'appuyant sur V^r_2. D'une part $l - r - 1 \leqq q$. D'autre part, vu le lemme 10.1 2°, $t \in$ hypersurface $\subset \mathrm{pr}_T V^r_2$; or $V^r_2 \subset V^{r+1}_1$; d'où $t \in$ hypersurface $\subset \mathrm{pr}_T V^{r+1}_1$. Donc, vu ce lemme 10.1, (t, x^q) s'appuie sur V^{r+1}; ainsi

(10.2) tout q-plan (t, x^q) s'appuyant sur V^r_2 s'appuie sur V^{r+1}.

Vu ce même lemme, tout q-plan s'appuyant sur V^r s'appuie sur V^r_0 ou sur V^r_2; donc, vu (10.1) et (10.2) : tout q-plan s'appuyant sur V^r s'appuie sur V^{r+1}, donc sur $V^{l-1} = V$. Vu le lemme 10.2, tout q-plan s'appuyant sur l'une des composantes algébriques de l'un des V^r, c'est-à-dire sur l'un des V_k, s'appuie donc sur V.

C. Q. F. D.

11. **L'appui d'un q-simplexe et l'appui d'un q-èdre sur** V vont être définis; leurs propriétés, qu'emploiera le chapitre II, vont être énoncées et prouvées en s'aidant du lemme 9.2.

Soit S^q *un q-simplexe de* X; supposons-le *non dégénéré*, c'est-à-dire à sommets distincts. Définissons-le par la donnée :

— de son q-plan, x^q, qui est un q-plan de X,
— de ses faces x^{q-1}_h, où $h \in \{0, \ldots, q\}$, qui sont des $(q-1)$-plans de x^q, sans point commun.

Nommons coordonnées grassmanniennes de S^q l'ensemble :

— des coordonnées grassmanniennes ξ^{l-q} de son q-plan x^q,
— des coordonnées grassmanniennes ξ^{l-q+1}_h de ses faces x^{q-1}_h.

Il existe $l+1$ vecteurs $\xi_0, \ldots, \xi_l \in \Xi$ tels que

$$(11.1)\quad \begin{cases} \xi_h^{l-q+1} = \xi_h \wedge \xi^{l-q}, \quad \text{où } h \in \{0, \ldots, q\}, \qquad \xi^{l-q} = \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l, \\ \qquad\qquad \xi_0 \wedge \ldots \wedge \xi_l \neq 0; \end{cases}$$

ξ_h est défini $\bmod(\xi_{q+1}, \ldots, \xi_l)$ quand $h \in \{0, \ldots, q\}$; $\xi_{q+1}, \ldots, \xi_l$ sont définis à une substitution linéaire près.

Les r-arêtes de S^q sont les r-plans x^r de coordonnées grassmanniennes

$$\xi_{h_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{h_{q-r}} \wedge \xi^{l-q} \qquad \text{où} \quad 0 \leqq h_1 < \ldots < h_{q-r} \leqq q, \quad r \in \{0, \ldots, q\}.$$

Rappelons que S^q a pour q-arête son q-plan, pour $(q-1)$-arêtes ses faces, pour 0-arêtes ses sommets.

Définition. — Soit V une hypersurface algébrique de $T \times X$; nous dirons que *le q-simplexe (t, S^q) de $T \times X$ s'appuie sur V* quand l'une au moins des ses arêtes (t, x^r) s'appuie sur V; cet appui s'exprime donc par l'équation

$$(11.2)\qquad P_V^q(t, \xi_0, \ldots, \xi_q, \xi^{l-q}) = 0,$$

où P_V^q est le polynôme de $(t, \xi_0, \ldots, \xi_q, \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l)$:

$$(11.3)\qquad \begin{aligned} &P_V^q(t, \xi_0, \ldots, \xi_q, \xi^{l-q}) \\ &\quad = \prod_h P^0(t, \xi_0 \wedge \ldots \hat{\xi}_h \ldots \wedge \xi_q \wedge \xi^{l-q}) \times \ldots \\ &\qquad \times \prod_{i<j} P^{q-2}(t, \xi_i \wedge \xi_j \wedge \xi^{l-q}) \\ &\qquad \times \prod_j P^{q-1}(t, \xi_j \wedge \xi^{l-q}) \times P^q(t, \xi^{l-q}); \end{aligned}$$

$h, \ldots, i, j \in \{0, \ldots, q\}$; $\hat{}$ supprime ξ_h.

Notons S_0^{q-1} le sous-simplexe de S^q de coordonnées grassmanniennes

$$\xi_h \wedge \xi^{l-q} \wedge \xi_0, \qquad \xi^{l-q} \wedge \xi_0, \qquad \text{où} \qquad h \in \{1, \ldots, q\}.$$

Le q-èdre de S^q opposé à S_0^{q-1} est constitué par :
— le q-plan x^q de S^q,
— les faces x_h^{q-1} de S^q telles que $h \in \{1, \ldots, q\}$.

Les coordonnées grassmanniennes de ce q-èdre sont :

$$(11.4)\qquad \begin{cases} \xi_h^{l-q+1} = \xi_h \wedge \xi^{l-q}, \qquad \text{où} \quad h \in \{1, \ldots, q\}, \\ \qquad \xi^{l-q} = \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l. \end{cases}$$

Ses faces se coupent au sommet de S^q opposé à S_0^{q-1}, sommet dont les coordonnées homogènes sont $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_q \wedge \xi^{l-q}$. Les arêtes de ce

q-èdre sont les r-plans de coordonnées grassmanniennes

$$\xi_{h_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{h_{q-r}} \wedge \xi^{l-q}, \qquad \text{où} \quad 1 \leq h_1 < \ldots < h_{q-r} \leq q, \qquad r \in \{0, \ldots, q\}.$$

Les arêtes de S^q sont donc celles de S_0^{q-1} et celles de son q-èdre opposé.

Définition. — Nous dirons que *le q-èdre opposé à (t, S_0^{q-1}) dans (t, S^q) s'appuie sur V* quand l'une au moins de ses arêtes s'appuie sur V; cet appui s'exprime donc par une équation

$$P_V^q(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi^{l-q}) = 0, \tag{11.5}$$

où P_V^q est le polynôme de $(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l)$:

$$\begin{aligned} (11.6) \quad P_V^q&(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi^{l-q}) \\ &= P_{\nabla}^q(t, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi^{l-q}) / P_{\nabla}^{q-1}(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi^{l-q} \wedge \xi_0) \\ &= \pm P^0(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_q \wedge \xi^{l-q}) \times \ldots \\ &\qquad \times \prod_{i<j} P^{q-2}(t, \xi_i \wedge \xi_j \wedge \xi^{l-q}) \\ &\qquad \times \prod_j P^{q-1}(t, \xi_j \wedge \xi^{l-q}) \times P^q(t, \xi^{l-q}); \end{aligned}$$

$i, j, \ldots \in \{1, \ldots, q\}$.

Voici les propriétés de l'appui des q-simplexes et des q-èdres :

Lemme 11.1. — Le q-èdre de S^q opposé au sous-simplexe S_0^{q-1} de S^q s'appuie sur V quand il vérifie l'équation discriminante de l'équation d'appui de S_0^{q-1} sur V. En d'autres termes plus précis : l'équation

$$\operatorname{discr}_{T \times \Xi^l} P_{\nabla}^{q-1}(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi^{l-q} \wedge \xi) = 0, \tag{11.7}$$

où $\xi^{l-q} = \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l$, implique (11.5).

Preuve. — Vu la définition (11.3), on a

$$\begin{aligned} P_{\nabla}^{q-1}&(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi^{l-q} \wedge \xi) \\ &= \prod_h P^0(t, \xi_1 \wedge \ldots \hat{\xi}_h \ldots \wedge \xi_q \wedge \xi^{l-q} \wedge \xi) \times \ldots \\ &\qquad \times \prod_{i<j} P^{q-3}(t, \xi_i \wedge \xi_j \wedge \xi^{l-q} \wedge \xi) \\ &\qquad \times \prod_j P^{q-2}(t, \xi_j \wedge \xi^{l-q} \wedge \xi) \times P^{q-1}(t, \xi^{l-q} \wedge \xi), \end{aligned}$$

où $h \ldots, i, j \in \{1, \ldots, q\}$, $\xi^{l-q} = \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l$.

L'équation (11.7) implique donc, vu le lemme 9.2 et la définition $P^r = \operatorname{discr} P^{r-1}$ (n° 4), l'équation

$$P^0(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_q \wedge \xi^{l-q}) \times \prod_h P^1(t, \xi_1 \wedge \ldots \hat{\xi}_h \ldots \xi_q \wedge \xi^{l-q}) \times \ldots$$
$$\times \prod_{i<j} P^{q-2}(t, \xi_i \wedge \xi_j \wedge \xi^{l-q}) \times \prod_j P^{q-1}(t, \xi_j \wedge \xi^{l-q}) \times P^q(t, \xi^{l-q}) = 0,$$

où $h, \ldots, i, j \in \{1, \ldots, q\}$. Or cette équation est l'équation (11.5).

LEMME 11.2. — Le q-èdre de S^q, opposé au sous-simplexe S_0^{q-1} de S^q, s'appuie sur V quand S_0^{q-1} vérifie l'équation d'appui lorsque ses sommets se confondent. En d'autres termes plus précis : la condition

$$(11.8)\qquad \begin{cases} P_V^{q-1}(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi^{l-q} \wedge \xi) = 0, \\ \forall \xi \text{ tel que } \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_q \wedge \xi^{l-q} \wedge \xi = 0, \end{cases}$$

implique (11.5).

Preuve. — L'hypothèse (11.8) implique que l'une au moins des équations suivantes est vérifiée, $\forall \xi$ tel que $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_q \wedge \xi^{l-q} \wedge \xi = 0$:

$$P^0(t, \xi_1 \wedge \ldots \hat{\xi}_h \ldots \wedge \xi_q \wedge \xi^{l-q} \wedge \xi) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$P^{q-3}(t, \xi_i \wedge \xi_j \wedge \xi^{l-q} \wedge \xi) = 0 \qquad (i<j),$$
$$P^{q-2}(t, \xi_j \wedge \xi^{l-q} \wedge \xi) = 0,$$
$$P^{q-1}(t, \xi^{l-q} \wedge \xi) = 0,$$

où $h, \ldots, i, j \in \{1, \ldots, q\}$. Cette équation est en particulier vérifiée pour $\xi \in \{\xi_1, \ldots, \xi_q\}$. L'une au moins des équations suivantes est donc vérifiée :

$$P^0(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_q \wedge \xi^{l-q}) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$P^{q-3}(t, \xi_h \wedge \xi_i \wedge \xi_j \wedge \xi^{l-q}) = 0 \qquad (h<i<j),$$
$$P^{q-2}(t, \xi_i \wedge \xi_j \wedge \xi^{l-q}) = 0 \qquad (i<j),$$
$$P^{q-1}(t, \xi_i \wedge \xi^{l-q}) = 0,$$

où $h, \ldots, i, j \in \{1, \ldots, q\}$. Vu la définition (11.6) de P_V^q, l'équation (11.5) est donc vérifiée.

CHAPITRE II.

Intégrale sur un simplexe.

Le chapitre II définit l'intégrale $\int_{S^q} \omega(t, \zeta)$; il prouve que, si ω est à support singulier algébrique, alors cette intégrale est une fonction à support singulier algébrique de t et des coordonnées homogènes des ommets de S^q; il détermine ce support singulier.

12. Le germe de $\int_{S^q} \omega(t, \zeta)$.

Soit $\omega(t, \zeta)$ une q-forme différentielle de $\zeta \in Z$, homogène de degré nul, à coefficients fonctions de $t \in T$; nous la supposons holomorphe quand l'image (t, x) de (t, ζ) est voisine d'un point donné $(t', x') \in T \times X$.

Soit S^q un q-simplexe de X; nous le dirons voisin de x' quand ses sommets seront voisins de x'; nous le supposerons orienté; cette orientation oriente ses $(q-1)$-sous-simplexes S_h^{q-1} en sorte que son bord soit

$$\partial S^q = S_0^{q-1} + \ldots + S_q^{q-1}.$$

Soit T^q un q-simplexe réel de R^q; soit une application continûment différentiable

$$f: \quad T^q \rightarrow x^q$$

appliquant T^q dans le q-plan x^q de S^q et chaque face de T^q dans une face de S^q, l'orientation étant conservée; $f(T^q)$ est donc une chaîne singulière de X; plus précisément, c'est un cycle singulier du q-plan x^q de S^q relatif à la réunion $\bigcup_h x_h^{q-1}$ des faces de S^q.

Définissons, pour t voisin de t', S^q et $f(T^q)$ voisins de x' :

$$J[t, S^q, \omega] = \int_{f(T^q)} \omega(t, \zeta); \tag{12.1}$$

en apparence, J dépend du choix de f.

La restriction de $\omega(t, \zeta)$ à x^q (à x_h^{q-1}) est fermée (est nulle), puisque c'est une q-forme holomorphe de x; soient

$$\xi_0 \wedge \xi^{l-q}, \quad \ldots, \quad \xi_q \wedge \xi^{l-q}, \qquad \xi^{l-q} = \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l \tag{12.2}$$

les coordonnées grassmanniennes de S^q quand il n'est pas dégénéré (n° 11). La formule de dérivation de l'intégrale (*voir* [3], n° 10, théor. 3) donne, pour toute forme $L(\xi, \zeta)$, bilinéaire en $\xi \in \Xi$ et $\zeta \in Z$:

$$L\left(\xi_0, \frac{\partial}{\partial \xi_0}\right) J[t, S^q, \omega] = \int_{f(T_0^{q-1})} L(\xi_0, \zeta) \frac{\omega(t, \zeta)}{\xi_0 . d\zeta}$$

où :

T_0^{q-1} est un $(q-1)$-sous-simplexe de T^q,

$f(T_0^{q-1})$ appartient à la face x_0^{q-1} de S^q de coordonnées $\xi_0 \wedge \xi^{l-q}$.

