BULLETIN DE LA S. M. F.

DANIEL LAZARD

Disconnexités des spectres d'anneaux et des préschémas

Bulletin de la S. M. F., tome 95 (1967), p. 95-108
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1967__95__95_0>

Bull. Soc. math. France,
95, 1967, p. 95 à 108.

DISCONNEXITÉS DES SPECTRES D'ANNEAUX ET DES PRÉSCHÉMAS

PAR

DANIEL LAZARD (*).

1. Introduction.

Soit X un espace topologique qui, dans la suite, sera toujours le spectre d'un anneau [1] ou l'espace sous-jacent à un préschéma. Nous considérerons les relations d'équivalence suivantes sur X :

(A) La classe d'un point est l'intersection des ensembles ouverts et fermés le contenant (en abrégé, « relation des ouverts et fermés »).

(B) La classe d'un point est sa composante connexe (« relation des composantes connexes »).

(C) La classe d'un point est l'intersection des ouverts stables par spécialisation et des fermés stables par générisation le contenant.

(D) La classe d'un point est l'intersection des ensembles stables par générisation et spécialisation le contenant.

Comme une composante connexe est fermée et stable par générisation, on voit facilement que ces relations sont écrites par ordre de finesse croissante et que (D) est la relation d'équivalence engendrée par la relation $x \in \overline{\{y\}}$ (relation S de [2]).

Munissons X de la topologie dont les ouverts sont les ouverts stables par spécialisation. Nous l'appellerons la D-topologie, car c'est l'image réciproque de la topologie image directe de X/D. Ainsi deux points sont C-équivalents si, et seulement si, ils ont même D-adhérence.

(*) Un certain nombre de résultats de cet article sont dus à mon ami Daniel Ferrand. Ils seront mentionnés en leur lieu.

(1) Les anneaux considérés sont tous unitaires, et, sauf dans le paragraphe 2, commutatifs.

Si X est le spectre d'un anneau R, on peut aussi définir les relations suivantes sur X : deux points x et y sont dits équivalents si :

(*a*) Tout module projectif de type fini a le même rang en x et en y (« relation des modules projectifs de type fini »);

(*b*) Tout module plat et de type fini a le même rang en x et en y (2) (« relation des modules plats et de type fini »);

(*c*) Tout module projectif a le même rang en x et en y (2) (« relation des modules projectifs »);

(*d*) Tout module ponctuellement libre a le même rang en x et en y (3) (« relation des modules ponctuellement libres »).

Bien que (A) et (B) ne soient pas toujours égales (4) sur un espace topologique [5], nous montrons que, sur un spectre d'anneau :

(i) les relations (A), (B) et (*a*) sont égales (§ 4);

(ii) les relations (C), (*b*) et (*c*) sont égales (§ 5 et 6); elles sont plus fines que les précédentes (trivial) et peuvent l'être strictement (§ 7);

(iii) (*d*) est plus fine que (*c*) et moins que (D) (trivial);

(iv) (D) peut être strictement plus fine que (C) (§ 7).

Aux paragraphes 8 et 9 nous énonçons et démontrons un théorème analogue pour les préschémas (9.7).

Signalons le théorème 5.7 qui montre que « tout module plat et de type fini est projectif » est une condition purement topologique sur le spectre. L'équivalent global est énoncé en 9.8.

Signalons aussi les résultats du paragraphe 2 qui donnent des indications sur la structure des résolutions projectives des modules plats.

2. Compléments sur les modules plats.

THÉORÈME 2.1. — *Soit $M \to L$ un monomorphisme pur de R-modules à gauche tel que L soit libre. Alors, tout sous-module de M de type dénombrable est contenu dans un sous-module de M de type dénombrable qui est pur dans L.*

Rappelons qu'un sous-module d'un module plat est dit pur si le co-noyau est plat. Pour les principales propriétés, nous renvoyons à [6], chap. I, § 2, exerc. 24.

Soit (e_i), $i \in I$, une base de L. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de M, il existe une partie finie I' de I telle que $x_j = \sum_{i \in I'} a_{j,i} e_i$. Dire que M

(2) Rappelons que, sur les anneaux locaux, les modules projectifs et les modules plats de type fini sont libres ([11], et [6], chap. II, § 3, exerc. 3 (*e*)).

(3) Un module est dit ponctuellement libre si son localisé en tout point du spectre est libre.

(4) Deux relations qui ont même graphe sont considérées comme égales.

est pur dans L revient à dire que, pour tout ensemble fini $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de M, il existe un ensemble fini (y_i), $i \in I'$, d'éléments de M tel que

$$x_j = \sum a_{j,i} e_i = \sum a_{j,i} y_i \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Si maintenant $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ est une partie dénombrable de M engendrant un sous-module E, appelons $v_{1,i}$ les y correspondant à u_1, puis, par récurrence, appelons $v_{k,i}$ les y correspondant à u_k et aux $v_{k-1,i}$. Manifestement le module F, engendré par tous les v, contient E et est pur dans L.

La démonstration du théorème suivant, bien que pénible à écrire, nous semble plus naturelle et plus simple que celle de JENSEN [10].

