

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-MARIE SOURIAU

## **Prolongements du champ de Schwarzschild**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 93 (1965), p. 193-207

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1965\\_\\_93\\_\\_193\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1965__93__193_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## PROLONGEMENTS DU CHAMP DE SCHWARZSCHILD;

PAR

JEAN-MARIE SOURIAU (1).

**Sommaire.** — On sait que M. KRUSKAL a découvert en 1960 un prolongement analytique maximal du champ de gravitation de Schwarzschild.

Nous généralisons ce résultat, en étudiant le problème avec une constante cosmologique non nulle, et en construisant plusieurs prolongements analytiques essentiellement distincts (notamment une famille à un paramètre).

Une interprétation astrophysique est peut-être possible, mais certainement très surprenante.

**Notations.** — Indices grecs = 1, 2, 3, 4; indices latins = 2, 3, 4.

$$\begin{aligned}t &= x^1; & x &= x^2; & y &= x^3; & z &= x^4; \\r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\x &= r \cos \theta \cos \varphi; & y &= r \cos \theta \sin \varphi; & z &= r \sin \theta.\end{aligned}$$

### 1. Une solution de l'équation d'Einstein.

Si l'on pose *a priori*

$$(1) \quad ds^2 = \alpha(r) dt^2 + 2 dt dr + dr^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

on définit une structure riemannienne hyperbolique normale sur un ouvert  ${}_0E$  ( $R^4$  privé de la droite  $x = y = z = 0$ ); on notera que le déterminant de la matrice des  $g_{\lambda\mu}$  est égal à  $-1$ , quelle que soit la fonction  $\alpha$ .

Le calcul du tenseur de Ricci donne

$$(2) \quad R_{1\mu} = \left[ \frac{\alpha'}{r} + \frac{\alpha''}{2} \right] g_{1\mu}; \quad R_{lm} = \left[ \frac{\alpha'}{r} + \frac{\alpha - 1}{r^2} \right] g_{lm};$$

par suite, les tenseurs  $R_{\lambda\mu}$  et  $g_{\lambda\mu}$  seront proportionnels si

$$(3) \quad \frac{\alpha''}{2} = \frac{\alpha - 1}{r^2};$$

(1) Laboratoire de Relativité, Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, Marseille, 3<sup>e</sup>.

le coefficient de proportionnalité  $\Lambda$  est alors constant <sup>(2)</sup>; la résolution de (3) donne d'ailleurs

$$(4) \quad \alpha(r) = 1 - \frac{b}{r} + \frac{\Lambda}{3} r^2 \quad (b, \Lambda = \text{Cte});$$

par suite, la formule

$$(5) \quad ds^2 = \left[ 1 - \frac{b}{r} + \frac{\Lambda}{3} r^2 \right] dt^2 + 2 dt dr + dr^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

définit une solution de l'équation  $R_{\lambda\mu} = \Lambda g_{\lambda\mu}$ , qui est équivalente à l'équation d'Einstein dans le vide avec constante cosmologique  $\Lambda$

$$(6) \quad R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} R g_{\lambda\mu} + \Lambda g_{\lambda\mu} = 0.$$

## 2. Diverses restrictions de la solution précédente.

On peut donner d'autres formes au  $ds^2$  [form. (5)] par changement de variables; ainsi, en changeant  $t$  en  $t - r$ , on trouve

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \left[ \frac{b}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right] [d[t - r]]^2$$

qui montre comment la métrique devient minkowskienne lorsque  $b$  et  $\Lambda$  tendent vers zéro.

Posons

$$(7) \quad f(r) = \int \frac{dr}{\alpha(r)}; \quad \tau = t + f(r)$$

en utilisant les variables sphériques  $\theta$  et  $\varphi$ , il vient

$$(8) \quad ds^2 = \alpha(r) d\tau^2 - \frac{dr^2}{\alpha(r)} - r^2 [d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2],$$

mais cette expression n'est valable que pour les valeurs de  $r$  qui n'annulent pas  $\alpha$ ; on peut dire que le paramétrage de (8) est singulier pour les racines de  $\alpha$ , ou encore que (5) est un prolongement analytique de (8).

D'ailleurs, dans le cas  $\Lambda = 0$ ,  $b > 0$ , on reconnaît en (8) le  $ds^2$  de Schwarzschild

$$(9) \quad ds^2 = \left[ 1 - \frac{b}{r} \right] d\tau^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} - r^2 [d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2]$$

valable dans le cas  $\alpha > 0$ , c'est-à-dire pour  $r > b$ .

(2) Ceci résulte simplement des identités de conservation de la Relativité.

On peut aussi définir, dans un intervalle où  $\alpha$  est positif, une fonction croissante  $\rho$  de  $r$  par la relation

$$(10) \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{r\sqrt{\alpha(r)}};$$

en posant

$$x = \frac{r}{\rho} \xi, \quad y = \frac{r}{\rho} \eta, \quad z = \frac{r}{\rho} \zeta,$$

et en portant dans (8), il vient

$$(11) \quad ds^2 = \alpha d\tau^2 - \frac{r^2}{\rho^2} [d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2] \quad (\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}),$$

$\alpha$  et  $\frac{r^2}{\rho^2}$  sont des fonctions de  $\rho$  par l'intermédiaire de  $r$ ; les variables  $\tau, \xi, \eta, \zeta$  forment donc un système orthogonal.