$L(\xi_0, \zeta) \dfrac{\omega(t, \zeta)}{\xi_0 . d\zeta}\Big|_{x_0^{q-1}}$ est la forme résidu de $L(\xi_0, \zeta) \dfrac{\omega(t, \zeta)}{\xi_0 . \zeta}$.

On peut donc calculer $J[t, S^q, \omega]$ par l'intégration que voici :

$$(12.3)_q \quad \begin{cases} L\left(\xi_0, \dfrac{\partial}{\partial \xi_0}\right) J[t, S^q, \omega] = J\left[t, S_0^{q-1}, L(\xi_0, \zeta)\dfrac{\omega(t, \zeta)}{\xi_0 . d\zeta}\right], \\ \lim J[t, S^q, \omega] = 0 \qquad \text{quand (9)} \quad \lim \xi_0 \wedge \ldots \wedge \xi_l = 0, \qquad q > 0; \end{cases}$$

$$(12.3)_0 \quad \begin{cases} J[t, S^0, \omega] = \omega(t, S^0) \qquad \text{quand} \quad q = 0 \\ [\omega \text{ est alors une fonction de } (t, x)]. \end{cases}$$

De (12.3) résulte, par récurrence sur q, ceci (10) : la fonction $J[t, S^q, \omega]$ est indépendante du choix de f. C'est pourquoi nous la noterons

$$(12.4) \qquad J[t, S^q, \omega] = \int_{S^q} \omega(t, \zeta).$$

D'après ce qui précède, elle a les propriétés suivantes :

Lemme 12. — $\int_{S^q} \omega(t, \zeta)$ est définie par (12.1) et (12.4); c'est une fonction de (t, S^q), holomorphe quand (t, S^q) est voisin d'un point (t', x') où $\omega(t, \zeta)$ est holomorphe; on peut construire $\int_{S^q} \omega$ par les q intégrations simples (12.3).

Nous supposerons désormais ω *à support singulier algébrique* : $V = \mathrm{Ss}[\omega]$; V est une hypersurface de $T \times X$; notons son équation

$$V : \quad P(t, \zeta) = 0.$$

$V(t)$ désigne la projection de $(t, X) \cap V$ sur X, c'est-à-dire l'ensemble des x tels que $(t, x) \in V$.

13. Le support singulier algébrique de $\int_{S^1} \omega$ quand $l = 1$.

Lemme 13. — Supposons que X est la droite projective complexe. Un 1-simplexe S^1 (nº 11) est défini par son bord : $\partial S^1 = x_1 - x_0$; x_0 et $x_1 \in X$; les coordonnées homogènes de x_0 et x_1 seront ζ_0 et $\zeta_1 \in Z = \mathbf{C}^2$. Soit $\omega(t, \zeta)$ une 1-forme, homogène en ζ, à support singulier algébrique. La fonction $\int_{S^1} \omega(t, \zeta)$, que le nº 12 a définie, est une fonction de (t, ζ_0, ζ_1),

(9) plus précisément : quand les sommets de S^q viennent se confondre, en restant voisins de x'.

(10) On peut le prouver autrement : si $\mathcal{V}$ est un voisinage convenable de x et si les valeurs de f sont suffisamment voisines de x, alors $f(T^q)$ appartient à une classe d'homologie de $\left(\mathcal{V} \cap x^q, \bigcup_h x_h^{q-1}\right)$ qui est indépendante de f.

à support singulier algébrique; ce support singulier est une composante algébrique de l'hypersurface de $T \times Z \times Z$ d'équation

$$P(t, \zeta_0).P(t, \zeta_1).\operatorname{discr}_T P(t, \hat{\zeta}) = 0.$$

Preuve. — $V(t)$ est un ensemble de points de X, dont le nombre est fini et indépendant de t, quand le discriminant de l'équation définissant $V(t)$ ne s'annule pas; c'est-à-dire quand

$$\operatorname{discr} Q(t, \xi + \hat{p}\eta) \neq 0$$

[$Q(t, \xi) = 0$: équation réduite sur T relativement à ξ, équivalente à $P(t, \xi) = 0$; ξ et η : deux vecteurs indépendants $\in Z = \mathbf{C}^2$]; c'est-à-dire, vu le n° 2, quand t est hors de l'hypersurface S de T d'équation

$$S: \quad \operatorname{discr}_T P(t, \hat{\zeta}) = 0.$$

$V(t)$ dépend continûment de $t \in T - S$. Autrement dit : $V \cap [(T - S) \times X]$ est un espace fibré, dont la base est $T - S$ et dont la fibre $(t, V(t))$ est un ensemble fini. Donc $[(T - S) \times X] - V \cap [(T - S) \times X]$ est un espace fibré, de base $T - S$, de fibre $(t, X - V(t))$. Notons E son revêtement simplement connexe; c'est donc un espace fibré, de base $T - S$; sa fibre est notée E_t; sa projection sur $T - S$ est notée

$$\mathrm{pr} : \quad E \to T - S.$$

L'application identique de

$$[(T - S) \times X] - V \cap [(T - S) \times X] = [T \times X] - [(S \times X) \cup V]$$

dans $T \times X - V$ induit une application canonique de E dans le revêtement simplement connexe de $T \times X - V$; par hypothèse, la forme ω est holomorphe sur ce revêtement de $T \times X - V$; soit ϖ l'image réciproque de cette forme holomorphe par cette application canonique : ϖ est une forme différentielle sur E; plus précisément, c'est une forme différentielle sur E_t, fonction de t.

Nous allons l'intégrer sur des arcs de E_t, dont voici la définition : considérons :

l'espace $T \times X \times X$, dont les points sont notés (t, x_0, x_1);

la sous-variété $S \times X \times X$ de cet espace définie par la condition : $t \in S$;

» » $V \times X$ » » » » : $(t, x_0) \in V$;

» » $X \times V$ » » » » : $(t, x_1) \in V$;

Soit F le revêtement simplement connexe de

$$T \times X \times X - [(S \times X \times X) \cup (V \times X) \cup (X \times V)];$$

c'est un espace fibré de base $T - S$; la projection $(t, x_0, x_1) \mapsto (t, x_0)$ de

$$T \times X \times X - [(S \times X \times X) \cup (V \times X) \cup (X \times V)]$$

sur $T \times X - [(S \times X) \cup V]$ induit une application naturelle

$$\mathrm{pr}_0 : \quad F \to E;$$

l'application $(t, x_0, x_1) \mapsto (t, x_1)$ induit de même

$$\mathrm{pr}_1 : \quad F \to E.$$

Étant donné $f \in F$, soit

$$t = \mathrm{pr}\,\mathrm{pr}_0(f) = \mathrm{pr}\,\mathrm{pr}_1(f) \in T - S;$$

on a $\mathrm{pr}_0(f) \in E_t$ et $\mathrm{pr}_1(f) \in E_t$; nous notons $\gamma(f)$ toute classe d'homotopie d'arcs de E_t joignant $\mathrm{pr}_0(f)$ à $\mathrm{pr}_1(f)$. On dit que la classe $\gamma(f)$ dépend continûment de f quand elle contient des arcs dépendant continûment de f. Rappelons une propriété classique des espaces fibrés : soit λ un arc de F d'origine f_0, d'extrémité f_1; soit une classe $\gamma(f_0)$; il existe une classe et une seule $\gamma(f)$, dépendant continûment de $f \in \lambda$ et coïncidant avec $\gamma(f_0)$ quand $f = f_0$; $\gamma(f_1)$ ne dépend que de $\gamma(f_0)$ et de la classe d'homotopie de λ dans F. Puisque F est simplement connexe, $\gamma(f)$ est donc une fonction de $f \in F$ définie par le choix de sa valeur $\gamma(f_0)$ en un seul point f_0. Ce choix fait, $\int_{\gamma(f)} \varpi$ est une fonction, évidemment holomorphe, de $f \in F$. Nous ferons le choix suivant : f_0 sera tel que

$$\mathrm{pr}_0(f_0) = \mathrm{pr}_1(f_0);$$

$\gamma(f_0)$ sera la classe de l'arc confondu avec le point $\mathrm{pr}_0(f_0)$. Alors $\int_{\gamma(f)} \varpi$ est évidemment un prolongement analytique de la fonction $\int_{S^1} \omega$, que le n° 12 a défini; le lemme 13 est donc vrai.

14. Le support singulier algébrique de $\int_{S^1} \omega$ quand $l \geqq 1$.

Lemme 14. — Supposons que X est l'espace projectif complexe, de dimension l. Soit S^1 un 1-simplexe de bord $\partial S^1 = x_1 - x_0$; x_0 et $x_1 \in X$; les coordonnées homogènes de x_0 et x_1 sont ζ_0 et $\zeta_1 \in Z = \mathbf{C}^{l+1}$; on suppose x_1 dans un hyperplan $x'^{-1}(t)$ de X, dont les coordonnées homogènes $\xi(t)$ sont des fonctions polynomiales de t :

$$\xi(t) . \zeta_1 = 0.$$

Soit $\omega(t, \zeta)$ une forme différentielle en ζ, *fermée*, de degré 1 en ζ, à coefficients fonctions de t, *nulle* sur $x^{l-1}(t)$, c'est-à-dire pour

$$\xi(t).d\zeta = \xi(t).\zeta = 0;$$

on la suppose holomorphe près d'un point donné $(t', x') \in T \times X$ et à support singulier algébrique :

$$\mathrm{Ss}[\omega] = V: \quad P(t, \zeta) = 0.$$

Alors la fonction $\int_{S^1} \omega(t, \zeta)$, que le n° 12 a définie, est une fonction de (t, ζ_0) à support singulier algébrique; ce support singulier est une hypersurface de $T \times Z$, dont les points (t, ζ_0) vérifient l'une au moins des quatre équations suivantes :

$$(14.1) \qquad P(t, \zeta_0) = 0;$$

$$(14.2) \qquad P(t, \zeta_1) = 0, \qquad \forall\, \zeta_1 \text{ tel que } \xi(t).\zeta_1 = 0;$$

$$(14.3) \qquad \xi(t).\zeta_0 = 0$$

$$(14.4) \qquad \mathrm{discr}_T P(t, \hat{\zeta}) = 0.$$

L'une des branches de cette fonction $\int_{S^1} \omega$ s'annule avec $\xi(t).\zeta_0$.

Preuve dans le cas où l'équation $P(t, \zeta) = 0$ *est réduite sur* T *relativement à* ζ. — Le n° 12 définit $\int_{S^1} \omega(t, \zeta)$ pour (t, S^1) voisin de (t', x'); c'est une fonction des seules variables (t, ζ_0), puisque ω est fermée et nulle sur $x^{l-1}(t)$. Vu le lemme 13, c'est une fonction holomorphe sur le revêtement simplement connexe du complémentaire de l'ensemble des (t, ζ_0) qui vérifient l'une des conditions (14.1), (14.2) ou

$$(14.5) \qquad \mathrm{discr}\, P(t, \zeta_1 + \hat{\rho}\zeta_0) = 0, \qquad \forall\, \zeta_1 \text{ tel que } \xi(t).\zeta_1 = 0.$$

Supposons que ni (14.1) ni (14.2), ni (14.3) n'ait lieu; alors (14.5) s'énonce

$$\mathrm{discr}\, P(t, \zeta_1 + \hat{\rho}\zeta_0) = 0, \qquad \forall\, \zeta_1 \in Z$$

et implique, vu le 2° du critère de réduction (n^{os} 2 et 6), que

(14.6) L'équation $P(t, \zeta) = 0$ n'est pas réduite sur t relativement à ζ.

Par suite, $\int_{S^1} \omega(t, \zeta)$ est une fonction de (t, ζ_0), holomorphe sur le revêtement simplement connexe du complémentaire de l'ensemble des (t, ζ_0) qui vérifient l'une des conditions (14.1), (14.2), (14.3) ou (14.6).

Cet ensemble est algébrique. D'après un théorème classique d'Hartogs [1], ses composantes de codimensions complexes > 1 ne peuvent pas être des singularités de fonction analytique. Donc $\int_{S^1} \omega(t, \zeta)$ est une fonction de (t, ζ_0) à support singulier algébrique; ce support singulier est une composante algébrique de l'hypersurface de $T \times Z$ dont les points (t, ζ_0) vérifient l'une des quatre équations (14.1), (14.2), (14.3) ou (14.4).

Preuve dans le cas général. — On se ramène au cas précédent en remplaçant l'équation $P(t, \zeta) = 0$ par une équation équivalente, réduite sur T relativement à ζ.

15. Le support singulier de $\int_{S^q} \omega$.

LEMME 15. — Considérons $\int_{S^q} \omega(t, \zeta)$ (n° 12) comme étant une fonction de $t \in T$ et de $l + 1$ vecteurs $\xi_0, \ldots, \xi_l$ de Ξ tels que S^q ait (11.1) pour coordonnées grassmanniennes. Si ω est à support singulier algébrique, alors $\int_{S^q} \omega(t, \zeta)$ est une fonction de $(t, \xi_0, \ldots, \xi_l)$ à support singulier algébrique; ce support singulier est une composante algébrique de l'ensemble des $(t, \xi_0, \ldots, \xi_l)$ vérifiant l'une des conditions :

1° $\xi_0 \wedge \ldots \wedge \xi_l = 0$;

2° (t, S^q) s'appuie sur $\mathrm{Ss}[\omega]$, c'est-à-dire (*voir* n° 11 la définition de P_∇^q) :

$$P_\nabla^q(t, \xi_0, \ldots, \xi_q, \xi^{l-q}) = 0.$$

Une branche de cette fonction $\int_{S^q} \omega$ s'annule avec $\xi_0 \wedge \ldots \wedge \xi_l$.

