BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL A. KERVAIRE

Les nœuds de dimensions supérieures

Bulletin de la S. M. F., tome 93 (1965), p. 225-271
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1965__93__225_0>

Bull. Soc. math. France,
93, 1965, p. 225 à 271.

LES NŒUDS DE DIMENSIONS SUPÉRIEURES ;

PAR

MICHEL A. KERVAIRE (*).

Un nœud de dimension n, ou n-nœud, est un plongement différentiable $f : S^n \to S^{n+2}$ de la sphère de dimension n dans la sphère de dimension $n + 2$. Comme on le sait, $S^{n+2} - f(S^n)$ a toujours l'homologie du cercle S^1 mais n'est pas en général du type d'homotopie de S^1. En particulier, le groupe de Poincaré $\pi_1(S^{n+2} - f(S^n))$ n'est pas nécessairement infini cyclique.

Dans le premier chapitre, on étudie le problème de caractériser algébriquement les groupes qui sont isomorphes au groupe de Poincaré de l'espace complémentaire $S^{n+2} - f(S^n)$ d'un n-nœud $f : S^n \to S^{n+2}$. Le théorème I.1 fournit un résultat complet pour $n \geqq 3$. On observe que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit isomorphe au groupe de Poincaré de l'espace complémentaire d'un n-nœud, $n \geqq 3$, est indépendante de n. Pour $n = 2$, on obtiendra un résultat partiel (théorème I.3). Le problème (classique) pour $n = 1$ échappe à nos méthodes et n'est pas considéré.

Au chapitre II, on étudie le premier groupe d'homotopie de $S^{n+2} - f(S^n)$ qui diffère du groupe correspondant de S^1, i. e. on suppose que $\pi_i(S^{n+2} - f(S^n)) \cong \pi_i(S^1)$ si $1 \leqq i < q$ pour un certain entier $q \geqq 2$, et l'on se propose de caractériser algébriquement le $Z[\mathbf{J}]$-module $A = \pi_q(S^{n+2} - f(S^n))$. ($\mathbf{J}$ désigne le groupe (multiplicatif) infini cyclique $\pi_1(S^1)$ de générateur canonique t, et $Z[\mathbf{J}]$ son anneau de groupe sur les entiers.) Pour $q < \frac{1}{2}n$, on obtient des conditions algébriques

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1964.

The author holds an Alfred P. Sloan Fellowship and was partially supported during the preparation of this paper by a National Science Foundation grant. Some of the work on this paper was completed during the Topology Symposium at Cambridge, England, 1964, Supported in part by the D.S.I.R..

relativement simples (théorème II.1). Pour $q = \frac{1}{2}n$ ou $q = \frac{1}{2}(n+1)$, les conditions portent sur les présentations de A et permettent tout au plus de dresser une liste des modules considérés (théorèmes II.2 et II.3). J'ignore comment ces conditions peuvent se traduire en conditions intrinsèques. On sait que si $\pi_i(S^{n+2} - f(S^n)) \cong \pi_i(S^1)$ pour tout $i \leqq \frac{1}{2}(n+1)$, le nœud $f : S^n \to S^{n+2}$ est difféotope à un nœud de la forme $ih : S^n \to S^{n+2}$, où $h : S^n \to S^n$ est un difféomorphisme et $i : S^n \to S^{n+2}$ est le plongement canonique (*cf.* [11]). Il n'y a donc pas lieu de considérer le cas $q > \frac{1}{2}(n+1)$. [On suppose ici $n \geqq 4$.]

Les résultats du chapitre II, pour $q = \frac{1}{2}n$ ou $q = \frac{1}{2}(n+1)$, permettent d'aborder l'étude du cobordisme des n-nœuds (chap. III). Il se présente deux définitions possibles de la notion de cobordisme de n-nœuds qui généralisent toutes les deux cette notion pour $n = 1$. On dira que deux nœuds $f_0, f_1 : S^n \to S^{n+2}$ sont *concordants* s'il existe un plongement différentiable $f : S^n \times I \to S^{n+2} \times I$ en « bonne position » tel que $f(x, 0) = (f_0(x), 0)$ et $f(x, 1) = (f_1(x), 1)$. Deux nœuds $f_0, f_1 : S^n \to S^{n+2}$ sont *cobordants* s'il existe un difféomorphisme $h : S^n \to S^n$ de degré $+1$ tel que $f_0 h$ et f_1 soient concordants. Si deux nœuds f_0, f_1 sont cobordants, il existe une sous-variété $V^{n+1} \subset S^{n+2} \times I$ dont le bord est constitué par les images $f_0(S^n) \subset S^{n+2} \times (0)$ et $f_1(S^n) \subset S^{n+2} \times (1)$ et qui se rétracte par déformation sur $f_0(S^n)$ et $f_1(S^n)$. Il suffit de prendre $V = f(S^n \times I)$. Réciproquement, pour $n \neq 2, 3$, l'existence de V (satisfaisant à une condition de bonne position) implique le cobordisme de f_0 et f_1 (via les théorèmes de Smale [20]) et pourrait servir à définir cette notion. On retrouve ainsi, pour $n = 1$, la définition usuelle du cobordisme des 1-nœuds (*cf.* R. Fox et J. Milnor [4]). Nous adoptons la définition donnée ci-dessus (à l'aide de la concordance) pour éviter les problèmes de Poincaré en dimensions 3 et 4.

Concordance et cobordisme sont des relations d'équivalence et les ensembles de classes de concordance et cobordisme de n-nœuds, notés $\mathbf{C}_n^*$ et $\mathbf{C}_n$ respectivement sont munis de structures de groupes abéliens. On a un homomorphisme surjectif $\mathbf{C}_n^* \to \mathbf{C}_n$ dont nous déterminerons le noyau (théorème III.3).

Le groupe $\mathbf{C}_1$ introduit par Fox et Milnor n'est pas de type fini (*cf.* [4]). On verra qu'il en est de même de tous les groupes $\mathbf{C}_{2k-1}$ ($k \geqq 1$). Si un nœud $f : S^{2k-1} \to S^{2k+1}$ satisfait à l'hypothèse $\pi_i(S^{2k+1} - f(S^{2k-1})) \cong \pi_i(S^1)$ pour $i < k$, le $Z[\mathbf{J}]$-module $A = \pi_k(S^{2k+1} - f(S^{2k-1}))$ a une présentation d'excès 0, c'est-à-dire une présentation avec un nombre égal de générateurs et de relateurs $(x_1, \ldots, x_\alpha; R_1, \ldots, R_\alpha)$. Les relateurs R_i ayant la forme $R_i = \sum a_{ij} x_j$, avec $a_{ij} \in Z[\mathbf{J}]$, on peut définir le déterminant

$\Delta_A(t) = \text{dét}(a_{ij})$ qui s'avère être (à la multiplication par un élément inversible de $Z[\mathbf{J}]$ près) un invariant du module A. Ce déterminant joue un rôle analogue à celui du polynôme d'Alexander d'un 1-nœud. En particulier, on a $\Delta(t) = \pm t^{2m}\Delta(t^{-1})$ et pour que le nœud donné $f : S^{2k-1} \to S^{2k+1}$ soit de classe de cobordisme triviale, il faut que Δ soit de la forme $R(t).R(t^{-1})$, où $R(t)$ est une fraction rationnelle en t à coefficients rationnels. En utilisant le théorème II.3, on peut ainsi construire une infinité d'éléments indépendants dans $\mathbf{C}_{2k-1}$.

Par contre, $\mathbf{C}_{2k} = 0$ pour $k \geqq 1$. La démonstration s'appuie sur la technique des modifications sphériques (*cf.* [10]).

Chapitre I.

Le groupe de Poincaré.

1. Les nœuds de dimensions $n \geqq 3$.

Soit $f : S^n \to S^{n+2}$ un n-nœud et $\pi = \pi_1(S^{n+2} - f(S^n))$ le groupe de Poincaré de son espace résiduel. On va tout d'abord dégager quelques propriétés de π qui seront donc des conditions nécessaires pour qu'un groupe donné arbitrairement soit le groupe de Poincaré de l'espace résiduel d'un n-nœud. Le résultat principal de ce chapitre sera la démonstration de la suffisance de ces conditions.

En fait, ces conditions seront nécessaires pour que π soit groupe de Poincaré de l'espace résiduel d'un plongement différentiable $f : V^n \to M^{n+2}$, $n \geqq 1$, où V et M sont des variétés différentielles compactes, sans bord, pourvu que V soit connexe, que M soit 2-connexe, et que l'une au moins des deux hypothèses suivantes soit satisfaite :

(i) V est simplement connexe, ou

(ii) $n = 1$.

Nous nous plaçons donc dans ce cas plus général.

(1) Le groupe π admet une présentation finie (par générateurs et relateurs). En effet, $\pi = \pi_1(M^{n+2} - f(V))$ est le groupe de Poincaré du complexe fini obtenu en triangulant l'espace complémentaire $M - U$ d'un voisinage tubulaire ouvert U de $f(V)$ dans M.

(2) On a l'isomorphisme $\pi/\pi' \cong Z$, où π' désigne le sous-groupe engendré par les commutateurs de π. En effet,

$$H_1(M - U) \cong H_2(M, M - U) \cong H_2(\bar{U}, b\bar{U}) \cong H^n(\bar{U}) \cong H^n(V) \cong Z.$$

(3) Soit $H_*(\pi)$ l'homologie de π à coefficients entiers, Z étant considéré comme $Z[\pi]$-module trivial. On a $H_2(\pi) = 0$. En effet, d'après

H. Hopf [6], si X est un complexe dont le groupe de Poincaré est isomorphe à π, on a

$$H_2(\pi) = H_2(X)/\rho\, \pi_2(X),$$

où ρ désigne l'homomorphisme de Hurewicz. En prenant $X = M - U$, on trouve $H_2(\pi) = 0$. La suite d'isomorphismes

$$H_1 V \cong H^{n-1} V \cong H^{n-1}(\overline{U}) \cong H_3(\overline{U}, b\overline{U}) \cong H_3(M, M - U)$$

montre en effet que l'une ou l'autre des hypothèses (i), (ii) ci-dessus entraîne la surjectivité de $H_3 M \to H_3(M, M - U)$ dans la suite exacte d'homologie de $(M, M - U)$. D'où $H_2(M - U) = 0$.

Avec les notations qu'on vient d'introduire, on écrira la condition (2) sous la forme $H_1(\pi) \cong Z$.

(4) Enfin, G étant un groupe $\neq \{1\}$, on désignera par $w(G)$ le plus petit des entiers k tels qu'il existe un ensemble de k éléments de G dont l'adhérence normale soit G. [L'adhérence normale (S) d'un sous-ensemble S de G étant le plus petit sous-groupe normal de G contenant S.] Par convention, $w(\{1\}) = 0$. L'entier $w(G)$ sera appelé le *poids* de G. [S'il n'existe pas de sous-ensemble fini de G dont l'adhérence normale est G, on posera $w(G) = \infty$.] On verra sans peine que si π est groupe de Poincaré de l'espace résiduel d'un plongement différentiable $f: V^n \to M^{n+2}$, où V et M satisfont aux hypothèses ci-dessus, alors $w(\pi) = 1$.

Théorème I.1. — *Soit n un entier ≥ 3. Le groupe π est groupe de* Poincaré *de l'espace complémentaire d'un n-nœud $f: S^n \to S^{n+2}$ si et seulement si π admet une présentation finie, $H_1(\pi) \cong Z$, $H_2(\pi) = 0$ et $w(\pi) = 1$.*

Avant de démontrer (¹) que les conditions énoncées sont suffisantes nous démontrons que $w(\pi) = 1$ est nécessaire.

Lemme I.2. — *Soient M^{n+2} une variété différentielle simplement connexe et V^n une sous-variété connexe de M. Le poids de $\pi_1(M - V)$ est inférieur ou égal à* 1.

Si, en outre, V est compacte, sans bord, et si M est 2-connexe, le poids de $\pi_1(M - V)$ est supérieur ou égal, donc égal à 1.

Pour établir le lemme, il s'agit de démontrer qu'il existe un élément du groupe de Poincaré de $M - V$ dont l'adhérence normale est tout le groupe.

Soit a_0 un point de V et soit T un voisinage tubulaire de V dans M. Appelons Q le disque de dimension 2, fibre de T passant par a_0 et soit x_0 un point du bord de Q. Nous prendrons x_0 comme point base pour le

(¹) La démonstration ci-dessous du théorème I.1 est reproduite de [8] avec une petite amélioration.

groupe de Poincaré de $M - V$. Le bord de Q (orienté de façon arbitraire mais fixe) détermine un élément α de $\pi_1(M - V, x_0)$. Je dis que l'adhérence normale de α est $\pi_1(M - V, x_0)$. Pour le voir, soient $\xi \in \pi^1(M - V, x_0)$ un élément arbitraire de $\pi_1(M - V, x_0)$ et $f : (S^1, a) \to (M - T, x_0)$ une application différentiable représentant ξ. Puisque M est simplement connexe par hypothèse, on peut prolonger f en une application $F : (D^2, S^1) \to (M, M - T)$ qu'on peut supposer différentiable et transverse à V. L'intersection $F(D^2) \cap V$ est alors formée de points isolés, en nombre fini puisque D^2 est compact. Pour chacun des points $b_1, \ldots, b_q \in D^2$, avec $F(b_i) \in V$, on peut supposer qu'il existe un petit disque D_i de centre b_i contenu dans $\operatorname{int} D^2$ tel que $F(D_i)$ soit le disque fibre de T passant par $F(b_i) = a_i$. (On réalisera cette condition en modifiant l'application F dans le voisinage de b_i si cela est nécessaire. On peut supposer en outre que les D_i sont disjoints.) Soient maintenant $w_1, \ldots, w_q$ des chemins sur V joignant a_0 à $a_1, \ldots, a_q$ respectivement. (On peut modifier F pour que les a_i soient distincts, mais cela n'est pas nécessaire.) En utilisant $w_1, \ldots, w_q$, il est alors facile de modifier F dans chaque D_i de sorte que pour un disque $E_i \subset \operatorname{int} D_i$ on ait

$$F(E_i) = Q \quad \text{et} \quad F(D_i - E_i) \subset bT \subset M - V.$$

[On définit la nouvelle application F dans E_i de manière que $F(E_i) = Q$, et on la prolonge à $D_i - E_i$ en remarquant que w_i fournit une homotopie sur bT entre le bord de Q et $F(bD_i)$.] Soit y_i un point du bord de E_i tel que $F(y_i) = x_0$, $i = 1, \ldots, q$. Un chemin t_i de D^2 joignant a [le point base de $S^1 \subset D^2$] à y_i, disjoint de $\operatorname{int} E_j$ pour tout j, fournit par l'application F un lacet représentant un élément $\tau_i \in \pi_1(M - V, x_0)$. En choisissant les t_i mutuellement disjoints dans D^2, on a $\xi = \prod_i \tau_i^{-1} \alpha^{\varepsilon_i} \tau_i$, avec $\varepsilon_i = \pm 1$. Donc $\xi \in (\alpha)$, ce qui achève la démonstration du lemme I.2.

Passons à la suffisance des conditions du théorème I.1.

Soit π un groupe de poids 1 tel que $H_1(\pi) \cong Z$. Supposons qu'il existe une variété différentielle M^{n+2} compacte, sans bord, orientable, telle que $\pi_1 M \cong \pi$, $H_q M = 0$ pour $2 \leq q \leq n$. Si $n \geq 3$, on peut alors construire un n-nœud $f : S^n \to S^{n+2}$, avec $\pi \cong \pi_1(S^{n+2} - f(S^n))$ de la manière suivante. Soit $\varphi_0 : S^1 \to M$ un plongement différentiable représentant un élément $\alpha \in \pi_1 M$ dont l'adhérence normale est $\pi_1 M$. (L'adhérence normale étant invariante si l'on remplace α par un élément conjugué, il est inutile ici de préciser le point base.) Comme M est orientable, le fibré normal de φ_0 est trivial et il existe un plongement différentiable $\varphi : S^1 \times D^{n+1} \to M$ qui prolonge φ_0. (Pour obtenir φ on munit M d'une métrique riemannienne.) Soit alors Σ^{n+2} la variété obtenue à partir de M par la modification sphérique $\chi(\varphi)$. On obtient Σ à partir de la réunion disjointe de $M - \varphi(S^1 \times \mathrm{int} D^{n+1})$ et $D^2 \times S^n$ en identifiant $(x, y) \in S^1 \times S^n \subset D^2 \times S^n$, avec $\varphi(x, y) \in M - \varphi(S^1 \times \mathrm{int} D^{n+1})$. On sait que Σ peut être munie d'une structure différentielle naturelle (*cf.* [13]). On notera $\varphi' : D^2 \times S^n \to \Sigma^{n+2}$ l'inclusion qui est alors un plongement différentiable.

Le théorème de Van Kampen (*cf.* [3]) fournit

$$\pi_1 \Sigma \cong \pi_1 M / (\alpha) = \{ 1 \},$$

en tenant compte de ce que, pour $n > 1$, l'inclusion de $M - \varphi(S^1 \times D^{n+1})$ dans M induit un isomorphisme des groupes de Poincaré. On va voir que $H_* \Sigma \cong H_*(S^{n+2})$. La variété Σ^{n+2} a donc le type d'homotopie de S^{n+2}. Il suffit d'écrire les suites exactes d'homologie des paires $(\Sigma, \varphi'(D^2 \times S^n))$ et $(M, \varphi(S^1 \times D^{n+1}))$. On obtient

$$H_q M \cong H_q(M, \varphi(S^1 \times D^{n+1})) \qquad \text{pour} \quad q \geqq 2,$$

car $\varphi \mid S^1 \times (0)$ représente un générateur de $H_1 M \cong Z$. Or, par excision, on a

$$H_q(M, \varphi(S^1 \times D^{n+1})) \cong H_q(\Sigma, \varphi_{\prime}(D^2 \times S^n))$$

pour tout q. D'où la suite exacte

$$H_q(D^2 \times S^n) \to H_q \Sigma \to H_q M \to H_{q-1}(D^2 \times S^n)$$

pour $q \geqq 2$. Il s'ensuit

$$H_q \Sigma = 0 \qquad \text{pour} \quad 2 \leqq q < n,$$

et comme Σ est une variété de dimension $n + 2$, on conclut

$$H_* \Sigma \cong H_*(S^{n+2}).$$

Puisque $D^2 \times S^n$ est différentiablement plongé dans Σ, en prenant la restriction de ce plongement à $(0) \times S^n$ on obtient un plongement différentiable $g : S^n \to \Sigma^{n+2}$. On a

$$\pi_1(\Sigma - g(S^n)) \cong \pi_1(\Sigma - \varphi'(D^2 \times S^n)) \cong \pi_1(M - \varphi(S^1 \times D^{n+1})) \cong \pi_1 M \cong \pi.$$

(Pour obtenir l'avant-dernier isomorphisme, on utilise $n \geqq 2$). En modifiant la structure différentielle de Σ dans le voisinage d'un point de $\Sigma - g(S^n)$ on peut obtenir S^{n+2} pourvu que $n \geqq 3$. (*Cf.* [30]. Il suffit de former $\Sigma - U$, où U est un disque plongé dans $\Sigma - g(S^n)$ et de recoller $\Sigma - U$ et U par un difféomorphisme $bU \to b(\Sigma - U)$ convenable.) On obtient ainsi un plongement différentiable $f : S^n \to S^{n+2}$ satisfaisant $\pi_1(S^{n+2} - f(S^n)) \cong \pi$.

Pour démontrer le théorème I.1 il suffit donc de construire une variété orientable, compacte, sans bord M^{n+2} telle que $H_q M = 0$ pour $2 \leqq q \leqq n$ et dont le groupe de Poincaré soit le groupe π donné satisfaisant aux conditions du théorème.