THÉORÈME 2.2. — *Un module plat, de présentation dénombrable, est de dimension homologique inférieure ou égale à* 1.

Soient M un tel module, (e_i), $i \in I$, un système de générateurs dénombrable de M, et (f_j), $j \in J$, un système de générateurs des relations entre les e_i. Le module M peut s'écrire comme limite inductive filtrante de modules libres de type fini M_k [12]. Pour tout i, il existe un $k(i)$ et un $e_{k(i),i}$ de $M_{k(i)}$, tels que l'image de $e_{k(i),i}$ dans M soit e_i. Appelons, pour tout $k \geq k(i)$, $e_{k,i}$ l'image de $e_{k(i),i}$ dans M_k. Pour tout j, si $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ sont les e_i qui apparaissent dans f_j, il existe un $h(j) \geq k(i_1), \ldots, k(i_n)$ tel que $f_j(e_{h(j),i_1}, \ldots, e_{h(j),i_n}) = 0$. L'ensemble des $k(i)$ et des $h(j)$ est dénombrable. Il est donc contenu dans un sous-ensemble H filtrant et dénombrable de l'ensemble des k. De la définition de H, il résulte que $M = \varinjlim_{k \in H} M_k$. Comme H est dénombrable, il contient un sous-ensemble ordonné co-final isomorphe à l'ensemble des nombres naturels $\mathbf{N}$. Donc, finalement, $M = \varinjlim_{\mathbf{N}} M_n$, où les M_n sont libres de type fini. Appelons g_n, l'application, non encore explicitée, de M_n dans M_{n+1}. D'après la définition des limites inductives, on a une suite exacte

$$0 \to \bigoplus M_n \xrightarrow{G} \bigoplus M_n \to M \to 0,$$

où G restreint à M_n est $1 - g_n$; il est évident que G est bien injectif, car il conserve les termes de plus bas degré. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 2.3. — *Sous les hypothèses de* 2.1, *M est limite inductive de ses sous-modules projectifs et purs.*

Il suffit, par 2.1, de montrer que tout sous-module N de M, pur dans L, est projectif. Or il existe une partie dénombrable de la base de L, engendrant un module libre L', telle que N soit contenu dans L'. Il est évident que N est un sous-module pur de L'; donc L'/N est plat de présentation dénombrable, et N est projectif par 2.2. La dernière assertion résulte de l'équivalence entre la pureté dans L et de la pureté dans M pour les sous-modules de M.

3. **La relation** (D).

Revenons à la situation où X est le spectre d'un anneau commutatif R. Si E_0 est un sous-ensemble de X, posons par récurrence :

$$E^n = \bigcup_{x \in E_{n-1}} \{\bar{x}\} = \{y;\ \exists\, x \in E_{n-1},\ y \in \{\bar{x}\}\}$$

et

$$E_n = \{x;\ \exists\, y \in E^n,\ y \in \{\bar{x}\}\}.$$

Autrement dit, E^n est l'ensemble des spécialisations des éléments de E_{n-1}, et E_n est l'ensemble des générisations des éléments de E^n. Manifestement, le D-saturé de E_0 est la réunion des E^n, et aussi celle des E_n.

Proposition 3.1 (Ferrand). — *Si $E^n = V(\mathfrak{a}_n)$ est un ensemble fermé, E_n est égal à* $\operatorname{spec} S^{-1}R$, *avec* $S = 1 + \mathfrak{a}_n$ ([5]).

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier contenant $\mathfrak{a}_n$, on a $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, donc

$$E^n = V(\mathfrak{a}_n) \subset \operatorname{spec} S^{-1}R,$$

et, comme $\operatorname{spec} S^{-1}R$ est stable par générisation,

$$E_n \subset \operatorname{spec} S^{-1}R.$$

Pour démontrer la réciproque, il suffit de montrer que tout point maximal de $\operatorname{spec} S^{-1}R$ est dans E^n. Soit donc $\mathfrak{m}$ l'idéal premier de R correspondant à un tel point. On a $\mathfrak{m} \cap S = \emptyset$, et $\mathfrak{m}$ est maximal pour cette propriété. S'il existait un élément y de $\mathfrak{a}_n$ hors de $\mathfrak{m}$, à cause de l'hypothèse de maximalité, il existerait un x de $\mathfrak{a}_n$ tel que $1 + x \in \mathfrak{m} + Ry$. On aurait donc un scalaire r tel que $1 + x + ry \in \mathfrak{m}$, ce qui est contradictoire avec $\mathfrak{m} \cap S = \emptyset$. Donc $\mathfrak{m} \in V(\mathfrak{a}_n)$.

Proposition 3.2 (Ferrand). — *Sous les hypothèses et notations de* 3.1, *E^{n+1} est le fermé $V(\mathfrak{a}_{n+1})$, où $\mathfrak{a}_{n+1}$ est le noyau de l'homomorphisme $R \to S^{-1}R$, c'est-à-dire que*

$$\mathfrak{a}_{n+1} = \{x;\ \exists\, s \in S,\ sx = 0\}.$$

([5]) Nous identifions, ici et dans la suite, les spectres des localisés et des quotients à des parties de X.

