BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES-LOUIS LIONS

Sur certaines équations paraboliques non linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 93 (1965), p. 155-175
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1965__93__155_0>

Bull. Soc. math. France,
93, 1965, p. 155 à 175.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS PARABOLIQUES NON LINÉAIRES ;

PAR

JACQUES-LOUIS LIONS.

Introduction.

Si A est un opérateur non *linéaire* de nature « elliptique » (dans un sens précisé dans le texte), on considère l'équation (de nature parabolique)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f \qquad [f \text{ donné, } t \in (0, T)] \tag{1}$$

et $u \in$ domaine de A (ce qui signifie, pratiquement, que u satisfait à certaines conditions aux limites *en les variables d'espaces*), avec les deux types suivants de conditions :

(2) $u(0) = u_0$, u_0 donné (recherche de solution *avec donnée initiale*) [1]

ou

(3) $u(0) = u(T)$ (recherche de solution *périodique*).

Le problème (1)-(2) a été récemment étudié :

— par des méthodes de compacité, dans [14];

— par des méthodes de monotonie selon [11], dans [3];

et ceci pour des classes assez générales d'opérateurs A.

Dans [14] et [3] les opérateurs A correspondent essentiellement aux opérateurs « *purement elliptiques* » étudiés par les mêmes auteurs, et par des méthodes de principe analogue, dans [13] et [2].

---

[1] $u(0)$ dénote la fonction $x \to u(x, 0)$, x = variables d'espace.

Or, dans l'article précédent de LERAY et l'auteur [6], nous avons étendu les hypothèses (aussi bien abstraites que concrètes) de VIIŠK et BROWDER aux opérateurs « purement elliptiques »

Il est alors naturel d'essayer d'étudier le problème (1)-(2) — ou (1)-(3) — lorsque A vérifie des hypothèses analogues à celles considérées dans [6].

C'est l'objet de ce travail.

La méthode utilisée repose sur la « régularisation elliptique », que nous avons introduite dans [7] et utilisée dans [8] et [9] pour les problèmes analogues relatifs aux équations de Navier-Stokes (qui n'entrent pas dans la situation de ce travail — ce qui montre bien, comme nous le soulignerons encore plus loin — que la théorie présentée ici n'est pas encore placée dans un cadre assez général !); cette idée de régularisation elliptique a été utilisée dans [4] (pour démontrer des résultats de régularité) et indépendamment dans [12] (pour un même but, avec d'autres équations); la méthode consiste à

1° « Approcher » (1) par une famille d'opérateurs « elliptiques »

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + A(u_\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} = f \qquad (\varepsilon > 0), \tag{1}$$

et résoudre le problème correspondant (avec des conditions aux limites convenables); cette résolution repose ici sur [6];

2° Passer à la limite en faisant $\varepsilon \to 0$, ce qui repose sur l'idée de MINTY [11], relative à la monotonie et sur des estimations *a priori*.

Le résultat relatif à (1)-(2) (théorème 2.1) généralise les résultats voisins de [3] et [14] (et la méthode est différente); le résultat relatif à (1)-(3) semble nouveau, même sous les hypothèses plus restrictives de [3] ou de [14].

Malgré leur relative généralité, il serait désirable d'étendre les résultats donnés ici, pour les raisons suivantes :

(i) Les résultats relatifs aux équations de Navier-Stokes n'entrent pas dans le cadre présenté ici (le problème (1)-(3) pour NAVIER-STOKES est étudié, par le même genre de méthode dans [9], mais avec des détails techniques tout à fait différents, et qui seront donnés dans [10]);

(ii) Les résultats de KATO [5] n'entrent pas non plus dans le cadre présent;

(iii) Il serait intéressant d'étendre les hypothèses faites dans l'application (III) (§ 2).

Le plan est le suivant :

1. Théorie générale.

1. Hypothèses.
2. Théorème d'existence.
3. Équations régularisées elliptiques.

2. **Applications.**

1. Théorie générale.

1. Hypothèses.

1.1. — Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbf{C}$ (dans le cas réel, tout ce qui suit est valable en suppriment les « Re »); on désigne par $(\ ,\ )$ (resp. $|\ \ |$) le produit scalaire (resp. la norme) dans H.

Soit B un espace de Banach réflexif tel que $B \subset H$, B dense dans H; si B' est l'anti-dual de B (et H étant identifié à son anti-dual), alors $B \subset H \subset B'$.