Soit $(x_1, \ldots, x_\alpha; R_1, \ldots, R_\beta)$ une présentation finie de π par générateurs et relateurs. On part de la variété

$$M_0 = (S^1 \times S^{n+1}) \# (S^1 \times S^{n+1}) \# \ldots \# (S^1 \times S^{n+1})$$

somme connexe de α copies de $S^1 \times S^{n+1}$. On va obtenir M par modifications sphériques successives de M_0. Le groupe de Poincaré de M_0 est un groupe libre à α générateurs que nous identifions avec $x_1, \ldots, x_\alpha$. (Il est commode de prendre comme « point » base dans M_0 un ouvert contractile.) Soient alors $\varphi_1, \ldots, \varphi_\beta : S^1 \to M_0$ des plongements différentiables dont les images sont disjointes et qui représentent les éléments $R_1, \ldots, R_\beta$ du groupe libre sur $x_1, \ldots, x_\alpha$. Puisque M_0 est orientable, les φ_i ont des fibrés normaux triviaux et, par suite, ils se prolongent en des plongements différentiables $\psi_i : S^1 \times D^{n+1} \to M_0$ d'images disjointes. On notera M_1 la variété obtenue à partir de M_0 par la modification sphérique multiple $\chi(\psi_1, \ldots, \psi_\beta)$. La variété M_0 étant stablement parallélisable (fibré normal trivial dans un espace euclidien de grande dimension), on peut choisir les prolongements ψ_i des φ_i de manière que M_1 soit également stablement parallélisable (*cf.* [10], lemma 6.2). On a des plongements $\psi'_i : D^2 \times S^n \to M_1$ dont les images sont disjointes, et

$$M_1 = \left(M_0 - \bigcup_i \psi_i(S^1 \times \operatorname{int} D^{n+1})\right) \cup \bigcup_i \psi'_i\,(D^2 \times S^n),$$

avec $\psi_i \mid S^1 \times S^n = \psi'_i \mid S^1 \times S^n$. Le théorème de Van Kampen déjà cité fournit

$$\pi_1(M_1) \cong \pi.$$

Il reste à calculer l'homologie de M_1. A cet effet, on examine les suites exactes d'homologie des paires $\left(M_0, \bigcup_i \psi_i(S^1 \times D^{n+1})\right)$ et $\left(M_1, \bigcup_i \psi'_i\,(D^2 \times S^n)\right)$. La suite de la première paire fournit l'isomorphisme

$$H_q(M_0) \cong H_q\left(M_0, \bigcup_i \psi_i(S^1 \times D^{n+1})\right)$$

pour $q \geqq 3$ et montre que $H_2\left(M_0, \bigcup_i \psi_i(S^1 \times D^{n+1})\right)$ est abélien libre.

En utilisant le fait que les groupes relatifs des deux suites sont isomorphes par excision, la suite de la deuxième paire donne

$$H_q(M_1) \cong H_q(M_0) = 0 \qquad \text{pour} \quad 3 \leqq q \leqq n-1.$$

Le groupe $H_2(M_1)$ est abélien libre, mais pas nécessairement nul. Pour obtenir la variété M désirée, il suffit donc de tuer $H_2(M_1)$ par modifications sphériques sans changer le groupe de Poincaré ni introduire de classes d'homologie en dimensions $3, \ldots, n-1$.

Observons tout d'abord que l'homomorphisme de Hurewicz $\rho : \pi_2(M_1) \to H_2(M_1)$ est surjectif. En effet, d'après le théorème de Hopf [6] déjà cité, $H_2(\pi) \cong H_2(M_1)/\rho\, \pi_2(M_1)$, et $H_2(\pi)$ est nul par hypothèse. Il est donc possible de représenter toute classe $\xi \in H_2(M_1)$ par une application $\varphi_0 : S^2 \to M_1$. Puisque $\dim M_1 = n+2 > 4$, on peut en fait représenter ξ par un plongement différentiable que nous noterons encore φ_0. (On sait que l'hypothèse $\dim M_1 \neq 4$ est utilisée ici de façon essentielle. *Cf.* [9].) Ensuite, M_1 étant stablement parallélisable par construction, φ_0 a un fibré normal trivial. Quelle que soit $\xi \in H_2(M_1)$, il existe donc un plongement différentiable $\varphi : S^2 \times D^n \to M_1$ représentant ξ.

Soient alors $\xi_1, \ldots, \xi_r$ une base de $H_2 M_1$, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ des plongements différentiables de $S^2 \times D^n$ dans M_1 représentant $\xi_1, \ldots, \xi_r$ respectivement et dont les images sont disjointes. On opère la modification sphérique multiple $\chi(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$. Soit M la variété ainsi obtenue. On a des plongements différentiables

$$\varphi'_i : D^3 \times S^{n-1} \to M$$

et

$$M = \Big(M_1 - \bigcup_i \varphi_i(S^2 \times B^n)\Big) \cup \bigcup_i \varphi'_i\,(D^3 \times S^{n-1}),$$

où $B^n = \operatorname{int} D^n$.

La variété M est la variété cherchée. En effet,

$$\pi_1(M) \cong \pi_1\Big(M - \bigcup_i \varphi'_i\,(D^3 \times S^{n-1})\Big),$$

et

$$\pi_1(M_1) \cong \pi_1\Big(M_1 - \bigcup_i \varphi_i(S^2 \times D^n)\Big),$$

car $n \geqq 3$. On a donc

$$\pi_1(M) \cong \pi_1(M_1) \cong \pi.$$

Posons

$$N = M_1 - \bigcup_i \varphi_i(S^2 \times B^n) = M - \bigcup_i \varphi'_i\,(B^3 \times S^{n-1}).$$

On a la suite exacte

$$H_{q+1}M_1 \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(M_1, N) \to H_q N \to H_q M_1 \to H_q(M_1, N).$$

Par excision, $H_q(M_1, N) \cong \sum^r H_q(S^2 \times D^n, S^2 \times S^{n-1})$. Donc, pour $q < n-1$, on a $H_q N \cong H_q M_1$. Pour $q = n-1$, $H_n(M_1, N) \cong rZ$ (somme directe de r copies de Z), et si $\eta \in H_n(M_1)$, l'image de $j_*\eta$ dans rZ s'écrit $(\xi_1.\eta, \ldots, \xi_r.\eta)$, où $\xi_i.\eta$ est le coefficient d'intersection ($\xi_i \in H_2 M_1$). D'après le théorème de dualité de Poincaré, $H_2 M_1$ n'ayant pas de torsion, $j_* : H_n M_1 \to H_n(M_1, N)$ est un isomorphisme. On a donc $H_q N \cong H_q M_1$ pour $q \leqq n-1$. Donc, pour $n \geqq 3$, $H_2 N$ est engendré par les classes ξ'_i représentées par $\varphi_i(S^2 \times Q_0)$ dans bN, où $Q_0 \in bD^n$. Or, $\varphi'_i(D^3 \times Q_0)$ représente une classe de $H_3(M, N)$ qui s'envoie sur ξ'_i par $d : H_3(M, N) \to H_2 N$. Ces groupes ayant le même rang, il en résulte que d est un isomorphisme. La suite exacte

$$H_{q+1}(M, N) \xrightarrow{d} H_q N \to H_q M \to H_q(M, N) \xrightarrow{d} H_q N$$

fournit alors $H_q M = 0$ pour $2 \leqq q \leqq n-1$. La nullité de $H_n M$ en résulte par dualité de Poincaré. Le théorème I.1 est donc démontré.

2. Les nœuds de dimension 2.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1, les conditions énoncées au théorème I.1 sur le groupe π sont nécessaires pour l'existence d'un nœud $f : S^2 \to S^4$ avec $\pi_1(S^4 - f(S^2)) \cong \pi$. En examinant la démonstration de la suffisance de ces conditions on observe que l'hypothèse $n \geqq 3$ a été essentiellement utilisée en deux endroits.

1° Lorsqu'on a obtenu un plongement $g : S^n \to \Sigma^{n+2}$, avec $\pi_1(\Sigma^{n+2} - g(S^n)) \cong \pi$ on a modifié la structure différentielle de Σ^{n+2} pour en faire la sphère canonique S^{n+2}.

2° Lorsqu'on a opéré les modifications sphériques sur M_1 en dimension 2.

Nous négligerons la difficulté 1° en admettant les plongements $S^2 \to \Sigma^4$ dans une variété différentielle du type d'homotopie de S^4. (J'ignore complètement si les sphères d'homotopie de dimension 4 ont la même « théorie des nœuds » que S^4.) On va voir qu'on peut trivialement éliminer la difficulté 2° en imposant des conditions algébriques plus fortes (non nécessaires) sur le groupe π.

Théorème I.3. — *Soit π un groupe ayant une présentation finie de la forme $\pi = (x_1, \ldots, x_\alpha; R_1, \ldots, R_{\alpha-1})$ et tel que $w(\pi) = 1$ et $H_1(\pi) \cong Z$. Il existe alors une 4-sphère d'homotopie différentielle Σ^4 et un plongement différentiable $f : S^2 \to \Sigma^4$ tel que $\pi_1(\Sigma^4 - f(S^2)) \cong \pi$.*

La démonstration suit pas à pas les raisonnements du paragraphe précédent. On démontre tout d'abord qu'il suffit de construire une variété différentielle M^4 compacte, sans bord, orientable, telle que $\pi_1(M) \cong \pi$ et $H_2(M) = 0$. On obtient alors Σ^4 et le plongement $f : S^2 \rightarrow \Sigma^4$ en opérant une modification sphérique associée à un plongement $\varphi : S^1 \times D^3 \rightarrow M^4$ représentant un élément $\alpha \in \pi_1(M)$ dont l'adhérence normale est tout le groupe $\pi_1(M)$.

Pour construire une variété M^4 avec les propriétés désirées, on part de $M_0 = (S^1 \times S^3) \# \ldots \# (S^1 \times S^3)$, somme connexe de α copies de $S^1 \times S^3$. On construit ensuite M_1 comme au paragraphe précédent. Le fait que la présentation de π utilisée ait exactement un générateur de plus que le nombre des relations [joint à l'hypothèse $H_1(\pi) \cong Z$] implique que M_1 satisfait alors automatiquement à la condition $H_2(M_1) = 0$. On peut donc prendre $M = M_1$ et le théorème I.3 est démontré.

Remarque. — Il existe des groupes de Poincaré d'espaces complémentaires de 2-nœuds $f : S^2 \rightarrow S^4$ qui n'ont pas de présentation de la forme $(x_1, \ldots, x_\alpha; R_1, \ldots, R_{\alpha-1})$. Par exemple, le groupe de présentation $(a, x; a^3, axax^{-1})$ (*cf.* [8]).

Chapitre II.

Groupes d'homotopie supérieurs.

Soit $f : S^n \rightarrow S^{n+2}$ un n-nœud. Le fibré normal en sphères de f, de fibre S^1, est plongé dans $X = S^{n+2} - f(S^n)$. Dans ce chapitre, on se restreint aux nœuds satisfaisant à l'hypothèse suivante :

($\mathbf{H}_q$) *L'inclusion de la fibre $S^1 \rightarrow X$ induit un isomorphisme $\pi_i(S^1) \rightarrow \pi_i(X)$ des groupes d'homotopie de dimensions $i < q$ pour un certain entier $q \geqq 2$.*

Soit $\mathbf{J}$ le groupe multiplicatif infini cyclique de générateur t. On identifie $\pi_1(S^1)$ et $\pi_1(X)$ avec $\mathbf{J}$. Le groupe $\pi_q(S^{n+2} - f(S^n))$ admet alors une structure de $Z[\mathbf{J}]$-module, où $Z[\mathbf{J}]$ est l'anneau de groupe de $\mathbf{J}$ sur les entiers.

On se propose de caractériser algébriquement les $Z[\mathbf{J}]$-modules qui se présentent comme groupes d'homotopie $\pi_q(S^{n+2} - f(S^n))$ pour un n-nœud f satisfaisant ($\mathbf{H}_q$).

Soit A un $Z[\mathbf{J}]$-module. On notera $D : A \rightarrow A$ l'homomorphisme de $Z[\mathbf{J}]$-modules défini par $D(a) = (t - 1)a$. Comme d'habitude, $A^{\mathbf{J}}$ et $A_{\mathbf{J}}$ désignent noyau et conoyau de D respectivement. Un module est de type fini s'il admet un nombre fini de générateurs.

Théorème II.1. — *Soit A un $Z[\mathbf{J}]$-module et q, n des entiers tels que $1 < q < \frac{1}{2}n$. Il existe un n-nœud $f : S^n \rightarrow S^{n+2}$, avec $\pi_i(S^1) \cong \pi_i(S^{n+2} - f(S^n))$*

pour $i < q$ *et* $A \cong \pi_q(S^{n+2} - f(S^n))$ *si et seulement si* A *est de type fini et* $A_{\mathbf{J}} = 0$.

(L'isomorphisme $A \cong \pi_q(S^{n+2} - f(S^n))$ étant bien entendu un isomorphisme de $Z[\mathbf{J}]$-modules.)

J. LEVINE a démontré que si $f : S^n \to S^{n+2}$ est un nœud avec $n \geqq 4$ et $\pi_i(S^1) \cong \pi_i(S^{n+2} - f(S^n))$ pour $i \leqq \frac{1}{2}(n+1)$, il existe un difféomorphisme $h : S^n \to S^n$ tel que fh soit difféotope au plongement canonique. En particulier, les hypothèses de LEVINE entraînent que $\pi_i(S^1) \cong \pi_i(S^{n+2} - f(S^n))$ pour tout i. Il reste donc à compléter le théorème II.1 par des théorèmes analogues pour $q = \frac{1}{2}n$ et $q = \frac{1}{2}(n+1)$.

THÉORÈME II.2. — *Soient* A *un* $Z[\mathbf{J}]$*-module et* q *un entier* $\geqq 3$. *Il existe un nœud* $f : S^{2q} \to S^{2q+2}$ *avec* $\pi_i(S^1) \cong \pi_i(S^{2q+2} - f(S^{2q}))$ *pour* $i < q$ *et* $A \cong \pi_q(S^{2q+2} - f(S^{2q}))$ *si et seulement si* $A_{\mathbf{J}} = 0$ *et* A *possède une présentation de la forme*

$$\left(x_1, \ldots, x_\alpha;\ \sum_j (ta_{ij} - b_{ij})\, x_j,\ d_j\, x_j\right),$$

où les matrices entières carrées a, b *satisfont à la relation*

$$d_i a_{ij} + (-1)^{q+1} d_j b_{ji} = 0 \qquad (d_k \in Z)$$

pour tout couple d'indices (i, j), *avec* $1 \leqq i \leqq \alpha$, $1 \leqq j \leqq \alpha$.

On trouvera à la fin du paragraphe 4 quelques remarques sur ces modules. Leur étude algébrique reste à faire.

Pour étudier le cas $q = \frac{1}{2}(n+1)$, il est nécessaire d'admettre les plongements $f : \Sigma^{2q-1} \to S^{2q+1}$, où Σ^{2q-1} est une sphère d'homotopie différentielle de dimension $2q - 1$.

THÉORÈME II.3. — *Soit* A *un* $Z[\mathbf{J}]$*-module et* q *un entier* $\geqq 3$. *Il existe une* $(2q-1)$*-sphère d'homotopie différentielle* Σ^{2q-1} *et un plongement* $f : \Sigma^{2q-1} \to S^{2q+1}$ *avec* $\pi_i(S^{2q+1} - f(\Sigma^{2q-1})) \cong \pi_i(S^1)$ *pour* $i < q$ *et* $\pi_q(S^{2q+1} - f(\Sigma)) \cong A$ *si et seulement si* $A_{\mathbf{J}} = 0$ *et* A *possède une présentation de la forme*

$$\left(x_1, \ldots, x_\alpha;\ \sum_j (ta_{ij} + (-1)^q a_{ji})\, x_j\right).$$

REMARQUE. — Pour q pair, on peut dans ce théorème remplacer Σ^{2q-1} par la sphère S^{2q-1} munie de la structure différentielle canonique pourvu qu'on ajoute aux conditions sur A la restriction suivante : La forme quadratique définie par la matrice (unimodulaire) symétrique $a + a'$ doit avoir une signature divisible par $2^{2m-4}(2^{2m-1} - 1) B_m j_m a_m . m^{-1}$, où $m = \frac{1}{2} q$. (*Cf.* [10], § 7, form. (1) pour les notations.)

Pour $q = 3$ ou 7, on a nécessairement $\Sigma^{2q-1} = S^{2q-1}$ dans le théorème ci-dessus. Pour q impair, différent de 3 et 7, la question de savoir si l'on peut prendre $\Sigma^{2q-1} = S^{2q-1}$ dans le théorème II.3 est liée au problème de l'invariant d'Arf. (*Cf.* [10], où le problème est posé, et [1], où il est partiellement résolu.) Si A, tel que $A_J = 0$, a une présentation de la forme $\left(x_1, \ldots, x_\alpha; \sum_j (ta_{ij} - a_{ji}) x_j\right)$, la matrice $a - a'$ est unimodulaire. La formule $Q(\xi) = \sum_{i,j} \xi_i a_{ij} \xi_j \bmod 2$ définit alors une forme quadratique non dégénérée sur l'espace vectoriel $\mathbf{F}_2^\alpha$. Si l'invariant d'Arf de Q est nul, il existe pour tout q impair $\geqq 3$ un $(2q - 1)$-nœud $f : S^{2q-1} \to S^{2q+1}$ satisfaisant $(\mathbf{H}_q)$ et tel que $\pi_q(S^{2q+1} - f(S^{2q-1})) \cong A$.

On verra en effet que dans les deux cas (q pair ou impair), Σ^{2q-1} est le bord d'une variété stablement parallélisable V^{2q}, $(q - 1)$-connexe, ayant une base $\xi_1, \ldots, \xi_\alpha \in H_q V$ telle que $\xi_i . \xi_j = a_{ij} + (-1)^q a_{ji}$. Pour q pair, la remarque ci-dessus résulte alors immédiatement de ([10], theorem 7.5). Pour q impair, la forme quadratique Q s'identifie à l'opération ψ de ([10], § 8) et la remarque résulte de ([10], lemma 8.4).

1. Préliminaires algébriques.

Nous aurons besoin d'un analogue pour les modules du théorème de Tietze. On appellera *transformation élémentaire* d'une présentation finie $(x_1, \ldots, x_\alpha; R_1, \ldots, R_\beta)$ d'un module (unitaire sur un anneau commutatif Λ) l'une des transformations suivantes.

(1) On ajoute un générateur $x_{\alpha+1}$ et un relateur $R_{\beta+1}$ de la forme $R_{\beta+1} = x_{\alpha+1} - W(x_1, \ldots, x_\alpha)$, où W est une combinaison linéaire des $x_1, \ldots, x_\alpha$ à coefficients dans Λ.

(2) On supprime un générateur x_α qui ne figure que dans un seul relateur R_β de la forme $R_\beta = x_\alpha - W(x_1, \ldots, x_{\alpha-1})$, et l'on supprime également ce relateur.

(3) On ajoute un relateur $R_{\beta+1}$ conséquence des autres relateurs, c'est-à-dire de la forme $R_{\beta+1} = \sum_1^\beta a_i R_i$, avec $a_i \in \Lambda$.

(4) On supprime un relateur qui est conséquence des autres relateurs.

LEMME II.4. — *Soient*

$$(x; R) = (x_1, \ldots, x_\alpha; R_1, \ldots, R_\beta) \quad et \quad (y; S) = (y_1, \ldots, y_\lambda; S_1, \ldots, S_\mu)$$

deux présentations qui définissent des modules isomorphes. Il existe une suite finie de transformations élémentaires qui conduit de $(x;, R)$ *à* $(y; S)$.