Comme $\operatorname{spec} S^{-1}R \subset V(\mathfrak{a}_{n+1})$, et comme $V(\mathfrak{a}_{n+1})$ est stable par spécialisation, on a

$$E^{n+1} \subset V(\mathfrak{a}_{n+1}).$$

Pour montrer la réciproque, il suffit de montrer que tout élément minimal de $V(\mathfrak{a}_{n+1})$ est dans $\operatorname{spec} S^{-1}R$. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de R correspondant à un tel point. Supposons que $\mathfrak{p} \cap S$ soit non vide et contienne un élément x. L'hypothèse nous dit qu'il existe un $y \notin \mathfrak{p}$ et un entier n tels que $yx^n \in \mathfrak{a}_{n+1}$, i. e. il existe $s \in S$ tel que $syx^n = 0$. Comme $sx^n \in S$, on a $y \in \mathfrak{p}$, absurde. Donc $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} S^{-1}R$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 3.3. — *Les D-composantes sont des F_σ (réunions dénombrables de fermés).*

Car, si E_0 est réduit à un point, E^1 est fermé.

COROLLAIRE 3.4. — *Si pour tout ensemble E_0, réduit à un point, la suite des E^n est stationnaire, les D-composantes sont fermées.*

COROLLAIRE 3.5. — *Si X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, les D-composantes sont en nombre fini, ouvertes et fermées, et toutes les relations envisagées dans l'introduction sont égales.*

En effet, 3.4 s'applique, et toutes les autres assertions sont alors triviales.

4. **Les relations** (A), (B) **et** (*a*).

PROPOSITION 4.1 (FERRAND). — *Si X est le spectre d'un anneau, les relations d'équivalences suivantes sont égales :*

(A) *la relation des ouverts et fermés;*

(B) *la relation des composantes connexes;*

(*a*) *la relation des modules projectifs de type fini.*

1° (A) = (*a*). — Si P est projectif de type fini, l'ensemble des points de X, où le rang de P est n, est ouvert et fermé ([6], chap. II, § 5, n° 2, th. 1). Réciproquement, à tout ensemble ouvert et fermé E correspond un idéal, facteur direct de l'anneau, de rang 1 sur E, et 0 en dehors.

2° (A) = (B). — Il faut montrer que les A-composantes sont connexes, c'est-à-dire que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier et $\mathfrak{a}$ l'idéal engendré par les idempotents contenus dans $\mathfrak{p}$, alors, pour tout élément x tel que $x^2 - x \in \mathfrak{a}$, on a $x \in \mathfrak{a}$ ou $1 - x \in \mathfrak{a}$. En effet, $V(\mathfrak{a})$ est la A-composante de $\mathfrak{p}$, et il faut montrer que $V(\mathfrak{a}) = \operatorname{spec} R/\mathfrak{a}$ est connexe. Comme $x(1-x) \in \mathfrak{p}$, en changeant éventuellement x en $1-x$, on peut supposer $x \in \mathfrak{p}$. Comme tout idéal engendré par un nombre fini d'idempotents peut être engendré par un seul idempotent, il existe un idempotent e contenu dans $\mathfrak{a}$ tel que $x^2 - x = (x^2 - x)e$. On en déduit que $x^2(1-e)^2 = x^2(1-e) = x(1-e)$ est un idempotent contenu dans $\mathfrak{p}$, et donc dans $\mathfrak{a}$. Comme ex est dans $\mathfrak{a}$, x l'est donc aussi.

C. Q. F. D.

5. **Les relations** (C) **et** (b).

LEMME 5.1. — *Le support d'un module de type fini est fermé.*

Ce résultat est bien connu.

COROLLAIRE 5.2. — *Si M est un module plat et de type fini et n un entier, l'ensemble des points du spectre où le rang de M est supérieur ou égal à n est un D-fermé* (fermé stable par générisation).

En effet, c'est le support de $\Lambda^n(M)$ qui est plat et de type fini.

COROLLAIRE 5.3. — *La relation* (C) *est plus fine que* (b).

PROPOSITION 5.4 (FERRAND). — *Avec les notations de* 3.2, *si* $E^n = V(\mathfrak{a}_n)$ *est un D-fermé (fermé stable par générisation), $R/\mathfrak{a}_{n+1}$ est un module plat et de type fini de support E^n.*

On a $E^n = V(\mathfrak{a}_n) = V(\mathfrak{a}_{n+1})$. Si $x \notin V(\mathfrak{a}_{n+1})$, on a

$$(\mathfrak{a}_{n+1})_x = R_x \qquad \text{et} \qquad (R/\mathfrak{a}_{n+1})_x = 0.$$

Si $x \in V(\mathfrak{a}_{n+1})$, on a $x \in V(\mathfrak{a}_n)$, et donc $x \in \operatorname{spec} S^{-1}R$. Donc l'idéal premier de R correspondant à x ne rencontre pas S, et

$$(\mathfrak{a}_{n+1})_x = 0 \qquad \text{et} \qquad (R/\mathfrak{a}_{n+1})_x = R_x.$$

La proposition résulte immédiatement de ces deux résultats.