Soit F un espace de Banach séparable et réflexif, (norme $|||\ \ |||$), tel que, F' désignant son anti-dual (norme $|||\ \ |||_*$), on ait

$$(1.1) \qquad \begin{cases} L_\infty(0, T; B) \subset F \subset L_1(0, T; H), & \text{injections continues,} \\ L_\infty(0, T; H) \subset F' \subset L_1(0, T; B'); \end{cases}$$

on identifie $L_2(0, T; H)$ à son anti-dual. Si $g \in F'$, $f \in F$, on désigne par $\langle g, f \rangle$ leur produit scalaire (*anti*-linéaire en f). Si $g \in L_1(0, T; B')$ [resp. $L_\infty(0, T; H)$] et si $f \in L_\infty(0, T; B)$ [resp. $L_1(0, T; H)$], alors

$$\langle g, f \rangle = \int_0^T (g(t), f(t))\, dt.$$

Si $K \in L_1(-T, 0)$, et $g \in F'$, alors $K \star g(t) = \int_t^T K(t - \sigma)\, g(\sigma)\, d\sigma$ est défini et $\in L_1(0, T; B')$; on suppose

$$(1.2) \qquad K \star g \in F' \qquad \text{et} \qquad |||\, K \star g\, |||_* \leqq \|K\|_{L_1(-T, 0)}\, |||\, g\, |||_*.$$

Si $f \in F$, alors $\dfrac{df}{dt} = f'$ est définie dans l'espace $\mathcal{D}'(0, T; B')$ des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans B'; donc on peut définir

$$W = \left\{ f \mid f \in F,\ \frac{df}{dt} \in F' \right\},$$

$$\mathcal{W} = \left\{ f \mid f \in F \cap L_2(0, T, H),\ \frac{df}{dt} \in F' + L_2(0, T; H) \right\}.$$

On suppose

$$(1.3)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Si } \varphi,\ \psi \in W \text{ (resp. } \mathcal{W}) \text{ alors } \varphi \text{ et } \psi \text{ sont (p. p. égales à) des} \\ \quad \text{fonctions continues de } [0, T] \to H \text{ et} \\ \qquad \langle \varphi', \psi \rangle - \langle \varphi, \psi' \rangle = (\varphi(T), \psi(T)) - (\varphi(0), \psi(0)) \\ \qquad\qquad \left(\varphi' = \dfrac{d\varphi}{dt},\ \psi' = \dfrac{d\psi}{dt}\right). \\ \text{En outre, } W \text{ est dense dans } F.\end{array}\right.$$

On suppose enfin

$$(1.4)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{L'ensemble parcouru dans } H \text{ par } \varphi(0) \text{ [resp. par } \varphi(T)] \text{ lorsque} \\ \varphi \in F,\ \dfrac{d\varphi}{dt} \in L_2(0, T; H), \text{ est dense dans } H.\end{array}\right.$$

Exemples.

1° Soit V un espace de Banach réflexif séparable (norme $\| \ \|$) tel que

$$V \subset H, \quad V \text{ dense dans } H, \text{ injection continue.}$$

Alors

$$F = L_q(0, T; V) \qquad (1 < q < \infty),$$

donne lieu aux conditions (1.1), ..., (1.4).

2° Soient V_1 et V_2 deux espaces de Banach, ayant des propriétés analogues à celles de V, cas 1°; alors

$$F = L_{q_1}(0, T; V_1) \cap L_{q_2}(0, T; V_2) \qquad (1 < q_i < \infty),$$

muni de la norme

$$|||f||| = \left(\int_0^T \|f(t)\|_1^{q_1} dt\right)^{\frac{1}{q_1}} + \left(\int_0^T \|f(t)\|_2^{q_2} dt\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

(où $\| \ \|_i =$ norme dans V_i) satisfait aux conditions (1.1), ..., (1.4).

1.2. Opérateur A. — On donne un opérateur $v \to A(v)$ de $F \to F'$ continu des sous-espaces de dimension finie dans F' faible et vérifiant

Hypothèse (I) (coercivité) :

$$\frac{\operatorname{Re} \langle A(v), v \rangle}{|||v|||} \to \infty \qquad \text{si} \quad |||v||| \to \infty.$$

Hypothèse (II) :

Il existe un opérateur : $u, v \to A(u, v)$ de $F \times F \to F'$, tel que

$A(u, u) = A(u)$,

$A(u, v) \in$ borné de F' si $|||u||| + |||v|||$ est borné, et tel que les conditions suivantes aient lieu :