Preuve. — Ce lemme est évident quand $q = 0$. Supposons-le vrai quand on y remplace q par $q - 1 \geqq 0$. Alors, vu $(12.3)_q$, pour $dt = d\xi_1 = \ldots = d\xi_l = 0$, $d\int_{S^q} \omega(t, \zeta)$ est une forme différentielle de ξ_0, fonction de $(t, \xi_1, \ldots, \xi_l)$ à laquelle s'applique le lemme 14, quand on y remplace :

$t \in T$ (lemme 14)	par $(t, \xi_1, \ldots, \xi_l) \in T \times \Xi^l$;
X	par l'ensemble des hyperplans de x^q;
$l = \dim X$	par q;
$\zeta_0 \in Z$	par $\xi_0 \bmod (\xi_{q+1}, \ldots, \xi_l) \in \Xi^* = \Xi \bmod (\xi_{q+1}, \ldots \xi_l)$;

$\xi \in \Xi =$ dual de Z par l'image de $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_q$ dans $\Lambda^q \Xi^* =$ dual de Ξ^*;

$\xi . \zeta_0 \in \mathbf{C}$ par $\xi_0 \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_q \wedge \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l \in \mathbf{C}$;

$\omega(t, \zeta_0)$ par $d \int_{S^q} \omega$, où $dt = d\xi_1 = \ldots = d\xi_l = 0$;

$\int_{S^1} \omega$ par $\int_{S^q} \omega$;

$P(t, \zeta_0)$ par $P_\nabla^{q-1}(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l \wedge \xi)$.

D'après ce lemme 14, $\int_{S^q} \omega(t, \zeta)$ est une fonction de $(t, \xi_0, \ldots, \xi_l)$ à support singulier algébrique, dont une branche s'annule avec $\xi_0 \wedge \ldots \wedge \xi_l$; ce support singulier est une composante algébrique de l'hypersurface de $T \times \Xi^{l+1}$ dont les points $(t, \xi_0, \ldots, \xi_l)$ vérifient l'une au moins des équations

$$P_\nabla^{q-1}(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l \wedge \xi_0) = 0; \tag{15.1}$$

$$\begin{cases} P_\nabla^{q-1}(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l \wedge \xi) = 0; \\ \forall \xi \text{ tel que } \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_l \wedge \xi = 0; \end{cases} \tag{15.2}$$

$$\xi_0 \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_l = 0; \tag{15.3}$$

$$\operatorname{discr}_{T \times \Xi^l} P_\nabla^{q-1}\left(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l \wedge \hat{\xi}\right) = 0. \tag{15.4}$$

Or, d'après les lemmes 11.1 et 11.2, chacune des conditions (15.2) et (15.4) implique

$$P_\vee^q(t, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l) = 0. \tag{15.5}$$

D'après la définition (11.6), chacune des équations (15.1) et (15.5) implique

$$P_\nabla^q(t, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l) = 0. \tag{15.6}$$

Le support singulier de $\int_{S^q} \omega(t, \zeta)$ est donc une composante algébrique de l'ensemble des $(t, \xi_0, \ldots, \xi_l)$ vérifiant (15.3) ou (15.6).

C. Q. F. D.

16. Le support singulier de $\int_{S^q} \omega$, considéré comme fonction de t et des coordonnées homogènes ζ_h des sommets x_h de S^q.

Lemme 16. — Si ω est à support singulier algébrique, alors $\int_{S^q} \omega(t, \zeta)$ est une fonction à support singulier algébrique de $(t, \zeta_0, \ldots, \zeta_q)$; ce support singulier est une composante algébrique de l'ensemble des $(t, \zeta_0, \ldots, \zeta_q)$ vérifiant l'une des conditions :

1° $\zeta_0 \wedge \ldots \wedge \zeta_q = 0$;

2° (t, S^q) est un q-simplexe non dégénéré s'appuyant sur $\mathrm{Ss}[\omega]$.

Preuve. — Soit S^q un q-simplexe non dégénéré de X, de coordonnées grassmanniennes (11.1); ses sommets x_h ont pour coordonnées homogènes

$$(16.1) \quad \zeta_h = \xi_0 \wedge \ldots \hat{\xi}_h \ldots \wedge \xi_q \wedge \xi_{q+1} \wedge \ldots \wedge \xi_l, \qquad \text{où} \quad h \in \{0, \ldots, q\}.$$

Les formules (16.1) définissent une application

$$\mathrm{pr}: \quad (t, \xi_0, \ldots, \xi_l) \mapsto (t, \zeta_0, \ldots, \zeta_q)$$

de la partie de

$$T \times \Xi^{l+1} \qquad \text{où} \quad \xi_0 \wedge \ldots \wedge \xi_l \neq 0$$

sur la partie de

$$T \times Z^{q+1} \qquad \text{où} \quad \zeta_0 \wedge \ldots \wedge \zeta_q \neq 0.$$

Cette application est fibrée; en effet pour que

$$\mathrm{pr}(t, \xi_0, \ldots, \xi_l) = \mathrm{pr}(t', \xi'_0, \ldots, \xi'_l)$$

il faut et suffit qu'il existe des constantes c et c^i_j telles que

$$\begin{cases} t' = t, \\ \xi'_h = c\xi_h \bmod(\xi_{q+1}, \ldots, \xi_l), \qquad \text{pour} \quad h \in \{0, \ldots, q\}, \\ \xi'_i = \sum_j c^j_i \xi_j \qquad \text{où} \quad i, j \in \{q+1, \ldots, l\}, \qquad \det(c^j_i) = c^{-q}. \end{cases}$$

Deux points $(t, \xi_0, \ldots, \xi_l)$ d'une même fibre sont les coordonnées grassmanniennes d'un même simplexe (t, S^q). Notons A l'ensemble des $(t, \xi_0, \ldots, \xi_l) \in T \times \Xi^{l+1}$ qui vérifient l'une des conditions :

(i) $\xi_0 \wedge \ldots \wedge \xi_l = 0$;

(ii) le simplexe non dégénéré (t, S_q) de coordonnées grassmanniennes (11.1) s'appuie sur $\mathrm{Ss}[\omega]$.

Notons B l'ensemble des $(t, \zeta_0, \ldots, \zeta_l) \in T \times Z^{q+1}$ qui vérifient l'une des deux conditions 1° ou 2° de l'énoncé. D'après ce qui précède, A est une hypersurface algébrique de $T \times \Xi^{l+1}$, qu'engendrent des fibres de $T \times \Xi^{l+1}$; $\mathrm{pr}\, A = B$ est une hypersurface algébrique de $T \times Z^{q+1}$; pr est donc une application fibrée de $T \times \Xi^{l+1} - A$ sur $T \times Z^{q+1} - B$. Notons F et E les revêtements simplement connexes de $T \times \Xi^{l+1} - A$ et $T \times Z^{q+1} - B$; pr induit donc une application fibrée

$$F \to E.$$

Cette fibration $F \to E$ est analytique; la fibre est connexe, car E est simplement connexe. Or $\int_{S^q} \omega(t, \zeta)$ est, d'après le lemme 15, une fonction holomorphe sur F; sa définition locale (n° 12) prouve qu'elle est constante sur chaque fibre de F; elle résulte donc de la composition de la projection $F \to E$ et d'une fonction holomorphe sur E; c'est ce que signifie le lemme 16.

Chapitre III.

Intégrale sur un cycle.

Ce chapitre prouve le théorème 1 (n° 1); les n^{os} 17 à 19 supposent $m = 0$, donc $V = \mathrm{Ss}[\omega]$.

17. **Le cycle** $\gamma^q(t)$ a été défini par le n° 1, pour $t = t'$, puis pour t voisin de $t' \in T - \mathrm{Ss}[W]$. Le n° 17 supposera t voisin de t', $W(t)$ voisin de $W(t')$. Rappelons que $\gamma^q(t)$ est un cycle de

$$X' \text{ relativement à } W(t), \qquad \text{où} \quad W(t) = \bigcup_H W_H(t).$$

Les $W_H(t)$ sont des hyperplans de X; les intersections $W_{H_1}(t) \cap \ldots \cap W_{H_s}(t)$ qui sont de dimension r pour t générique sont notées $W_K^r(t)$ si t est tel que leur dimension soit r; sinon $W_K^r(t)$ n'est pas défini; $W_K^l(t)$ désigne X.

Le n° 18 emploiera le lemme 17, qui résulte du suivant; bien entendu $W_K^s \subset W_L^r$ signifie ceci :

$$W_K^s(t) \subset W_L^r(t), \qquad \forall\, t \text{ tel que } W_K^s(t) \text{ et } W_L^r(t) \text{ soient définis.}$$

Lemme. — Si $W_K^s \subset W_L^r$, alors il existe W_M^{r-1} tel que

$$W_K^s \subset W_M^{r-1} \subset W_L^r.$$

Preuve. — Puisque $W_K^s \subset W_L^r$, il existe au moins un W_H tel que

$$W_K^s \subseteq W_H, \qquad W_L^r \nsubseteq W_H;$$

on peut prendre

$$W_M^{r-1} = W_L^r \cap W_H.$$

Lemme 17. — Si $W_K^s \subset W_L^r$, alors il existe W_M^{s+1} tel que

$$W_K^s \subset W_M^{s+1} \subset W_L^r.$$

Preuve. — Le lemme précédent prouve l'existence de $W_{L_1}^{r-1}$, $W_{L_2}^{r-2}$, ... tels que

$$W_K^s \subset \ldots \subset W_{L_2}^{r-2} \subset W_{L_1}^{r-1} \subset W_L^r.$$

Notations. — Le q-cycle relatif $\gamma^q(t)$ est une chaîne singulière ([11]) du type suivant :

$$\partial\gamma^q = \sum_i \varepsilon_0^i(q)\gamma_i^{q-1} \qquad (\partial, \text{ bord}; \ \varepsilon, \text{ nombres entiers});$$

$$\partial\gamma_i^r = \sum_j \varepsilon_i^j(r)\gamma_j^{r-1} \qquad (0 \leqq r \leqq q; \ \varepsilon = 0 \text{ si } r = 0);$$

$$\sum_j \varepsilon_i^j(r)\,\varepsilon_j^k(r-1) = 0, \qquad \forall\, r, i, k;$$

chaque γ_i^r dépend continûment de t, et est une chaîne d'un $W_K^{l-q+r}(t)$. Ce W_K^{l-q+r}, qui contient γ_i^r, sera noté

$$W_K^{l-q+r} = \mathfrak{W}\{\gamma_i^r\}.$$

$\mathfrak{W}\{\ldots\}$ a évidemment les propriétés suivantes :

$\mathfrak{W}\{\ldots\}$ augmente la dimension de $l-q$;

$\mathfrak{W}\{\gamma_j^{r-1}\}$ est un hyperplan de $\mathfrak{W}\{\gamma_i^r\}$ si $\varepsilon_i^j(r) \neq 0$.

Chaque chaîne γ_i^r ($r \in \{0, \ldots, q\}$; $\gamma_i^q = \gamma^q$) est une somme de simplexes singuliers σ_k^r; nous dirons que ces simplexes σ_k^r et leurs sous-simplexes σ_j^s ($0 \leqq s \leqq r$) appartiennent à cette chaîne γ_i^r. A chaque simplexe σ_j^s correspond une chaîne γ_i^r unique telle que σ_j^s appartienne à γ_i^r sans appartenir à $\partial\gamma_i^r$ ($s \leqq r$). Définissons

$$\mathfrak{W}[\sigma_j^s] = \mathfrak{W}\{\gamma_i^r\}.$$

Les propriétés de $\mathfrak{W}[\ldots]$ sont évidentes :

(17.1) $\mathfrak{W}[\sigma]$ est un W_K^r;

(17.2) σ est un simplexe singulier de $\mathfrak{W}[\sigma]$;

(17.3) $\dim \mathfrak{W}[\sigma] \geqq l - q + \dim \sigma$;

(17.4) $\mathfrak{W}[\sigma'] \subseteq \mathfrak{W}[\sigma]$ quand σ' est sous-complexe de σ.

L'emploi d'une subdivision suffisamment fine des chaînes γ_i^r permet à $\mathfrak{W}$ d'avoir en outre la propriété suivante :

(17.5) $\left\{\begin{array}{l}\text{chaque simplexe } \sigma^s \text{ possède au moins un sommet } \sigma^0 \text{ tel que} \\ \qquad\qquad \mathfrak{W}[\sigma^0] = \mathfrak{W}[\sigma^s].\end{array}\right.$

([11]) C'est une somme de simplexes singuliers; chaque simplexe singulier est l'image continûment différentiable d'un simplexe euclidien : *voir* les traités classiques de topologie.

Preuve de (17.5). — Décomposons chaque simplexe σ^s ne vérifiant pas (17.5) en une pyramide

$$\sum_{j=0}^{s} \sigma_j^s = \sigma^s$$

ayant pour base $\partial\sigma^s$ et pour sommet un point de σ^0 de σ^s; convenons que les nouveaux simplexes ainsi introduits appartiennent aux mêmes γ_i^r que σ^s; la condition (17.5) se trouve évidemment vérifiée.