Dans le cas général  $\Lambda \neq 0$ , l'intégration de (10) conduit à des fonctions elliptiques; pour  $\Lambda = 0$ , on trouve

$$(11 \text{ bis}) \quad ds^2 = \left[ \frac{\rho - \frac{b}{4}}{\rho + \frac{b}{4}} \right]^2 d\tau^2 - \left[ \frac{\rho + \frac{b}{4}}{\rho} \right]^4 [d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2] \quad \left( \rho > \frac{b}{4} \right),$$

formule qui peut être utilisée pour comparer avec l'approximation newtonienne (voir la référence [5]), et fournit par conséquent l'interprétation classique de  $b$  :

$$(12) \quad b = \frac{2G}{c^2} m$$

( $G$ , constante de la gravitation;  $c$ , vitesse de la lumière;  $m$ , mesure gravitationnelle de la masse concentrée à l'origine).

Dans tout ce qui suit, nous supposons  $b > 0$ .

### 3. Étude des géodésiques.

Revenons à la forme (1) ou (5). Le calcul des symboles de Christoffel montre que les quantités  $x^i \dot{x}^k - x^k \dot{x}^i$  sont des intégrales premières de l'équation des géodésiques, donc que chaque géodésique est située dans un « plan »  $ax + by + cz = 0$ . Par une rotation dans l'espace  $x, y, z$ , on peut le transformer en le plan  $z = 0$ , soit  $\theta = 0$ . On est alors ramené à l'étude des extrémales de l'intégrale

$$(13) \quad \int \left\{ \varepsilon [\alpha \dot{t}^2 + 2 \dot{t} \dot{r} - r^2 \dot{\phi}^2] \right\}^{\frac{1}{2}} d\sigma,$$

$\varepsilon$  étant positif ou négatif suivant le genre des géodésiques. Les méthodes canoniques du calcul des variations conduisent au système du premier ordre

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{r} = W - \alpha p, & \dot{t} = p, \\ \dot{\phi} = \frac{C}{r^2} & \dot{p} = \frac{1}{2} p^2 \alpha' - \frac{C^2}{r^3}, \end{cases}$$

où  $C$  et  $W$  sont des constantes d'intégration et  $p$  une nouvelle variable (variable conjuguée de  $r$ ); le point désigne la dérivation par rapport au paramètre naturel des géodésiques (défini à une transformation affine près).

Ce système admet l'intégrale première

$$(15) \quad B = \alpha p^2 - 2pW + \frac{C^2}{r^2}$$

qui est positive (resp. négative, nulle) pour les géodésiques du genre espace (resp. du genre temps, isotropes).

Notons quelques familles importantes de géodésiques :

— Celles pour lesquelles  $W = 0$ ; elles admettent comme intégrale première la variable  $\tau$  définie en (7) (temps de Schwarzschild); nous les appellerons donc *géodésiques instantanées*;

— Les *géodésiques radiales isotropes* ( $B = C = 0$ ); elles ont pour équation  $f(r) \pm \tau = \text{Cte}$ , et s'interprètent comme rayons lumineux entrants ou sortants; notons que les rayons sortants vérifient  $t = \text{Cte}$ ; dans le paramétrage (5), l'origine choisie pour la « date »  $t$  en chaque « point »  $(x, y, z)$  est donc l'arrivée d'un signal lumineux émis par l'astre central; on peut aussi remarquer que  $g^{11} = 0$ , ce qui exprime que les hypersurfaces  $t = \text{Cte}$  sont des fronts d'ondes lumineuses;

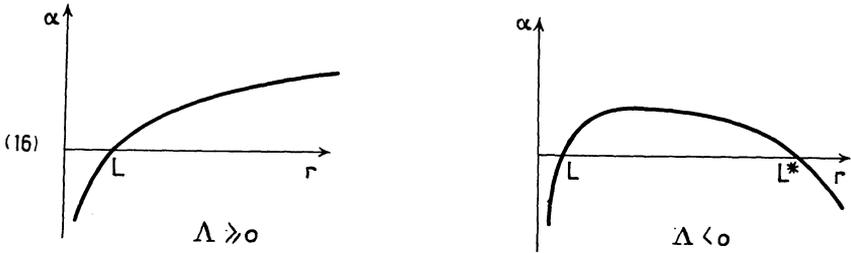
— Les *géodésiques circulaires* ( $r = \text{Cte}$ ); elles n'existent que pour  $\alpha' > 0$ ; elles sont du genre temps (resp. du genre espace, isotropes) si  $r - 3b/2 > 0$  (resp.  $< 0, = 0$ ).

#### 4. Solution de Kruskal généralisée.

La variation de  $\alpha$  est donnée par l'une des deux courbes suivantes <sup>(3)</sup> :  $L$  désignant la première racine de  $\alpha$ , on voit que la fonction  $f(r)$  [définition (7)] possède une singularité logarithmique pour  $r = L$ ; il est

---

<sup>(3)</sup> Nous négligeons le cas où  $\alpha$  serait constamment négatif ( $\Lambda b^2 < -4/9$ ); il n'est possible que si  $\Lambda$  est négatif et si la masse  $m$  est extrêmement grande (la majoration que la mécanique céleste permet de donner à  $|\Lambda|$  montre qu'il faudrait avoir  $m \gg 10^6 \times$  masse de la galaxie).



donc indiqué d'introduire les fonctions  $e^{k[f(r) \pm \tau]}$  pour repérer les rayons entrants et sortants,  $k$  étant une constante bien choisie. Nous poserons donc

$$(17) \quad \begin{cases} \lambda = e^{k[f(r) - \tau]} = e^{-kt}, \\ \mu = e^{k[f(r) + \tau]} = e^{k[2f(r) + t]} = g(r) e^{kt}, \end{cases}$$

avec

$$(18) \quad g(r) = e^{2kf(r)} = \lambda\mu.$$

Si nous choisissons

$$(19) \quad k = \frac{1}{2} \alpha'(L) \quad (k \text{ est positif}),$$

la fonction  $g$  admettra  $L$  comme racine simple; elle aura donc un prolongement analytique continu pour  $r \leq L$ , de même que les fonctions  $\lambda$  et  $\mu$ .