(i) $\begin{cases} v \to A(u, v) \text{ est continue des droites de } F \to F' \text{ faible et} \\ \operatorname{Re}\langle A(u, u) - A(u, v), u - v\rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in F; \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \text{Si } u_\mu \to u \text{ dans } F \text{ faible, } u'_\mu \to u' \text{ dans } F' \text{ faible et si} \\ \operatorname{Re}\langle A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u\rangle \to 0, \text{ alors, } \forall \varphi \in F, \text{ on a} \\ A(u_\mu, \varphi) \to A(u, \varphi) \quad \text{dans } F' \text{ faible;} \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} \text{Si } u_\mu \to u \text{ dans } F \text{ faible, } u'_\mu \to u' \text{ dans } F' \text{ faible et si } A(u_\mu, \varphi) \to \psi \\ \text{dans } F' \text{ faible } (\varphi \text{ fixé dans } F) \text{, alors} \\ \langle A(u_\mu, \varphi), u_\mu\rangle \to \langle \psi, u\rangle. \end{cases}$

2. Théorème d'existence.

THÉORÈME 2.1. — *On suppose que* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) *et les hypothèses* (I), (II) *ont lieu. Soient f donné dans F' et u_0 donné dans H. Il existe $u \in F$ tel que $u' \in F'$ et*

$$u' + A(u) = f, \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.2}$$

Notons que grâce à (1.3) ($u \in W$), (2.2) a un sens.

La démonstration de ce théorème est donnée dans les nos 3, 4, 5.

3. Équations régularisées elliptiques.

Notations. — $\hat{V} = \{v \mid v \in F, v' \in L_2(0, T; H)\}$; $\hat{V}$, muni de la norme $|||v||| + \left(\int_0^T |v'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$, est réflexif;

$$\hat{a}_\varepsilon(u, v) = \varepsilon\langle u', v'\rangle - \langle u, v'\rangle + (u(T), v(T)) + \langle A(u), v\rangle, \quad u, v \in \hat{V}, \ \varepsilon > 0. \tag{3.1}$$

Notons que

$$\langle u', v'\rangle = \int_0^T (u'(t), v'(t))\, dt;$$

si $u \in \hat{V}$, alors u est continue dans $[0, T] \to H$, donc $\langle u, v'\rangle$ a un sens et vaut $\int_0^T (u(t), v'(t))\, dt$. De même, $(u(T), v(T))$ a un sens. Enfin, pour f, u_0 donnés comme au no 2, $\langle f, v\rangle + (u_0, v(0))$ définit une forme anti-linéaire continue sur $\hat{V}$.

Ceci posé :

PROPOSITION 3.1. — *Pour $\varepsilon > 0$ fixé quelconque, il existe $u_\varepsilon \in F$ tel que*

$$\hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle + (u_0, v(0)), \qquad \forall v \in \hat{V}. \tag{3.2}$$

Démonstration. — On supprime les indices « ε » au cours de cette démonstration.

Soit $\hat{V}'$ l'anti-dual de $\hat{V}$ et [,] le produit scalaire dans l'anti-dualité.

Comme $v \to \hat{a}(u, v)$ est continue sur $\hat{V}$, on a

$$\hat{a}(u, v) = [\hat{A}(u), v], \qquad \hat{A}(u) \in \hat{V}'.$$

On va montrer la proposition par utilisation de [6].

1° COERCIVITÉ. — On a

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[\hat{A}(v), v] &= \operatorname{Re} \hat{a}(v, v)\\ &= \varepsilon \int_0^T |v'(t)|^2 dt + \frac{1}{2}|v(T)|^2 + \frac{1}{2}|v(0)|^2 + \operatorname{Re}\langle A(v), v\rangle,\end{aligned}$$

d'où résulte que

$$\frac{\operatorname{Re}[\hat{A}(v), v]}{\|v\|_{\hat{V}}} \to \infty \qquad \text{si} \quad \|v\|_{\hat{V}} \to \infty.$$

2° OPÉRATEUR $\hat{A}(u, v)$. — On pose, pour $u, v, w \in \hat{V}$:

$$\hat{a}(u, v, w) = \varepsilon\langle v', w'\rangle - \langle v, w'\rangle + (v(T), w(T)) + \langle A(u, v), w\rangle.$$

La forme $w \to \hat{a}(u, v, w)$ est continue sur $\hat{V}$, donc

$$\hat{a}(u, v, w) = [\hat{A}(u, v), w], \qquad \hat{A}(u, v) \in \hat{V}.$$

Si $v \to 0$ sur une droite de $\hat{V}$, alors $v \to 0$ sur une droite de F, donc $A(u, v) \to 0$ dans F' faible et donc $[\hat{A}(u, v), w] \to 0$. Vérifions la *monotonie* en v :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}[\hat{A}(u, u) - \hat{A}(u, v), u - v]\\ &\quad = \varepsilon \int_0^T |u' - v'|^2 dt + \frac{1}{2}|u(T) - v(T)|^2\\ &\qquad + \frac{1}{2}|u(0) - v(0)|^2 + \operatorname{Re}\langle A(u, u) - A(u, v), u - v\rangle,\end{aligned} \tag{3.3}$$

ce qui est > 0.