La démonstration est essentiellement la même que celle du théorème de Tietze en théorie des groupes. Soient

$$h(x_i) = X_i(y_1, \ldots, y_\lambda) \qquad \text{et} \qquad g(y_j) = Y_j(x_1, \ldots, x_\alpha)$$

les formules qui expriment un isomorphisme et son inverse entre les deux modules $L_\alpha/(R)$ et $L_\lambda/(S)$. On passe d'abord de $(x; R(x))$ à $(x, y; R(x), y - Y(x))$ par suite de transformations de type (1). Comme $S(y)$ représente O dans $(y;S)$, il s'ensuit que $gS(y)=S(gy)=S(Y(x))$ est conséquence de $R(x)$. Donc, $S(y)$ est conséquence de R et $y - Y(x)$. On peut donc passer à la présentation $(x, y; R(x), S(y), y - Y(x))$ par des transformations de type (3). On considère maintenant les expressions $x_i - X_i(y_1, \ldots, y)$. On a $gh(x_i) = x_i \bmod (R)$ dans L_α. Donc $X_i(Y(x)) - x_i$ est conséquence de R. Il s'ensuit que $X_i(y) - x_i$ est conséquence de R et $y - Y(x)$. Autrement dit, en utilisant des transformations du type (3), on passe à la présentation $(x, y; R(x), S(y), y - Y(x), x - X(y))$. Il suffit alors d'opérer en sens inverse, c'est-à-dire d'utiliser les transformations de types (2) et (4) pour passer à la présentation $(y; S)$.

Appelons *excès* d'une présentation $(x_1, \ldots, x_\alpha; R_1, \ldots, R_\beta)$ la différence $\beta - \alpha$. Si $(x; R)$ est une présentation d'excès nul, les R_i s'expriment par $R_i = \sum_j a_{ij} x_j$, les $a_{ij} \in \Lambda$ formant une matrice carrée. On appellera *déterminant de la présentation* le déterminant de cette matrice.

Le déterminant est essentiellement un invariant du module.

LEMME II.5. — *Soient* $(x; R)$ *et* $(y; S)$ *deux présentations d'excès nul qui définissent des* Λ*-modules isomorphes. Soient* a *et* b *les matrices des deux présentations. Si* Λ *n'a pas de diviseur de zéro, on a* $\det(a) = \varepsilon . \det(b)$, *où* ε *est un élément inversible de* Λ.

Le déterminant n'est autre qu'un générateur de l'idéal élémentaire (principal) $\mathcal{E}_0$ de la matrice de la présentation (notations de [3], p. 101). Une transformation élémentaire de la présentation ne change pas $\mathcal{E}_0$. D'où la conclusion du lemme.

Dans la suite de ce paragraphe nous supposons que $\Lambda = Z[\mathbf{J}]$. Rappelons que $Z[\mathbf{J}]$ est un anneau noethérien, et, par suite, tout $Z[\mathbf{J}]$-module de type fini est noethérien. Nous utiliserons les deux conséquences suivantes de cette remarque.

LEMME II.6. — *Tout $Z[\mathbf{J}]$-module de type fini admet une présentation finie.*

LEMME II.7. — *Si A est un $Z[\mathbf{J}]$-module de type fini tel que $A_{\mathbf{J}} = 0$, alors $A^{\mathbf{J}} = 0$.*

Autrement dit, si $D : A \to A$ est surjectif, D est un automorphisme de A.

Enfin nous utiliserons le lemme suivant qui sera d'ailleurs redémontré par voie topologique.

LEMME II.8. — *Si A est un $Z[\mathbf{J}]$-module de type fini tel que $A_{\mathbf{J}} = 0$, le sous-module $T(A)$ des éléments d'ordre fini* ([2]) *est fini.*

Par contre, $A/T(A)$ n'est pas en général un groupe abélien de type fini. [Exemple : $Z[\mathbf{J}]/(2t - 1)$.]

On observe tout d'abord que D induit un automorphisme de $T(A)$. Il est donc suffisant de démontrer le lemme lorsque $A = T(A)$. Comme A est de type fini, il existe un entier m tel que $mA = 0$. Par récurrence sur le nombre des diviseurs de m, on se ramène au cas où $m = p$ est un nombre premier. Le dévissage se poursuit par une récurrence sur le nombre des générateurs de A. Si A est engendré par $x_1, \ldots, x_\alpha$, on pose $A_1 = (x_1)$ et $B = A/A_1$. Comme $D(A_1) \subset A_1$, il s'ensuit que $D \mid A_1$ et $D_B : B \to B$ sont des automorphismes, et l'on est ramené au cas où A (tel que $pA = 0$) est monogène, engendré disons par x. Comme $D : A \to A$ est un automorphisme, il existe un élément $f(t) \in Z[\mathbf{J}]$, tel que

$$x = (t - 1) f(t) x.$$

Il existe donc un entier $m \geqq 0$ tel que

$$t^m x = (t - 1)(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) x,$$

avec $n \geqq 0$ et $a_0, \ldots, a_n \in Z/pZ$. Cette relation n'étant pas identiquement satisfaite, i. e. $T^m - (T - 1)(a_0 + \ldots + a_n T^n) \neq 0$ dans $Z_p[T]$, il existe un entier $r > 0$ tel que

$$at^r x = (b_0 + b_1 t + \ldots + b_{r-1} t^{r-1}) x,$$

où $a \in Z/pZ$ est différent de 0, donc inversible, et $b_0, \ldots, b_{r-1} \in Z/pZ$. Ainsi $t^r x$ s'exprime comme combinaison linéaire de $x, tx, \ldots, t^{r-1}x$ à coefficients dans Z/pZ. Le même raisonnement fournit un entier $s > 0$ tel que $t^{-s}x$ s'exprime en fonction de $t^{-s+1}x, \ldots, t^{-1}x, x$. Donc, les éléments

$$t^{-s+1}x, \quad \ldots, \quad t^{-1}x, \quad x, \quad tx, \quad \ldots, \quad t^r x$$

engendrent A comme groupe abélien, ce qui achève la démonstration.

([2]) Un élément $a \in A$ est d'ordre fini s'il existe un *entier* $m \neq 0$, tel que $ma = 0$. Dans ce chapitre, torsion signifie Z-torsion.

2. Décomposition en anses de certaines variétés.

Soit $f : S^n \to S^{n+2}$ un nœud avec $n \geqq 3$. Supposons que l'inclusion $S^1 \to S^{n+2} - f(S^n)$, où S^1 est la fibre du fibré normal de f, induise un isomorphisme $\pi_i(S^1) \to \pi_i(S^{n+2} - f(S^n))$ pour $i < q$, avec $q \leqq \frac{1}{2}(n+1)$. On va démontrer que $A = \pi_q((S^{n+2} - f(S^n))$ est un $Z[\mathbf{J}]$-module de type fini tel que $A_{\mathbf{J}} = 0$.

Comme f a un fibré normal trivial, il existe un plongement φ : $S^n \times D^2 \to S^{n+2}$ prolongeant f. Soit $M = \chi(S^{n+2}, \varphi)$ la variété différentielle obtenue par modification sphérique. On a $\pi_1 M \cong \mathbf{J}$, $\pi_i M = 0$ pour $1 < i < q$, et $\pi_q M \cong A$. D'autre part, $H_i M = 0$ pour $2 \leqq i \leqq n$. Nous nous proposons d'étudier les décompositions en anses des variétés de ce genre.

Lemme II.9. — *Soient M^{n+2} une variété différentielle connexe, orientable, compacte, sans bord, de dimension $\geqq 5$ et q un entier tel que $1 < q \leqq \frac{1}{2}(n+1)$. Supposons que*

$$\pi_1 M \cong \mathbf{J}, \qquad \textit{et} \qquad \pi_i M = 0 \quad \textit{pour } 1 < i < q.$$

Il existe une décomposition en anses de M ne comportant qu'une seule anse d'indice 0, 1, $n+1$ et $n+2$, et aucune anse d'indice k pour $1 < k < q$ et $n - q + 2 < k < n + 1$.

Si X^{n+2} est une variété à bord et $\varphi : S^{k-1} \times D^{n-k+2} \to bX$ un plongement différentiable, on notera $X + (\varphi^k)$ la variété obtenue en attachant à X l'anse (φ^k) d'indice k par le plongement φ. Avec cette notation, le lemme affirme l'existence d'une décomposition en anses de M de la forme

$$M = D^{n+2} + (\varphi^1) + (\varphi_1^q) + \ldots + (\varphi_\alpha^q) + \ldots \\ + (\varphi_1^{n-q+2}) + \ldots + (\varphi_\lambda^{n-q+2}) + (\varphi^{n+1}) + (\varphi^{n+2}).$$

On appliquera ce lemme en prenant pour M la variété $\chi(S^{n+2}, \varphi)$ obtenue ci-dessus. La décomposition en anses de M fournit une présentation finie de $A \cong \pi_q M$. Les anses (φ_1^q), ..., (φ_α^q) d'indice q fournissent les générateurs $x_1, \ldots, x_\alpha$ et les anses (φ_1^{q+1}), ..., (φ_β^{q+1}) d'indice $q+1$ les relateurs $R_1, \ldots, R_\beta$ d'une présentation de A. La condition $A_{\mathbf{J}} = 0$, c'est-à-dire $A/DA = 0$, est équivalente à $H_q M = 0$. Le lemme II.9 implique donc la nécessité des conditions (1) A est de type fini, (2) $A_{\mathbf{J}} = 0$ des théorèmes II.1, II.2 et II.3.

Pour démontrer le lemme II.9, prenons sur M une fonction de Morse-Smale $\mu : M \to R$, i. e. une fonction différentiable sans point critique dégénéré, avec un seul minimum et un seul maximum, et telle que si x, y

sont des points critiques d'indice r, s respectivement, avec $r < s$, alors $\mu(x) < \mu(y)$. Soit

$$M = D^{n+2} + (\varphi_1^1) + \ldots + (\varphi_\alpha^1) + (\varphi_1^2) + \ldots + (\varphi_\beta^2) + \ldots$$

la décomposition en anses ordonnée de M associée à μ. (*Cf.* J. Milnor [12].)

Notations. — On désignera par X_{k-1} la réunion des anses d'indice $< k$, et par Y_{k-1} le bord de X_{k-1}. La notation

$$X_{k-1} + (\varphi_1^k) + \ldots + (\varphi_\lambda^k),$$

où toutes les anses écrites ont le même indice signifie toujours que les anses (φ_i^k) sont attachées à X_{k-1} par des plongements φ_i^k : $S^{k-1} \times D^{n-k+2} \to Y_{k-1}$ dont les images sont disjointes, i. e. on demande que les anses d'un indice donné soient attachées simultanément. Il est bien connu, et facile de voir qu'on peut toujours se ramener à ce cas.

Si (φ_i^k) est une anse d'indice k attachée par le plongement φ_i^k : $S^{k-1} \times D^{n-k+2} \to Y_{k-1}$, on désignera par S_i^{n-k+1}, resp. D_i^{n-k+2}, les images de $(O) \times S^{n-k+1}$, resp. $(O) \times D^{n-k+2}$, dans l'anse (φ_i^k). Les sous-variétés S_i^{n-k+1} et D_i^{n-k+2} seront appelées la *sphère* et le *disque transverses* de l'anse (φ_i^k) respectivement. L'*âme* de l'anse (φ_i^k) est l'image Δ_i^k du disque $D^k \times (O)$ dans (φ_i^k).

On dira que l'anse (φ_i^k) est *trivialement attachée* si

$$\varphi_i^k : S^{k-1} \times D^{n-k+2} \to Y_{k-1}$$

se factorise par le plongement canonique $S^{k-1} \times D^{n-k+2} \to R^{n+1}$ et un plongement $R^{n+1} \to Y_{k-1}$. L'anse (φ_i^k) est *presque trivialement attachée* si φ_i^k se factorise par des plongements

$$\psi : S^{k-1} \times D^{n-k+2} \to R^{n+1} \qquad \text{et} \qquad R^{n+1} \to Y_{k-1},$$

où $\psi \mid S^{k-1} \times (0)$ est le plongement canonique. Avec ces notations nous passons à la démonstration proprement dite du lemme II.9.

La décomposition en anses de M ci-dessus fournit une présentation $(x_1, \ldots, x_\alpha; R_1, \ldots, R_\beta)$ du groupe de Poincaré de M. Soit $W(x_1, \ldots, x_\alpha)$ une expression d'un générateur de $\pi_1 M \cong \mathbf{J}$. On attache à X_1 une nouvelle anse (φ_0^1) d'indice 1 trivialement attachée, et l'on désigne par x_0 le nouveau générateur de $\pi_1(X_1 + (\varphi_0^1))$ correspondant à (φ_0^1). On attache à $X_1 + (\varphi_0^1)$ une anse (φ_0^2) d'indice 2 par un plongement

$$\varphi_0^2 : \quad S^1 \times D^n \to b(X_1 + (\varphi_0^1))$$

représentant $x_0 W$, tel que $\varphi_0^2(S^1 \times (0))$ rencontre la sphère transverse de (φ_0^1) en un seul point (transversalement), et

$$\varphi_0^2(S^1 \times D^n) \cap \varphi_j^2(S^1 \times D^n) = \emptyset \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, \beta.$$

On sait que $X_1 + (\varphi_0^1) + (\varphi_0^2)$ est difféomorphe à X_1 par un difféomorphisme de degré $+1$. *Notation* $X_1 \approx X_1 + (\varphi_0^1) + (\varphi_0^2)$ (*cf.* SMALE [20]). Ce difféomorphisme induit l'identité sur le groupe de Poincaré. D'autre part, on peut former la variété $X_1 + (\varphi_0^1) + (\varphi_0^2) + (\varphi_1^2) + \ldots + (\varphi_\beta^2)$. Dans l'intention de faire disparaître les anses $(\varphi_1^1), \ldots, (\varphi_\alpha^1)$, considérons des anses (ψ_i^2), $i = 1, \ldots, \alpha$, trivialement attachées à $X_1 + (\varphi_0^1)$, disjointes de $(\varphi_0^2), (\varphi_1^2), \ldots, (\varphi_\beta^2)$. On peut former

$$X_1 + (\varphi_0^1) + (\varphi_0^2) + \Sigma_1^\beta(\varphi_j^2) + \Sigma_1^\alpha(\psi_i^2),$$

et comme les anses (ψ_i^2) sont trivialement attachées, on peut attacher à la variété ci-dessus des anses (ψ_k^3), $k = 1, \ldots, \alpha$, telles que

$$X_1 + (\varphi_0^1) + \Sigma_0^\beta(\varphi_j^2) \approx X_1 + (\varphi_0^1) + \Sigma_0^\beta(\varphi_j^2) + \Sigma_1^\alpha(\psi_i^2) + \Sigma_1^\alpha(\psi_k^3).$$

Pour tout $i = 1, \ldots, \alpha$, il existe une expression $x_i x_0^{m_i}$ qui est conséquence de $R_1, \ldots, R_\beta$ et $x_0 W$. Il en résulte que la famille de plongements

$$\psi_i^2 : S^1 \times D^n \to b(X_1 + (\varphi_0^1) + \Sigma_0^\beta(\varphi_j^2))$$

est difféotope dans le complément de $\bigcup_j \varphi_j^2(S^1 \times D^n)$ à une famille de plongements ψ_i' dont les images sont contenues dans $b(X_1 + (\varphi_0^1))$ et représentent $x_i x_0^{m_i}$. [Le groupe de Poincaré de $b(X_1 + (\varphi_0^1))$ est isomorphe par inclusion au groupe de Poincaré de $X_1 + (\varphi_0^1)$.] On obtient ψ_i' par l'opération bien connue, due à SMALE, qui consiste à faire passer l'image du plongement ψ_i par dessus certaines anses (φ_j^2) par une difféotopie dans $b(X_1 + (\varphi_0^1) + \Sigma_0^\beta(\varphi_j^2))$. Cette opération permet de multiplier l'élément de $\pi_1(b(X_1 + (\varphi_0^1))$ représenté par le bord de l'anse (ψ_i^2) par n'importe quel produit de conjugués des éléments $R_1, \ldots, R_\beta, x_0 W$ représentés par les bords de $(\varphi_0^2), (\varphi_1^2), \ldots, (\varphi_\beta^2)$. Comme $\dim b(X_1 + (\varphi_0^1)) \geqq 4$, on peut supposer que $\psi_i'(S^1 \times (0))$ rencontre la sphère transverse de (φ_i^1) en un seul point et ne rencontre pas la sphère transverse de (φ_k^1) pour $k \neq 0, i$. (Deux plongements différentiables homotopes de S^1 dans une variété de dimension $\geqq 4$ sont difféotopes. Il existe en effet une immersion de $S^1 \times I$ dans la variété qui fournit une homotopie régulière entre les deux plongements. On se débarrasse des points de self-intersection en les « poussant » au-delà du bord.) Dans leur nouvelle position, les anses (φ_i^1) et (ψ_i') se détruisent mutuellement et l'on a

$$X_1 + (\varphi_0^1) + \Sigma_1^\alpha(\psi_i') \approx D^{n+2} + (\varphi_0^1).$$

On obtient ainsi pour X_2 une décomposition en anses de la forme

$$X_2 \approx D^{n+2} + (\varphi^1) + \Sigma_0^\beta(\varphi_j^2) + \Sigma_1^\alpha(\psi_k^3),$$

où les anses (φ_j^2) sont presque trivialement attachées.

On applique alors le même raisonnement à la décomposition en anses duale associée à la fonction $-\mu$, ce qui réduit à 1 le nombre des anses d'indice $n+1$. Si $q=2$, le lemme est démontré.

Si $q>2$ (ce qui implique $\dim M \geqq 7$), il reste à faire disparaître les anses d'indices $2, \ldots, q-1$. Supposons par récurrence que M admette une décomposition en anses de la forme

$$M = D^{n+2} + (\varphi^1) + (\varphi_1^k) + \ldots + (\varphi_\alpha^k) + (\varphi_1^{k+1}) + \ldots,$$

avec $2 \leqq k < q$, où les anses $(\varphi_1^k), \ldots, (\varphi_\alpha^k)$ sont presque trivialement attachées. Tout d'abord, puisque $\pi_2 M = \ldots = \pi_k M = 0$, on a $H_k M = H_k(\mathbf{J}) = 0$ et $H^k M = 0$. Donc M est stablement k-parallélisable (*cf.* J. Milnor [13], § 5). Autrement dit, X_k est stablement parallélisable. Il résulte alors facilement du lemme 6.2 de [10] que les anses $(\varphi_1^k), \ldots, (\varphi_\alpha^k)$ sont nécessairement trivialement attachées.

Considérons maintenant X_{k+1}. Puisque (φ_i^k) est trivialement attachée $(i=1, \ldots, \alpha)$, on peut attacher des anses (ψ_i^{k+1}) à X_k de sorte que $X_k + \Sigma_1^\alpha(\psi_i^{k+1}) = D^{n+2} + (\varphi^1)$. On peut supposer les anses (ψ_i^{k+1}) disjointes des anses (φ_j^{k+1}), car $2k < n+1$. On peut donc former $X_{k+1} + \Sigma_1^\alpha(\psi_i^{k+1})$ et

$$X_{k+1} + \Sigma_1^\alpha(\psi_i^{k+1}) \approx D^{n+2} + (\varphi^1) + (\varphi_1^{k+1}) + \ldots + (\varphi_\beta^{k+1}).$$

D'autre part, $\pi_k(Y_{k+1}) = 0$, car $\pi_k(X_{k+1}) = \pi_k(M) = 0$, et X_{k+1} peut être obtenu à partir de Y_{k+1} en attachant des anses dont les indices $n-k+1, n-k+2$ et $n+2$ sont plus grands que $k+1$ ($k < q \leqq \frac{1}{2}(n+1)$ entraîne $2k < n$). Il en résulte que les applications $\psi_i^{k+1} \mid S^k \times (0)$ sont homotopes à 0 dans Y_{k+1}, et comme $2k < n$, les anses (ψ_i^{k+1}) sont presque trivialement attachées à X_{k+1}. En remplaçant, si cela est nécessaire, le plongement $\psi_i^{k+1} : S^k \times D^{n-k+1} \to Y_{k+1}$ par un plongement défini par la formule $\psi_i^{k+1}(x, \alpha(x).y)$, $(x, y) \in S^k \times D^{n-k+1}$, avec un choix convenable d'une application différentiable $\alpha : S^k \to SO_{n-k+1}$, on peut supposer que les anses (ψ_i^{k+1}) sont trivialement attachées à X_{k+1}. Il existe alors des anses (ψ_i^{k+2}) telles que

$$X_{k+1} \approx X_{k+1} + \Sigma_1^\alpha(\psi_i^{k+1}) + \Sigma_1^\alpha(\psi_i^{k+2}).$$

On en conclut

$$X_{k+1} \approx D^{n+2} + (\varphi^1) + (\varphi_1^{k+1}) + \ldots + (\varphi_\beta^{k+1}) + (\psi_1^{k+2}) + \ldots + (\psi_\alpha^{k+2}).$$

D'où une décomposition en anses de M sans anses d'indice k. Comme dans la décomposition en anses ci-dessus les anses (φ_j^{k+1}) sont presque trivialement attachées ($2k < n$), le raisonnement par récurrence est terminé.