18. **Le choix de** $\gamma^q(t)$ que fait le lemme 18.2 sera employé par le n° 19.

A chaque σ_j^0 associons un point arbitraire x_j de X; au simplexe singulier σ_k^r associons le simplexe (non singulier) S_k^r, qui est l'ensemble des points x_j associés aux sommets σ_j^0 de σ_k^r; notons x_k^r le r-plan de ce simplexe S_k^r, quand il est défini; notons

$$\mathcal{W}[\sigma_k^r] = \mathcal{W}[S_k^r] = \mathcal{W}[x_k^r], \qquad \mathcal{W}_j = \mathcal{W}[x_j].$$

Lemme 18.1. — Si tous les sommets x_j de S_k^r vérifient la condition

$$x_j \in \mathcal{W}_j(t),$$

alors

$$S_k^r \subset \mathcal{W}[S_k^r](t).$$

Note. — Si, de plus, x_k^r est défini, on a donc $x_k^r \subset \mathcal{W}[S_k^r](t)$.

Preuve. — Soit x_j un sommet de S_k^r; σ_j^0 est un sommet de σ_k^r; donc, vu (17.4) :

$$\mathcal{W}_j \subseteq \mathcal{W}[S_k^r];$$

donc l'hypothèse

$$x_j \in \mathcal{W}_j(t), \qquad \forall\, x_j \text{ sommet de } S_k^r,$$

implique

$$x_j \in \mathcal{W}[S_k^r](t), \qquad \text{et par suite} \quad S_k^r \subset \mathcal{W}[S_k^r](t).$$

On déduit aisément, par une construction classique, du lemme précédent le suivant, qu'emploiera le n° 19 :

Lemme 18.2. — Supposons

$$x_j \in \mathcal{W}_j(t), \qquad \forall j,$$

t voisin de t' et x_j voisin de σ_j^0. On peut alors déformer le cycle $\gamma^q(t)$ de X' relatif à $W(t)$ en un cycle homologue

$$\sum_h \sigma_h^q(t)$$

tel que les simplexes singuliers $\sigma_h^q(t)$ et tous leurs sous-simplexes $\sigma_k^r(t)$ vérifient la condition

$$\sigma_k^r(t) \subset x_k^r,$$

quand x_k^r est défini.

Le n° 19 va employer la propriété suivante de l'ensemble des valeurs prises par x_k^r, quand $x_j \in \mathfrak{W}_j(t)$:

LEMME 18.3. — A tout x_k^r correspond au moins un W_K^s possédant les propriétés suivantes :

$$l - q + r \leqq s;$$

si t est tel que les $W_H^u(t)$ soient définis, $\forall\, u \geqq l - q$, alors il existe des $x_j \in \mathfrak{W}_j(t)$ tels que x_k^r soit défini et soit un r-plan arbitraire de $W_K^s(t)$.

Preuve pour $r = 0$. — On choisit $W_k^s = \mathfrak{W}_k$; vu (17.3),

$$\dim \mathfrak{W}_k \geqq l - q.$$

Preuve pour $r > 0$. — Supposons le lemme vrai quand on y remplace r par $r - 1 \geqq 0$. Choisissons des notations telles que $k = 0$. Vu (17.5), notons x_0 un sommet de S_0^r tel que

$$\mathfrak{W}[x_0] = \mathfrak{W}[S_0^r];$$

notons S_0^{r-1} la face de S_0^r opposée à x_0. Il existe un W_K^{s-1} ayant les propriétés suivantes :

$$l - q + r \leqq s;$$

les sommets x_j de S_0^{r-1} peuvent être choisis tels que :

$$x_j \in \mathfrak{W}_j(t); \quad x_0^{r-1} \text{ est un } (r-1)\text{-plan arbitraire de } W_K^{s-1}(t).$$

[On suppose t tel que les $W_H^u(t)$ soient définis pour $u \geqq l - q$.] Donc, vu le lemme 18.1 (note) :

$$W_K^{s-1} \subset \mathfrak{W}[S_0^{r-1}];$$

donc, vu (17.4),

$$W_K^{s-1} \subset \mathfrak{W}[S_0^r] = \mathfrak{W}[x_0].$$

Vu le lemme 17, il existe donc un W_L^s tel que

$$W_K^{s-1} \subset W_L^s \subset \mathfrak{W}[x_0].$$

Choisissons x_0 arbitraire dans $W_L^s(t) - x_0^{r-1}$. Alors x_0^r est le r-plan qui contient un $(r-1)$-plan arbitraire de l'hyperplan $W_K^{s-1}(t)$ de $W_L^s(t)$ et un point arbitraire de $W_L^s(t)$, n'appartenant pas à ce $(r-1)$-plan; donc x_0^r est défini et est un r-plan arbitraire de $W_L^s(t)$.

C. Q. F. D.

19. Preuve du théorème 1 quand $m = 0$.

Notons N le nombre des sommets x_j des S_k^q et $\zeta_j \in Z$ leurs coordonnées homogènes; notons ζ'_j des coordonnées homogènes de $\sigma_j^0(t')$; vu le n° 12, si la subdivision simpliciale

$$\gamma^q(t') = \sum_k \sigma_k^q(t')$$

a été choisie assez fine, chacune des fonctions $\int_{S_k^q} \omega(t, \zeta)$ est définie pour $(t, \zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ voisin de $(t', \zeta'_1, \ldots, \zeta'_N)$; notons

$$\Phi(t, \zeta_1, \ldots, \zeta_N) = \sum_k \int_{S_k^q} \omega(t, \zeta);$$

c'est une fonction de $(t, \zeta_1, \ldots, \zeta_N)$, holomorphe près de $(t', \zeta'_1, \ldots, \zeta'_N)$ et homogène de degré 0 en chacune des variables ζ_j.

Rappelons que le n° 1 a défini, pour t voisin de t' :

$$J(t) = \int_{\gamma^q(t)} \omega(t, \zeta).$$

D'après le lemme 18.2 :

Lemme. — Quand $(t, \zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ est voisin de $(t', \zeta'_1, \ldots, \zeta'_N)$ et tel que $x_j \in \mathfrak{W}_j(t)$, $\forall j$, alors

$$J(t) = \Phi(t, \zeta_1, \ldots, \zeta_N).$$

Supposons ω à support singulier algébrique; alors, vu le lemme 16 :

Lemme. — $\Phi(t, \zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ est une fonction de $(t, \zeta_1, \ldots, \zeta_N) \in T \times Z^N$ à support singulier algébrique; ce support $\mathrm{Ss}[\Phi]$ appartient à l'ensemble des $(t, \zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ tels que l'un au moins des (t, x_k^r) ne soit pas défini ou s'appuie sur $\mathrm{Ss}[\omega]$.

Ces deux lemmes vont nous permettre de prouver que J est à support singulier algébrique et de construire ce support.

Notations. — Notons S la sous-variété algébrique de T dont les points sont les t vérifiant l'une au moins des conditions suivantes (définies n° 1) :

1° $t \in \mathrm{Ss}[W]$;

2° $(t, W(t))$ a sur $\mathrm{Ss}[\omega]$ un appui d'ordre $l - q$.

Notons U le revêtement simplement connexe de $T - S$; la projection

$$U \to T$$

uniformise $W(t)$, les $W_K^r(t)$, si $r \geqq l - q$, et les $\mathfrak{W}_j(t)$; autrement dit : leurs composés avec cette projection, $W(u)$, $W_K^r(u)$ et $\mathfrak{W}_j(u)$, sont holomorphes en u.

Notons E l'ensemble des $(u, \zeta_1, \ldots, \zeta_N) \in U \times Z^N$ tels que $x_j \in \mathfrak{W}_j(u)$, $\forall j$. Il est évident que E est un espace fibré analytique, de base U :

$$E \rightarrow U;$$

sa fibre sera notée E_u.

Notons F l'ensemble des $(u, \zeta_1, \ldots, \zeta_N) \in E$ tels que l'un au moins des (t, x_k^r) correspondants ne soit pas défini ou s'appuie sur $\mathrm{Ss}[\omega]$.

Ces notations permettent d'énoncer une conséquence évidente des deux lemmes précédents :

Lemme. — Il existe un point e' de E au voisinage duquel la fonction Φ est définie, holomorphe et constante sur chaque fibre; $\Phi(e) = J(t)$ si e est voisin de e' et si t est la projection canonique de e sur T; Φ se prolonge analytiquement le long de chaque arc de $E - F$, d'origine e', sans point double; ce prolongement analytique est, au voisinage de cet arc, holomorpe et constant sur chaque fibre.

Ce dernier lemme peut évidemment s'énoncer comme suit :

Lemme 19.1. — J est une fonction de u, qui est holomorphe au voisinage de la projection u' de e' et qui se prolonge analytiquement le long de tout arc λ ayant les propriétés suivantes :

(*i*) λ a pour origine u';
(ii) λ n'a pas de point double;
(iii) λ est la projection d'un arc de $E - F$, d'origine e'.

Vu le lemme qui suit, cette dernière condition (iii) est superflue.

Lemme 19.2. — $E_u - F \cap E_u$ est un ensemble connexe non vide.

Preuve que $E_u - F \cap E_u$ n'est pas vide. — Supposons qu'il existe $u \in U$ tel que $E_u \subset F$. D'une part E_u est un sous-espace vectoriel de $U \times Z^N$; d'autre part F est une réunion de sous-variétés algébriques de $U \times Z^N$; l'une d'elles contient donc E_u. Autrement dit, vu la définition de F : l'un au moins des (t, x_k^r) n'est pas défini ou s'appuie sur $\mathrm{Ss}[\omega]$,

$$\forall\, x_1 \in \mathfrak{W}_1(u), \quad \ldots, \quad x_N \in \mathfrak{W}_N(u).$$

Or, vu le lemme 18.3, il existe un W_K^s ayant les propriétés suivantes :

$$l - q + r \leqq s;$$

il existe $x_1 \in \mathfrak{W}_1(u), \ldots, x_N \in \mathfrak{W}_N(u)$ tels que x_k^r soit un r-plan arbitraire de $W_K^s(u)$.

Donc $(t, W_K^s(u))$ a sur $\mathrm{Ss}[\omega]$ un appui d'ordre $s - r \geqq l - q$.

Donc, vu le lemme 4 et la définition (nº 1) de l'appui de $(t, W(t))$:

$$(t, W(t)) \text{ a sur } \mathrm{Ss}[\omega] \text{ un appui d'ordre } l - q.$$

Donc $t \in S$, contrairement à l'hypothèse que t est l'image canonique de $u \in U$ et que U est un revêtement de $T - S$.

Preuve que $E_u - F \cap E_u$ *est connexe.* — E_u est un espace vectoriel complexe et $F \cap E_u$ est une sous-variété algébrique de E_u.

Fin de la preuve du théorème 1 (n° 1), *quand* $m = 0$. — Vu le lemme 19.2, la condition (iii) du lemme 19.1 est superflue. Donc J est une fonction holomorphe sur U, qui est le revêtement simplement connexe de $T - S$. Mais un théorème classique d'Hartogs [1] montre que ce résultat reste vrai quand on y remplace S par la plus grande hypersurface contenue dans S. D'où le théorème 1, dans le cas $m = 0$.

20. **Preuve du théorème 1 quand** $m > 0$.

Le n° 1 a défini le cycle $\gamma^{q-m}(t)$ pour t voisin de t'; soit h sa classe dans l'homologie de $X' \bigcap_j V_j(t)$ relativement à $W(t)$; son cobord composé $\delta^m h$ (*voir* [2], n° 6) est une classe d'homologie de $X' - \bigcup_j V_j(t)$ relativement à $W(t)$; soit $\beta^q(t)$ un cycle de la classe $\delta^m h$; on peut choisir $\beta^q(t)$ fonction continue de t. La définition (3) de $J(t)$ s'écrit vu la formule du résidu composé et la notation différentielle du résidu (*voir* [3], n°s 6 et 7) :

$$J(t) = \frac{p_1! \ldots p_m!}{(2\pi i)^m} \int_{\beta^q(t)} \frac{\omega(t, \zeta)}{[v_1(t, \zeta)]^{1+p_1} \ldots [v_m(t, \zeta)]^{1+p_m}}.$$

Le n° 19 a prouvé le théorème 1 quand $m = 0$. D'où, vu la formule précédente :

$J(t)$ est à support singulier algébrique;

Ss $[J]$ est une hypersurface algébrique de T contenue dans la réunion de Ss $[W]$ et de l'ensemble des t tels que $(t, W(t))$ ait sur $\mathrm{Ss}[\omega] \bigcup_j V_j$ un appui d'ordre $l - q$.

C'est ce qu'affirme le théorème 1.

Chapitre IV.

L'appui régulier est un appui.

Ce chapitre IV prouve la proposition 2 (n° 5); il étudie d'abord (n° 22) l'appui très régulier de (t, X); puis il déduit des résultats ainsi obtenus des propriétés de l'appui régulier.

Les notations et définitions sont celles que le n° 5 a énoncées; l'hypothèse (5.1) est faite, sauf dans la preuve de la proposition 2.

21. Propriétés des l-plans (t, X) qui s'appuient semi-régulièrement sur V.

LEMME 21.1. — Les t tels que (t, X) ne s'appuie pas semi-régulièrement sur V sont partout denses dans T.