Soit maintenant $u_\mu \to u$ dans $\hat{V}$ faible et

$$[\hat{A}(u_\mu, u_\mu) - \hat{A}(u_\mu, u), u_\mu - u] \to$$

Alors, d'après (3.3), $u_\mu \to u'$ dans $L_2(0, T; H)$ *fort* et

$$\operatorname{Re} \langle A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u \rangle \to 0.$$

Mais, d'après l'hypothèse (II), (ii), il en résulte que $A(u_\mu, v) \to A(u, v)$ dans F' faible, pour v fixé dans $\hat{V}$, et donc, pour $w \in \hat{V}$, on a

$$[\hat{A}(u_\mu, v), w] \to [\hat{A}(u, v), w];$$

cela montre que la condition (ii), Hypothèse (II) de [6] est vérifiée.

Soit enfin u_μ une suite telle que $u_\mu \to u$ dans $\hat{V}$ faible et $\hat{A}(u_\mu, v) \to v_*$ dans V' faible. On veut montrer que

$$[\hat{A}(u_\mu, v), u_\mu] \to [v_*, u].$$

Par hypothèse,

$$\begin{aligned}[\hat{A}(u_\mu, v), w] = \varepsilon \langle v', w' \rangle - \langle v, w' \rangle \\ + (v(T), w(T)) + \langle A(u_\mu, v), w \rangle \to [v_*, w], \qquad \forall w \in \hat{V},\end{aligned}$$

donc

$$\langle A(u_\mu, v), w \rangle \to [v_*, w] - \varepsilon \langle v', w' \rangle + \langle v, w' \rangle - (v(T), w(T)), \qquad \forall w \in \hat{V}$$

Donc, en particulier, $A(u_\mu, v) \to \xi$ au sens de $\mathcal{D}'(0, T; B') =$ distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans B'. Mais comme u_μ demeure dans un borné de $\hat{V}$ donc de F, de toute suite ν extraite de μ on peut extraire une suite ρ telle que $A(u_\rho, v) \to \eta$ dans F' faible; nécessairement $\eta = \xi$, donc indépendant de la suite extraite. Donc

$$(3.4) \quad \begin{cases} A(u_\mu, v) \to \xi \text{ dans } F' \text{ faible et, pour } w \in \hat{V}, \\ \langle \xi, w \rangle = [v_*, w] - \varepsilon \langle v', w' \rangle + \langle v, w' \rangle - (v(T), w(T)). \end{cases}$$

Mais alors, d'après l'hypothèse (II), (iii),

$$\langle A(u_\mu, v), u_\mu \rangle \to \langle \xi, u \rangle$$

et donc

$$[\hat{A}(u_\mu, v), u_\mu] \to \varepsilon \langle v', u' \rangle - \langle v, u' \rangle + (v(T), u(T)) + \langle \xi, u \rangle = [v_*, u].$$

C. Q .F. D.

La proposition 3.1 en résulte.

4. Estimations « a priori ».

PROPOSITION 4.1. — *Si* u_ε *est solution de* (3.2), *alors, lorsque* $\varepsilon \to 0$,

(4.1) u_ε *demeure dans un borné de* F,

(4.2) $u'_\varepsilon \in F'$ et u'_ε *demeure dans un borné de* F',

(4.3) $\sqrt{\varepsilon}\, u'_\varepsilon$ *demeure dans un borné de* $L_2(0, T; H)$,

(4.4) $u_\varepsilon(0)$ *demeure dans un borné de* H.

Démonstration.

1° De (3.2) résulte :

$$\varepsilon \int_0^T |u'_\varepsilon|^2 \, dt + \frac{1}{2} |u_\varepsilon(T)|^2 + \frac{1}{2} |u_\varepsilon(0)|^2 + \operatorname{Re}\langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle \tag{4.5}$$
$$= \operatorname{Re}\langle f, u_\varepsilon \rangle + (u_0, u_\varepsilon(0))$$
$$\leq |||f|||_* \, |||u_\varepsilon||| + \frac{1}{4} |u_\varepsilon(0)|^2 + |u_0|^2,$$

d'où

$$\frac{\operatorname{Re}\langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle}{|||u_\varepsilon|||} \leq |||f|||_* + \frac{1}{2} \frac{|u_0|^2}{|||u_\varepsilon|||}. \tag{4.6}$$

Donc $|||u_\varepsilon|||$ est borné, sinon le premier membre de (4.6) tendrait vers $+\infty$, alors que le second tendrait vers $|||f|||_*$. Ceci montre (4.1) et (4.3)-(4.4) résultent alors de (4.5).