COROLLAIRE 5.5. — *Les relations suivantes sont égales :*

(C) *La relation* (C);

(b) *La relation des modules plats et de type fini.*

En effet, une C-composante est intersection d'ensembles stables pour (b) qui est donc plus fine que (C).

LEMME 5.6. — *Pour qu'un module plat et de type fini soit projectif, il faut et il suffit que son rang soit localement constant.*

Voir par exemple [6], chap. II, § 5, n° 2, th. 1.

THÉORÈME 5.7. — *Soit X le spectre d'un anneau R. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Tout R-module plat et de type fini est projectif;*

(ii) *Les D-fermés (fermés stables par générisation) sont ouverts;*

(iii) *Pour la D-topologie, X est somme d'un nombre fini d'espaces munis de la topologie la moins fine.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) par 5.6 et 5.4.

(ii) $\Rightarrow$ (iii), car (ii) implique que les D-ouverts sont fermés; les C-composantes sont donc fermées, donc aussi ouvertes, donc en nombre fini, par quasi-compacité.

(iii) $\Rightarrow$ (i), car les C-composantes sont ouvertes, et le rang des modules plats et de type fini est localement constant.

Remarque 5.8. — Si les conditions de 5.7 sont vérifiées, on a évidemment $a = b$ (la relation des modules plats et de type fini et celle des modules projectifs de type fini sont égales), mais la réciproque est fausse. En effet, un anneau absolument plat ([6], chap. I, § 2, exerc. 17) a un spectre compact totalement discontinu ([6], chap. II, § 4, exerc. 16); les A-composantes sont donc réduites à un point, et toutes les relations envisagées dans l'introduction sont égales; mais les conditions de 5.7 ne sont pas vérifiées ([6], chap. I, § 2, exerc. 17).

COROLLAIRE 5.9. — *Si X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, tout module plat et de type fini est projectif.*

En effet, (iii) est une conséquence immédiate de 3.5.

6. La relation des modules projectifs (c).

PROPOSITION 6.1. — *La relation des modules projectifs* (c) *est plus fine que celle des modules plats de type fini* (b).

Soit E un D-fermé. Il lui correspond (5.4) un module plat monogène $R/\mathfrak{a}$ de support E; mais (2.3) $\mathfrak{a}$ est réunion de ses sous-modules projectifs P_i. En un point x de X, $\mathfrak{a}_x = 0$ équivaut à $(P_i)_x = 0$ pour tout i, ce qui équivaut encore à $(\bigoplus P_i)_x = 0$. Nous avons donc trouvé un module projectif dont le support est le complémentaire de E. Donc E est stable pour (c), et l'on en déduit le résultat, car les C-composantes s'obtiennent à partir des D-fermés par passage au complémentaire et intersection.

LEMME 6.2. — *Le support d'un module projectif est ouvert.*

Soient M un module projectif et $\mathfrak{p}$ un idéal premier; on a

$$M_{\mathfrak{p}} = 0 \iff M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} = 0 \iff M/\mathfrak{p}M = 0 \iff M = \mathfrak{p}M.$$

si Y est le complémentaire du support de M, on a donc

$$M = \bigcap_{\mathfrak{p}\in Y} (\mathfrak{p}M);$$

mais $\bigcap (\mathfrak{p}M) = \left(\bigcap \mathfrak{p}\right) M$, car une telle relation, qui est vraie sur un libre, l'est aussi sur un projectif. Soit $\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}$; si $\mathfrak{p} \in Y$, on a $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$, et, réciproquement, si $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$, on a $M = \mathfrak{a}M$; donc $M = \mathfrak{p}M$ et $M_{\mathfrak{p}} = 0$. On a bien $Y = V(\mathfrak{a})$.

Corollaire 6.3. — *Si M est un module projectif et n un entier, l'ensemble des points du spectre où le rang de M est inférieur ou égal à n est un D-fermé.*

En effet, c'est le complémentaire du support de $\wedge^{n+1}(M)$.

Corollaire 6.4. — *Si M est un module projectif, l'ensemble des points du spectre où le rang de M est fini donné, et l'ensemble des points où le rang de M est infini, sont C-stables.*

C'est une conséquence immédiate de 6.3.

Proposition 6.5. — *La relation des modules plats de type fini* (*b*) *et celle des modules projectifs* (*c*) *sont égales.*

Compte tenu de 5.5, 6.1 et 6.4, il suffit de montrer l'assertion suivante : Si $\mathfrak{c}$ est un cardinal non dénombrable et M un module projectif, l'ensemble des points du spectre où le rang de M est $\mathfrak{c}$ est C-stable. Mais M est somme directe de modules projectifs de type dénombrables M_i [11]. Dire que le rang de M_x est $\mathfrak{c}$, c'est dire que l'ensemble des i tels que $(M_i)_x \neq 0$ est de cardinal $\mathfrak{c}$. Pour toute partie J de cardinal $\mathfrak{c}$ de l'ensemble des indices i, soit X_J l'intersection des supports des M_i pour $i \in J$. L'ensemble des points du spectre où le rang de M est $\mathfrak{c}$ est donc la réunion des X_J pour $\operatorname{card}(J) = \mathfrak{c}$. Cet ensemble est C-stable, car il a été obtenu à partir d'ensembles C-stables par intersections et réunions.