On fait disparaître les anses d'indices $k = n - q + 3, \dots, n$ en appliquant le même procédé à la décomposition duale. Le lemme II.9 est ainsi démontré.

3. Suffisance des conditions du théorème II.1.

On procède essentiellement comme au chapitre I. Il s'agit de construire une variété orientable M^{n+2} compacte, sans bord, connexe, telle que $\pi_1 M \cong \mathbf{J}$, $\pi_i M = 0$ pour $2 \leqq i < q$, $\pi_q M \cong A$ comme $Z[\mathbf{J}]$-modules, et $H_i M = 0$ pour $2 \leqq i \leqq n$. On obtiendra un n-nœud satisfaisant aux conditions du théorème II.1 en opérant la modification sphérique $\chi(\varphi)$, où $\varphi : S^1 \times D^{n+1} \to M$ représente un générateur de $\pi_1 M$.

Soit $(x_1, \dots, x_\alpha; R_1, \dots, R_\beta)$ une présentation finie du $Z[\mathbf{J}]$-module donné A de type fini (lemme II.6). Soit M_0 la somme connexe de $S^1 \times S^{n+1}$ avec α copies de $S^q \times S^{n-q+2}$. On prendra pour point base dans M_0 un ouvert contractile qui contient la $i^{\text{ième}}$ copie $(P \times Q)_i$ d'un point $P \times Q \in S^q \times S^{n-q+2}$ pour tout $i = 1, \dots, \alpha$. On identifie x_i avec l'élément de $\pi_q M_0$ représenté par le plongement de $S^q \times Q$ dans la $i^{\text{ième}}$ copie $(S^q \times S^{n-q+2})_i$ de $S^q \times S^{n-q+2}$. Le $Z[\mathbf{J}]$-module libre engendré par $x_1, \dots, x_\alpha$ s'identifie alors à $\pi_q M_0$. Soient $\varphi_j : S^q \to M_0$ des plongements différentiables représentant les éléments R_j de $\pi_q M_0$, $j = 1, \dots, \beta$. Les plongements φ_j ont un fibré normal trivial, et comme $q \leqq \frac{1}{2} n$ on peut choisir des prolongements $\psi_j : S^q \times D^{n-q+2} \to M_0$ de sorte que la modification sphérique multiple $\chi(\psi_1, \dots, \psi_\beta)$ soit une modification avec champ (*cf.* [10], lemma 6.2). On obtient ainsi une variété stablement parallélisable

$$M_1 = \left(M_0 - \bigcup_j \psi_j(S^q \times B^{n-q+2})\right) \cup \bigcup_j \psi'_j(D^{q+1} \times S^{n-q+1})$$

dont il est facile de vérifier que les groupes d'homotopie satisfont aux conditions $\pi_1(M_1) \cong \mathbf{J}$, $\pi_i(M_1) = 0$ pour $2 \leqq i < q$, et $\pi_q(M_1) \cong A$ par un isomorphisme de $Z[\mathbf{J}]$-modules. $\left(\text{On utilise ici l'inégalité } q \leqq \frac{1}{2} n.\right)$ On a, en effet,

$$\pi_i\left(M_0 - \bigcup_j \psi_j(S^q \times B^{n-q+2})\right) \cong \pi_i(M_0) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i < n - q + 1,$$

$$\pi_i\left(M_1 - \bigcup_j \psi'_j(D^{q+1} \times S^{n-q+1})\right) \cong \pi_i(M_1) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i < q.$$

D'autre part, en désignant par W la variété de bord $M_1 + (-M_0)$ construite dans ([13], § 2), on a

$$\pi_q M_1 \cong \pi_q W \qquad \text{pour} \quad q < n - q + 1,$$

et

$$\pi_q W \cong \pi_q M_0/(R_1, \ldots, R_\beta) \cong A.$$

En utilisant les suites exactes d'homologie des paires

$$\Big(M_0, \bigcup_j \psi_j(S^q \times B^{n-q+2})\Big) \quad \text{et} \quad \Big(M_1, \bigcup_j \psi'_j(D^{q+1} \times S^{n-q+1})\Big).$$

on trouve $H_i(M_1) = 0$ pour $2 \leqq i < q$, $q + 2 \leqq i \leqq n - q$ et $n - q + 2 < i \leqq n$. L'hypothèse $A/DA = 0$ entraîne

$$H_{n-q+2}(M_1) = H_q(M_1) = 0.$$

De plus, les suites exactes mentionnées ci-dessus montrent que $H_{q+1}(M_1)$ est abélien libre de rang $\gamma = \beta - \alpha$ pourvu que $q < \frac{1}{2} n$.

Il reste donc à tuer le groupe d'homologie $H_{q+1}(M_1)$. On observe tout d'abord que l'homomorphisme de Hurewicz $\rho : \pi_{q+1}(M_1) \rightarrow H_{q+1}(M_1)$ est surjectif. En effet, soient $\mathbf{M}_1$ le revêtement universel de M_1 et

$$E^2_{r,s} \cong H_r(\mathbf{J}; H_s(\mathbf{M}_1)) \rightarrow \mathcal{G} H_{r+s}(M_1)$$

sa suite spectrale de Cartan-Leray en homologie (*cf.* [18]). Comme $E^2_{r,s} = 0$ pour $r \geqq 2$, cette suite spectrale est triviale. D'autre part,

$$\pi_{q+1}(\mathbf{M}_1) \rightarrow H_{q+1}(\mathbf{M}_1)$$

est surjectif d'après le théorème de Hurewicz, et la composition des homomorphismes

$$\pi_{q+1} M_1 \rightarrow \pi_{q+1} \mathbf{M}_1 \rightarrow H_{q+1} \mathbf{M}_1 \rightarrow H_0(\mathbf{J}; H_{q+1} \mathbf{M}_1) \xrightarrow{\varkappa} H_{q+1} M_1$$

s'identifie à l'homomorphisme de Hurewicz $\pi_{q+1} M_1 \rightarrow H_{q+1} M_1$. [Dans cette suite, $\pi_{q+1} M_1 \rightarrow \pi_{q+1} \mathbf{M}_1$ est l'isomorphisme canonique, $\pi_{q+1} \mathbf{M}_1 \rightarrow H_{q+1} \mathbf{M}_1$ est l'homomorphisme de Hurewicz dans $\mathbf{M}_1$, $H_{q+1} \mathbf{M}_1 \rightarrow H_0(\mathbf{J}; H_{q+1} \mathbf{M}_1)$ s'identifie à l'homomorphisme canonique $H_{q+1} \mathbf{M}_1 \rightarrow H_{q+1} \mathbf{M}_1/DH_{q+1} \mathbf{M}_1$ et

$$\varkappa : \quad H_0(J; H_{q+1} \mathbf{M}_1) = E^2_{0,q+1} \rightarrow E^\infty_{0,q+1} = \mathbf{J}_{0,q+1} \subset H_{q+1} M_1$$

est l'homomorphisme canonique dans la suite spectrale considérée.] La surjectivité de $\pi_{q+1} M_1 \rightarrow H_{q+1} M_1$ est donc équivalente à la surjectivité de $\varkappa$. Il suffit donc de vérifier que $E^2_{1,q} = H_1(\mathbf{J}; H_q \mathbf{M}_1) = 0$. Or, l'action de $\mathbf{J}$ sur $H_q \mathbf{M}_1$ s'identifie à l'action de $\pi_1 M_1$ sur $\pi_q M_1$, et

$$H_1(\mathbf{J}; H_q M_1) = \mathrm{H}_1(\mathbf{J}; A) = A^{\mathbf{J}} = 0 \quad \text{(lemme II.7)}.$$

On choisit alors des bases $\xi_1, \ldots, \xi_\gamma$ et $\eta_1, \ldots, \eta_\gamma$ de $H_{q+1} M_1$ et $H_{n-q+1} M_1$ respectivement telles que $\xi_i . \eta_j = \delta_{ij}$. Les classes $\xi_1, \ldots, \xi_\gamma$ peuvent être représentées par des plongements $\varphi_i : S^{q+1} \to M_1$, car $q < \frac{1}{2} n$. De plus, les plongements φ_i ont un fibré normal trivial. Il existe donc des prolongements $\psi_i : S^{q+1} \times D^{n-q+1} \to M_1$ des φ_i dont les images sont également disjointes. On opère la modification sphérique $\chi(\psi_1, \ldots, \psi_\gamma)$. Il n'y a pas de difficulté à vérifier que la variété $M = \chi(M_1, \psi_1, \ldots, \psi_\gamma)$ ainsi obtenue satisfait aux conditions requises.

4. Variétés minimales d'un n-nœud.

On peut également aborder le calcul de $\pi_q(S^{n+2} - f(S^n))$, où f est un nœud satisfaisant l'hypothèse $(\mathbf{H}_q)$, en utilisant les variétés $V^{n+1} \subset S^{n+2}$ dont le bord bV coïncide avec $f(S^n)$.

LEMME II.10. — *Soient Σ^n une sphère d'homotopie différentielle de dimension n et $f : \Sigma^n \to S^{n+2}$ un plongement différentiable. Il existe une sous-variété orientable $V^{n+1} \subset S^{n+2}$ dont le bord est égal à $f(\Sigma^n)$.*

Ce lemme est bien connu. Rappelons-en brièvement la démonstration. On observe tout d'abord que f a un fibré normal trivial. Soit U un voisinage tubulaire de $f(\Sigma^n)$. On a un difféomorphisme $\Phi : U \to \Sigma^n \times D^2$. Soit $a \in S^1$ un point du bord de D^2. Il suffit de démontrer que $\Phi^{-1}(\Sigma^n \times a)$ est le bord d'une sous-variété orientable de l'adhérence de $S^{n+2} - U$. L'application Φ fournit une application $\varphi : T \to S^1$, composition de $\Phi \mid bU$ $(bU = T)$ avec la projection sur le deuxième facteur. Il s'agit de prolonger $\varphi : T \to S^1$ en une application $\psi : S^{n+2} - \operatorname{int} U \to S^1$. En effet, si ψ existe, on pourra supposer que ψ est différentiable et admet a comme valeur régulière. La variété $\psi^{-1}(a)$ est alors la variété cherchée. L'existence de ψ se démontre en utilisant la théorie des obstructions.

Soit $f : \Sigma^n \to S^{n+2}$ un plongement différentiable et V^{n+1} une sous-variété orientée de S^{n+2} telle que $f(\Sigma^n) = bV$. On notera $\nu(x)$ la normale positive à V dans S^{n+2} en $x \in V$, et $\nu_+, \nu_- : V \to S^{n+2} - V$ les applications données par les formules $\nu_+(x) = x + \varepsilon . \nu(x)$ et $\nu_-(x) = x - \varepsilon . \nu(x)$, où ε est positif et assez petit (inférieur au rayon d'un voisinage tubulaire de V). On notera également $\nu_+, \nu_- : H_q V \to H_q(S^{n+2} - V)$ les homomorphismes induits par ces applications.

On doit à J. LEVINE [11] le lemme suivant qui affirme l'existence d'une variété $V^{n+1} \subset S^{n+2}$ en un certain sens minimale, telle que $bV = f(\Sigma^n)$.

LEMME II.11. — *Soit $f : \Sigma^n \to S^{n+2}$ un plongement différentiable. Pour $n \geq 3$, la condition $\pi_i(S^{n+2} - f(\Sigma^n)) \cong \pi_i(S^1)$ pour $i < q$, où $q \leq \frac{1}{2}(n+1)$ est équivalente à l'existence d'une variété orientée et $(q-1)$-*

connexe $V^{n+1} \subset S^{n+2}$ *telle que* $bV = f(\Sigma^n)$. *En outre, si* $n \geqq 4$, *la variété* V *peut être choisie telle que*

$$\nu_+ : \quad H_q V \to H_q(S^{n+2} - V),$$
$$\nu_- : \quad H_q V \to H_q(S^{n+2} - V)$$

soient injectifs.

Pour la démonstration, nous renvoyons le lecteur à l'article de LEVINE déjà cité.

On peut alors calculer $\pi_q(S^{n+2} - f(\Sigma^n))$ comme suit. Soit $Y = S^{n+2} - N(V)$, où $N(V)$ est un voisinage tubulaire de V. Le revêtement universel (infini cyclique) $\mathbf{X}$ du complémentaire X d'un voisinage tubulaire de $f(\Sigma^n)$ dans S^{n+2} s'obtient à partir de la réunion disjointe $\sum_k Y_k$, où Y_k est une copie de Y et où k parcourt les entiers, en identifiant V_k^+ avec V_{k+1}^- pour tout k. (V_k^+ et V_k^- sont les copies de $\nu_+(V)$ et $\nu_-(V)$ dans Y_k et l'identification est donnée par $\nu_+\nu_-^{-1}$.) On a un isomorphisme de $Z[\mathbf{J}]$-modules entre $\pi_q X$ et $H_q(\mathbf{X})$, et l'on peut calculer ce dernier en utilisant le théorème de Mayer-Vietoris et un passage à la limite. On observe que $H_q V$ et $H_q Y$ sont isomorphes. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_\alpha$ des générateurs de $H_q V$, et $(x_1, \ldots, x_\alpha; d_1 x_1, \ldots, d_\alpha x_\alpha)$ une présentation de $H_q(Y)$. Le $Z[\mathbf{J}]$-module $\pi_q(S^{n+2} - f(\Sigma^n))$ admet la présentation

$$(x_1, \ldots, x_\alpha; t\nu_+(\xi_i) - \nu_-(\xi_i), d_i x_i).$$

On va voir que pour $q = \frac{1}{2}n$ et $q = \frac{1}{2}(n+1)$ on peut préciser la forme des relateurs $t\nu_+(\xi_i) - \nu_-(\xi_i)$.

Tirons tout d'abord quelques conséquences des remarques ci-dessus. Si l'on demande l'injectivité de ν_+ et ν_- (en supposant $n \geqq 4$), le sous-groupe de torsion de $\pi_q(S^{n+2} - f(\Sigma^n))$ est isomorphe au sous-groupe de torsion de $H_q Y$. Il est donc fini, et l'on retrouve le lemme II.8 en utilisant le théorème II.1. D'autre part, si $\pi_q(S^{n+2} - f(\Sigma^n))$ n'a pas d'éléments d'ordre fini, il en est de même de $H_q Y$ et la présentation ci-dessus se réduit à

$$\left(x_1, \ldots, x_\alpha; \sum_j (ta_{ij} - b_{ij}) x_j\right),$$

où les matrices entières carrées (a_{ij}) et (b_{ij}) sont définies par $\nu_+(\xi_i) = \sum_j a_{ij} x_j$ et $\nu_-(\xi_i) = \sum_j b_{ij} x_j$ respectivement. En utilisant encore le théorème II.1, on obtient

LEMME II.12. — *Soit A un $Z[\mathbf{J}]$-module sans torsion, de type fini et tel que $A_{\mathbf{J}} = 0$. Alors A admet une présentation d'excès nul de la forme*

$$\left(x_1, \ldots, x_\alpha; \sum_j (ta_{ij} - b_{ij}) x_j\right),$$

où les matrices carrées entières a et b sont non singulières.

(La dernière assertion résulte de l'injectivité de ν_+ et ν_-.) J'ignore la démonstration algébrique de ce lemme.

Il est par ailleurs facile de vérifier que si A, tel que $A_{\mathbf{J}} = 0$, admet une présentation d'excès nul, alors A est sans torsion.

5. **Démonstration du théorème** II.2.

Soit $f: S^{2q} \to S^{2q+2}$ un $2q$-nœud satisfaisant à $(\mathbf{H}_q)$, $q \geq 3$. Soit $V \subset S^{2q+2}$ une variété orientée $(q-1)$-connexe de dimension $2q+1$ telle que $bV = f(S^{2q})$. D'après S. SMALE [20], il existe une décomposition en anses de V de la forme

$$V = D^{2q+1} + (\varphi_1^q) + \ldots + (\varphi_\alpha^q) + (\varphi_1^{q+1}) + \ldots + (\varphi_\alpha^{q+1}),$$

où l'homomorphisme bord $d : H_{q+1}(V, X_q) \to H_q(X_q, D^{2q+1})$ s'exprime (relativement à la décomposition cellulaire ci-dessus) par la matrice diagonale $d = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_\alpha)$. ($X_q$ est la réunion de D^{2q+1} et des anses d'indice q.) On peut en outre supposer que d_1 divise d_2, d_2 divise d_3, etc. Comme V est stablement parallélisable, les anses d'indice q sont trivialement attachées. (Ceci résulte de [10], lemma 6.1.) La sous-variété $X_q = D^{2q+1} + \sum_i (\varphi_i^q)$ est donc difféomorphe à la somme connexe le long du bord (*cf.* [10], § 2, Addendum) de α copies $(S^q \times D^{q+1})_i$, $i = 1, \ldots, \alpha$, de $S^q \times D^{q+1}$. Soit V_0 cette somme connexe et $h : V_0 \to X_q$ un difféomorphisme. On peut supposer que h préserve l'orientation.

Soit alors S_i^q l'image par h de $(S^q \times (0))_i \subset V_0$, et soient E_i^+ et E_i^- des $(q+1)$-disques immergés dans S^{2q+2}, $i = 1, \ldots, \alpha$, dont les intérieurs sont disjoints et tels que

(i) $bE_i^+ = bE_i^- = S_i^q$;

(ii) $(\mathrm{int} E_i^+) \cap X_q = \emptyset$, $(\mathrm{int} E_i^-) \cap X_q = \emptyset$;

(iii) le champ de normales (intérieures) à S_i^q dans E_i^+, resp. E_i^-, est $\nu \mid S_i^q$, resp. $-\nu \mid S_i^q$, où ν est définie comme au paragraphe 4.

Pour voir que E_i^+ et E_i^- existent, il suffit de remarquer que $h \Big| \bigcup_i (S^q \times (0))_i$ est difféotope au plongement canonique dans S^{2q+2}.

On désignera par $\xi_i \in H_q V$ la classe d'homologie de S_i^q.

Soit maintenant Σ_j^q une sphère plongée dans $S^{2q+2} - V$, bord d'un $(q+1)$-disque qui ne rencontre pas X_q, et dont le coefficient d'intersection avec Δ_k, l'âme de l'anse (φ_k^{q+1}), est δ_{jk}. Soit $x_j \in H_q(S^{2q+2} - V)$ la classe d'homologie représentée par Σ_j^q. Si

$$F : (D^{q+1}, S^q) \to (S^{2q+2}, S^{2q+2} - V)$$

est une application différentiable dont l'image ne rencontre pas X_q et coupe Δ_k transversalement pour tout $k = 1, \ldots, \alpha$, la classe d'homologie représentée par $F(S^q)$ dans $H_q(S^{2q+2} - V)$ est donnée par la formule $\sum_k (F(D^{q+1}) . \Delta_k) x_k$.

On a donc avec les notations précédentes

$$\nu_+(\xi_i) = \sum_j a_{ij} x_j, \qquad \text{où} \quad a_{ij} = E_i^+ . \Delta_j,$$

$$\nu_-(\xi_i) = \sum_j b_{ij} x_j, \qquad \text{où} \quad b_{ij} = E_i^- . \Delta_j,$$

ν_+, ν_- étant définies comme au paragraphe 4.