Preuve. — Soient

$$T_0 = T \supset T_1 \supset T_2 \supset \ldots \supset T_{\dim T} = t$$

des sous-espaces linéaires de T, de codimensions respectives $0, 1, \ldots, \dim T$ et tels que

$$(21.1) \qquad \begin{cases} T_1 \times X \text{ n'est pas tangent à } V; \\ T_2 \times X \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad V \cap (T_1 \times X); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En tout point de $V \cap (T_i \times X)$, régulier sur V, les plans tangents à V et à $T_i \times X$, de dimensions égales à celles de ces variétés ont une intersection de dimension $r + \dim T - i$: ces plans tangents sont donc en position générale; par suite (t, X) ne s'appuie pas régulièrement sur V. Or les T_i vérifiant (21.1) sont évidemment partout denses dans l'espace de tous les sous-espaces de T de codimension i.

LEMME 21.2. — Soit (t', x') un point régulier de V où (t', X) ne s'appuie pas semi-régulièrement sur V. Alors X possède des coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_l)$ d'origine x' telles que les équations locales de V au voisinage de (t', x') puissent s'écrire :

$$(21.2) \qquad V: \quad y_k + f_k(t, y_1, \ldots, y_r) = 0,$$

où $k \in \{r+1, \ldots, l\}$, $f_k(\ldots)$ est holomorphe,

$$f_k(t', y_1, \ldots, y_k) \equiv 0 \qquad (\bmod y^2).$$

Donc x' est point régulier de $V(t')$.

Preuve. — Le théorème d'existence des fonctions implicites.

22. Propriétés des l-plans (t, X) qui s'appuient très régulièrement sur V.

Équation tangentielle de $V(t)$. — Notons

$$(22.1) \qquad P(t, \xi) = 0$$

une équation polynomiale en (t, ξ), homogène en ξ, vérifiée, quand t est régulier, par les coordonnées homogènes ξ de tout hyperplan de X tangent à $V(t)$.

Note. — « tangent » signifie : « tangent en un point régulier ».

Note. — Si $r = 0$, alors $V(t)$ est un ensemble fini de points et un hyperplan est dit tangent à $V(t)$ quand il contient l'un de ces points,

Énonçons dès maintenant le résultat qu'établit le nº 22 :

LEMME 22. — Supposons que (t', X) s'appuie très régulièrement sur V. Alors :

1º $V(t)$ n'est pas développable, quand t est régulier; c'est-à-dire $s = l - 1$;

2º on a

$$\mathrm{discr}_T P(t', \hat{\xi}) = 0.$$

Note 22. — Ce lemme reste vrai quand on remplace l'hypothèse :

(t', x') est point régulier de V

(*voir* : définition de l'appui très régulier, nº 5) par l'hypothèse suivante :

il existe des t voisins de t' tels que $V(t)$ n'ait pas de point singulier voisin de x'.

Le lemme 22 ainsi modifié permet d'obtenir les variantes à la proposition 1 (nº 4) que la Note 4 signale.

Exemple (quadriques). — Soit $P(t, \xi) = 0$ l'équation tangentielle d'une quadrique $V(t)$, qui dépend d'un paramètre t et n'a pas de point singulier pour t générique. Cette équation, si elle est réduite sur T relativement à ξ, est homogène de degré 2 en ξ; on sait que, pour une valeur t' de t, telle que $V(t')$ soit un cône de sommet x', cette équation se trouve identiquement vérifiée ou équivaut à celle de x' :

$$\xi . \zeta' = 0 \qquad (\zeta' \text{: coordonnées homogènes de } x').$$

Elle n'est donc pas réduite sur t' relativement à ξ.

Notations. — V est défini par (5.3); posons

$$(22.2) \qquad \frac{\partial F}{\partial y_j}(t, y_1, \ldots, y_{r+1}) = s u_j, \qquad \text{où} \quad j \in \{1, \ldots, r+1\};$$

$s, u_1, \ldots, u_{r+1}$ sont des variables numériques telles que

$$(u_1, \ldots, u_{r+1}) \neq 0.$$

Vu (5.4), pour $u_1, \ldots, u_{r+1}$ donnés et $(s, t - t')$ suffisamment petit, le système (22.2) d'inconnues $y_1, \ldots, y_{r+1}$ a une solution unique voisine de 0 :

$$y_1(s, t, u), \quad \ldots, \quad y_{r+1}(s, t, u);$$

elle est holomorphe. Notons

$$(22.3)\qquad \begin{cases} y_h(s,t,u)=F_h(t,y_1(s,t,u),\ldots,y_{r+1}(s,t,u)), \\ \qquad\qquad \text{où}\quad h\in\{r+2,\ldots,l\}; \end{cases}$$

$x(s,t,u)$: le point de coordonnées $y_1(s,t,u),\ldots,y_{r+1}(s,t,u)$;

$$(22.4)\qquad f(s,t,u)=F(t,y_1(s,t,u),\ldots,y_{r+1}(s,t,u));$$

$$f_{hj}(s,t,u)=\frac{\partial F_h}{\partial y_j}(t,y_1(s,t,u),\ldots,y_{r+1}(s,t,u)).$$

Évidemment : $y_j(0,t,u)$, $x(0,t,u)$ et $f(0,t,u)$ sont indépendants de u; nous les noterons $y_j(t)$, $x(t)$ et $f(t)$.

L'équation $f(s,t,u)=0$ exprime que $x(s,t,u)\in V(t)$.

Supposons cette équation vérifiée :

— si $s=0$, alors $x(s,t,u)=x(t)$ et (t,X) s'appuie très régulièrement sur V en $(t,x(t))$, car en ce point

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}=0 \quad\text{et les}\ \frac{\partial F_h}{\partial y_j}\ \text{sont petits;}$$

— si $s\neq 0$, alors $x(s,t,u)$ est un point régulier de $V(t)$; les hyperplans de X tangents à $V(t)$ en ce point $x(s,t,u)$ ont les coordonnées homogènes

$$(22.5)\quad \xi=\Big(-\sum_i u_iy_i+\sum_{hi}f_{hi}v_hy_i-\sum_h v_hy_h,\ u_j-\sum_h f_{hj}v_h,\ v_k\Big),$$

$$\text{où}\quad i,j\in\{1,\ldots,r+1\},\ h,k\in\{r+2,\ldots,l\},$$

v est un paramètre dont dépendent ces hyperplans.

Notons

$$(22.6)\qquad p(s,t,u,v)=P(t,\xi),\qquad \text{où } \xi \text{ a l'expression (22.5).}$$

Vu la définition de P :

(22.7) l'équation $f(s,t,u)=0$ implique $p(s,t,u,v)=0$, $\forall v$.

Le lemme 22 résultera des suivants, où sont faites les hypothèses du lemme 22 :

LEMME. — L'ensemble des hyperplans tangents à $V(t)$ au voisinage de x' a la dimension complexe $l-1$. (Ce lemme prouve le lemme 22, 1°.)

Preuve. — L'ensemble de leurs coordonnées homogènes ξ a la dimension l, car ξ est défini par (22.5), où $u_1,\ldots,u_{r+1},v_{r+2},\ldots,v_l$ sont arbitraires et où s est défini par l'équation $f(s,t,u)=0$.

LEMME. — L'ensemble des t tels que $V(t)$ ait un point singulier voisin de x' est une hypersurface S de T; $t' \in S$; si $t \in S$ et si x est ce point singulier, alors (t, X) s'appuie très régulièrement sur V en (t, x).

Preuve. — Nous savons ceci : au voisinage de x', le seul point singulier que $V(t)$ puisse avoir est $x(t)$; si $x(t)$ est point singulier de $V(t)$, alors (t, X) s'appuie très régulièrement sur V en $(t, x(t))$; pour que $x(t)$ soit point singulier de $V(t)$, il faut et suffit que $f(t) = 0$. Pour prouver le lemme, il suffit donc de prouver l'absurdité de l'hypothèse

$$f(t) = 0, \qquad \forall t.$$

Or cette hypothèse signifie qu'il existerait des fonctions holomorphes $y_1(t), \ldots, y_{r+1}(t)$ telles que

$$F(t, y_1(t), \ldots, y_{r+1}(t)) = \frac{\partial F}{\partial y_j}(t, y_1(t), \ldots, y_{r+1}(t)) = 0, \qquad \forall t;$$

on aurait donc

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y_1(t), \ldots, y_{r+1}(t)) = 0, \qquad \forall t,$$

contrairement à la définition de l'appui très régulier (n° 5).

LEMME. — $y_j(s, t, u)$ a les propriétés suivantes :

(22.8) $y_j(0, t', u) = 0, \qquad \forall u;$

$\frac{\partial y_j}{\partial s}(0, t', u)$ est une forme linéaire en u;

$$Q(u) = \sum_j u_j \frac{\partial y_j}{\partial s}(0, t', u)$$
$$= \sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y_i \partial y_j}(t', 0, \ldots, 0) \frac{\partial y_i}{\partial s}(0, t', u) \frac{\partial y_j}{\partial s}(0, t', u)$$

est une forme quadratique en u, non dégénérée (c'est-à-dire de rang $r + 1$);

bien entendu : $i, j \in \{1, \ldots, r+1\}$.

Preuve. — (22.8) résulte de

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(t', 0, \ldots, 0) = 0.$$

La dérivation de (22.2) par rapport à s donne, pour $t = t'$, $s = 0$, vu (22.8) :

$$\sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(t', 0, \ldots, 0) \frac{\partial y_i}{\partial s}(0, t', u) = u_j;$$

d'où le lemme, puisque $\mathrm{Hess}_y\, F \neq 0$ vu (5.4).

LEMME. — $f(s, t, u)$ a les propriétés suivantes :

$$f(0, t', u) = 0, \quad \forall u; \qquad \frac{\partial f}{\partial s}(0, t, u) = 0, \quad \forall t, u;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(0, t', u) = Q(u), \quad \forall u.$$

Si u est donné, tel que $Q(u) \neq 0$, alors l'équation d'inconnue s :

$$(22.9) \qquad f(s, t, u) = 0$$

a deux racines voisines de o, $\forall t$; elle ne sont pas égales $\forall t$.

Preuve. — f est défini par (22.4). D'où

$$f(0, t', u) = 0, \qquad \forall u,$$

vu (22.8) et l'équation $F(t', 0, \ldots, 0) = 0$, qui résulte de (5.4). En dérivant (22.4) par rapport à s, et en employant la définition (22.2) des $y_j(s, t, u)$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, t, u) = s \sum u_j \frac{\partial y_j}{\partial s}(s, t, u);$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0, t, u) = 0, \qquad \forall t, u$$

et, vu la définition de $Q(u)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(0, t', u) = Q(u), \qquad \forall u.$$

Supposons $Q(u) \neq 0$; puisque t est voisin de t', l'équation (22.9), d'inconnue s, a donc deux racines voisines de o. Pour qu'elles soient égales, il faut et suffit qu'elles soient égales à la racine unique de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, t, u) = 0,$$

qui est $s = 0$; il faut et il suffit donc que

$$f(t) = 0.$$

Or l'avant-dernier lemme a prouvé qu'on n'a pas

$$f(t) = 0, \quad \forall t.$$

LEMME. — $p(s, t, u, v)$ a les propriétés suivantes :

$$(22.10) \qquad p(0, t', u, v) = \frac{\partial p}{\partial s}(0, t', u, v) = 0, \qquad \forall u, v.$$

Preuve. — (22.7) et le lemme précédent montrent que, pour $Q(u) \neq 0$, l'équation d'inconnue s,

$$p(s, t, u, v) = 0$$

a au moins deux racines voisines de 0, qui ne sont pas égales $\forall t$; elles s'annulent pour $t = t'$. On a donc (22.10).

LEMME. — L'équation $P(t', \xi) = 0$ n'est pas réduite relativement à ξ.

Preuve. — Les relations (22.8), (5.4) et les définitions de $y_h(s, t, u)$ et $f_{hj}(s, t, u)$ impliquent les relations

$$(22.11) \qquad y_j(0, t', u) = 0, \qquad y_h(0, t', u) = 0, \qquad f_{hj}(0, t', u) = 0, \quad \forall u,$$

où $j \in \{1, \ldots, r+1\}$, $h \in \{r+2, \ldots, l\}$.

Vu la définition (22.6) de p, $(22.10)_1$ s'écrit donc

$$P(t', \xi) = 0 \qquad \text{pour} \quad \xi = (0, u_1, \ldots, u_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_l), \qquad \forall u, v.$$

Notons $w_0, \ldots, w_l$ les composantes de ξ, c'est-à-dire

$$\xi = (w_0, w_1 \ldots, w_l) \qquad \text{où} \quad w_0, \ldots, w_l \in \mathbf{C};$$

$(22.10)_1$ s'énonce donc

$$(22.12) \qquad P(t', 0, w_1, \ldots, w_l) = 0, \qquad \forall w_1, \ldots, w_l.$$

D'où

$$\frac{\partial P}{\partial w_1}(t', 0, w_1, \ldots, w_l) = \ldots = \frac{\partial P}{\partial w_l}(t', 0, w_1, \ldots, w_l) = 0, \qquad \forall w_1, \ldots, w_l;$$

par suite $(22.10)_2$ s'écrit, vu (22.11) et la définition (22.6) de p :

$$\left[\sum_i u_i \frac{\partial y_i}{\partial s}(0, t', u) + \sum_h v_h \frac{\partial y_h}{\partial s}(0, t', u)\right] \frac{\partial P}{\partial w_0}(t', 0, w_1, \ldots, w_l) = 0,$$

$\forall u_1, \ldots, v_l$; or, par définition,

$$\sum_i u_i \frac{\partial y_i}{\partial s}(0, t', u) = Q(u);$$

d'autre part la définition (22.3) de $y_h(s, t, u)$, la relation $y_j(0, t', u) = 0$, et (5.4) montrent que

$$\frac{\partial y_h}{\partial s}(0, t', u) = 0, \qquad \forall u, \forall h \in \{r+2, \ldots, l\};$$

$(22.10)_2$ s'énonce donc

$$Q(u) \frac{\partial P}{\partial w_0}(t', 0, w_1, \ldots, w_l) = 0, \qquad \forall u, w_1, \ldots, w_l;$$

c'est-à-dire, puisque la forme $Q(u)$ est non dégénérée, donc non nulle :

$$(22.13) \qquad \frac{\partial P}{\partial w_0}(t', 0, w_1, \ldots, w_l) = 0, \qquad \forall w_1, \ldots, w_l.$$

Les relations (22.12) et (22.13) prouvent que le polynôme $P(t', w_0, w_1, ..., w_l)$ a le facteur double $(w_0)^2$: d'où le lemme.