7. Des contre-exemples.

Montrons d'abord que la réciproque de 3.5 est fausse :

Proposition 7.1. — *Il existe des anneaux ayant une infinité de composantes irréductibles et une seule D-composante.*

Soient k un corps et (X_i), $i \in I$, un ensemble infini d'indéterminées. Prenons pour R l'anneau quotient de $k[(X_i)]$ par l'idéal engendré par les $X_i X_j$ pour $i \neq j$. Soient $\mathfrak{p}_i$ l'idéal de R engendré par les images des X_j $(j \neq i)$ et $\mathfrak{m}$ l'idéal engendré par les images de tous les X_i; ces idéaux sont premiers, $\mathfrak{m}$ est maximal, et tout idéal premier différent de $\mathfrak{m}$ contient un des $\mathfrak{p}_i$. Il y a donc une infinité d'idéaux premiers minimaux tous contenus dans le même idéal maximal.

PROPOSITION 7.2. — *Soit* ω *un ordinal. Il existe un anneau* R *et un point* y *de* $\operatorname{spec} R$ *tels que :*

(i) $\operatorname{spec} R$ *est connexe;*

(ii) *La D-composante de* y *est ouverte mais non fermée;*

(iii) *L'adhérence de cette D-composante n'est pas D-saturée;*

(iv) *Soient* $F_0 = \{y\}$, F_α *l'adhérence du D-saturé de* $F_{\alpha-1}$ *si* α *est un ordinal non limite* $\leq \omega$, *et* $F_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$ *si* α *est un ordinal limite* $\leq \omega$.

Alors tous les F_α *sont différents.*

Soient k un corps, X_i $(i \leq \varpi)$ des indéterminées indicées par les ordinaux inférieurs ou égaux à ϖ, ϖ étant un ordinal limite tel que le nombre (ordinal) d'ordinaux limites inférieurs à ϖ soit supérieur à ω. Prenons pour R le quotient de $k[(X_i)]$ par l'idéal engendré par les $X_i(1-X_j)$ $(i<j)$. Appelons x_i les images des X_i dans R. En utilisant les relations entre les x_i, on voit facilement que les idéaux premiers minimaux de R sont les $\mathfrak{p}_i$ $(i \leq \varpi)$, où $\mathfrak{p}_i$ est l'idéal engendré par les x_j $(j<i)$ et par les $1-x_j$ $(j>i)$. Pour $i \leq \varpi$, $R/\mathfrak{p}_i \simeq k[X]$. Par conséquent, les idéaux premiers non minimaux sont maximaux. Un idéal maximal qui contient plusieurs $\mathfrak{p}_i$ est de la forme $\mathfrak{m}_i = (x_1, \ldots, x_i, 1-x_{i+1}, \ldots, 1-x_{i+j}, \ldots)$ et ne contient, comme idéaux premiers minimaux, que $\mathfrak{p}_i$ et $\mathfrak{p}_{i+1}$. Si $y = \mathfrak{p}_0$, les $\mathfrak{p}_i$ qui sont dans F_α sont exactement ceux pour lesquels $i \leq \omega_\alpha$, ω_α étant le $\alpha^{\text{ième}}$ ordinal limite. Ceci démontre (iii), (iv) et la deuxième partie de (ii). (i) provient de ce que $F_\omega = \operatorname{spec} R$ (nous supposons ici que $\varpi = \omega_\omega$) et de (iv). Enfin la D-composante de y est ouverte, car elle est formée des idéaux premiers qui ne contiennent aucun des x_i $(i \geq \omega_0)$.

PROPOSITION 7.3. — *Il existe un anneau* R *ayant une infinité de D-composantes et tel que* $\operatorname{spec} R$ *et* $\emptyset$ *sont les seuls D-fermés.*

Soient k un corps et $X_{i,j}$ (i, j entiers; $i \leq j$) des indéterminées. Prenons pour R le quotient de $k[(X_{i,j})]$ par l'idéal engendré par $X_{i,j}(1-X_{i+1,j})$ pour $i<j$. Appelons $x_{i,j}$ l'image de $X_{i,j}$ dans R. A toute suite d'entiers $u = (u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, telle que $u_n \leq n$, faisons correspondre l'idéal $\mathfrak{p}_u$ engendré par les $x_{i,j}$ pour $i<u_j$ et par les $1-x_{i,j}$ pour $i>u_j$. On obtient ainsi une fois, et une fois seulement, tous les idéaux premiers minimaux. En effet, ces idéaux $\mathfrak{p}_u$ sont premiers, car $R/\mathfrak{p}_u \simeq k[(X_{u_n,n})]$, et, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier quelconque, on peut lui associer la suite v des $v_n = \inf\{i; x_{i,n} \notin \mathfrak{p}\}$. On a évidemment $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_v$.