On obtient une relation entre les matrices a, b, d en écrivant que $\Delta_i . \Delta_j = 0$. Soit $C_i \subset X_q$ une $(q+1)$-chaîne de bord $bC_i = d_i S_i^q - b\Delta_i$. Soit F_i^+ le complémentaire dans E_i^+ d'un voisinage de $bE_i^+ = S_i^q$. Alors $Z_i = d_i F_i^+ - \nu_+(\Delta_i) - \nu_+(C_i)$ est un cycle. On va calculer $Z_i . \Delta_j$ de deux manières différentes. D'une part

$$Z_i . \Delta_j = d_i a_{ij} - 0 - (\nu_+ C_i) . \Delta_j = d_i a_{ij},$$

car $\Delta_i . \Delta_j = 0$. D'autre part, comme Z_i est un cycle qui ne rencontre pas le bord de Δ_j, le coefficient d'intersection $Z_i . \Delta_j$ ne dépend que du bord de Δ_j. On a donc

$$Z_i . \Delta_j = Z_i . (d_j U_j + \sum_k e_{jk} (P_0 \times D^{q+1})_k),$$

où U_j est un $(q+1)$-disque voisin de E_j^- tel que $bU_j = (S^q \times Q_0)_j$, et où $b\Delta_j$ est homologue dans bX_q à $d_j (S^q \times Q_0)_j + \sum_k e_{jk} (P_0 \times S^q)_k$.

(On identifie X_q avec V_0 par le difféomorphisme h mentionné précédemment.) On remplace dans cette expression Z_i par $d_i F_i^+ - \nu_+ \Delta_i - \nu_+ C_i$. Un calcul facile montre que tous les coefficients d'intersections sont nuls excepté $(\nu_+ \Delta_i) . U_j = (-1)^{q+1} b_{ji}$. On obtient donc $Z_i . \Delta_j = (-1)^q d_j b_{ji}$, et en comparant avec l'expression précédente on obtient

$$d_i a_{ij} + (-1)^{q+1} d_j b_{ji} = 0.$$

Il est d'autre part facile de voir que les classes x_i de $H_q(S^{2q+2} - V) \simeq H_q V$ satisfont aux seules relations $d_i x_i = 0$, $i = 1, \ldots, \alpha$.

Il résulte alors des remarques du paragraphe 4 que le $Z[\mathbf{J}]$-module $\pi_q(S^{2q+2} - f(S^{2q}))$ admet la présentation

$$(\bigstar) \qquad \left(x_1, \ldots, x_\alpha; \sum_j (ta_{ij} - b_{ij})\, x_j,\ d_i x_i\right),$$

où les matrices entières carrées a, b, d satisfont à la condition

$$(\mathbf{C}_q) \quad da + (-1)^{q+1} b' d' = 0.$$

Réciproquement, pour démontrer l'existence d'un nœud $f : S^{2q} \to S^{2q+2}$ tel que $\pi_i(S^{2q+2} - f(S^{2q})) \simeq \pi_i(S^1)$ pour $i < q$, et $\pi_q(S^{2q+2} - f(S^{2q})) \simeq A$, où A et q satisfont aux conditions du théorème II.3, on part de V_0, somme connexe le long du bord de α copies de $S^q \times D^{q+1}$ canoniquement plongée dans $R^{2q+1} \subset R^{2q+2}$. Soit R_+^{2q+2} le demi-espace de R^{2q+2} tel que la normale à R^{2q+1} intérieure à R_+^{2q+2} suivie de vecteurs donnant l'orientation de R^{2q+1} fournisse l'orientation de R^{2q+2}. On garde les notations du début du paragraphe. En particulier, $S_i^q \subset V_0$ est la sphère $(S^q \times (0))_i$, E_i^+ et E_i^- sont des disques plongés dans R^{2q+2} dont les intérieurs sont disjoints entre eux et disjoints de V_0, et tels que $bE_i^+ = bE_i^- = S_i^q$, la normale à S_i^q dans E_i^+, resp. E_i^-, étant ν, resp. $-\nu$.

On pose $e = a' - b'$. La condition $(\mathbf{C}_q)$ entraîne

$$\begin{aligned} de' + (-1)^q ed' &= d(a - b) + (-1)^q (a' - b')\, d' \\ &= da + (-1)^{q+1} b'd' + (-1)^q (da + (-1)^{q+1} b'd')' \\ &= 0. \end{aligned}$$

On désignera par u_i, $v_i \in H_q(bV_0)$ les classes d'homologie représentées par $(S^q \times Q_0)_i$ et $(P_0 \times S^q)_i$ respectivement. On a $u_i . v_j = \delta_{ij}$. Il résulte de la relation $de' + (-1)^q ed' = 0$ que les classes $c_i = d_i u_i + \sum_k e_{ik} v_k$ sont représentables par des plongements différentiables $\varphi_i : S^q \to bV_0$ dont les images sont disjointes. On se propose de prolonger les φ_i en des plongements différentiables $F_i : D^{q+1} \to R^{2q+2} - \operatorname{int} V_0$ dont les images sont disjointes $(i = 1, \ldots, \alpha)$. Soient

$$F_i^\star : \quad D^{q+1} \to R_-^{2q+2}$$

des plongements qui prolongent φ_i, et tels que les dérivées radiales de $F_i^\star$ le long de S^q coïncident avec le champ de normales intérieures à bV_0 dans R^{2q+1}. ($R_-^{2q+2} = R^{2q+2} - \operatorname{int} R_+^{2q+2}$.) Les théorèmes classiques de Whitney fournissent des immersions complètement régulières $F_i^\star$. On obtient des plongements en éliminant les points de self-intersection par un procédé bien connu également dû à WHITNEY. (*Cf.* [22], démonstration du théorème 3, et [19].) En général, $F_i^\star(D^{q+1}) \cap F_j^\star(D^{q+1}) \neq \emptyset$. Soient S_j^{q+1} des sphères plongées dans $R^{2q+2} - V_0$ telles que $E_i^+ . S_j = \delta_{ij}$. On remplace $F_i^\star$ par des immersions $F_i : D^{q+1} \to R^{2q+2}$ telles que

$$F_i(D^{q+1}) = F_i^\star(D^{q+1}) \# \sum_k a_{ki} S_k^{q+1},$$

de manière que F_i et $F_i^\star$ coïncident dans un voisinage du bord de D^{q+1}, et que $F_i(D^{q+1})$ ne rencontre V_0 que le long de son bord. On pose $\Delta_i = F_i(D^{q+1})$ et $\Delta_i^\star = F_i^\star(D^{q+1})$. En désignant par $\Delta_i . \Delta_j$ le coefficient d'intersection (pour $i \neq j$), on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_i . \Delta_j &= \Delta_i^\star . \Delta_j^\star + \sum_k a_{ki}(S_k . \Delta_j^\star) + \sum_k a_{kj}(\Delta_i^\star . S_k) \\ &= \Delta_i^\star . \Delta_j^\star + (-1)^{q+1} a_{ji} d_j + a_{ij} d_i,\end{aligned}$$

car $S_k . \Delta_j^\star = S_k . (d_j E_j^+) = (-1)^{q+1} d_j \delta_{jk}$. On vérifie facilement la formule

$$\Delta_i^\star . \Delta_j^\star = (-1)^q e_{ij} d_j.$$

Il en résulte $\Delta_i . \Delta_j = (-1)^{q+1} b_{ji} d_j + a_{ij} d_i = 0$, en vertu de la condition $(\mathbf{C}_q)$.

Les immersions $F_i : D^{q+1} \to R^{2q+2}$ sont donc régulièrement homotopes (par des homotopies régulières qui laissent fixe la restriction de F_i à un voisinage du bord de D^{q+1}) dans $R^{2q+2} - V_0$ à des immersions dont les images sont disjointes.

Soit ν le champ de normales à V_0 dans R^{2q+2}. Pour chaque valeur de i, on a une obstruction $\gamma_i \in \pi_q(S^q)$ pour étendre $\nu \mid \varphi_i(S^q)$ comme champ de normales sur $F_i(D^{q+1})$. On notera que cette obstruction est la même que l'obstruction pour étendre ν sur $F_i^\star(D^{q+1})$, et est par suite égale à $(-1)^q e_{ii} d_i$ fois le générateur canonique de $\pi_q(S^q)$. (Même calcul essentiellement que pour $\Delta_i^\star . \Delta_j^\star$.)

Si q est *pair*, la relation $de' + (-1)^q ed' = 0$ entraîne $e_{ii} . d_i = 0$. D'autre part, en faisant la somme connexe de Δ_i avec une $(q+1)$-sphère immergée de self-intersection 1, si cela est nécessaire, on peut remplacer F_i par un plongement pour lequel $\gamma_i = 0$ et satisfaisant $F_i(D^{q+1}) \cap F_j(D^{q+1}) = \emptyset$ pour $i \neq j$.

Si q est *impair*, le coefficient de self-intersection de Δ_i est l'entier $d_i a_{ii}$. On remplacera Δ_i par sa somme connexe avec une $(q+1)$-sphère immergée dont le coefficient de self-intersection est $-d_i a_{ii}$. On vérifie que cette opération change l'obstruction γ_i en $\gamma_i + 2 d_i a_{ii}$. (Soit Σ^{q+1} la diagonale de $S^{q+1} \times S^{q+1}$ qu'on peut supposer contenue dans un voisinage U de $S^{q+1} \vee S^{q+1}$. Si l'on immerge U dans R^{2q+2} par une application de degré local $+1$, la self-intersection de Σ est -1, et l'obstruction $+2$.)

Le nouveau disque Δ_i est régulièrement homotope à un disque plongé. La nouvelle obstruction est nulle. En effet,

$$\gamma_i + 2 d_i a_{ii} = - e_{ii} d_i + 2 d_i a_{ii} = 0,$$

car

$$e_{ii} = a_{ii} - b_{ii} \quad \text{et} \quad a_{ii} + b_{ii} = 0 \quad \text{en vertu de } (\mathbf{C}_q).$$

En résumé, on peut dans tous les cas construire des plongements F_i : $D^{q+1} \to R^{2q+2} - \operatorname{int} V_0$ tels que $F_i(D^{q+1})$ rencontre V_0 orthogonalement le long de $F_i(S^q)$, où $F_i \mid S^q = \varphi_i$. Les images $F_i(D^{q+1})$ sont disjointes et le champ ν se prolonge comme champ de vecteurs normaux à $F_i(D^{q+1})$ pour tout $i = 1, \ldots, \alpha$. Une trivialisation du fibré normal complémentaire de ν sur $F_i(D^{q+1})$ fournit alors un plongement

$$F_i : D^{q+1} \times D^q \to R^{2q+2} - \operatorname{int} V_0$$

tel que $F_i \mid S^q \times S^q$ soit un plongement dans $b V_0$. On désigne alors par V la sous-variété $V_0 \cup \bigcup_i F_i(D^{q+1} \times D^q)$ de R^{2q+2} obtenue après avoir arrondi les angles. Il est clair que V est stablement parallélisable. On va étudier $b V$. La relation $de' + (-1)^q ed' = 0$ obtenue précédemment entraîne que e induit un endomorphisme e_* : $\sum_i Z/d_i Z \to \sum_i Z/d_i Z$. La condition $A_{\mathbf{J}} = 0$ signifie que e_* est un automorphisme. Il existe donc des matrices entières carrées x, y telles que

$$ex' + dy' = 1,$$

où 1 est la matrice unité d'ordre α. Il en résulte que les classes

$$c_i = d_i u_i + \sum_k e_{ik} v_k \quad \text{et} \quad z_j = (-1)^q \sum_k x_{jk} u_k + \sum_k y_{jk} v_k$$

ont pour matrice $(c_i . z_j)$ de coefficients d'intersection la matrice unité. D'après le théorème de Poincaré-Lefschetz, il en résulte que $b V$ a le type d'homotopie de S^{2q}. (On vérifie sans difficulté que $b V$ est $(q-1)$-connexe.) Or, par construction même, bV borde une variété stablement parallélisable. $b V$ est donc difféomorphe à S^{2q} et la restriction à $b V$ du plongement $V \subset R^{2q+2} \subset S^{2q+2}$ fournit un $2q$-nœud f : $S^{2q} \to S^{2q+2}$ (*cf.* [10], theorem 5.1).

Il reste à vérifier que $\pi_i(S^{2q+2} - f(S^{2q})) \cong \pi_i(S^1)$ pour $i < q$, et $\pi_q(S^{2q+2} - f(S^{2q})) \cong A$. Les premiers isomorphismes découlent du lemme de Levine (lemme II.11) et sont d'ailleurs faciles à vérifier directement. Pour vérifier $\pi_q(S^{2q+2} - f(S^{2q})) \cong A$, soient ν_+, ν_- : $V \to S^{2q+2} - V$ les applications définies comme au paragraphe 4, et ν_+, ν_- : $H_q V \to H_q(S^{2q+2} - V)$ les homomorphismes induits. On a, avec les notations du début du paragraphe,

$$\nu_+(\xi_i) = \sum_j (E_i^+ . \Delta_j) x_j,$$

où ξ_i est la classe de $H_q V$ représentée par $S_i^q = (S^q \times (0))_i \subset V_0$, et x_j la classe de Σ_j^q dans $H_q(S^{2q+2} - V)$. On a

$$E_i^+ . \Delta_j = E_i^+ . \Delta_j^* + \sum_k a_{kj}(E_i^+ . S_k^{q+1}) = a_{ij}.$$

On trouvera par un calcul analogue

$$\nu_-(\xi_i) = \sum_j b_{ij} x_j.$$

Le module $\pi_q(S^{2q+2} - f(S^{2q}))$ a donc une présentation identique à celle de A dont on est parti.

Corollaire II.13. — *Si le $Z[\mathbf{J}]$-module A, tel que $A_{\mathbf{J}} = 0$, admet une présentation de la forme ($\bigstar$) satisfaisant ($\mathbf{C}_q$), il admet également une présentation de cette même forme, les matrices a, b induisant des injections $\sum_i Z/d_i Z \to \sum_i Z/d_i Z$.*

En effet, $A \cong \pi_q(S^{2q+2} - f(S^{2q}))$ pour un certain nœud $f : S^{2q} \to S^{2q+2}$ satisfaisant ($\mathbf{H}_q$). Il suffit alors de considérer la présentation de A donnée par une variété $V \subset S^{2q+2}$, telle que $bV = f(S^{2q})$, et pour laquelle ν_+ et ν_- induisent des injections ν_+, ν_- : $H_q V \to H_q(S^{2q+2} - V)$ (*cf.* lemme II.11).

On dira qu'un $Z[\mathbf{J}]$-module A est *q-admissible* si A possède une présentation de la forme ($\bigstar$) ci-dessus satisfaisant à la condition ($\mathbf{C}_q$).

Lemme II.14. — *Un $Z[\mathbf{J}]$-module A de type fini, tel que $A_{\mathbf{J}} = 0$, est q-admissible si et seulement s'il en est de même de son sous-module de torsion.*

Soit $\left(x_1, \ldots, x_\alpha; \sum_j (ta_{ij} - b_{ij}) x_j, d_k x_k\right)$ une présentation de A satisfaisant ($\mathbf{C}_q$). On peut supposer $d_k \neq 0$ pour $1 \leq k \leq \beta$ et $d_k = 0$ pour $\beta < k \leq \alpha$. La relation ($\mathbf{C}_q$) montre que a_{ij} et b_{ij} sont nuls pour $1 \leq i \leq \beta$ et $\beta < j \leq \alpha$. Pour tout $i \leq \beta$, les relations $\sum_{j=1}^{\beta} (ta_{ij} - b_{ij}) x_j = 0$ sont donc satisfaites dans A. Considérons le module T de présentation

$\left(y_1, \ldots, y_\beta; \sum_{j=1}^{\beta} (ta_{ij} - b_{ij}) y_j, d_k y_k\right)$, où i et k parcourent l'ensemble d'entiers $[1, \beta]$. Il résulte de la remarque précédente que T s'envoie dans A par un homomorphisme φ tel que $\varphi(y_i) = x_i$, $i = 1, \ldots, \beta$. On vérifie que $\varphi(T)$ est égal au sous-module de torsion $T(A)$ de A. Il est clair que $\varphi(T) \subset T(A)$. Pour démontrer que $T(A) \subset \varphi(T)$, il suffit de vérifier que $A/\varphi(T)$ n'a pas de torsion. Or, $B = A/\varphi(T)$ admet la présentation $\left(x_{\beta+1}, \ldots, x_\alpha; \sum_{\beta<j} (ta_{ij} - b_{ij}) x_j\right)$, où i parcourt l'ensemble $[\beta + 1, \alpha]$. Le module B admet donc une présentation d'excès nul, ce qui, joint à $D(B) = B$, entraîne que B n'a pas de torsion. D'autre part, φ est injectif. En effet, si $\varphi\left(\sum_{i=1}^{\beta} u_i y_i\right) = 0$, cela entraîne une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^{\beta} u_i x_i = \sum_{i=1}^{\alpha} v_i \sum_{j=1}^{\alpha} (ta_{ij} - b_{ij}) x_j + \sum_{i=1}^{\beta} w_i d_i x_i$$

dans le module libre engendré par $x_1, \ldots, x_\alpha$. Il s'ensuit

$$\sum_{i=1}^{\alpha} v_i (ta_{ij} - b_{ij}) = \sum_{\beta<i} v_i (ta_{ij} - b_{ij}) = 0$$

pour $\beta < j$. Puisque, avec les notations ci-dessus, $DB = B$, il en résulte que $v_i = 0$ pour $\beta < i$. Ceci entraîne $\sum_i u_i y_i = 0$ dans T.

Réciproquement, supposons que $T(A)$ admette une présentation de la forme $\left(x_1, \ldots, x_\beta; \sum_{j=1}^{\beta} (ta^{\mathrm{T}}_{ij} - b^{\mathrm{T}}_{ij}) x_j, d_k x_k\right)$, où i et k parcourent l'ensemble $[1, \beta]$, et où les matrices a^{T} et b^{T} satisfont à la condition $(\mathbf{C}_q)$. Il existe alors une présentation de $T(A)$ de la même forme, où a^{T} et b^{T} satisfont à $(\mathbf{C}_q)$ et induisent des automorphismes du groupe abélien sous-jacent de $T(A)$. Ce groupe est donc le groupe (abélien) de présentation $(x_1, \ldots, x_\beta; d_k x_k)$ (*cf.* corollaire II.13). Considérons le module $B = A/T(A)$. C'est un module de type fini, sans torsion, tel que $D(B) = B$. D'après le lemme II.12, B admet une présentation de la forme $\left(y_1, \ldots, y_\gamma; \sum_{j=1}^{\gamma} (ta^0_{ij} - b^0_{ij}) y_j\right)$, où i parcourt $[1, \gamma]$. Puisque tout élément de $T(A)$ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients *entiers* de $x_1, \ldots, x_\beta$, il en résulte que A admet la présentation $\left(x_1, \ldots, x_\alpha; \sum_j (ta_{ij} - b_{ij})x_j, d_k x_k\right)$, avec $(x_{\beta+1}, \ldots, x_\alpha) = (y_1, \ldots, y_\gamma)$ les matrices a et b ayant la forme

$$a = \begin{pmatrix} a^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & a^0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b^{\mathrm{T}} & 0 \\ c & b^0 \end{pmatrix}.$$

Cette présentation satisfait à la condition $(\mathbf{C}_q)$, avec $d_k = 0$ pour $k = \beta + 1, \ldots, \alpha$.

LEMME II.15. — *Un $Z[\mathbf{J}]$-module fini A, tel que $A_{\mathbf{J}} = 0$, est q-admissible si et seulement s'il en est de même de ses composantes p-primaires A_p pour tout p premier.*

Si A_p est q-admissible pour tout p, il est clair que $A = \sum_p A_p$ est aussi q-admissible.