LEMME. — $\operatorname{discr}_T P(t, \hat{\xi}) = 0$, $\forall\, t \in S$. (Ce lemme prouve le lemme 22, 2° puisque $t' \in S$.)

Preuve. — Dans le lemme précédent, t' peut être remplacé par un point quelconque de l'hypersurface S; l'équation $P(t, \xi) = 0$ n'est donc pas réduite sur $t \in S$ relativement à ξ. D'où le lemme, dans le cas où l'équation $P(t, \xi) = 0$ est réduite sur T relativement à ξ. Le cas général se ramène à ce cas particulier, en remplaçant cette équation par une équation réduite équivalente.

23. Premières propriétés de l'appui régulier.

La définition de l'appui régulier (n° 5) peut évidemment s'énoncer comme suit :

LEMME 23.1. — Le q-plan (t, x^q) s'appuie régulièrement sur V au point (t, x) quand et seulement quand il satisfait aux trois conditions suivantes :

1° $l - r - 1 \leqq q \leqq s$;

2° t est régulier; $x \in x^q$; (t, x) est point régulier de V;

3° si (t, X) ne s'appuie pas semi-régulièrement sur V en (t, x), alors [12] il existe un hyperplan x^{l-1} de X, tangent à $V(t)$ en x, tel que

$$x \in x^q \subset x^{l-1}.$$

Note. — Si $l - r - 1 = q$, la condition 3° est évidemment vérifiée. Si $l - r \leqq q$, cette condition 3° peut s'énoncer comme suit, en notant $x^r(x)$ le r-plan tangent à $V(t)$ en x :

x^q et $x^r(x)$ ne sont pas en position générale [13] dans X.

Voici un lemme évident, analogue au lemme 21.2 :

LEMME 23.2. — Supposons $l - r \leqq q$; soit $x \in x^q$; si (t, x) est un point régulier de V, en lequel (t, x^q) ne s'appuie pas régulièrement sur V,

---

[12] x est un point régulier de $V(t)$, vu le lemme 21.2.

[13] C'est-à-dire $x^q \cup x^r(x)$ appartient à un hyperplan de X; ou encore $\dim x^q \cap x^r(x) > q + r - l$.

alors x est point régulier de la variété $x^q \cap V(t)$, qui a en ce point la dimension $q + r - l$.

Voici, enfin, un lemme qui définit l'appui régulier par la notion d'hyperplan tangent, grâce à une récurrence sur q; les nos 25 et 26 l'emploieront.

LEMME 23.3. — Donnons-nous t régulier.

1° *Les* $(l - r - 1)$-*plans* (t, x^{l-r-1}) qui s'appuient régulièrement sur V sont ceux qui contiennent un point régulier de V; ils s'appuient donc sur V.

2° *Supposons* $l - r \leqq q < s$; soient x^q et x^{q+1} tels que $x^q \subset x^{q+1}$; pour que le q-plan (t, x^q) s'appuie régulièrement sur V, il faut et suffit qu'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

(i) x^q est tangent à $x^{q+1} \cap V(t)$;

(ii) (t, x^q) contient un point où (t, x^{q+1}) s'appuie régulièrement sur V.

3° *Supposons* $s = l - 1$, c'est-à-dire V *non développable*; *les* $(l - 1)$-*plans* (t, x^{l-1}) qui s'appuient régulièrement sur V sont ceux qui vérifient l'une des deux conditions suivantes :

(i) x^{l-1} est tangent à $V(t)$;

(ii) (t, x^{l-1}) contient un point où (t, X) s'appuie semi-régulièrement sur V.

Preuve de 1°. — La définition de l'appui régulier (n° 5).

Preuve de 3°. — Le lemme 23.1, où l'on prend $q = l - 1$.

Preuve de 2°. — Soient t régulier et $x \in x^q \subset x^{q+1}$, où $l - r \leqq q < s$; supposons (t, x) point régulier de V. Notons $x^r(x)$ le r-plan tangent à $V(t)$ en x, quand x est point régulier de $V(t)$. Nous allons employer les propriétés suivantes :

(l) : (t, X) s'appuie semi-régulièrement sur V en (t, x);

(q) : (t, x^q) s'appuie régulièrement sur V en (t, x);

$(q + 1)$: (t, x^{q+1}) s'appuie régulièrement sur V en (t, x).

Leurs négations seront notées $(\bar{l})$, $(\bar{q})$ et $(\overline{q + 1})$.

Nous allons distinguer trois cas.

Premier cas : on a $(\bar{l})$ et $(\overline{q + 1})$. Alors, vu le lemme 21.2 et la note ([13]) qui complète le lemme 23.1 :

x est point régulier de $V(t)$; $\dim x^{q+1} \cap x^r(x) = q + r - l + 1$;

(q) équivaut à $\dim x^q \cap x^r(x) > q + r - l$.

Donc (q) peut s'écrire :

$$\dim x^q \cap x^r(x) \geqq \dim x^{q+1} \cap x^r(x)$$

ou

$$x^q \cap x^r(x) \supseteq x^{q+1} \cap x^r(x)$$

ou

$$x^q \supseteq x^{q+1} \cap x^r(x)$$

ou enfin :

(23.1) $\qquad x^q$ est tangent en x à $x^{q+1} \cap V(t)$.

Second cas : on a $(\bar{l})$ et $(q+1)$. Alors, vu les lemmes 21.2 et la note [13] qui complète le lemme 23.1 :

x est point régulier de $V(t)$;

il existe un hyperplan x^{l-1} de X tel que

$$x^{q+1} \cup x^r(x) \subset x^{l-1}.$$

Donc

$$x^q \cup x^r(x) \subset x^{l-1};$$

d'où (q).

Troisième cas : on a (l); alors, vu le lemme 23.1 on a (q) et $(q+1)$.

L'examen de ces trois cas prouve ceci : pour que (q) soit satisfaite, il faut et suffit que $(q+1)$ ou (23.1) le soit. D'où le 2° du lemme.

24. **L'appui très régulier de (t, x^l) sur V.**

Nous allons définir cet appui très régulier, qui permettra au n° 25 d'appliquer le lemme 22 à l'étude de l'appui régulier.

Notations. — Soit t' régulier; soit (t', x') un point régulier de V, où (t', X) ne s'appuie pas semi-régulièrement sur X; d'après le lemme 21.2, X possède des coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_l)$ telles que les équations de V puissent s'écrire :

(24.1) $$V: \quad y_k + f_k(t, y_1, \ldots, y_r) = 0,$$

où $k \in \{r+1, \ldots, l\}$, $f_k(\ldots)$ est holomorphe.

Soit $(t, x) \in V$ et voisin de (t', x'); soient

$$\xi = (w_0, w_1, \ldots, w_l)$$

les coordonnées homogènes des hyperplans x^{l-1} de X tangents en x à $V(t)$; on a

(24.2) $$w_j = \sum_k w_k \frac{\partial f_k}{\partial y_j}(t, y_1, \ldots, y_r), \qquad w_0 = -w_1 y_1 - \ldots - w_l y_l,$$

$$\text{où } j \in \{1, \ldots, r\}, \qquad k \in \{r+1, \ldots, l\};$$

la distance à x^{l-1} d'un point de $V(t)$ infiniment voisin de x est proportionnelle à la forme quadratique des différentielles dy_i des y_i :

$$\sum_{ijk} w_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_j}(t, y_1, \ldots, y_r)\, dy_i dy_j, \tag{24.3}$$

$$\text{où} \quad i, j \in \{1, \ldots, r\}, \qquad k \in \{r+1, \ldots, l\};$$

le rang de cette forme est donc indépendant du choix des coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_r)$.

Lemme. — La forme (24.3) est de rang $r + s - l + 1$ sur un sous-ensemble partout dense de l'ensemble des couples (x, x^{l-1}) tels que x^{l-1} soit tangent en x à $V(t)$.

Preuve. — Vu la définition de s (n° 5), quand t est fixe et que $(y_1, \ldots, y_r, w_{r+1}, \ldots, w_l)$ varie, alors $(w_0, \ldots, w_l)$ décrit une variété de dimension $s + 1$; il existe donc *un sous-ensemble partout dense* de l'ensemble des valeurs de $(y_1, \ldots, y_r, w_{r+1}, \ldots, w_l)$ où la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w_0}{\partial y_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial w_0}{\partial y_r}, & \dfrac{\partial w_0}{\partial w_{r+1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial w_0}{\partial w_l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial w_l}{\partial y_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial w_l}{\partial y_r}, & \dfrac{\partial w_l}{\partial w_{r+1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial w_l}{\partial w_l} \end{pmatrix}$$

est de rang $s + 1$; mais (24.1) et (24.2) donnent

$$dw_0 + y_1 dw_1 + \ldots + y_l dw_l \equiv 0 \qquad (\text{mod } dt).$$

Sur ce sous-ensemble la matrice carrée

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w_1}{\partial y_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial w_1}{\partial y_r}, & \dfrac{\partial w_1}{\partial w_{r+1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial w_1}{\partial w_l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial w_l}{\partial y_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial w_l}{\partial y_r}, & \dfrac{\partial w_l}{\partial w_{r+1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial w_l}{\partial w_l} \end{pmatrix}$$

est donc de rang $s + 1$; or

$$\frac{\partial w_h}{\partial y_j} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial w_h}{\partial w_k}\right) \text{ est la matrice unité, si } h, k \in \{r+1, \ldots, l\}.$$

Sur ce sous-ensemble, la matrice carrée

$$\left(\frac{\partial w_i}{\partial y_j}\right), \qquad \text{où} \quad i, j \in \{1, \ldots, r, \},$$

est donc de rang $r+s-l+1$. Or vu (24.2), cette matrice est la matrice

$$\left(\sum_k w_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_j}(t', y_1, \ldots, y_r)\right), \tag{24.4}$$

où $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. Cette matrice (24.4) est donc de rang $r+s-l+1$ sur un ensemble partout dense de valeurs de $(y_1, \ldots, y_r, w_{r+1}, \ldots, w_l) \in \mathbf{C}^l$. D'où le lemme.

Définition. — Un q-plan (t, x^q) *s'appuie très régulièrement sur* V en un point (t, x) quand il s'appuie régulièrement sur V en ce point et que les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

1° $l-r \leq q \leq s$;

2° (t, X) ne s'appuie pas semi-régulièrement sur V en (t, x); donc, vu le lemme 21.2, $V(t)$ a en x un r-plan tangent :

$$x^r(x): \quad y_{r+1} = \ldots = y_l = 0;$$

3° $x^q \cup x^r(x)$ appartient à un hyperplan de X et à un seul, dont les coordonnées homogènes sont notées $(w_0, \ldots, w_l)$;

4° la restriction de la forme quadratique (24.3) au $(q+r-l+1)$-plan tangent en x à $x^q \cap x^r(x)$ est une forme quadratique non dégénérée (c'est-à-dire : de rang $q+r-l+1$).

Voici les propriétés de l'appui très régulier :

LEMME 24.1. — *L'ensemble des q-plans (t, x^q) s'appuyant très régulièrement sur V est un sous-ensemble partout dense de l'ensemble des q-plans (t, x^q) s'appuyant régulièrement sur V.*

Preuve. — Soit un q-plan (t, x^q) s'appuyant régulièrement sur V en (t, x); vu le lemme 21.1 et la définition de l'appui régulier, on peut modifier arbitrairement peu (t, x^q, x) de façon que

(24.5) $\quad (t, X)$ ne s'appuie pas semi-régulièrement sur V,

mais que (t, x^q) continue à s'appuyer régulièrement sur V en (t, x). Par suite, vu les lemmes 21.2 et 23.1, x est un point régulier de $V(t)$, où $V(t)$ possède un r-plan tangent $x^r(x)$, et il existe un hyperplan x^{l-1} de X tel que

$$x^q \cup x^r(x) \subset x^{l-1};$$

notons $(w_0, \ldots, w_l)$ les coordonnées homogènes de x^{l-1}. Vu le lemme précédent, en modifiant arbitrairement peu x et x^{l-1}, puis x^q, nous pouvons satisfaire aux conditions suivantes :

(24.6) $\quad x^{l-1}$ est tangent à $V(t)$ au point régulier x;

la forme quadratique (24.3) est de rang $r+s-l+1$;

$$x \in x^q \subset x^{l-1}.$$

Par suite

$$\dim x^q \cap x^r(x) \geqq q+r-l+1.$$

On peut donc trouver un $(q+r-l+1)$-plan $x^{q+r-l+1}$ arbitrairement voisin de $x^q \cap x^r(x)$, tel que

$$x \in x^{q+r-l+1} \subset x^{l-1},$$

$$(24.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{la restriction de la forme quadratique (24.3) au } (q+r-l+1)\text{-} \\ \text{plan tangent à } x^{q+r-l+1} \text{ est de rang } q+r-l+1. \end{array} \right.$$

On peut enfin modifier arbitrairement peu x^q de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

$$x \in x^{q+r-l+1} = x^q \cap x^r(x); \qquad x^q \subset x^{l-1}.$$

Évidemment (t, x^q) continue à s'appuyer régulièrement sur V en (t, x) et

(24.8) $\quad x^{l-1}$ est le seul $(l-1)$-plan contenant $x^q \subset x^r(x)$.