Soient u et v deux suites correspondant à des idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_u$ et $\mathfrak{p}_v$. Pour que $\mathfrak{p}_u$ et $\mathfrak{p}_v$ soient contenus dans un même idéal premier, il faut et il suffit que $\mathfrak{p}_u + \mathfrak{p}_v \neq R$, c'est-à-dire que $|u_n - v_n| \leq 1$ pour tout n. On en déduit que deux points minimaux du spectre sont

D-équivalents si les suites correspondantes ont une différence bornée. Il y a donc une infinité de D-composantes.

Soit u une suite correspondant à un idéal premier minimal $\mathfrak{p}_u$, et soit $\mathfrak{a}$ l'intersection des idéaux premiers de la D-adhérence de $\mathfrak{p}_u$. Supposons qu'il existe un élément non nul f dans $\mathfrak{a}$. Mettons f sous sa forme réduite, i. e. effectuons toutes les simplifications possibles, y compris les simplifications $x_{i,j}x_{i+1,j}=x_{i,j}$. Ainsi f est combinaison linéaire de monômes de la forme

$$x_{i(1),j(1)}^{m(1)}\ldots x_{i(k),j(k)}^{m(k)},\qquad j(1)<\ldots<j(k).$$

A un tel monôme associons la suite v suivante :

$$v(j(1))=i(1),\qquad \ldots,\qquad v(j(k))=i(k);$$

et pour les autres valeurs de j, $v(j)=j$ s'il existe un $x_{i,j}$ qui apparaît dans f, $v(j)=u(j)$ sinon. Appelons w la suite v la plus grande pour l'ordre lexicographique qui corresponde à un monôme t non nul de f. L'homomorphisme $R\to R/\mathfrak{p}_w\simeq k[(X_{w(n),n})]$ transforme les monômes apparaissant dans f en monômes, et si deux monômes apparaissant dans f ont leurs images égales et non nulles, ils sont égaux. Comme l'image de t est non nulle, il en est de même de celle de f, ce qui est absurde, car $f\in\mathfrak{p}_w$, et l'on en déduit que la D-adhérence de $\mathfrak{p}_u$ est le spectre entier.

THÉORÈME 7.4. — *Si X est le spectre d'un anneau, on a :*

(i) *Les relations suivantes sont égales :*

(A) *la relation des ouverts et fermés;*

(B) *la relation des composantes connexes;*

(*a*) *la relation des modules projectifs de type fini.*

(ii) *Les relations suivantes sont égales :*

(C) *la relation* (C)*;*

(*b*) *la relation des modules plats de type fini;*

(*c*) *la relation des modules projectifs.*

Ces relations sont plus fines que les précédentes et peuvent l'être strictement.

(iii) *La relation des modules plats ponctuellement libres est plus fine que* (C) *et moins fine que la relation* (D).

(iv) *La relation* (D) *peut être strictement plus fine que* (C).

C'est une récapitulation : (i) est 4.1; (ii) est 5.5, 6.5 et un corollaire de 7.2; (iii) est trivial; (iv) est un corollaire de 7.3.

Notons que nous ne savons pas si les deux inégalités de (iii) peuvent être strictes.

8. **Globalisation des relations** (A), (B), (*a*).

Dorénavant, X est l'espace sous-jacent à un préschéma $(X, \mathcal{O}_X)$. La définition des relations d'équivalences topologiques (majuscules) reste valable. Celle des relations (*a*), (*b*) et (*d*) également, en remplaçant « module » par « Module quasi-cohérent » et « module projectif de type fini » par « Module localement libre de rang fini ». Par contre, nous ne savons pas globaliser la relation des modules projectifs. Il est toujours trivial que $(A) \leqq (B) \leqq (C) \leqq (D)$ et $(a) \leqq (b) \leqq (d) \leqq (D)$ pour la relation de finesse, les plus grandes étant les plus fines.

PROPOSITION 8.1. — *Les relations des ouverts et fermés* (A) *et des Modules cohérents localements libres* (*a*) *sont égales.*

Si U est un ensemble ouvert et fermé, la section globale égale à 1 sur U et à 0 en dehors engendre un Idéal cohérent localement libre de support U, ce qui montre que (*a*) est plus fine que A.

Réciproquement, si $\mathcal{M}$ est un Module cohérent localement libre, son rang est localement constant, et donc, l'ensemble des x où le rang de $\mathcal{M}$ est égal à n est ouvert et fermé, ce qui montre que la relation (A) est plus fine que (*a*).

Pour globaliser la deuxième partie de 4.1, nous avons besoin de conditions de finitude :

LEMME 8.2. — *Si X est un espace topologique quasi-compact, quasi-séparé (i. e. l'intersection de deux ouverts quasi-compacts est quasi-compacte) et admettant une base d'ouverts quasi-compacts, le foncteur « sections globales » de la catégorie des faisceaux d'ensembles commute aux limites inductives filtrantes.*

La démonstration que donne [7] (II, 3.10) pour les espaces de Zariski (i. e. noethériens) reste entièrement valable en supposant les U_i quasi-compacts.