Réciproquement, supposons que A admette la présentation

$$\left(x_1, \ldots, x_\alpha; \sum_j (ta_{ij} - b_{ij})x_j, d_k x_k\right)$$

satisfaisant à la condition $(\mathbf{C}_q)$. Posons $d_k = p^{e_k} d'_k$, où $(p, d'_k) = 1$, et soit $m = d'_1 \ldots d'_\alpha$. On définit le $Z[\mathbf{J}]$-module T_p par la présentation $\left(y_1, \ldots, y_\alpha; \sum_j (ta^*_{ij} - b^*_{ij})y_j, \ p^{e_k} y_k\right)$, où $a^*_{ij} = d'_i a_{ij}$ et $b^*_{ij} = d'_i b_{ij}$. Le $Z[\mathbf{J}]$-module T_p est q-admissible. On a un homomorphisme $\varphi : T_p \to A$ tel que $\varphi(y_i) = mx_i$, et il résulte de $(p, d'_i) = 1$ qu'il existe un homomorphisme $\psi : A \to T_p$ tel que $\psi(x_i) = y_i$. Or, $\psi\varphi : T_p \to T_p$ est la multiplication par m, donc un automorphisme de T_p, et φ est injectif. Il est clair que $\varphi(T_p) \subset A_p$, où A_p désigne la composante p-primaire de A. Or, ψ et φ induisent des homomorphismes $A_p \to T_p \to A_p$ dont la composition est la multiplication par m, donc un automorphisme de A_p. Il en résulte que $\varphi : T_p \to A_p$ est un isomorphisme. D'où le lemme II.15.

Remarque. — Soit A un $Z[\mathbf{J}]$-module de type fini tel que $A_{\mathbf{J}} = 0$, et supposons que, comme groupe abélien, A_p soit somme directe de facteurs $Z/p^e Z$. Si A est q-admissible, les A_p ont des présentations de la forme $\left(x_1, \ldots, x_\alpha; \sum_j (ta_{ij} + (-1)^{q+1} a_{ji})x_j, p^e x^k\right)$ et les polynômes

$$\Delta_p(t) = |\, ta_{ij} + (-1)^{q+1} a_{ji} \,|$$

à coefficients dans $Z/p^e Z$ sont des invariants du module A (à un facteur inversible de $Z[\mathbf{J}](p^e)$ près). On vérifie immédiatement que ces « polynômes d'Alexander locaux » satisfont à $\Delta_p(t^{-1}) = \pm t^m \Delta_p(t)$, où m est pair si q est pair.

D'autre part, $A/T(A)$ a toujours une présentation d'excès nul (*cf.* lemme II.12). Pour tout nœud $f : S^{2q} \to S^{2q+2}$ satisfaisant $(\mathbf{H}_q)$ et tel que $\pi_q(S^{2q+2} - f(S^{2q})) = A$, on a donc un polynôme d'Alexander $\Delta_f(t) = \Delta_{A/T(A)}(t)$. Mais ce polynôme n'est pas réciproque en général.

6. **Démonstration du théorème** II.3.

Soit $f : \Sigma^{2q-1} \to S^{2q+1}$ un plongement différentiable tel que

$$\pi_i(S^{2q+1} - f(\Sigma^{2q-1})) \cong \pi_i(S^1)$$

pour $i < q$. D'après LEVINE, il existe une variété $(q-1)$-connexe $V^{2q} \subset S^{2q+1}$ telle que $bV = f(\Sigma^{2q-1})$. Le groupe $H_q V$ est donc abélien libre. Soit $\xi_1, \ldots, \xi_\alpha$ une base de $H_q V$. D'après le théorème de dualité d'Alexander, il existe une base duale $x_1, \ldots, x_\alpha$ de $H_q(S^{2q+1} - V)$ telle que $L(x_i, \xi_j) = \delta_{ij}$, où L dénote le coefficient d'enlacement dans S^{2q+1}. En reprenant les notations du paragraphe 4, posons

$$\nu_+(\xi_i) = \sum_j a_{ij} x_j \qquad \text{et} \qquad \nu_-(\xi_i) = \sum_j b_{ij} x_j,$$

où a et b sont des matrices à coefficients entiers. On a

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_k b_{ik}\delta_{kj} = \sum_k b_{ik} L(x_k, \xi_j) = L(\nu_-(\xi_i), \xi_j) \\ &= L(\xi_i, \nu_+(\xi_j)) = (-1)^{q+1} L(\nu_+(\xi_j), \xi_i) \\ &= (-1)^{q+1} \sum_k a_{jk} L(x_k, \xi_i) = (-1)^{q+1} a_{ji}. \end{aligned}$$

Pour que le $Z[\mathbf{J}]$-module A soit isomorphe à $\pi^q(S^{2q+1} - f(\Sigma^{2q-1}))$, où f satisfait à l'hypothèse $(\mathbf{H}_q)$, il est donc nécessaire que $A_{\mathbf{J}} = 0$ (§ 2), et que A admette une présentation de la forme

$$(\star\star) \qquad \left(x_1, \ldots, x_\alpha ; \sum_j (ta_{ij} + (-1)^q a_{ji}) x_j\right).$$

Réciproquement, soit A un $Z[\mathbf{J}]$-module satisfaisant à $A_{\mathbf{J}} = 0$ et admettant une présentation de la forme $(\star\star)$. On construit une variété V de dimension $2q$, stablement parallélisable, donnée par une décomposition en anses de la forme

$$V = D^{2q} + (\psi_1^q) + \ldots + (\psi_\alpha^q),$$

où les classes d'homologie $\xi_1, \ldots, \xi_\alpha \in H_q V \cong H_q(V, D^{2q})$, représentées par les âmes des anses $(\psi_1^q), \ldots, (\psi_\alpha^q)$, ont la matrice de coefficients d'intersection $a+(-1)^q a'$. Pour obtenir V, on prend des plongements $\varphi_i : S^{q-1} \to S^{2q-1}$ dont les images sont disjointes et qui satisfont aux conditions

$$L(\varphi_i(S^{q-1}), \varphi_j(S^{q-1})) = a_{ij}+(-1)^q a_{ji}$$

pour $i \neq j$. Ensuite on prolonge φ_i en un plongement $\psi_i^\star : S^{q-1}\times D^q \to S^{2q-1}$ difféotope au plongement canonique, $i=1, \ldots, \alpha$, de manière que $(\mathrm{Im}\,\psi_i^\star)\cap(\mathrm{Im}\,\psi_j^\star)=\emptyset$ pour $i\neq j$. Soit alors $(\alpha_i)\in\pi_{q-1}(SO_q)$ la classe image de a_{ii} fois le générateur canonique de $\pi_q(S^q)$ par l'homomorphisme $\tau : \pi_q(S^q)\to\pi_{q-1}(SO_q)$ de la suite exacte d'homotopie de SO_{q+1}/SO_q. On sait que (α_i) se projette sur $a_{ii}+(-1)^q a_{ii}$ fois le générateur de $\pi_{q-1}(S^{q-1})$ par la projection $\pi_{q-1}(SO_q)\to\pi_{q-1}(S^{q-1})$. Soit $\alpha_i : S^{q-1}\to SO_q$ une application différentiable de classe (α_i). On remplace $\psi_i^\star$ par $\psi_i : S^{q-1}\times D^q\to S^{2q-1}$ défini par $\psi_i(x, y)=\psi_i^\star(x, \alpha_i(x).y)$, et l'on attache α anses d'indice q à D^{2q} en utilisant les plongements $\psi_1, \ldots, \psi_\alpha$. Il est facile de vérifier que si $\xi_1, \ldots, \xi_\alpha$ sont les classes d'homologie de V correspondant aux âmes des anses $(\psi_1^q), \ldots, (\psi_\alpha^q)$, on a

$$\xi_i.\xi_j = a_{ij}+(-1)^q a_{ji}$$

pour tout (i, j). Puisque (α_i) s'envoie sur 0 dans $\pi_{q-1}(SO)$, la variété V est stablement parallélisable. D'autre part, la condition $A_{\mathbf{J}}=0$ entraîne que la matrice $a+(-1)^q a' = (\xi_i.\xi_j)$ est unimodulaire. Il en résulte que bV est une sphère d'homologie. Si $q\geq 3$, bV est simplement connexe, donc une $(2q-1)$-sphère d'homotopie différentielle Σ^{2q-1}.

Il est facile de construire un plongement différentiable $F^\star : V\to S^{2q+1}$. On peut aussi utiliser le théorème de M. Hirsch [5], d'après lequel V, étant stablement parallélisable est immersible dans S^{2q+1}. Comme V est un voisinage de son q-squelette, il existe un plongement de V arbitrairement proche de l'immersion de Hirsch. Soient $\nu_+^\star$, $\nu_-^\star$:

$$V\to S^{2q+1}-F^\star V$$

les applications définies comme au paragraphe 4. Soient $x_1^\star, \ldots, x_\alpha^\star$ les classes de $H_q(S^{2q+1}-F^\star V)$ telles que $L(x_i^\star, F^\star\xi_j)=\delta_{ij}$. Posons $\nu_+^\star(\xi_i)=\sum_j a_{ij}^\star x_j^\star$. On observe que

$$a_{ij}^\star+(-1)^q a_{ji}^\star = a_{ij}+(-1)^q a_{ji}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} a_{ij}+(-1)^q a_{ji} = \xi_i.\xi_j &= L(\nu_+^\star(\xi_i)-\nu_-^\star(\xi_i), F^\star\xi_j)\\ &=\sum_k (a_{ik}^\star - b_{ik}^\star)L(x_k^\star, F^\star\xi_j)\\ &= a_{ij}^\star - b_{ij}^\star,\end{aligned}$$

où l'on a posé $\nu_-^\star(\xi_i) = \sum_k b_{ik}^\star x_k$. On trouve comme ci-dessus

$$b_{ij}^\star = (-1)^{q+1} a_{ij}^\star,$$

d'où la formule cherchée. Il existe donc une matrice entière, carrée x, d'ordre α, telle que

$$a - a^\star = x + (-1)^{q+1} x'.$$

On modifie alors $F^\star : V \to S^{2q+1}$ en un nouveau plongement : $F : V \to S^{2q+1}$ tel que F et $F^\star$ coïncident dans un voisinage de $D^{2q} \subset V$, et

$$F(\Delta_i) = F^\star(\Delta_i) \# \sum_k x_{ik} S_k^q,$$

où Δ_i est l'âme de l'anse (ψ_i^q), et S_k^q est une q-sphère plongée dans $S^{2q+1} - F^\star V$, telle que $L(S_k^q, F^\star \xi_j) = \delta_{kj}$. On aura de nouvelles applications $\nu_+, \nu_- : V \to S^{2q+1} - FV$, et F est définie de manière que $L(\nu_+(S_k), S_l) = 0$ pour tout (k, l). Soient de nouveau $x_1, \ldots, x_\alpha \in H_q(S^{2q+1} - FV)$ les classes telles que $L(x_i, F\xi_j) = \delta_{ij}$. On a alors

$$\begin{aligned}\nu_+(\xi_i) &= \sum_j L(\nu_+(\xi_i), F\xi_j) x_j \\ &= \sum_j L(\nu_+^\star(\xi_i) + \sum_k x_{ik} S_k, F^\star \xi_j + \sum_l x_{jl} S_l) x_j \\ &= \sum_j (a_{ij}^\star + x_{ij} + (-1)^{q+1} x_{ji}) x_j = \sum_j a_{ij} x_j.\end{aligned}$$

Il en résulte, comme on l'a vu au paragraphe 4, que $\pi_q(S^{2q+1} - F(bV))$ admet la présentation $\left(x_1, \ldots, x_\alpha; \sum_j (ta_{ij} + (-1)^q a_{ji}) x_j\right)$. Le théorème II.3 est démontré.

Remarque. — On n'a utilisé l'hypothèse $q \geqq 3$ que pour garantir $\pi_1(bV) = \{1\}$. Si la matrice $a + a'$ est assez simple pour qu'on puisse construire une variété V^4 de bord S^3, la démonstration ci-dessus fournit un 3-nœud $f : S^3 \to S^5$ tel que $\pi_1(S^5 - f(S^3)) \cong \mathbf{J}$, et $\pi_2(S^5 - f(S^3)) \cong A$. C'est le cas par exemple si $a + a' = \operatorname{diag}(U, U, \ldots, U)$, où

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors prendre pour V la somme connexe de $\frac{1}{2}\alpha$ copies de $S^2 \times S^2$ privée d'un 4-disque ouvert.

CHAPITRE III.

Cobordisme des nœuds.

1. Les groupes de concordance et de cobordisme.

On dira que deux nœuds f_0, f_1 : $S^n \to S^{n+2}$ sont *concordants* s'il existe un plongement différentiable f : $S^n \times I \to S^{n+2} \times I$ tel que

(1) $f(x, 0) = (f_0(x), 0)$, $f(x, 1) = (f_1(x), 1)$, et si f satisfait aux deux conditions suivantes de bonne position

(2) $f(S^n \times \operatorname{int} I) \subset S^{n+2} \times \operatorname{int} I$,

(3) $f(S^n \times I)$ rencontre le bord de $S^{n+2} \times I$ orthogonalement. (En d'autres termes, la restriction à $S^n \times bI$ du fibré normal de f coïncide avec le fibré normal de $f \mid S^n \times bI$ dans $S^{n+2} \times bI$.)

La concordance est une relation d'équivalence. On désignera par $\mathbf{C}_n^\star$ l'ensemble des classes de concordance des n-nœuds.

Avant de démontrer que $\mathbf{C}_n^\star$ est muni d'une structure de groupe abélien, introduisons le cobordisme proprement dit. On dira que deux n-nœuds f_0, f_1 sont *cobordants* s'il existe un difféomorphisme h : $S^n \to S^n$ de degré $+1$ tel que $f_0 h$ et f_1 soient concordants.

Le cobordisme est également une relation d'équivalence. On désignera par $\mathbf{C}_n$ l'ensemble des classes de cobordisme des n-nœuds.

LEMME III.1. — *Les ensembles $\mathbf{C}_n^\star$ et $\mathbf{C}_n$ sont munis de structures naturelles de groupes abéliens. L'application surjective évidente $\mathbf{C}_n^\star \to \mathbf{C}_n$ est un homomorphisme.*

Pour démontrer le lemme nous introduirons encore la notion de n-disque noué. Un n-disque noué φ : $(D^n, S^{n-1}) \to (D^{n+2}, S^{n+1})$ est un plongement différentiable dont la restriction $\varphi \mid S^{n-1}$ au bord de D^n est le plongement canonique $S^{n-1} \to S^{n+1}$, et tel que $\varphi(D^n)$ rencontre S^{n+1} orthogonalement. Deux n-disques noués sont concordants s'il existe un plongement Φ : $D^n \times I \to D^{n+2} \times I$ tel que

$$\Phi(x, 0) = (\varphi_0(x), 0), \qquad \Phi(x, 1) = (\varphi_1(x), 1),$$

$\Phi \mid S^{n-1} \times I$ se réduit au plongement canonique et $\Phi(D^n \times I)$ rencontre la variété avec coins $b(D^{n+2} \times I)$ orthogonalement. (Cette notion a un sens car le fibré normal de Φ est bien défini, même le long des coins $S^{n-1} \times bI$). Bien entendu, la concordance des n-disques noués est une relation d'équivalence.

LEMME III.2. — *Un n-disque noué φ : $D^n \to D^{n+2}$ détermine univoquement un n-nœud f : $S^n \to S^{n+2}$. On obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les classes de concordance de n-disques et de n-nœuds.*

Soit $\varphi : D^n \to D^{n+2}$ un n-disque noué donné. En identifiant D^n, resp. D^{n+2}, avec les hémisphères E^n_+, resp. E^{n+2}_+, de S^n, resp. S^{n+2}, et en prolongeant φ à l'aide du plongement canonique $E^n_- \to E^{n+2}_-$, on obtient un n-nœud $f : S^n \to S^{n+2}$ univoquement déterminé par φ. (On suppose qu'on a choisi une fois pour toutes une manière d'identifier, avec préservation de l'orientation, le disque D^q avec un hémisphère déterminé E^q_+ de S^q.) Il est facile de voir que tout n-nœud est concordant (en fait difféotope) à un n-nœud obtenu de cette manière. Il est également évident que la concordance de deux n-disques implique la concordance des n-nœuds correspondants. La réciproque peut se démontrer comme suit. Soient $f_0, f_1 : S^n \to S^{n+2}$ deux n-nœuds concordants. On peut supposer que $f_0 | E^n_- = f_1 | E^n_-$ est le plongement canonique. Soit alors $f : S^n \times I \to S^{n+2} \times I$ un plongement donnant la concordance de f_0 et f_1. Il s'agit de remplacer f par un plongement se réduisant au plongement canonique sur $E^n_- \times I$. Soit $a \in E^n_-$ le centre de E^n_-. Le plongement $f | a \times I$ est difféotope au plongement canonique (car $n > 0$). On peut d'ailleurs supposer que la difféotopie $F_s(a, t)$ est indépendante de s pour $0 \leqq t < \varepsilon$ et $1 - \varepsilon < t \leqq 1$. (Il suffit de supposer que f se réduit à l'identité sur la variable t dans ces intervalles, ε étant petit et positif.) Soit $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ un n-repère fixe tangent à S^n en a. En utilisant la propriété du relèvement des homotopies, on construit un champ de n-repères $\mathbf{u}_1(s), \ldots, \mathbf{u}_n(s)$ normaux à la courbe $F_s(a \times I)$ pour tout $s (0 \leqq s \leqq 1)$, et qui, pour $s = 0$, sont les images de $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ par la dérivée de f. On peut en outre construire les $\mathbf{u}_1(s), \ldots, \mathbf{u}_n(s)$ de manière que $\mathbf{u}_k(1)$ soit l'image de $\mathbf{u}_k$ par la dérivée du plongement canonique de $E^n_- \times I$ dans $S^{n+2} \times I$ ($k = 1, \ldots, n$). En effet, pour réaliser cette condition, on rencontre une seule obstruction qui est un élément de $\pi_1(V_{n+2,n})$, où $V_{n+2,n}$ désigne la variété des n-repères dans R^{n+2}. Or ce groupe d'homotopie est nul. Il est alors facile de prolonger F_s en une difféotopie entre $f | E^n_- \times I$ et le plongement canonique $E^n_- \times I \to S^{n+2} \times I$. En utilisant un théorème de Thom (*cf.* Theorem 1.1 de [14], et également [17]), il s'ensuit qu'il existe un difféomorphisme $T : S^{n+2} \times I \to S^{n+2} \times I$ se réduisant à l'identité dans le voisinage de $t = 0$ et $t = 1$, et tel que $Tf | E^n_- \times I$ soit égal au plongement canonique. On peut en outre s'arranger pour que $Tf(E^n_+ \times I) \subset E^{n+2}_+ \times I$. La restriction de Tf à $E^n_+ \times I$ fournit alors la concordance désirée entre $f | E^n_+ \times (0)$ et $f | E^n_+ \times (1)$.

Le lemme III.2 fournit immédiatement la structure de groupe sur $\mathbf{C}^\star_n$. Soient f_0, f_1 deux n-nœuds et φ_0, φ_1 des n-disques noués associés. En identifiant D^n avec E^n_+ et E^n_- par des difféomorphismes préservant l'orientation, on obtient deux plongements $f_+ : E^n_+ \to E^{n+2}_+$ et $f_- : E^n_- \to E^{n+2}_-$ (essentiellement φ_0 et φ_1) dont la réunion $f : S^n \to S^{n+2}$ est par définition la *somme* de f_0 et f_1. La classe de concordance de f est univoquement déterminée par celles de f_0 et f_1. On obtient donc une opération bien définie sur $\mathbf{C}^\star_n$.