Donc l'appui de (t, x^q) sur V est très régulier.

C. Q. F. D.

Lemme 24.2. — Si le q-plan (t', x'^q) s'appuie très régulièrement sur V en (t', x') [au sens de la définition du n° 24], alors [au sens de la définition du n° 5] $(t', \xi'_1, \ldots, \xi'_{l-q}, X)$ s'appuie très régulièrement sur la variété de $T \times \Xi^{l-q} \times X$ dont les points sont les $(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q}, x)$ tels que

$$(t, x) \in V, \qquad x \in x^q;$$

x^q désigne le q-plan de coordonnées grassmanniennes $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} = \xi^{l-q}$.

Preuve. — Notons x'^r le r-plan tangent à $V(t')$ en x' et x'^{l-1} l'hyperplan unique de X tel que

$$x'^q \cup x'^r \subset x'^{l-1}.$$

Choisissons des coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_l)$ de X, d'origine x', ayant les propriétés suivantes :

V a pour équations (24.1);

$$f_k(t', y_1, \ldots, y_r) \equiv 0 \qquad (\bmod y^2);$$

x'^r, x'^{l-1} et x'^q ont pour équations respectives :

$$\begin{aligned} x'^r &: \quad y_{r+1} = \ldots = y_l = 0; \\ x'^{l-1} &: \quad y_{r+1} = 0; \\ x'^q &: \quad y_{q+r-l+2} = \ldots = y_{r+1} = 0. \end{aligned}$$

La restriction de la forme (24.3) au $(q+r-l+1)$-plan tangent en x' à $x'^q \cap x'^r$ est donc la forme

$$\sum_{ij} \frac{\partial^2 f_{r+1}}{\partial y_i \partial y_j}(t', 0, \ldots, 0)\, dy_i dy_j,$$

où $i, j \in \{1, \ldots, q+r-l+1\}$; par hypothèse cette dernière forme n'est pas dégénérée, c'est-à-dire

$$\text{Hess}_y f_{r+1}(t', y_1, \ldots, y_{q+r-l+1}, 0, \ldots, 0) \neq 0. \tag{24.9}$$

Nous allons supposer (t, x, x^q) voisin de (t', x', x'^q). Les équations de x^q sont

$$y_j + L_j(\xi^{l-q}, y_1, \ldots, y_l) = 0, \qquad \text{où } j \in \{q+r-l+2, \ldots, r+1\};$$

L_j est linéaire en $y_1, \ldots, y_l$, holomorphe en $\xi_1, \ldots, \xi_{l-q}$ nul pour $(\xi_1, \ldots, \xi_{l-q}) = (\xi'_1, \ldots, \xi'_{l-q})$; $\dfrac{\partial L_j}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_{l-q})} \neq 0$. Les équations de $(t, x^q) \cap V$ sont donc :

$$\text{(24.10)} \quad \begin{cases} y_j + L_j(\xi^{l-q}, y_1, \ldots, y_l) = 0, & \text{où } j \in \{q+r-l+2, \ldots, r+1\}; \\ y_k + f_k(t, y_1, \ldots, y_r) = 0, & \text{où } k \in \{r+2, \ldots, l\}; \\ f_{r+1}(t, y_1, \ldots, y_r) + L_{r+1}(\xi^{l-q}, y_1, \ldots, y_l) = 0 \end{cases}$$

Puisque

$$L_j(\xi'^{l-q}, y_1, \ldots, y_l) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_k(t', y_1, \ldots, y_r) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, y^2),$$

nous pouvons résoudre le système $(24.10)_1$, $(24.10)_2$ par rapport à $y_{q+r-l+2}, \ldots, y_l$; nous obtenons

$$y_h = F_h(t, \xi^{l-q}, y_1, \ldots, y_{q+r-l+1}),$$

où

$$h \in \{q+r-l+2, \ldots, l\},$$

$$F_h(t', \xi'^{l-q}, y_1, \ldots, y_{q+r-l+1}) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, y^2).$$

En substituant F_h à y_h dans

$$f_{r+1}(t, y_1, \ldots, y_r) + L_{r+1}(\xi^{l-q}, y_1, \ldots, y_l)$$

nous définissons une fonction

$$F(t, \xi^{l-q}, y_1, \ldots, y_{q+r-l+1});$$

puisque

$$L_{r+1}(\xi'^{l-q}, y_1, \ldots, y_l) = 0, \qquad \frac{\partial L_{r+1}}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_{l-q})} \neq 0,$$

$$f_{r+1}(t', y_1, \ldots, y_r) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, y^2),$$

cette fonction F a les propriétés suivantes :

$$F(t', \xi'^{l-q}, y_1, \ldots, y_{q+r-l+1}) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, y^2); \quad \frac{\partial F}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_{l-q})} \neq 0;$$

$$\mathrm{Hess}_y F(t', \xi'^{l-q}, y_1, \ldots, y_{q+r-l+1})$$
$$= \mathrm{Hess}_y f_{r+1}(t', \xi'^{l-q}, y_1, \ldots, y_{q+r-l+1}, 0, \ldots, 0) \neq 0.$$

Les équations de $(t, x^q) \cap V$ peuvent donc s'écrire :

$$\begin{cases} F(t, \xi^{l-q}, y_1, \ldots, y_{q+r-l+1}) = 0, \\ y_h = F_h(t, \xi^{l-q}, y_1, \ldots, y_{q+r-l+1}), \\ \forall h \in \{q+r-l+2, \ldots, l\}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} F(t', \xi'^{l-q}, y_1, \ldots, y_{q+r-l+1}) \equiv F_h(\ldots) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, y^2), \\ \dfrac{\partial F}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_{l-q})} \neq 0, \ \mathrm{Hess}_y F \neq 0. \end{cases}$$

Le lemme résulte de la comparaison de ces relations avec les relations (5.3), (5.4), qui définissent l'appui très régulier de (t', X).

25. Preuve que les appuis régulier et très régulier sont des appuis.

Lemme. — Supposons :

t régulier; $\quad l - r \leqq q \leqq s; \quad x^{q-1} \subset x^q; \quad x^{q-1}$ tangent à $x^q \cap V(t)$.

Alors (t, x^{q-1}) s'appuie régulièrement sur V.

Preuve si $l - r + 1 \leqq q$: le lemme 23.3, 2°.

Preuve si $l - r = q$: le lemme 23.3, 1°, car dans ce cas l'hypothèse « x^{q-1} est tangent à $x^q \cap V(t)$ » signifie « x^{q-1} contient un point de $x^q \cap V(t)$ ».

Lemme. — Supposons

(25.1) $$l - r \leqq q \leqq s;$$

(25.2) $$P(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi) = 0,$$
$\forall (t, x^{q-1})$ s'appuyant régulièrement sur V.

Alors

(25.3) $$\mathrm{discr}_{T \times \Xi^{l-q}} P(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \hat{\xi}) = 0,$$
$\forall (t, x^q)$ s'appuyant régulièrement sur V.

Notations. — $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q}$ et $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi$ sont les coordonnées grassmanniennes respectives de x^q et x^{q-1}.

Preuve. — Vu le lemme précédent, (25.2) est vérifié quand l'hyperplan de X, ayant pour coordonnées homogènes ξ, est tangent à $x^q \cap V(t)$. Vu le lemme 24.2, le lemme 22 prouve donc ceci : si (t', x'^q) s'appuie très régulièrement sur V, alors (t', x'^q) vérifie (25.3). Or, vu le lemme 24.1 les (t', x'^q) s'appuyant très régulièrement sur V sont partout denses dans l'ensemble des (t, x^q) s'appuyant régulièrement sur V; cet ensemble vérifie donc (25.3).

LEMME 25.1. — Les q-plans (t, x^q) s'appuyant régulièrement sur V s'appuient sur V.

Preuve pour $q = l - r - 1$. — Le lemme 23.3, 1°.

Preuve pour $l - r \leqq q \leqq s$. — Supposons prouvé que les $(q-1)$-plans s'appuyant régulièrement sur V vérifient l'équation $(4.1)_{q-1}$, qui définit l'appui

$$P^{q-1}(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi) = 0.$$

Alors les q-plans s'appuyant régulièrement sur V vérifient l'équation $(4.1)_q$,

$$P^q(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q}) = 0,$$

vu sa définition (n° 4) et le lemme précédent.

Prouvons que l'appui très régulier est lui aussi un appui.

LEMME. — Supposons $V(t)$ non développable quand t est régulier; c'est-à-dire $s = l - 1$. Soient : t régulier, x^{l-1} tangent à $V(t)$. Alors (t, x^{l-1}) s'appuie sur V, c'est-à-dire vérifie l'équation

$$(4)_{l-1}: \quad P^{l-1}(t, \xi) = 0;$$

ξ désigne les coordonnées homogènes de x^{l-1}.

Preuve. — Vu le lemme 23.3, 3°, (t, x^{l-1}) s'appuie régulièrement sur V; vu le lemme précédent, (t, x^{l-1}) s'appuie donc sur V.

LEMME 25.2. — Les l-plans (t, X) s'appuyant très régulièrement sur V s'appuient sur V.

Preuve. — Vu le lemme 22, 1°, $V(t)$ n'est pas développable, $\forall t$ régulier. Vu le lemme précédent, on peut donc choisir $P = P^{l-1}$ dans le lemme 22, 2°, qui donne :

$$P^l(t) = 0, \qquad \forall (t, X) \text{ s'appuyant très régulièrement sur } V.$$

Note. — Depuis le début de ce chapitre IV, l'hypothèse (5.1) a été faite. Si elle n'est pas vérifiée, les lemmes 25.1 et 25.2 sont cependant exacts, car alors tout appui est, par définition, régulier ou très régulier.

La preuve de la proposition 2 (n° 5) est donnée par les lemmes 25.1, 25.2 et la proposition 1 (n° 4).

CHAPITRE V.

Régularité de l'appui des q-plans ne coupant pas les singularités.

Ce chapitre V prouve la proposition 3 (nº 5); il traite d'abord le cas où V est irréductible.

26. Une condition impliquant la régularité de l'appui.

Cette condition résultera de la propriété suivante de discr_T :

LEMME. — Soit $P(t, \xi)$ un polynôme en (t, ξ), homogène en ξ. On a

(26.1) $$\operatorname{discr}_T P(t', \xi) \neq 0$$

en tout point t' vérifiant la condition que voici :

(26.2) : *L'hypersurface de Ξ d'équation $P(t', \xi) = 0$ contient un ensemble partout dense de points ξ' possédant la propriété suivante : au voisinage de (t', ξ') l'équation $P(t, \xi) = 0$ équivaut à une équation $F(t, \xi) = 0$, où F est holomorphe en ξ, continu en t et $\dfrac{\partial F}{\partial \xi} \neq 0$.*

Preuve. — L'ensemble de ces ξ' est une partie ouverte, partout dense, de l'hypersurface de Ξ d'équation

(26.3) $$P(t', \xi) = 0.$$

Il existe donc une droite analytique complexe de Ξ coupant cette hypersurface (26.3) en des points appartenant tous à cette partie de cette hypersurface, chacun de ces points d'intersection étant simple. Soit n leur nombre; n est le degré de l'hypersurface (26.3). Plus généralement, vu l'hypothèse (26.2), pour t voisin de t', l'hypersurface de Ξ d'équation

(26.4) $$P(t, \xi) = 0$$

coupe cette droite en n points simples et a donc ce même degré n. Or, vu le nº 2 : le degré de cette hypersurface est maximum, sauf quand t est sur une certaine sous-variété algébrique de T; quand ce degré est maximum, alors

(26.5) $$\operatorname{discr}_T P(t, \xi) \neq 0.$$

Donc ce maximum est n, et (26.5) a lieu au voisinage de t', en particulier en t'.

C. Q. F. D.

Notations. — V est une variété algébrique irréductible de $T\times X$; x^q et x^{q-1} sont un q-plan et un $(q-1)$-plan de X tels que $x^{q-1}\subset x^q$; ils ont pour coordonnées grassmanniennes

$$\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_{l-q} \quad \text{et} \quad \xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_{l-q}\wedge\xi.$$

Nous supposons

$$l-r\leqq q\leqq s+1 \qquad \text{et, si } s+1\neq l, \quad q\leqq s.$$

LEMME 26. — Soit une équation polynomiale

(26.6) $$P(t,\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_{l-q}\wedge\xi)=0$$

impliquant, quand t est régulier, l'une au moins des deux conditions suivantes :

1° (t, x^{q-1}) s'appuie régulièrement sur V;

2° (t, x^{q-1}) coupe la partie singulière de V.

Alors l'équation

(26.7) $$\operatorname{discr}_{T\times\Xi^{l-q}}P\big(t,\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_{l-q}\wedge\hat{\xi}\big)=0$$

implique, quand t est régulier, l'une au moins des trois conditions suivantes :

(i) (t, x^q) s'appuie régulièrement sur V si $q\leqq s$,
semi-régulièrement sur V si $q=s+1=l$;

(ii) (t, x^q) coupe la partie singulière de V;

(iii) l'une au moins des composantes algébriques de $x^q\cap V(t)$ est développable.