Le tableau de variation de  $g$  est le suivant :

$$(20) \quad \begin{array}{c|ccc} r & 0 & L & \infty \\ \hline g(r) & g(0) & \nearrow 0 \nearrow & +\infty \\ & \Lambda \geq 0 & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} r & 0 & L & L^* \\ \hline g(r) & g(0) & \nearrow 0 \nearrow & +\infty \\ & \Lambda < 0 & & \end{array}$$

on en déduit immédiatement l'existence et la variation de la fonction inverse  $h$  de  $g$ ; on peut donc poser

$$(21) \quad r = h(\lambda\mu),$$

ce qui montre qu'on peut prendre  $\lambda$  et  $\mu$  comme paramètres à la place de  $r$  et  $t$ ; il vient immédiatement

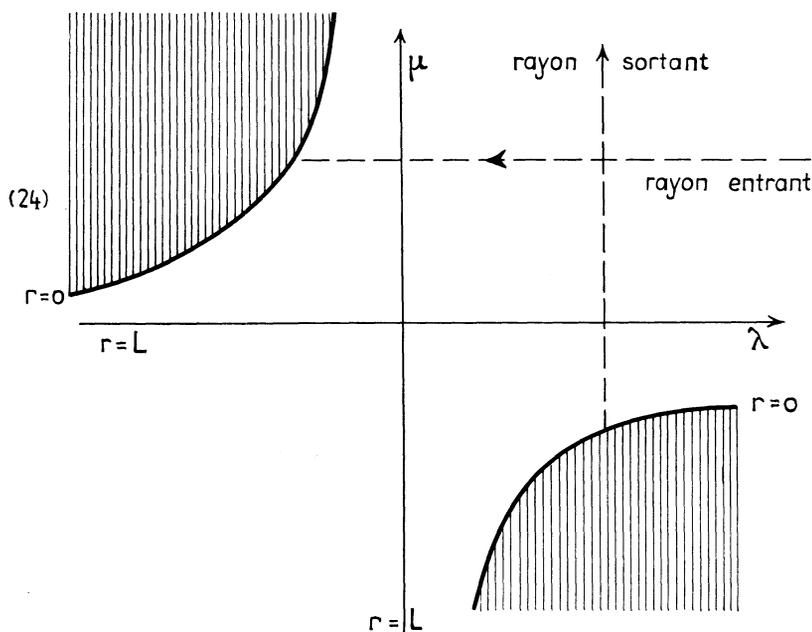
$$(22) \quad ds^2 = -\beta(\lambda\mu) d\lambda d\mu - h(\lambda\mu)^2 [d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2]$$

en posant

$$(23) \quad \beta(\lambda\mu) = \frac{\alpha(r)}{k^2 g(r)},$$

ce qui est permis d'après (21).

$\alpha$  et  $g$  admettent  $L$  comme racine simple; par suite, la fonction  $\beta$  est prolongeable analytiquement, continue et positive pour  $\lambda, \mu > g(0)$  [ $g(0)$  est négatif]; ce qui donne l'ensemble de définition suivant :



• La région  $\lambda \leq 0$  ne correspond à aucune valeur de  $r$  et  $t$ ; la formule (22) définit donc un prolongement analytique du  $ds^2$  [form. (5)] (\*).

— Dans le cas  $\Lambda \geq 0$ , les variables  $\lambda$  et  $\mu$  permettent de donner à  $r$  toutes les valeurs positives [voir le tableau (20)].

Si  $\Lambda < 0$ , il faudra utiliser une autre *carte* (système de coordonnées) pour décrire la région  $r \geq L^*$ ; on peut pour cela recommencer les calculs précédents autour de la racine  $r = L^*$ ; on pose donc

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^* = e^{k^*[f(r)-\tau]} = e^{-k^*t}, \\ \mu^* = e^{k^*[f(r)+\tau]} = e^{k^*[2f(r)+t]} = g^*(r) e^{k^*t}, \\ g^*(r) = e^{2k^*f(r)} = \lambda^* \mu^*, \\ k^* = \frac{1}{2} \alpha'(L^*) \quad (k^* \text{ est négatif}), \end{array} \right.$$

d'où se déduit le tableau de variation du prolongement de  $g^*$  :

$$(26) \quad \begin{array}{c|ccc} r & L & L^* & +\infty \\ g^*(r) & +\infty & \searrow 0 & \searrow g^*(\infty) \end{array} \quad [g^*(\infty) \in \mathbb{R}]$$

et le tableau de variation de la fonction inverse  $h^*$  de  $g^*$ .

(\*) Voir le paragraphe 5 ci-dessous.