PROPOSITION 8.3. — *Soient X un préschéma quasi-compact et quasi-séparé et Y une intersection d'ensembles ouverts et fermés de X. Alors toute partition de Y en deux fermés se prolonge en une partition de X en deux fermés.*

Munissons Y et les ensembles ouverts et fermés U dont il est l'intersection de leur faisceau induit ([7], II, 1.5) par $\mathcal{O}_X$. Par [9], 8.2.3, nous savons que Y est un préschéma qui est limite projective des préschémas U. En passant aux images directes sur X, on voit, par [9], 8.2.3, et par 8.2, que l'anneau des sections globales de Y est limite inductive filtrante des anneaux des sections globales des U. Donc toute section globale idempotente de Y provient, par restriction, d'une section globale idempotente de l'un des U. Le résultat s'en déduit, car les U sont ouverts et fermés, par le lemme ci-dessous :

LEMME 8.4. — *Sur un préschéma, le support établit une correspondance bi-univoque entre les sections globales idempotentes et les ensembles ouverts et fermés.*

En effet, le support d'une section idempotente e est ouvert et fermé, car son complémentaire est le support de $1-e$. Réciproquement, si U est ouvert et fermé, la section 1 sur U et la section 0 sur son complémentaire se recollent en une section idempotente.

COROLLAIRE 8.5. — *Sur un préschéma quasi-compact et quasi-séparé, la relation des ouverts et fermés* (A) *et celle des composantes connexes* (B) *sont égales.*

Notons que nous obtenons ainsi une nouvelle démonstration pour le cas affine. Ce résultat provient de 8.3, car si la A-composante d'un point n'était pas connexe, il existerait, par 8.3, un ensemble ouvert et fermé contenant ce point, mais non sa A-composante, ce qui est absurde.

Les hypothèses de finitudes de 8.4 et de 8.5 sont indispensables :

CONTRE-EXEMPLE 8.6. — Soient X le spectre d'un produit infini de corps, et x un point non isolé de X. On sait que x est un point fermé. On peut donc le dédoubler en x et y (en recollant deux copies de X le long du complémentaire de x). On obtient ainsi un préschéma Y. Il est immédiat que l'intersection des ouverts et fermés de y contenant x est $\{x, y\}$ qui n'est pas connexe.

9. Globalisation de (C) et (b).

LEMME 9.1. — *Pour qu'un ensemble soit un ouvert stable par spécialisation, il faut et il suffit qu'il le soit localement.*

Soient X un espace topologique, (X_i) $(i \in I)$ un recouvrement ouvert de X, et U un ouvert stable par spécialisation. Si $x \in U \cap X_i$, comme $\{\bar{x}\} \subset U$, on a

$$\{\bar{x}\} \cap X_i \subset U \cap X_i,$$

et les $U \cap X_i$ sont stables par spécialisation (dans X_i). Réciproquement, si les $U \cap X_i$ sont stables par spécialisation dans X_i pour tout i, soient $x \in U$ et $y \in \{\bar{x}\}$; il existe un i tel que $y \in X_i$ et donc que $x \in X_i$. Comme $\{x\} \cap X_i \subset U \cap X_i$, on a $y \in U$ et U est stable par générisation.

COROLLAIRE 9.2. — *Si X est un préschéma, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent, plat et de type fini, l'ensemble des points, où le rang de $\mathcal{M}$ est inférieur ou égal à n, est un ouvert stable par spécialisation.*

Cela résulte immédiatement du cas affine par 9.1.

COROLLAIRE 9.3. — *La relation* (b) *des Modules quasi-cohérents, plats et de type fini est plus fine que la relation* (C).

Pour démontrer la réciproque, nous avons besoin de quelques compléments dans le cas affine. Pour cela, nous utiliserons les hypothèses et notations de 3.2. Ainsi, si $\mathfrak{a}_0$ est un idéal, posons

$$\mathfrak{a}_1 = \{ x \in R ; \exists\, a \in \mathfrak{a}_0, x = ax \}.$$

Un fermé $V(\mathfrak{a}_0)$ est donc stable par générisation si, et seulement si, $V(\mathfrak{a}_0) = V(\mathfrak{a}_1)$.

LEMME 9.4. — *Si $V(\mathfrak{a}_0) = V(\mathfrak{a}_1)$, on a $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$.*

On a évidemment $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2$. Réciproquement, si $b \in \mathfrak{a}_1$, il existe $a \in \mathfrak{a}_0$ tel que $b = ab$. Mais a a une puissance a^n dans $\mathfrak{a}_1$. Comme $b = ab = a^n b$, on a donc $b \in \mathfrak{a}_2$.