Le plongement canonique $i : S^n \to S^{n+2}$ représente l'élément neutre $0 \in \mathbf{C}_n^\star$. Pour définir l'opposée de la classe de concordance d'un n-nœud f : $S^n \to S^{n+2}$, on passe à un n-disque associé $\varphi : E_+^n \to E_+^{n+2}$ et on l'envoie par réflexion sur $\varphi' = r_2 \varphi r_1 : E_-^n \to E_-^{n+2}$ (r_1 et r_2 étant les réflexions par rapport aux plans des équateurs $E_+^n \cap E_-^n$ et $E_+^{n+2} \cap E_-^{n+2}$ respectivement). Le n-disque φ' détermine un n-nœud $f' : S^n \to S^{n+2}$. Il est évident que $f + f'$ a pour classe de concordance O. Il n'est pas très difficile de vérifier que l'addition des classes de concordance est associative. L'opération somme induite sur $\mathbf{C}_n^\star$ détermine donc une structure de groupe. On vérifie que $\mathbf{C}_n^\star$ est un groupe abélien. (Il existe une rotation $h : S^{n+2} \to S^{n+2}$ qui envoie E_+^{n+2} sur E_-^{n+2} telle que $hi = i$, où i : $S^n \to S^{n+2}$ est le plongement canonique.)

La même opération induit une somme commutative sur $\mathbf{C}_n$. (On a un analogue du lemme II.2 pour le cobordisme, et qui d'ailleurs découle du lemme II.2). Il est alors clair que l'application surjective $\mathbf{C}_n^\star \to \mathbf{C}_n$ est un homomorphisme.

2. Relation entre $\mathbf{C}_n^\star$ et $\mathbf{C}_n$.

On utilisera les notations de [10]. En particulier, θ_n dénote le groupe des classes de h-cobordisme des n-sphères d'homotopie différentielles. (On sait d'après Smale [20] et Cerf [2] que θ_n s'identifie pour $n \geqq 4$ avec Γ_n, le groupe des difféomorphismes de degré $+1$ de S^{n-1} sur elle-même, modulo le sous-groupe normal des restrictions à S^{n-1} des difféomorphismes de D^n.) bP_{n+1} est le sous-groupe de θ_n formé des classes de h-cobordisme représentées par des n-sphères d'homotopie différentielles qui bordent une variété parallélisable.

Théorème III.3. — *Pour $n \leqq 5$, on a $\mathbf{C}_n^\star \cong \mathbf{C}_n$. Pour $n > 6$, l'application naturelle $\mathbf{C}_{n-1}^\star \to \mathbf{C}_{n-1}$ se plonge dans la suite exacte*

$$0 \to \theta_n / b P_{n+1} \to \mathbf{C}_{n-1}^\star \to \mathbf{C}_{n-1} \to 0.$$

J'ignore la nature de l'extension.

La détermination de $bP_{n+1} \subset \theta_n$ qu'on trouvera dans [10] fournit quelques valeurs explicites de θ_n / bP_{n+1} pour les petites valeurs de n. On peut extraire de [10] le tableau suivant :

n............	6.	7.	8.	9.	10.
θ_n/bP_{n+1}......	0	0	Z_2	$Z_2 + Z_2$	Z_6
n............	11.	12.	13.	14.	15.
θ_n/bP_{n+1}......	0	0	Z_3	Z_2	Z_2
n............	16.	17.	18.	19.	
θ_n/bP_{n+1}......	Z_2	$Z_2 + Z_2 + Z_2$	$Z_2 + Z_2$	Z_2	

Soit Diff (S^n) le groupe des difféomorphismes $S^n \to S^n$ qui préservent l'orientation. Ceux d'entre eux qui se prolongent en un difféomorphisme $D^{n+1} \to D^{n+1}$ forment un sous-groupe invariant de Diff(S^n). On désignera comme d'habitude par Γ_{n+1} le groupe quotient qui, comme on sait, est abélien.

Soit $f : S^n \to S^{n+2}$ un n-nœud. On obtient des nœuds cobordants à f en formant $fh : S^n \to S^{n+2}$, où $h : S^n \to S^n$ est un difféomorphisme de degré $+1$.

Si l'application $h_1 h_0^{-1} : S^n \to S^n$, h_0, $h_1 \in$ Diff(S^n), se prolonge en un difféomorphisme du disque, elle se prolonge en un difféomorphisme H : $D^{n+1} \to D^{n+1}$ qui laisse fixe le disque $\frac{1}{2} D^{n+1}$ de rayon $\frac{1}{2}\cdot$ (Lemme de R. Palais et J. Cerf. *Cf.* theorem 2.3 de [14].) Donc si h_0 et $h_1 \in$ Diff(S^n) représentent le même élément de Γ_{n+1}, alors fh_0 et fh_1 sont concordants. On a donc une action de Γ_{n+1} sur l'*ensemble* des éléments de $\mathbf{C}_n^\star$. (Il est évident qu'une concordance de f_0 et f_1 entraîne la concordance de $f_0 h$ et $f_1 h$ quel que soit le difféomorphisme $h : S^n \to S^n$.)

Lemme III.4. — *On a la formule*

$$(fh) = (f) + (ih),$$

où ( ) *désigne la classe de concordance et* $i : S^n \to S^{n+2}$ *est le plongement canonique.*

On peut supposer que $f \mid E_-^n$ se réduit au plongement canonique. D'autre part, en utilisant le lemme de Palais et Cerf déjà cité, on peut supposer que $h \mid E_+^n$ est l'identité. La formule résulte alors immédiatement de la définition de la somme $(f) + (ih)$.

Corollaire III.5. — *L'application*

$$\Gamma_{n+1} \to \mathbf{C}_n^\star$$

induite par $h \to (ih)$ *est un homomorphisme.*

Je dis que l'image de Γ_{n+1} est égale au noyau de $\mathbf{C}_n^\star \to \mathbf{C}_n$. En effet, d'une part tout élément $(ih) \in \mathbf{C}_n^\star$ est cobordant à i par définition. Réciproquement, si $(f) \in \operatorname{Ker} \{ \mathbf{C}_n^\star \to \mathbf{C}_n \}$, il existe un difféomorphisme h tel que $(fh) = 0$. Le lemme III.4 fournit $(f) = -(ih) \in \operatorname{Im} \{ \Gamma_{n+1} \to \mathbf{C}_n^\star \}$.

On a donc la suite exacte

$$\Gamma_{n+1} \to \mathbf{C}_n^\star \to \mathbf{C}_n \to 0.$$

Si $n \leq 5$, $\Gamma_{n+1} = 0$. Donc $\mathbf{C}_n^\star \cong \mathbf{C}_n$. ($\Gamma_1 = 0$ est évident; $\Gamma_2 = 0$ est élémentaire en passant au revêtement universel; il est bien connu que $\Gamma_3 = 0$ (*cf.* [21]); l'isomorphisme $\Gamma_4 = 0$ est dû à J. Cerf. (*Cf.* [2]); $\Gamma_5 = \theta_5 = 0$ et $\Gamma_6 = \theta_6 = 0$ d'après Smale [20], et [10].)

Si $n > 6$, on peut identifier Γ_n avec θ_n d'après le théorème de Smale déjà mentionné. On va voir que le noyau de l'homomorphisme $\theta_n \to \mathbf{C}^{\star}_{n-1}$ est formé des classes de h-cobordisme de n-sphères d'homotopie différentielles qui bordent une variété parallélisable, i. e. le noyau de $\theta_n \to \mathbf{C}^{\star}_{n-1}$ est exactement bP_{n+1}.

Soit $h : S^{n-1} \to S^{n-1}$ un difféomorphisme représentant un élément de Γ_n et supposons que $ih : S^{n-1} \to S^{n+1}$ soit concordant au plongement canonique. Cela signifie que ih se prolonge en un plongement $H : D^n \to D^{n+2}$. Si l'on identifie D^n (resp. D^{n+2}) avec E^n (resp. E^{n+2}), et si l'on prend la réunion $E^n_+ \cup H(E^n_-)$ dans $E^{n+2}_+ \cup E^{n+2}_- = S^{n+2}$, on obtient un plongement dans S^{n+2} de la n-sphère d'homotopie différentielle $\Sigma^n = E^n_+ \cup H(E^n)$. Or, Σ^n représente dans θ_n l'élément correspondant à h dans Γ_n (par définition de l'isomorphisme $\Gamma_n \to \theta_n$). D'autre part, il est bien connu qu'une sphère d'homotopie différentielle Σ^n se plonge dans S^{n+2} si et seulement si elle est le bord d'une variété parallélisable. (*Cf.* [8]. La moitié de cette assertion a été démontrée ci-dessus : lemme II.10.)

Inversement, si Σ^n est une n-sphère d'homotopie différentielle qui borde une variété parallélisable, elle se plonge dans S^{n+2} comme on vient de le rappeler. Or Σ^n est obtenue en attachant E^n_+ et E^n_- le long de leurs bords par un difféomorphisme $h : S^{n-1} \to S^{n-1}$. Puisque Σ^n se plonge dans S^{n+1}, le plongement $ih : S^{n-1} \to S^{n+1}$ se prolonge en un plongement du disque $H : D^n \to D^{n+2}$. Cela veut dire que ih est concordant au plongement canonique. $\left(\text{On peut modifier } H \text{ pour le faire coïncider avec le plongement canonique sur } \frac{1}{2} D^n.\right)$ Il en résulte que les éléments de bP_{n+1} sont envoyés sur o dans $\mathbf{C}^{\star}_{n-1}$. Le théorème III.3 est complètement démontré.

3. Détermination de $\mathbf{C}_{2k}$.

THÉORÈME III.6. — *$\mathbf{C}_{2k} = 0$ pour $k \geq 1$.*

Soit $f : S^{2k} \to S^{2k+2}$ un $2k$-nœud. On a vu qu'il existe une sous-variété orientable, connexe $V^{2k+1} \subset S^{2k+2}$ telle que $bV = f(S^{2k})$ (lemme II.10). Pour démontrer que $f(S^{2k})$ est le bord d'une sous-variété contractile de D^{2k+3}, ce qui démontrera que $\mathbf{C}_{2k} = 0$, on va tuer les groupes d'homotopie de V^{2k+1} par modifications sphériques.

Supposons tout d'abord $k > 1$. La démonstration pour $k = 1$ sera donnée en fin de paragraphe. Puisque V est stablement parallélisable et de dimension impaire, il existe une suite de modifications sphériques avec champ

$$V \Rightarrow V_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow V_k$$

telles que V_q soit stablement parallélisable et q-connexe ($1 \leq q \leq k$). V_k est donc un $(2k+1)$-disque (*cf.* [10], theorem 6.6). Le problème est de plonger V_k dans D^{2k+3} de manière que l'image de son bord coïncide avec $f(S^{2k})$. On obtiendra ce plongement en réalisant chacune des modifications sphériques de la suite ci-dessus dans D^{2k+3}.

Nous allons décrire tout d'abord la réalisation dans D^{2k+3} des modifications sphériques du passage de V à V_1. Soient $\varphi_i : S^1 \times D^{2k} \to \operatorname{int} V$ les plongements (d'images disjointes) qui définissent ces modifications. On peut prolonger $\varphi_i \mid S^1 \times (0)$, où $0 \in D^{2k}$ désigne le centre du disque, en des plongements $\psi_i : D^2 \to D^{2k+3}$ dont les images sont disjointes. (Il est suffisant pour cela que k soit ≥ 1.) On peut en outre demander que $\psi_i(D^2)$ rencontre le bord de D^{2k+3} orthogonalement, et que $\psi_i(\operatorname{int} D^2) \subset \operatorname{int} D^{2k+3}$. Il s'agit d'étendre ψ_i à des plongements $D^2 \times D^{2k} \to D^{2k+3}$ que nous noterons encore ψ_i, tels que $\psi_i \mid S^1 \times D^{2k} = \varphi_i$. Pour cela on observe que φ_i détermine une trivialisation $\{ \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{2k} \}$ du fibré normal de $\varphi_i \mid S^1 \times (0)$ dans V. Soit $\mathbf{u}_{2k+1}$ le champ de normales à V^{2k+1} dans S^{2k+2}. On essaye de prolonger le champ $\{ \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{2k}, \mathbf{u}_{2k+1} \}$ comme champ de $(2k+1)$-repères normaux au disque $\psi_i(D^2)$. Il y a une seule obstruction qui est une classe d'homotopie γ_i dans $\pi_1(SO_{2k+1})$. Or, γ_i est stablement nulle, i. e. s'envoie sur 0 dans $\pi_1(SO)$ car si l'on plonge D^{2k+3} dans un espace euclidien de grande dimension, la modification que nous sommes en train d'essayer de réaliser dans D^{2k+3} s'identifie avec la modification abstraite $\chi(\varphi_i)$ qui est par hypothèse une modification avec champ. Comme $\pi_1(SO_{2k+1})$ est un groupe stable, il s'ensuit que $\gamma_i = 0$. Il n'y a donc en fait pas d'obstruction à prolonger $\psi_i : D^2 \to D^{2k+3}$ en un plongement $\psi_i : D^2 \times D^{2k} \to D^{2k+3}$ tel que $\psi_i \mid S^1 \times D^{2k} = \varphi_i$. On construira ces prolongements de manière que leurs images soient disjointes. Après avoir arrondi les angles (nous faisons cette opération avec quelques détails ci-dessous), on obtient donc un plongement $\left(V - \bigcup_i \varphi_i(S^1 \times \operatorname{int} D^{2k})\right) \cup \bigcup_i \psi_i(D^2 \times S^{2k-1})$ de la variété modifiée V_1.

Il sera commode de considérer D^{2k+3} comme sous-disque de $2D^{2k+3}$, le disque de rayon 2, et d'introduire $W = V \times I$ naturellement plongée dans $2D^{2k+3}$ comme sous-espace de $2D^{2k+3} - \operatorname{int} D^{2k+3}$ par l'identification avec $S^{2k+2} \times I$. On notera que la construction précédente nous fournit une sous-variété avec coins $W_1 = W \cup \bigcup_i \psi_i(D^2 \times D^{2k})$ de $2D^{2k+3}$.

Supposons maintenant que les modifications $V \Rightarrow V_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow V_{q-1}$ aient été réalisées dans D^{2k+3} ($q \geq 2$), i. e. supposons qu'on ait obtenu une sous-variété W_{q-1} (avec coins) de $2D^{2k+3}$, réunion de W et des anses successives des modifications de la suite $V \Rightarrow V_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow V_{q-1}$ plongées dans D^{2k+3}. [On suppose par récurrence que la variété W_{q-1} n'a pas d'autres coins que le long du nœud donné $f(S^{2k})$.] Soient φ_i : $S^q \times S^{2k-q+1} \to V_{q-1}$ les plongements (d'images disjointes) qui définissent les modifications sphériques du passage de V_{q-1} à V_q. On se propose de prolonger les $\varphi_i \mid S^q \times (0)$ en des plongements $\psi_i : D^{q+1} \to D^{2k+3} - \operatorname{int} W_{q-1}$ dont les images sont disjointes. On peut certainement prolonger les $\varphi_i \mid S^q \times (0)$ en des plongements dans D^{2k+3} ($q \leqq k$). Comme $W_{q-1} \cap D^{2k+3}$ se rétracte par déformation sur une réunion de cellules plongées dans D^{2k+3}, de dimensions inférieures ou égales à q, il existe des plongements $\psi_i : D^{q+1} \to D^{2k+3} - \operatorname{int} W_{q-1}$ prolongeant $\varphi_i \mid S^q \times (0)$. On peut supposer que ces plongements ont leurs images disjointes car $2(q+1) < 2k+3$. D'autre part, il est commode pour éviter d'avoir à arrondir des coins supplémentaires de demander que la dérivée radiale de ψ_i le long du bord de D^{q+1} soit tangente à W_{q-1} et normale à V_{q-1} (i. e. coïncide avec la normale intérieure de V_{q-1} dans W_{q-1}). Il reste à prolonger les ψ_i en des plongements

$$D^{q+1} \times D^{2k-q+1} \to D^{2k+3} - \operatorname{int} W_{q-1}$$

que nous noterons encore ψ_i, tels que $\psi_i \mid S^q \times D^{2k-q+1} = \varphi_i$. L'argument est le même que dans le cas où $q = 1$. Soit $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{2k-q+1}$ la trivialisation du fibré normal de $\varphi_i \mid S^q \times (0)$ dans V_{q-1} déterminée par φ_i, et soit $\mathbf{u}_{2k-q+2}$ la normale à W_{q-1} dans $2D^{2k+3}$ restreinte à $\varphi_i(S^q \times (0))$. Comme le disque $\psi_i(D^{q+1})$ a dans D^{2k+3} un fibré normal trivial, l'obstruction (unique) pour prolonger $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{2k-q+2}$ comme champ de repères normaux à $\psi_i(D^{q+1})$ est un élément $\gamma_i \in \pi_q(SO_{2k-q+2})$. Comme pour $q = 1$, cette obstruction est stablement triviale. Or, $\pi_q(SO_{2k-q+2})$ est stable pour $q \leqq 2k - q$. On peut donc prolonger ψ_i en un plongement

$$\psi_i : \quad D^{q+1} \times D^{2k-q+1} \to D^{2k+3} - \operatorname{int} W_{q-1}$$

tel que $\psi_i \mid S^q \times D^{2k-q+1} = \varphi_i$.

Soient alors $u_1, \ldots, u_{q+1}, v_1, \ldots, v_{2k-q+1}, w$ les coordonnées dans le voisinage de $\psi_i(D^{q+1} \times D^{2k-q+1})$ définies par ψ_i et la normale à $\psi_i(D^{q+1} \times D^{2k-q+1})$ dans D^{2k+3}. Dans l'ouvert U où ces coordonnées sont définies, on peut supposer W_{q-1} donnée par les équations $w = 0$, $\sum_i (u_i)^2 \geqq 1$. On désignera par (ψ_i^{q+1}) la sous-variété à bord de U définie par $w = 0$,

$$\sum_i (u_i)^2 \leqq 1 + \varepsilon, \qquad \sum_j (v_j)^2 \leqq \alpha(|u|),$$

où la fonction numérique monotone croissante $\alpha(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, est égale à $\varepsilon > 0$ pour $0 \leqq t \leqq 1 - \varepsilon$, et tend vers l'infini pour $t \to 1$.

La réunion $W_q = W_{q-1} \cup \bigcup_i (\psi_i^{q+1})$ est une sous-variété différentiable de $2D^{2k+3}$, et V_q est différentiablement plongée dans D^{2k+3}. Le théorème III.6 est démontré pour $k > 1$.

Pour $k = 1$, il existe encore une variété $V^3 \subset S^4$ dont le bord est l'image du nœud donné $f : S^2 \to S^4$, mais on ne peut plus *prescrire* une suite de modifications sphériques qui transformerait V^3 en un 3-disque. Pour éviter la difficulté, on construit la variété fermée $M^3 = V/bV$ obtenue à partir de la somme disjointe $V^3 + D^3$ par identification des bords. M^3 est orientable.

LEMME III.7. — *Toute variété orientable fermée M^3 de dimension* 3 *borde une variété W^4 parallélisable.*

Ce lemme est bien connu. On sait que M^3 est parallélisable. Soit $M^3 \subset S^{m+3}$ un plongement de M^3 dans S^{m+3} muni d'un champ $\mathbf{u}$ de m-repères normaux. La construction de Thom appliquée à $(M^3; \mathbf{u})$ fournit une application $h : S^{m+3} \to S^m$ qui est une fibration de fibre M^3 au-dessus du complémentaire d'un point $a^* \in S^m$. Or, on sait qu'en modifiant $\mathbf{u}$ dans le voisinage d'un point de M^3 par une application α : $(D^3, S^2) \to (SO_m, 1)$, on remplace la classe (h) de h par $(h) \pm J\alpha$, où J : $\pi_3(SO_m) \to \pi_{m+3}(S^m)$ est l'homomorphisme de Hopf-Whitehead. (Le signe est déterminé par les dimensions. *Cf.* [7].) Comme cet homomorphisme est surjectif (dans ces dimensions), on peut par un choix convenable de α remplacer $\mathbf{u}$ par un nouveau champ $\mathbf{v}$ tel que la construction de Thom appliquée à $(M^3; \mathbf{v})$ fournisse une application $h : S^{m+3} \to S^m$ homotope à 0. Soit alors $H : D^{m+4} \to S^m$ un prolongement de h qu'on peut supposer différentiable. Il existe alors un point $a \in S^m - a^*$ qui est valeur régulière de H et h simultanément. L'ensemble $H^{-1}(a)$ est une variété de dimension 4, de bord M^3 dont le fibré normal dans D^{m+4} est trivial. Il s'ensuit que la composante connexe W^4 de $H^{-1}(a)$ contenant M^3 est parallélisable. C'est la variété demandée.