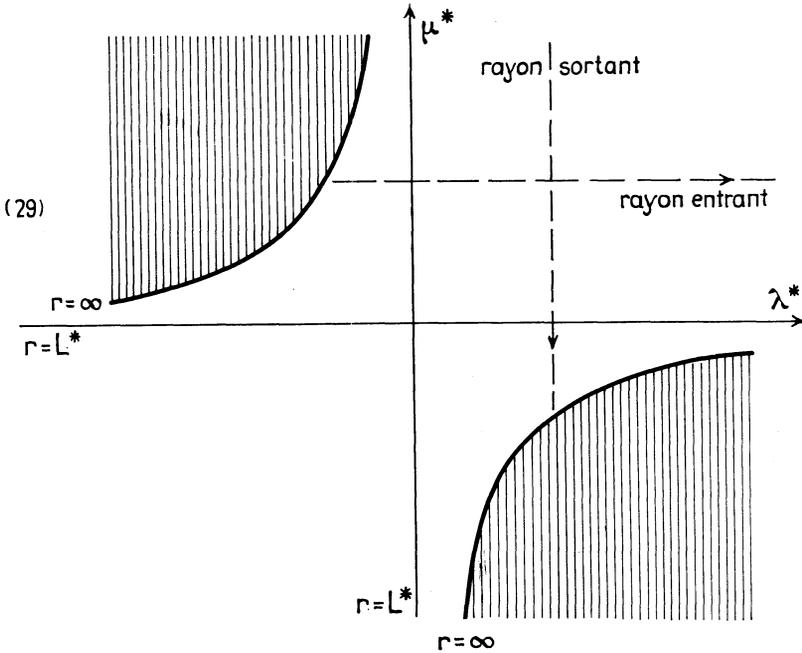
En posant, de même,

$$(27) \quad \beta^*(\lambda^*, \mu^*) = \frac{\alpha(r)}{k^{*2} g^*(r)},$$

on voit comme plus haut qu'on a

$$(28) \quad ds^2 = -\beta^*(\lambda^*, \mu^*) d\lambda^* d\mu^* - h^*(\lambda, \mu)^2 [d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2]$$

dans le domaine suivant [ $\lambda^* \mu^* > g^*(\infty)$ ] :



Là aussi, la région  $\lambda^* < 0$  conduit à un prolongement analytique de (5). Notons que les points communs à ces deux cartes correspondent aux quadrants [ $\lambda > 0, \mu > 0$ ] et [ $\lambda^* > 0, \mu^* > 0$ ], les formules de passage étant

$$(30) \quad \lambda^* = \lambda^{\frac{k^*}{k}}, \quad \mu^* = \mu^{\frac{k^*}{k}} \quad \left( \frac{k^*}{k} \text{ est } < 0 \right).$$

**5. Le problème du prolongement analytique maximal.**

Utilisons les résultats et la terminologie de la référence [5]. Nous désignerons par  $\Phi$  la racine des tenseurs de variance  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  symétriques

réguliers de signature +--- [*loc.cit.*, n° (25.38)]; nous appellerons en abrégé  $\Phi$ -variété toute variété sur laquelle est défini un  $\Phi$ -champ analytique (= variété riemannienne hyperbolique normale, de dimension 4, analytique).

Soit  $V$  une  $\Phi$ -variété,  $\varphi$  le  $\Phi$ -champ qui lui donne sa structure riemannienne.  $V$  possède un atlas composé de cartes  ${}_{\rho}F$  ( $\rho$  parcourant un ensemble d'indices  $I$ ). Si nous posons <sup>(5)</sup>

$$(31) \quad \begin{cases} [{}_{\rho}F^{-1}]_{\Phi}(\varphi) = {}_{\rho}\varphi, \\ {}_{\rho}F^{-1} \cdot {}_q F = {}_{\rho q}C, \end{cases}$$

les objets  ${}_{\rho}\varphi$  et  ${}_{\rho q}C$  ainsi définis vérifient ( $\forall \rho, q, r \in I$ )

$$(32) \quad \begin{cases} {}_{\rho}\varphi \text{ est un } \Phi\text{-champ analytique sur un ouvert } {}_{\rho}E \text{ de } R^4; \\ {}_{\rho q}C \text{ est un opérateur régulier analytique;} \\ {}_{\rho\rho}C = I_{{}_{\rho}E} \text{ (=opérateur identique sur l'ensemble } {}_{\rho}E); \\ {}_{\rho q}C^{-1} = {}_q\rho C; \\ {}_{\rho q}C \cdot {}_q r C < {}_{\rho r}C; \quad [{}_{\rho q}C]_{\Phi}({}_q\varphi) < {}_{\rho}\varphi \quad (6). \end{cases}$$

Réciproquement, si nous construisons des  ${}_{\rho}\varphi$  et des  ${}_{\rho q}C$  vérifiant les axiomes (32), il existe une  $\Phi$ -variété  $V$ , munie d'un atlas  ${}_{\rho}F$ , tels que (31). La donnée des  ${}_{\rho}\varphi$  et des  ${}_{\rho q}C$  définit  $V$ , à une isométrie globale près.

Soient  $V$  et  $V'$  deux  $\Phi$ -variétés séparées et connexes <sup>(7)</sup>.

Nous dirons que  $V'$  est un *prolongement analytique* de  $V$  ( $V \subset V'$ ) si  $V$  est une partie ouverte de  $V'$  (munie de la structure induite de  $\Phi$ -variété). On vérifie que les  $\Phi$ -variétés séparées et connexes forment un ensemble *inductif* pour la relation d'ordre  $\subset$  <sup>(8)</sup>; le théorème de Zorn montre donc que toute  $\Phi$ -variété séparée et connexe possède un *prolongement analytique maximal* lui aussi séparé et connexe.