LEMME 9.5. — *Si $f \in R$ et $V(\mathfrak{a}_1) = V(\mathfrak{a}_0)$, alors $(\mathfrak{a}_1)_f$ est égal à*

$$((\mathfrak{a}_0)_f)_1 = \{ x \in R_f ; \exists\, a \in (\mathfrak{a}_0)_f, x = ax \}.$$

(i) $(\mathfrak{a}_1)_f \subset ((\mathfrak{a}_0)_f)_1$: Si $b/f^n \in (\mathfrak{a}_1)_f$, il existe $a \in \mathfrak{a}_0$ tel que $b = ab$, i. e. $b/f^n = (a/1)(b/f^n)$; donc $b/f^n \in ((\mathfrak{a}_0)_f)_1$.

(ii) Réciproquement, si $b/f^n \in ((\mathfrak{a}_0)_f)_1$, il existe $a/f^m \in (\mathfrak{a}_0)_f$ tel que $b/f^n = (a/f^m)(b/f^n)$. En remplaçant éventuellement b/f^n par $(bf^k)/f^{n+k}$, on obtient, dans R, $bf^m = ab$, soit $bf^{jm} = a^j b$ pour tout j. Pour j assez grand, on a $a^j \in \mathfrak{a}_1$, et, par conséquent,

$$b/f^n = (bf^{jm})/f^{n+jm} \in (\mathfrak{a}_1)_f.$$

PROPOSITION 9.6. — *La relation* (b) *des Modules quasi-cohérents, plats et de type fini et la relation* (C) *sont égales sur les préschémas.*

Pour tout ouvert affine U, considérons l'idéal $\mathfrak{a}_0$ de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, intersection des idéaux premiers correspondant aux points de $F \cap U$, F étant un fermé stable par générisation. Le lemme 9.5 montre que $\mathfrak{a}_1$ définit un faisceau quasi-cohérent d'idéaux que nous noterons aussi $\mathfrak{a}_1$. Manifestement $\mathcal{O}_X/\mathfrak{a}_1$ est un Module quasi-cohérent de type fini, plat, de rang 1 sur F et 0 en dehors. Ceci montre que (C) est plus fine que (b).

Récapitulons :

THÉORÈME 9.7. — *Soit X un préschéma; considérons sur X les relations d'équivalence suivantes :*

(A) *La classe d'un point est l'intersection des ensembles ouverts et fermés le contenant;*

(B) *La classe d'un point est sa composante connexe;*

(C) *La classe d'un point est l'intersection des ouverts stables par spécialisation et des fermés stables par générisation le contenant.*

(D) *La classe d'un point est l'intersection des ensembles stables par générisation et spécialisation le contenant.*

(*a*) *Deux points x et y sont équivalents si le rang en x et en y de tout $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang fini est le même.*

(*b*) *Deux points x et y sont équivalents si le rang en x et en y de tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent, plat et de type fini est le même.*

Alors, si l'égalité de deux relations signifie qu'elles ont le même graphe et si $R \geqq R'$ signifie que R est plus fine que R', on a :

(i) $(A) = (a) \leqq (B) \leqq (C) = (b) \leqq D$;

(ii) *Toutes ces inégalités peuvent être strictes;*

(iii) *Si X est quasi-compact et quasi-séparé,* (A) = (B);

(iv) *Si X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, toutes ces relations sont égales.*

Pour terminer, signalons le corollaire suivant :

Proposition 9.8. — *Si X est un préschéma, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent, plat et de type fini est localement libre;*

(ii) *Les C-composantes sont ouvertes.*

Cela résulte immédiatement de 9.7 et de 5.7.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Balcerzyk (S.). — On projective dimension of direct limits of modules, *Bull. Acad. polon. Sc.*, Série Sc. math. astr. et phys., t. 14, 1966, p. 241-244.

[2] Bass (Hyman). — Big projective modules are free, *Illinois J. of Math.*, t. 7, 1963, p. 24-31.

[3] Berstein (I.). — On the dimension of modules and algebras, IX., *Nagoya math. J.*, t. 13, 1958, p. 83-84.

[4] Bourbaki (Nicolas). — Livre 2 : *Algèbre.* — Paris, Hermann.

[5] Bourbaki (Nicolas). — Livre 3 : *Topologie générale.* — Paris, Hermann.

[6] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative.* — Paris, Hermann.

[7] Godement (Roger). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1252; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 13).

[8] Grothendieck (A.). — *Éléments de géométrie algébrique*, I. — Paris, Presses universitaires de France, 1960 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 4).

[9] Grothendieck (A.). — *Éléments de géométrie algébrique*, IV. — Paris, Presses universitaires de France, 1964-1966 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 20, 24 et 28).

[10] Jensen (C. U.). — On cohomological dimensions of rings with countably generated ideals, *Math. Scand.*, Kobenhavn, t. 18, 1966, p. 97-107.

[11] Kaplanski (I.). — Projective modules, *Annals of Math.*, Series 2, t. 68, 1958, p. 372-377.

[12] Lazard (D.). — Sur les modules plats, *C. R. Acad. Sc.*, t. 258, 1964, p. 6313-6316.

(Manuscrit reçu le 25 avril 1967.)

Daniel Lazard,
3, rue Boissonade, 75-Paris 14e.