Soit $\mu : W^4 \to R$ une fonction de Morse-Smale sur W^4 telle que M^3 soit variété de niveau de μ (*cf.* chap. II, § 2). La fonction μ fournit une décomposition en anses de W^4 de la forme

$$W^4 = M^3 \times I + \sum_i (\varphi_i^1) + \sum_j (\varphi_j^2) + \sum_k (\varphi_k^3) + (\varphi^4).$$

Rappelons que M^3 a été obtenue à partir de V^3 de bord S^2 par adjonction d'un 3-disque U^3. On peut supposer que les images de φ_i^1, φ_j^2 et φ_k^3 sont disjointes de $U^3 \times (1)$. (On déformera les plongements ci-dessus par difféotopie pour qu'il en soit ainsi si cela est nécessaire.) On obtient ainsi une variété à coins

$$W_0 = V^3 \times I + \sum_i (\varphi_i^1) + \sum (\varphi_j^2) + \sum_k (\varphi_k^3)$$

dont le bord est formé de $V^3 \times (o)$, $bV^3 \times I$ et d'un 3-disque. (W_0^4 a des coins le long de $bV \times bI$.)

On désignera par X_p la réunion de $V^3 \times I$ et des anses d'indices inférieurs ou égaux à p, et l'on observera que bX_2 est la réunion de $V^3 \times (o)$, $bV^3 \times I$ et de Y_2 qui est difféomorphe à la somme connexe d'un nombre fini de copies de $S^1 \times S^2$ privée d'une 3-boule. On se propose de plonger successivement $X_0 = V^3 \times I$, puis X_1, X_2 dans D^5 par des plongements qui se prolongent mutuellement et qui prolongent $V^3 \times (o) \subset S^4$. Il ne semble pas possible en général de plonger X_3 de cette manière, mais on pourra transformer Y_2 en un 3-disque par des modifications sphériques dans D^5, ce qui conduira à un 3-disque de D^5 dont le bord sera l'image $f(S^2) \subset S^4$ du nœud donné.

Il n'y a pas de difficulté à plonger $X_0 = V^3 \times I$ comme demandé. On prolongera ce plongement à un plongement de X_1, puis X_2 par la méthode du début du paragraphe.

Pour passer de $Y_2 = bX_2 - (V^3 \times (o) \cup bV^3 \times I)$ à un 3-disque plongé dans D^5, il suffit de remarquer qu'au lieu de tuer $\pi_2(Y_2)$ à l'aide des anses (φ_k^3) qu'il serait difficile (ou impossible) de plonger dans D^5, on peut aussi bien tuer $\pi_1(Y_2)$ à l'aide d'anses d'indice 2 pourvu qu'on ait soin de choisir des plongements

$$\psi_k : \quad S^1 \times D^2 \to Y_2$$

qui représentent un système canonique de générateurs de $\pi_1(Y_2)$. (On rappelle que Y_2 est une somme connexe de copies de $S^1 \times S^2$ privée d'une boule de dimension 3.) Or, ces modifications sphériques peuvent se réaliser dans D^5 par la méthode du début du paragraphe. Elles transforment Y_2 en un 3-disque de D^5 dont le bord est $f(S^2)$. On a donc bien $\mathbf{C}_2 = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème III.6.

4. Étude de $\mathbf{C}_{2k-1}$.

Soit $f : \Sigma^{2k-1} \to S^{2k+1}$ un plongement différentiable, où Σ^{2k-1} est une $(2k-1)$-sphère d'homotopie différentielle. Soit U un voisinage tubulaire ouvert de $f(\Sigma^{2k-1})$ dans S^{2k+1}. La variété différentielle compacte $X = S^{2k+1} - U$ ayant l'homologie du cercle, on peut lui associer la torsion de Reidemeister de son revêtement infini cyclique $\mathbf{X}$. (*Cf.* J. Milnor [16], lemma 4.) C'est un élément $\tau(f)$ non nul du corps $\mathbf{Q}(t)$ des fractions rationnelles à une variable t sur le corps des nombres rationnels, défini à la multiplication par un élément de la forme $\pm t^r$ près ($r \in Z$). On posera $\Delta(f) = (t-1).\tau(f)$.

Soient

$$\varphi_0 : \ E_+^{2k-1} \to E_+^{2k+1} \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 : \ E_-^{2k-1} \to E_-^{2k+1}$$

deux disques noués, f_0 et f_1 : $S^{2k-1} \to S^{2k+1}$ les nœuds correspondants, et $f : S^{2k-1} \to S^{2k+1}$ le nœud somme de f_0 et f_1 ($f \mid E_+^{2k+1} = \varphi_0$, $f \mid E_-^{2k-1} = \varphi_1$.)

LEMME III.8. — $\Delta(f) = \Delta(f_0).\Delta(f_1)$.

Soient U un voisinage tubulaire de $f(S^{2k-1})$ dans S^{2k+1}, et U_0, U_1 des voisinages tubulaires de $f_0(S^{2k-1})$ et $f_1(S^{2k-1})$ respectivement. Posons

$$U_+ = U \cap E_+^{2k+1}, \qquad U_- = U \cap E_-^{2k+1},$$
$$X = S^{2k+1} - U, \qquad X_0 = E_+^{2k+1} - U_+, \qquad X_1 = E_-^{2k+1} - U_-.$$

Les espaces $S^{2k+1} - U_i$ et X_i ont le même type d'homotopie simple, $i = 0, 1$. Donc $\tau(f_i) = \tau(\mathbf{X}_i)$, où $\mathbf{X}_i$ est le revêtement infini cyclique de X_i, et τ désigne la torsion de Reidemeister. On a $X = X_0 \cup X_1$, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \cup \mathbf{X}_1$ et $\mathbf{K} = \mathbf{X}_0 \cap \mathbf{X}_1$ est le revêtement infini cyclique (universel) de $K = X_0 \cap X_1$. D'après ([15], lemma 4), on a

$$\tau(\mathbf{X}, \mathbf{K}) = \tau(\mathbf{X}_0, \mathbf{K}).\tau(\mathbf{X}_1, \mathbf{K}),$$

et

$$\tau(\mathbf{X}, \mathbf{K}) = \tau(\mathbf{X})/\tau(\mathbf{K}),$$
$$\tau(\mathbf{X}_i, \mathbf{K}) = \tau(\mathbf{X}_i)/\tau(\mathbf{K}) \qquad (i = 0, 1).$$

Or, K a le type d'homotopie simple de S^1. Donc $\tau(\mathbf{K}) = (t-1)^{-1}$. On obtient la formule $\Delta(f) = \Delta(f_0).\Delta(f_1)$ en combinant ces égalités.

LEMME III.9. — *Si* $f : S^{2k-1} \to S^{2k+1}$ *est de classe de cobordisme triviale, alors* $\Delta(f) = (t-1)\tau(f)$ *est de la forme* $R(t).R(t^{-1})$, *où* $R(t) \in \mathbf{Q}(t)$.

La démonstration est la même que pour $k = 1$ (*cf.* [4]). On peut supposer que la classe de concordance de f est triviale. Soit alors F : $D^{2k} \to D^{2k+2}$ un plongement différentiable prolongeant f, tel que $F(D^{2k})$ rencontre bD^{2k+2} orthogonalement, et $F(\mathrm{int}D^{2k}) \subset \mathrm{int}D^{2k+2}$. Soit U un voisinage tubulaire ouvert de $F(D^{2k})$. L'espace $Y = D^{2k+2} - U$ est une variété combinatoire compacte dont le bord est $X \cup bU$, où $X = S^{2k+1} - (U \cap S^{2k+1})$. [On peut supposer que $U \cap S^{2k+1}$ est un voisinage tubulaire de $f(S^{2k-1})$ dans S^{2k+1}.] La variété Y ayant l'homologie de S^1, son revêtement infini cyclique possède une torsion de Reidemeister $R(t) \in \mathbf{Q}(t)$. Le théorème de dualité pour la torsion de Reidemeister fournit

$$\tau(bY) = R(t).R(t^{-1}),$$

car la dimension de Y est paire (*cf.* [16], theorem 2). Or, $b\mathbf{Y}$ est le revêtement infini cyclique de $X \cup bU$, et l'on trouve sans difficulté, en utilisant ([15], lemma 4),

$$\tau(b\mathbf{Y}) = \tau(\mathbf{X} \cup b\mathbf{U}) = \tau(\mathbf{X}).\tau(b\mathbf{U})/\tau(b\mathbf{X}) = \tau(\mathbf{X}).(t-1)^{-1},$$

car $\tau(b\mathbf{X})$ est égal à la torsion du revêtement infini cyclique (universel) de $S^1 \times S^{2k-1}$ qui est égal à 1, la caractéristique d'Euler de S^{2k-1} étant nulle (*cf.* [15], theorem B). On obtient donc

$$\tau(b\mathbf{Y}) = \Delta(f).(t-1)^{-2}.$$

Le lemme III.9 s'ensuit, en remarquant que $(t-1)^2$ est de la forme $R(t).R(t^{-1})$, à la multiplication par $\pm t^r$ près.

En combinant les lemmes III.8 et III.9, on obtient

LEMME III.10. — *L'application $f \to \Delta(f)$ induit un homomorphisme*

$$\Delta : \quad \mathbf{C}_{2k-1} \to \mathbf{Q}(t)^* / W,$$

où $\mathbf{Q}(t)^*$ est le groupe multiplicatif des éléments non nuls de $\mathbf{Q}(t)$, et W le sous-groupe de $\mathbf{Q}(t)^*$ engendré par $\pm t^r$, $r \in Z$, et les éléments de la forme $R(t).R(t^{-1})$ avec $R(t) \in \mathbf{Q}(t)$.

Si $f : S^{2k-1} \to S^{2k+1}$ satisfait à l'hypothèse $(\mathbf{H}_k)$ du chapitre II, i. e. si $\pi_i(S^{2k+1} - f(S^{2k-1})) \cong \pi_i(S^1)$ pour $i < k$, où $k \geqq 2$, on a vu que le $Z[\mathbf{J}]$-module $A \cong \pi_k(S^{2k+1} - f(S^{2k-1}))$ a une présentation d'excès nul (*cf.* théorème II.3). Soit $\Delta_A(t)$ son déterminant (chap. II, § 2).

LEMME III.11. — *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\Delta(f) = (\Delta_A(t))^{\varepsilon(k+1)},$$

où $\varepsilon(n) = (-1)^n$.

En effet, soit U un voisinage tubulaire ouvert de $f(S^{2k-1})$ dans S^{2k+1}. Posons $X = S^{2k+1} - U$. Comme $\pi_i X \cong \pi_i(S^1)$ pour $i < k$, X admet une décomposition en anses de la forme

$$X = D^{2k+1} + (\varphi^1) + (\varphi_1^k) + \ldots + (\varphi_\alpha^k) + (\varphi_1^{k+1}) + \ldots + (\varphi_\alpha^{k+1}),$$

où les anses (φ_i^k) sont trivialement attachées (*cf.* lemme II.9). Par définition, $\tau(f)$ est la torsion de Reidemeister du revêtement infini cyclique (universel) $\mathbf{X}$ de X. On notera X_q la réunion des anses d'indices $\leqq q$ dans la décomposition de X ci-dessus, et $\mathbf{X}_q$ la partie de $\mathbf{X}$ au-dessus de X_q. L'espace $\mathbf{X}_q$ est aussi le revêtement universel de X_q pour $q \geqq 1$. L'homologie de $\mathbf{X}$ est donnée par l'homologie du complexe

$$0 \leftarrow H_0(\mathbf{X}_0) \xleftarrow{d} H_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_0) \leftarrow 0 \leftarrow \ldots$$
$$\ldots \leftarrow 0 \leftarrow H_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_1) \xleftarrow{d} H_{k+1}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_k).$$

Soient x^0, x^1, x_1^k, ..., x_α^k, x_1^{k+1}, ..., x_α^{k+1} les classes d'homologie (relatives) de relèvements des âmes des anses de la décomposition de X ci-dessus. (Les indices supérieurs indiquent la dimension, ou, ce qui revient au même, l'indice de l'anse correspondante.) On a

$$dx^1 = (t-1)x^0 \qquad \text{et} \qquad dx_i^{k+1} = \sum_j a_{ij}\, x_j^k.$$

Si l'on prend le produit tensoriel du complexe ci-dessus avec $\mathbf{Q}(t)$, ce complexe devient acyclique, et $\tau(f)$ est donné par

$$\tau(f) = (\det a)^{\varepsilon(k+1)} . (t-1)^{-1},$$

où a désigne la matrice (a_{ij}). Le lemme III.11 en résulte.

THÉORÈME III.12. — *Pour $k \geqq 1$, le groupe $\mathbf{C}_{2k-1}$ n'est pas de type fini.*

Pour $k = 1$, *voir* [4]. Supposons $k \geqq 2$. Toute fraction rationnelle réciproque $F \in \mathbf{Q}(t)$, c'est-à-dire telle que $F(t^{-1}) = \pm t^r F(t)$, se projette sur un élément d'ordre 2 (ou égal à 1) dans le quotient $\mathbf{Q}(t)^*/W$. Pour voir que $\mathbf{C}_{2k-1}$ n'est pas de type fini, il suffit donc de mettre en évidence une infinité de fractions rationnelles de $\mathbf{Q}(t)^*$ dans l'image de $\mathbf{C}_{2k-1}$ dont les classes mod W soient distinctes.

Pour k impair, on considère le $Z[\mathbf{J}]$-module A de présentation $(x_1, x_2; m(t-1)x_1 + x_2, -tx_1 + (t-1)x_2)$, où m est un entier positif. Une vérification immédiate montre que A satisfait aux conditions du théorème II.3. Il existe donc un plongement $f : \Sigma^{2k-1} \to S^{2k+1}$ tel que $\pi_i(S^{2k+1} - f(\Sigma^{2k-1})) \cong \pi_i(S^1)$, et $A \cong \pi_k(S^{2k+1} - f(\Sigma^{2k-1}))$. On vérifie facilement que la construction du nœud f au chapitre II (§ 6) conduit ici à $\Sigma = S^{2k-1}$ pourvu que m soit pair. [La forme quadratique sur $Z_2 + Z_2$ définie par $Q(x) = x'ax$, où a est la matrice d'ordre 2 dont les lignes sont $(m, 0)$ et $(-1, 1)$, a pour invariant d'Arf la réduction mod 2 de m.] On a

$$\Delta(f) = \Delta_A(t) = mt^2 - (2m-1)t + m.$$

Pour k pair, on part de la matrice

$$a = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m & m \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -m & -1 & 0 & 0 \\ -m & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'on forme le $Z[\mathbf{J}]$-module A de présentation

$$\left(x_1, x_2, x_3, x_4; \sum_j (ta_{ij} + a_{ji})x_j\right)$$

dont il est immédiat de vérifier qu'il satisfait aux conditions du théorème II.3. La signature de la forme quadratique définie par $a + a'$ étant nulle, il existe un $(2k-1)$-nœud $f : S^{2k-1} \to S^{2k+1}$ satisfaisant à l'hypothèse $(\mathbf{H}_k)$, et tel que $\pi_k(S^{2k+1} - f(S^{2k-1})) \cong A$. (Pour $k = 2$, *cf.* remarque au chapitre II, § 6.) On a

$$\Delta(f) = (\Delta_A(t))^{-1} = (mt^4 - (2m-1)t^2 + m)^{-1}.$$

Les polynômes $mt^2 - (2m-1)t + m$ se projettent sur des éléments deux à deux distincts de $\mathbf{Q}(t)^*/W$. En effet, soit P un polynôme en t de la forme $\pm t^r R(t).R(t^{-1})$, et supposons que P admette une racine non réelle θ telle que $|\theta| = 1$. Alors $\bar{\theta} = \theta^{-1}$, et θ est racine multiple de P. Or, les polynômes $mt^2 - (2m-1)t + m$ ont toutes leurs racines non réelles et de module 1 $(m > 0)$, et ils n'ont pas de racine commune. Aucun produit $(mt^2 - (2m-1)t + m)(nt^2 - (2n-1)t + n)$, $m \neq n$, ne peut donc être de la forme $\pm t^r R(t).R(t^{-1})$. Les projections de $mt^2 - (2m-1)t + m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ dans $\mathbf{Q}(t)^*/W$ sont donc deux à deux distinctes. Il en est de même des polynômes $mt^4 - (2m-1)t^2 + m$, donc aussi de leurs inverses.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Brown (E. H.) and Peterson (F.). — *The Kervaire invariant of* $(8k+2)$-*manifolds* (à paraître).

[2] Cerf (Jean). — La nullité de $\pi_0(\text{Diff } S^3)$, *Séminaire H. Cartan*, t. 15, 1962-1963 : *Topologie différentielle*, nos 8, 9-10, 20 et 21, 94 pages.

[3] Crowell (R. H.) and Fox (R. H). — *Introduction to knot theory.* — Boston, Ginn and Comp., 1963 (Introduction to higher Mathematics).

[4] Fox (R. H.) and Milnor (J. W). — Singularities of 2-spheres in 4-space and equivalence of knots, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 63, 1957, p. 406.

[5] Hirsch (Morris W.). — Immersions of manifolds, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 93, 1959, p. 242-276.

[6] Hopf (H.). — Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, *Comment. Math. Helvet.*, t. 14, 1941-1942, p. 257-309.

[7] Kervaire (Michel A.). — An interpretation of G. Whitehead's generalization of the Hopf invariant, *Annals of Math.*, Series 2, t. 69, 1959, p. 345-364.

[8] Kervaire (Michel A.). — Higher-dimensional knots, à paraître dans *Symposium Marston Morse*, Princeton, 1965.

[9] Kervaire (M. A.) and Milnor (J. W.). — On 2-spheres in 4-manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 47, 1961, p. 1651-1657.

[10] Kervaire (M. A.) and Milnor (J. W.). — Groups of homotopy spheres, I., *Annals of Math.*, Series 2, t. 77, 1963, p. 504-537.

[11] Levine (J.). — *Unknotting homology spheres in codimension* 2 (à paraître).

[12] Milnor (J. W.). — *Morse theory.* Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. — Princeton, Princeton University Press, 1963 (*Annals of Mathematics Studies*, 51).

[13] Milnor (J. W.). — A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds, *Differentialgeometry*, p. 39-55. — Providence, American mathematical Society, 1961 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 3).

[14] MILNOR (J. W.). — *Differentiable structures.* — Princeton, Princeton University 1961 (multigr.).

[15] MILNOR (J. W.). — Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, *Annals of Math.*, Series 2, t. 74, 1961, p. 575-590.

[16] MILNOR (J. W.). — A duality theorem for Reidemeister torsion, *Annals of Math.* Series 2, 76, 1962, p. 137-147.

[17] PALAIS (R. S.). — Local triviality of the restriction map for embeddings, *Comm. Math. Helvet.*, t. 34, 1960, p. 305-312.

[18] *Séminaire H. Cartan*, t. 1, 1948-1949 : *Topologie algébrique*, 2e édition. — Paris, Secrétariat mathématique, 1955.

[19] SHAPIRO (Arnold). — Obstructions to the embedding of a complex in a euclidean space, I: The first obstruction, *Annals of Math.*, Series 2, t. 66, 1957, p. 256-269.

[20] SMALE (A.). — On the structure of manifolds, *Amer. J. of Math.*, t. 84, 1962. p. 387-399.

[21] WHITEHEAD (J. H. C.). — Manifolds with transverse fields in euclidean space, *Annals of Math.*, Series, 2 t. 73, 1961, p. 154-212.

[22] WHITNEY (H.). — The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space, *Annals of Math.*, Series 2, 1944, p. 220-246.

(Manuscrit reçu le 21 novembre 1964.)

Michel A. KERVAIRE
Courant Institute of Mathematical Scienccs,
151 Mercer Street,
New York 3 N. Y. (États-Unis).