Nous nous proposons de construire, grâce à l'algorithme (31), (32), quelques prolongements analytiques maximaux de la variété  $V$  définie par le  $ds^2$  du paragraphe 1. On montre aisément que tout prolongement analytique de  $V$  est, comme  $V$ , solution de l'équation d'Einstein (6).

## 6. Construction d'un prolongement analytique maximal.

### (6. a) Cas $\Lambda \geq 0$ .

(33) THÉORÈME. — Pour  $\Lambda \geq 0$ , la  $\Phi$ -variété  $V$  définie, au moyen d'une seule carte <sup>(9)</sup>, par le  $ds^2$  [form. (22)] est un prolongement analytique

<sup>(5)</sup> La notation  $A_{\varphi}(\varphi)$  désigne l'image par  $A$  du  $\Phi$ -champ  $\varphi$  [*loc. cit.*, n° (15.2)].

<sup>(6)</sup> Le signe  $<$  désigne ici le prolongement d'opérateurs [*loc. cit.*, n° (1.10)].

<sup>(7)</sup> On construit facilement des  $\Phi$ -variétés qui ne sont ni séparées, ni connexes.

<sup>(8)</sup> En construisant la limite inductive d'une famille totalement ordonnée de telles variétés.

<sup>(9)</sup> Cet énoncé, pris à la lettre, est faux; il faut évidemment introduire une seconde carte au moins pour éviter les singularités des coordonnées sphériques  $\theta$  et  $\varphi$ ;

maximal de la variété du paragraphe 1, donc de la solution de Schwarzschild généralisée (8).

Pour établir ce théorème, nous allons utiliser les géodésiques de  $V$ , ainsi que certains invariants de courbure.

$R_{\mu\nu,\rho}^\lambda$  désignant les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel, posons

$$(34) \quad R_{\mu\nu}^{\lambda\rho} = g^{\rho\sigma} R_{\mu\nu,\sigma}^\lambda;$$

ce nouveau tenseur, antisymétrique en haut et en bas, peut être considéré comme définissant un opérateur linéaire  $R$  opérant sur l'espace à six dimensions des 2-formes  $F$  suivant la règle

$$(35) \quad R(F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}.$$

Les valeurs propres de cet opérateur  $R$  sont évidemment des fonctions continues sur toute  $\Phi$ -variété, indépendantes du choix des cartes; on peut les calculer avec le  $ds^2$  n° (1); on trouve que  $R$  est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont  $\alpha''/2$  (simple),  $(\alpha - 1)/r^2$  (simple),  $\alpha'/2r$  (quadruple). Dans le cas (5) ou (22) de  $V$ , deux valeurs propres confluent, elles deviennent

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\Lambda}{3} - \frac{b}{r^2} & \text{(double)} \\ \frac{\Lambda}{3} + \frac{b}{2r^2} & \text{(quadruple)} \end{cases} \quad [r \equiv h(\lambda, \mu)],$$

ces valeurs propres tendent vers l'infini lorsque  $r \rightarrow 0$  [ $\lambda, \mu \rightarrow g(0)$ ]; ceci va nous permettre de montrer que  $V$  n'est pas prolongeable de ce côté.

Soit, en effet,  $U$  une  $\Phi$ -variété connexe séparée qui prolonge analytiquement  $V$ . On sait que  $U$  peut être recouverte par des ouverts  $U_j$  tels que deux points quelconques de chaque  $U_j$  puissent être reliés par un arc de géodésique. La relation entre points  $X$  et  $X'$  de  $U$  :

$$[X \sim X'] \Leftrightarrow [\text{il existe un polygone géodésique reliant } X \text{ à } X']$$

est évidemment une équivalence; par construction, deux points d'un même  $U_j$  appartiennent à la même classe; les classes, qui sont des réunions

par exemple, au moyen du changeur de carte

$$\begin{aligned} {}_{12}C(= {}_{21}C): \quad & \lambda \rightarrow \lambda, \quad \mu \rightarrow \mu, \quad \theta \rightarrow \text{Arc sin}(\cos \theta \sin \varphi), \\ \varphi = {}_2 \text{Arc tg} \left( \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi} - \cos \theta \cos \varphi} \right). \end{aligned}$$

En (6. b) de même, nous ferons grâce au lecteur de ces précisions pesantes.

de  $U_j$ , sont des ouverts deux à deux disjoints; puisque  $U$  est connexe (voir référence [1]), il existe une seule classe; autrement dit, deux points quelconques de  $U$  sont reliés par un polygone géodésique.

Supposons qu'il existe un point  $X_1$  de  $U$  qui n'appartienne pas à  $V$ ; soit  $X_0$  un point de  $V$ ; il existera alors un polygone géodésique reliant  $X_0$  à  $X_1$ ; il y aura sur ce polygone deux sommets consécutifs dont l'un appartiendra à  $V$ , l'autre non;  $\sigma$  désignant un paramètre naturel de l'arc en question, l'application  $F[\sigma \rightarrow X]$  vérifiera  $F(\sigma_0) \in V$ ,  $F(\sigma_1) \notin V$  ( $\sigma_0 < \sigma_1$ ); soit  $\sigma_2$  la borne inférieure des  $\sigma$  tels que  $F(\sigma) \notin V$ ;  $F(\sigma_2)$  appartient au complémentaire de  $V$  dans  $U$  (qui est fermé); il existera donc un arc de géodésique  $F$ , tracé dans  $V$ , défini pour  $\sigma \in [\sigma_0, \sigma_2[$ , et non prolongeable dans  $V$  pour  $\sigma = \sigma_2$  <sup>(10)</sup>; de plus, les valeurs propres de l'opérateur  $R$  ci-dessus (35) resteraient bornées lorsque  $\sigma$  tendrait vers sa limite  $\sigma_2$ .