Note. — Si $q=l-r$, alors $\dim x^q\cap V(t)=0$ et la condition (iii) doit être supprimée.

Preuve. — Considérons l'ensemble E des $(t, x^q)\in T\times\Gamma^q(X)$ ([14]) vérifiant les conditions suivantes :

t est régulier; (t, x^q) ne coupe pas la partie singulière de V;

(t, x^q) ne s'appuie ni régulièrement $(q<l)$, ni semi-régulièrement $(q=l)$ sur V;

aucune composante algébrique de $x^q\cap V(t)$ n'est développable.

E est évidemment ouvert. Il s'agit de prouver que, sur E :

(26.8) $$\operatorname{discr}_{T\times\Xi^{l-q}}P\big(t,\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_{l-q}\wedge\hat{\xi}\big)\neq 0.$$

Soit $(t, x^q)\in E$; soit $x^{q-1}\subset x^q$. Le lemme 23.3 a prouvé ceci : pour que (t, x^{q-1}) s'appuie régulièrement sur V, il faut que x^{q-1} soit tangent

([14]) Rappelons (n° 3) que $\Gamma^q(X)$ est la q-grassmannienne de X.

à $x^q \cap V(t)$. L'équation (26.6) implique donc que l'hyperplan de coordonnées homogènes ξ est tangent à $x^q \cap V(t)$; elle signifie donc que cet hyperplan est tangent à une composante algébrique de $x^q \cap V(t)$, qui dépend continûment de (t, x^q). Or cette composante algébrique n'est pas développable, par hypothèse, et n'a pas de point singulier, vu les lemmes 21.2 et 23.2. Cette équation (26.6) vérifie donc l'hypothèse (26.2) du lemme précédent, où l'on remplace $t' \in T$ par $(t, \xi_1, \ldots, \xi_{l-q}) \in T \times \Xi^{l-q}$; vu ce lemme, on a (26.8).

C. Q. F. D.

27. **Régularité de l'appui sur V d'un q-plan ne coupant pas la partie singulière de V.**

Les notations du n° 26 sont conservées.

LEMME 27. — Si t est régulier, si le q-plan (t, x^q) ne coupe pas la partie singulière de V et s'appuie sur V, alors il s'appuie régulièrement si $q \leqq s$, et semi-régulièrement si $q = l = s + 1$.

Preuve pour $q < l - r - 1$. — Vu les définitions des n^{os} 4 et 5, l'appui et l'appui régulier sont impossibles.

Preuve pour $q = l - r - 1$. — Les définitions des n^{os} 4 et 5.

Nous allons poursuivre, par récurrence suivant q.

Preuve pour $q = l - r$. — Le lemme 26, où l'on choisit $P = P^{q-1}$, la note qui le complète et la relation $P^q = \text{discr}\, P^{q-1}$ (n° 4).

Preuve pour $l - r < q \leqq l$. — Soit un q-plan (t, x^q) vérifiant les conditions suivantes :

(27.1) $\begin{cases} t \quad \text{est régulier;} \\ (t, x^q) \text{ ne s'appuie ni régulièrement } (q \leqq s), \text{ ni semi-régulièrement} \\ \qquad (q = l) \text{ sur V;} \\ (t, x^q) \text{ ne coupe pas la partie singulière de } V. \end{cases}$

Il s'agit de prouver que

$$P^q(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q}) \neq 0, \qquad \text{où} \quad P^q = \text{discr}\, P^{q-1}.$$

Le lemme est supposé vrai quand on y remplace q par $q - 1$; les hypothèses du lemme 26 sont donc vérifiées quand on choisit $P = P^{q-1}$; vu ce lemme 26, il suffit donc de prouver ceci :

(27.2) Aucune des composantes algébriques de $x^q \cap V(t)$ n'est développable.

Notons x^{q-1} un hyperplan arbitraire de x^q. Vu (27.1) et le lemme 23.3, 2° et 3°, l'ensemble des x^{q-1} tangents à $x^q \cap V(t)$ est l'ensemble de x^{q-1}

tels que (t, x^{q-1}) s'appuie régulièrement sur V. Vu la proposition 2 (n° 5), cet ensemble appartient à l'ensemble des (t, x^{q-1}) s'appuyant sur V; plus précisément, ces deux ensembles sont identiques, vu que le lemme vaut si l'on y remplace q par $q-1$, et vu que (t, x^{q-1}) ne coupe pas la partie singulière de V, car (27.1) a lieu. L'ensemble des x^{q-1} tangents à $x^q \cap V(t)$ est donc défini par l'équation exprimant que (t, x^{q-1}) s'appuie sur V :

$$P^{q-1}(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi) = 0.$$

D'où (27.2).

C. Q. F. D.

28. Conditions impliquant la régularité de l'appui sur une hypersurface réductible.

Notations. — Soit V une hypersurface de $T \times X$; notons V_j toutes les composantes algébriques irréductibles de toutes les intersections d'un nombre quelconque de composantes algébriques de V; notons

$$r_j = \dim V_j - \dim T.$$

Évidemment :

(28.1) $\quad r_k < r_i \quad$ et $\quad r_k < r_j, \quad$ si V_k est une composante de $V_i \cap V_j$.

Nous supposerons qu'*aucune des* V_j *n'est développable* : $s_j = l - 1$.

t sera dit régulier quand il sera régulier pour chaque V_j.

Notons

$$(28.2) \qquad P_j^{q-1}(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi) = 0$$

une équation polynomiale, réduite sur $T \times \Xi^{l-q}$ relativement à ξ, exprimant que (t, x^{q-1}) s'appuie sur V_j. Si $q < l - r_j$, nous prenons $P_j^{q-1} = 1$, $\forall t, \xi_1, \ldots, \xi$.

Lemme. — L'équation

$$(28.3) \qquad \operatorname{discr}_{T \times \Xi^{l-q}} \prod_j P_j^{q-1}(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \hat{\xi}) = 0$$

implique, quand t est régulier, l'une au moins des deux conditions que voici :

1° (t, x^q) s'appuie sur l'un des V_j, c'est-à-dire

$$(28.4) \qquad \prod_j P_j^q(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q}) = 0\,;$$

2° (t, x^q) coupe la partie singulière de l'un des V_j.

Preuve. — Il s'agit de prouver que l'ensemble des (t, x^q) vérifiant les conditions suivantes est vide :

$$\left\{\begin{array}{l} t \text{ est régulier;} \\ \operatorname{discr}_{T\times\Xi^{l-q}} \prod_j P_j^{q-1}(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \hat{\xi}) = 0\,; \\ \prod_j P_j^q(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q}) \neq 0, \qquad \text{où} \quad P_j^q = \operatorname{discr}_{T\times\Xi^{l-q}} P_j^{q-1}\,; \\ (t, x^q) \text{ ne coupe la partie singulière d'aucun des } V_j. \end{array}\right.$$

Vu la définition de discr (n° 2), il suffit de prouver que l'ensemble des (t, x^q) vérifiant les conditions suivantes a, dans $T\times\Gamma^q(X)$, une codim > 1 :

$$\left\{\begin{array}{l} t \text{ est régulier;} \\ \text{le polynôme en } \xi,\ \prod_j P_j^{q-1}(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi), \text{ a un facteur multiple;} \\ \text{aucun des polynôme } P_j^{q-1}(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi) \text{ n'a de facteur multiple;} \\ (t, x^q) \text{ ne coupe la partie singulière d'aucun des } V_j. \end{array}\right.$$

Il suffit donc de prouver que l'ensemble des (t, x^q) vérifiant les conditions suivantes a, dans $T\times\Gamma^q(X)$, une codim > 1 :

$$(28.5)\quad \left\{\begin{array}{l} t \text{ est régulier;} \\ \text{il existe } i \text{ et } j \neq i \text{ tels que les polynômes en } \xi, \\ P_i^{q-1}(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi) \text{ et } P_j^{q-1}(\ldots) \text{ ont un facteur commun;} \\ (t, x^q) \text{ ne s'appuie sur aucun des } V_k; \\ (t, x^q) \text{ ne coupe la partie singulière d'aucun des } V_k. \end{array}\right.$$

Or l'équation

$$(28.6)\qquad P_i^{q-1}(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi) = 0$$

exprime que (t, x^{q-1}) s'appuie sur V_i; x^{q-1} est un hyperplan de x^q; donc (t, x^{q-1}) ne coupe pas la partie singulière de V_i; vu le lemme 27, cette équation (28.6) exprime donc que (t, x^{q-1}) s'appuie régulièrement sur V_i. Or (t, x^q) ne s'appuie pas régulièrement sur V_i, vu (28.5) et la proposition 2. Vu le lemme 23.3, (28.6) exprime donc que x^{q-1} est tangent à $x^q \cap V_i(t)$, si $l - r_i < q$; si $l - r_i = q$, $x^q \cap V_i(t)$ se compose d'un nombre fini de points et (28.6) exprime que x^{q-1} contient l'un d'eux; si $q < l - r_i$, (28.6) est impossible.

Les conditions (28.5) impliquent donc que

$$x^q \cap V_i(t) \quad \text{et} \quad x^q \cap V_j(t)$$

ont une composante algébrique irréductible commune. C'est une composante algébrique de

$$x^q \cap V_k(t),$$

V_k étant l'une des composantes algébriques irréductibles de $V_i \cap V_j$.

Si $q + r_k \geqq l$, alors $q + r_i > l$ et $q + r_j > l$, vu (28.1); x^q ne s'appuie ni régulièrement ($q < l$) ni semi-régulièrement ($q = l$) sur V_i, V_j, V_k, vu (28.5) et la proposition 2; cette composante algébrique commune à $x^q \cap V_i(t)$, $x^q \cap V_j(t)$ et $x^q \cap V_k(t)$ a donc, d'après le lemme 23.2, la dimension

$$q + r_i - l = q + r_j - l = q + r_k - l;$$

c'est impossible, vu (28.1).

Si $q + r_k = l - 1$, alors (t, x^q) s'appuie sur V_k; c'est impossible, vu (28.5).

Donc (t, x^q) coupe un V_k tel que

$$r_k \leqq l - 2 - q;$$

or l'ensemble des q-plans (t, x^q) coupant ces V_k est évidemment une sous-variété algébrique de $T \times \Gamma^q(X)$ de codimension > 1; donc l'ensemble des q-plans (t, x^q) satisfaisant (28.5) est de codim > 1.

C. Q. F. D.

LEMME 28. — Si t est régulier et si (t, x^q) s'appuie sur V, alors l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1° (t, x^q) s'appuie sur l'un des V_j;

2° (t, x^q) coupe la partie singulière de l'un des V_j.

Preuve pour $q = 0$. — La définition de l'appui (n° 4).

Preuve pour $q > 0$. — Si l'ensemble des $(q-1)$-plans coupant la partie singulière de l'un des V_j est une hypersurface de $T \times \Gamma^{q-1}(X)$, alors tout q-plan (t, x^q) coupe cette partie singulière et le lemme est évident. Sinon le lemme, supposé vrai quand on y remplace q par $q - 1$, prouve que tout (t, x^{q-1}) s'appuyant sur V s'appuie sur l'un des V_j, si t est régulier; vu la proposition 1 (n° 4), l'équation exprimant l'appui de (t, x^{q-1}) sur V est donc

$$P_0(t) \prod P_j^{q-1}(t, \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{l-q} \wedge \xi) = 0,$$

où P_0 est un polynôme, $\neq 0$ quand t est régulier. Vu la définition de l'appui (n° 4) et une propriété évidente de discr, l'équation exprimant l'appui de (t, x^q) sur V est donc

$$P_0(t)\mathrm{discr}_{T\times\Xi^{l-q}}\prod_j P_j^{q-1}(t, \xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_{l-q}\wedge\hat{\xi}) = 0.$$

Le lemme précédent achève la preuve.

Preuve de la proposition 3 (n° 5) : les lemmes 27 et 28.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] HARTOGS (F.). — Über die aus den singulären Stellen einer analytischen Funktion mehrerer Veränderlichen bestehende Gebilde, *Acta Math.*, Uppsala, t. 32, 1909, p. 57-79.

Voir à ce propos [Kap. IV, § 2, $(2n-2)$-dimenzionale singuläre Mannigfaltigkeiten] : BEHNKE (H.) und THULLEN (P.). — *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.* — New York, Chelsea publ. Comp. (Copyright : Springer 1934) (*Ergebnisse der Mathematik...*, Band 3, n° 3).]

[2] HODGE (W. V. D.) and PEDOE (D.). — *Methods of algebraic geometry*, Vol. 2. — Cambridge, Cambridge University Press, 1952.

[3] LERAY (J.). — Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 81-180.

[4] LERAY (J.). — Un prolongement de la transformation de Laplace, qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élémentaire (Problème de Cauchy, IV), *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 39-156.

[5] NILSSON (N.). — Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds, *Arkiv för Math.*, t. 5, 1963-1965, p. 463-476.

[6] NILSSON (N.). — Asymptotic estimates for spectral functions connected with hypoelliptic differential operators, *Arkiv för Math.*, t. 5, 1963-1965, p. 527-540.

[7] VAN DER WAERDEN (B.). — *Moderne Algebra*, 2te Auflage. — Berlin, Springer-Verlag, 1937 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 33 und 34).

(Manuscrit reçu le 7 novembre 1966.)

Jean LERAY,
Professeur au Collège de France,
12, rue Pierre-Curie, 92-Sceaux.