Nous aurons donc montré que  $V$  est maximale si nous pouvons établir la proposition suivante :

(37) Si un arc de géodésique tracé dans  $V$  n'est pas prolongeable au-delà d'une valeur  $\sigma_2$  du paramètre naturel  $\sigma$ , les valeurs propres de  $R$  ne restent pas bornées lorsque  $\sigma$  tend vers  $\sigma_2$ .

Or cette proposition résulte de la discussion (analogue à celle des problèmes classiques de la mécanique rationnelle) des géodésiques, dont les équations sont ramenées à des quadratures par les formules (14) et (15); avec les variables  $\lambda$  et  $\mu$ , ces équations s'écrivent

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\lambda} = -k\lambda p, & \dot{\mu} = k\mu \left[ \frac{2W}{\alpha} - p \right], \\ \dot{\phi} = \frac{C}{r^2}, & \dot{p} = \frac{1}{2} p^2 \alpha' - \frac{C^2}{r^3}, \\ r = h(\lambda, \mu), & B = \alpha p^2 - 2pW + \frac{C^2}{r^2}; \end{array} \right.$$

le lecteur pourra vérifier.

(6. b) Cas  $\Lambda < 0$ .

Dans ce cas, il existe des géodésiques (où  $r \rightarrow L^*$ ) non prolongeables en  $\lambda$  et  $\mu$  au-delà d'une valeur du paramètre naturel, sans qu'il y ait de singularité dans la courbure; on peut effectivement prolonger  $V$  de ce côté-là, par exemple en utilisant une double infinité dénombrable de cartes caractérisées comme suit :

---

<sup>(10)</sup> Sinon  $F$  aurait deux prolongements distincts, l'un où  $F(\sigma_2) \in V$ , l'autre où  $F(\sigma_2) \notin V$ ; ceci serait contraire au théorème d'unicité des solutions des équations différentielles, valable en particulier sur les variétés analytiques séparées.

Variables des cartes :

$$(39) \quad \begin{cases} \lambda_\rho, \mu_\rho, \theta, \varphi & \left[ \lambda_\rho \mu_\rho > g(0), |\theta| < \frac{\pi}{2}, |\varphi| < \pi \right], \\ \lambda_\rho^*, \mu_\rho^*, \theta, \varphi & \left[ \lambda_\rho^* \mu_\rho^* > g^*(\infty), |\theta| < \frac{\pi}{2}, |\varphi| < \pi \right] \end{cases}$$

(l'indice  $\rho$  parcourt  $Z$ ).

Formules de changement de cartes :

$$(40) \quad \begin{cases} \lambda_\rho^* = \lambda_\rho^{k^*/k}, & \mu_\rho^* = \mu_\rho^{k^*/k} & [\lambda_\rho, \mu_\rho > 0; \lambda_\rho^*, \mu_\rho^* > 0]; \\ -\lambda_{\rho+1}^* = [-\lambda_\rho]^{k^*/k}, & -\mu_{\rho+1}^* = [-\mu_\rho]^{k^*/k} & [\lambda_\rho, \mu_\rho < 0; \lambda_\rho^*, \mu_\rho^* < 0]. \end{cases}$$

Structure riemannienne :

$$(41) \quad \begin{cases} ds^2 = -\beta(\lambda_\rho, \mu_\rho) d\lambda_\rho d\mu_\rho - h(\lambda_\rho, \mu_\rho)^2 [d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2], \\ ds^2 = -\beta^*(\lambda_\rho^*, \mu_\rho^*) d\lambda_\rho^* d\mu_\rho^* - h^*(\lambda_\rho^*, \mu_\rho^*)^2 [d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2] \end{cases}$$

dont le lecteur tirera aisément la construction des éléments (31), vérifiant (32), caractérisant une  $\Phi$ -variété  $V$ ; on voit sans peine que  $V$  est séparée et connexe <sup>(1)</sup>; la discussion des géodésiques, qui se raccordent de carte en carte par les formules (40), montre que la proposition (37) est applicable à cette nouvelle variété  $V$ , donc que  $V$  est encore un *prolongement maximal* de la solution de Schwarzschild généralisée.

Indiquons enfin que, dans le cas  $\Lambda = 0$ , le théorème (33) devient celui de Kruskal (référence [4]); on trouve alors

$$(42) \quad \begin{cases} \alpha(r) = 1 - \frac{b}{r}; & L = b; & k = \frac{1}{2b}; & g(r) = \left[ \frac{r}{b} - 1 \right] e^{\frac{r}{b}}; \\ \beta(\lambda, \mu) = \frac{4b^3}{r} e^{-\frac{r}{b}}; \end{cases}$$

on retrouve les notations de Kruskal en remplaçant les variables  $\lambda$  et  $\mu$  par

$$u = \frac{\lambda + \mu}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{\lambda - \mu}{2}.$$

### 7. Autres prolongements.

Bien entendu, on ne peut pas affirmer que  $V$  est le seul prolongement analytique du  $ds^2$  [form. (8)] (à une isométrie globale près); par exemple, dans le cas  $\Lambda < 0$ , on obtient un autre prolongement analytique  $V'$  en

<sup>(1)</sup> et même *simplement* connexe, ainsi que le montre la méthode de la référence [5], note II.

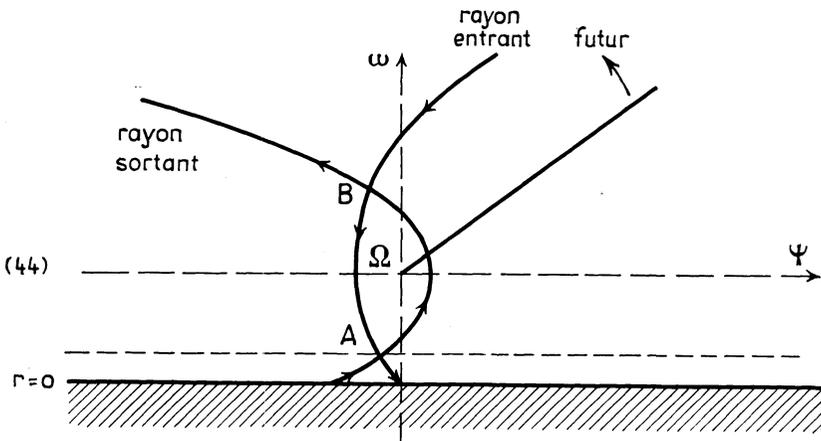
faisant le *quotient* de  $V$  par le groupe d'isométries globales sans points doubles  $G$  obtenu en ajoutant un même entier à tous les indices  $p$  des cartes (39);  $V'$  n'est pas isométrique à  $V$ , ni même homéomorphe, puisque son groupe de Poincaré est  $G$ , c'est-à-dire un groupe à un générateur. Il est clair, d'autre part, que la proposition (37) est applicable à  $V'$  comme à  $V$ , donc que  $V'$  est aussi un prolongement maximal.

Même dans le cas  $\Lambda \geq 0$ , on peut construire une nouvelle solution  $\mathfrak{V}$  en faisant le quotient par l'isométrie globale ( $\lambda \rightarrow -\lambda$ ,  $\mu \rightarrow -\mu$ ). Cette isométrie a un point double, le point  $\Omega$  ( $\lambda = \mu = 0$ ) qu'on peut exclure.

On peut donner une représentation de  $\mathfrak{V}$  au moyen d'une seule carte en introduisant les coordonnées  $\psi$  et  $\omega$

$$(43) \quad \frac{1}{2}[\lambda + i\mu]^2 = \psi + i\omega.$$

L'ensemble de variation est  $\omega > g(0)$ ,  $\psi^2 + \omega^2 > 0$  :



le  $ds^2$  est donné par la formule

$$(45) \quad ds^2 = -\frac{\beta(\omega)}{4[\omega^2 + \psi^2]} \{ \omega [d\omega^2 - d\psi^2] + 2\psi d\omega d\psi \} \\ - h(\omega)^2 \{ d\theta^2 + \cos^2 \theta d\psi^2 \},$$

les fonctions  $\beta$  et  $h$  ayant les valeurs définies en (21) et (23). On peut aussi caractériser  $\mathfrak{V}$  par un autre atlas, constitué de deux cartes, dont

l'une est celle du paragraphe 1, l'autre celle qui s'en déduit par échange de  $\lambda$  et  $\mu$ ; cette définition de  $\varrho$  est la suivante <sup>(12)</sup> :

$$(46) \left\{ \begin{array}{l} \text{Première carte :} \\ x, y, z, t \quad (r > 0); \quad ds^2 = \alpha dt^2 + 2 dt dr + dr^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \\ \text{Deuxième carte :} \\ x, y, z, t^* \quad (r > 0); \quad ds^2 = \alpha dt^{*2} - 2 dt^* dr + dr^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \end{array} \right.$$

Changement de carte :

$$(47) \quad t^* = t + \frac{1}{k} \text{Log} |g(r)| \quad (r \neq L).$$

En fait, on constate que les relations du paragraphe 6, permettant de construire une  $\Phi$ -variété, sont satisfaites pourvu que  $t^* - t$  soit une primitive de  $\varrho/\alpha$ ; on peut donc généraliser (47) par

$$(48) \quad t^* = \begin{cases} t + \frac{1}{k} \text{Log} (g(r)) & \text{pour } r > L, \\ t + \frac{1}{k} \text{Log} (-K g(r)) & \text{pour } r < L, \end{cases}$$

$K$  étant une constante arbitraire.

Les solutions ainsi construites sont essentiellement distinctes de la solution de Kruskal généralisée (22); on constate en effet qu'elles possèdent des courbes fermées composées de deux arcs de géodésiques radiales isotropes <sup>(13)</sup> [ce qui n'a pas lieu dans le cas (22)]; le paramètre  $r$  [qui est défini intrinsèquement, par exemple au moyen des formules (36)] prend aux sommets de ce polygone des valeurs  $r_1$  et  $r_2$  liées par la formule

$$(49) \quad \frac{g(r_1)}{g(r_2)} = -K$$

qui fait intervenir explicitement le paramètre  $K$ ; on constate donc que les prolongements correspondant aux différentes valeurs de  $K$  diffèrent aussi essentiellement entre eux.

Il en sera de même, évidemment, de leurs prolongements analytiques maximaux (qui existent d'après le théorème du paragraphe 5).

<sup>(12)</sup> Nous avons changé  $t^*$  en  $-t^*$ , pour que l'avenir soit caractérisé par les  $t^*$  croissant dans la région de Schwarzschild.

<sup>(13)</sup> d'équations respectives  $t = \text{Cte}$ ,  $t^* = \text{Cte}$ .

### 8. Y a-t-il une interprétation physique ?

La solution de Schwarzschild donne une bonne description de l'univers dans le système solaire; il est donc légitime de chercher si ses prolongements, solutions eux aussi des équations d'Einstein, peuvent s'interpréter.

— Les prolongements au loin ( $r > L^*$ ) semblent avoir peu de chance d'être observables : les valeurs numériques qu'on peut donner à  $L^*$  sont si grandes qu'il est peu vraisemblable qu'on puisse trouver dans l'univers des régions aussi grandes où l'influence d'un seul astre soit prépondérante. D'ailleurs, ce prolongement suppose  $\Lambda < 0$ , ce qui reste à montrer expérimentalement.

— Examinons maintenant les prolongements pour les petites valeurs de  $r$ . Ceux-ci ne peuvent s'interpréter que si le rayon  $r_0$  de l'astre (en dessous duquel on doit raccorder une solution *intérieure* à l'une des solutions *extérieures* étudiées ici) est inférieure à la *limite de Schwarzschild*  $L$ . Est-ce possible ? On ne peut pas répondre *a priori* à cette question; ce qui est certain, c'est que cela ne peut pas se produire avec un astre composé de matière « ordinaire » approximativement « immobile » ( $x, y, z$  constants) car les courbes ainsi définies sont du genre espace pour  $r < L$ . En d'autres termes, cette matière « immobile » va en même temps *plus vite que la lumière*; il faut donc renoncer, soit à l'immobilité (et construire un modèle dynamique), soit aux états connus de la matière <sup>(1)</sup>.

— Quoi qu'il en soit, *si un tel objet existe*, l'opinion suivant laquelle la lumière ne peut ni l'atteindre ni en sortir [suggérée par la forme (8) du  $ds^2$ , qui décrit une variété *non connexe*] n'est peut-être pas la seule possible; on peut chercher à interpréter aussi les autres solutions que nous venons de construire.

Remarquons au passage que la constante cosmologique ne joue qu'un rôle négligeable dans cette discussion.

— La principale difficulté d'interprétation de la solution de Kruskal généralisée (*fig. 24*) vient du fait que la surface de l'astre ( $r = r_0 < L$ ) n'est pas connexe : elle se compose de deux nappes disjointes, dont l'une est dans le futur de l'autre; l'une est susceptible de nous envoyer de la lumière, l'autre d'en recevoir. D'autre part, il existe une région ( $\lambda < 0, \mu < 0$ ) qui constitue une sorte d'espace-temps parallèle au nôtre (avec impossibilité mutuelle des deux espaces-temps de s'envoyer des signaux) dont l'interprétation est aussi assez ardue (*voir* [4] et [6]).

---

<sup>(1)</sup> On peut noter que le schéma matière parfaite ou fluide parfait n'est pas incompatible avec des lignes de courant du genre espace; *voir* la référence [5], § 36.

— On lève ces difficultés avec la solution (44), ou plus généralement avec les solutions de la famille [(46), (48)], mais c'est en en créant de nouvelles. En effet, les variétés connexes ainsi construites ne sont pas *simplement connexes* (leur groupe de Poincaré est  $Z$ ); ceci permet une circonstance paradoxale : il est impossible de distinguer continûment et globalement les vecteurs de futur de ceux de passé.

On est donc obligé de renoncer au principe de causalité, sous sa forme habituelle, à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild, et ceci crée aussi de grandes difficultés, par exemple pour une étude thermodynamique.

On peut remarquer aussi que tout objet qui pénètre à l'intérieur de la limite de Schwarzschild est destiné nécessairement à atteindre la surface de l'astre ( $r$  variant toujours dans le même sens, sur les courbes de temps, pour  $\alpha < 0$ ); celui-ci apparaît donc comme un piège à matière, destiné à happer tout ce qu'il rencontre. Qui sait s'il en est de même du rayonnement ?

Il est clair en tous cas que la physique est actuellement insuffisante pour donner une description de tels objets — s'il en existe.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOURBAKI (Nicolas). — *Topologie générale*, chap. 1 et 2, 3<sup>e</sup> édition. — Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1142; Bourbaki, 2).
- [2] EHLERS (J.) et KUNDT (W.). — Exact solutions of the gravitational field equations; *Gravitation : An introduction to current research*, p. 49-101. — New York, John Wiley and Sons, 1962.
- [3] FRONSDAL (C.). — Completion and embedding of the Schwarzschild solution, *Phys. Rev.*, Series 2, t. 116, 1959, p. 778-781.
- [4] KRUSKAL (M. D.). — Maximal extension of Schwarzschild metric, *Phys. Rev.*, Series 2, t. 119, 1960, p. 1743-1745.
- [5] SOURIAU (Jean-Marie). — *Géométrie et relativité*. — Paris, Hermann, 1964 (Enseignement des Sciences).
- [6] WHEELER (John Archibald). — *Geometrodynamics*. — New York, London, Academic Press, 1962 (*Topics of modern Physics*, 1).

(Manuscrit reçu le 16 octobre 1964.)

Jean-Marie SOURIAU,  
 Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille,  
 Laboratoire de Relativité,  
 1, place Victor-Hugo, Marseille, 3<sup>e</sup> (Bouches-du-Rhône).