2° Prenons dans (3.2) $v \in \mathcal{D}(0, T; B)$ (fonction indéfiniment différentiable à valeurs dans B et à support compact dans $]0, T[$). Alors on voit que u_ε satisfait, au sens de $\mathcal{D}'(0, T; B')$, à l'équation

$$-\varepsilon u''_\varepsilon + u'_\varepsilon + A(u_\varepsilon) = f. \tag{4.7}$$

De là résulte que $u''_\varepsilon \in F' + L_2(0, T; H)$. Mais alors, pour

$$v \in \hat{V} \subset F \cap L_2(0, T; H),$$

on peut écrire, d'après (1.3),

$$\langle u''_\varepsilon, v \rangle = -\langle u'_\varepsilon, v' \rangle + (u'_\varepsilon(T), v(T)) - (u'_\varepsilon(0), v(0)).$$

On déduit donc de (4.7) (en prenant le produit scalaire par v) :

$$\varepsilon \langle u'_\varepsilon, v' \rangle - \varepsilon(u'_\varepsilon(T), v(T)) + \varepsilon(u'_\varepsilon(0), v(0)) + (u_\varepsilon(T), v(T))$$
$$-(u_\varepsilon(0), v(0)) - \langle u_\varepsilon, v' \rangle + \langle A(u_\varepsilon), v \rangle = \langle f, v \rangle,$$

d'où

$$\hat{}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) - \varepsilon(u'_\varepsilon(T), v(T)) + \varepsilon(u'_\varepsilon(0), v(0)) - (u_\varepsilon(0), v(0)) = \langle f, v \rangle$$

et

$$\langle f, v \rangle = \hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) - (u_0, v(0)).$$

Donc

$$-\varepsilon(u'_\varepsilon(T), v(T) + \varepsilon u'_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(0) + u_0, v(0)) = 0, \qquad \forall v \in \hat{V}.$$

Prenant v avec $v(0) = 0$ ou $v(T) = 0$, on en déduit

$$(u'_\varepsilon(T), v(T)) = 0, \qquad \forall v \in \hat{V},$$
$$(\varepsilon u'_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(0) + u_0, v(0)) = 0, \qquad \forall v \in \hat{V}.$$

Grâce à (1.4), on en déduit

$$u'_\varepsilon(T) = 0, \tag{4.8}$$

$$-\varepsilon u'_\varepsilon(0) + u_\varepsilon(0) = u_0. \tag{4.9}$$

3° De (4.7), (4.8), on déduit que

$$\left\{\begin{aligned} & u'_\varepsilon = K_\varepsilon \star (f - A(u_\varepsilon)), \\ & K_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \quad \text{dans } [-T, 0]. \end{aligned}\right. \tag{4.10}$$

Mais $\| K_\varepsilon \|_{L_1(-T,0)} \leq 1$, donc grâce à (1.2),

$$||| u'_\varepsilon |||_* \leq ||| f - A(u_\varepsilon) ||| \leq \text{Cte},$$

ce qui montre (4.2).

5. Passage à la limite. Démonstration du théorème d'existence.

5.1. — D'après (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), on peut extraire de u_ε une suite — que nous désignons encore par u_ε — telle que, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{dans } F \text{ faible}, \tag{5.1}$$

$$u'_\varepsilon \to u' \quad \text{dans } F' \text{ faible}, \tag{5.2}$$

$$A(u_\varepsilon) \to \chi \quad \text{dans } F \text{ faible}, \tag{5.3}$$

$$u_\varepsilon(0) \to \xi \quad \text{dans } H \text{ faible}. \tag{5.4}$$

De (5.1), (5.2) et du fait [*cf.* (1.3)] que w est contenu dans $C(0, T; H) =$ espace des fonctions continues de $[0, T] \to H$, il résulte que $\xi = u(0)$.

Désormais, u est bien défini; comme $A(u_\varepsilon, u)$ est borné dans F', on peut supposer, par une nouvelle extraction de suite, que

$$A(u_\varepsilon, u) \to \psi \quad \text{dans F}' \text{ faible}. \tag{5.5}$$

Au sens de $\mathcal{D}'(0, T; B')$, $\varepsilon u''_\varepsilon \to 0$, donc (4.7) donne

$$u' + \chi = f. \tag{5.6}$$

Pour v fixé dans $\hat{V}$, on a

$$\hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) \to -\langle u, v' \rangle + (u(T), v(T)) + \langle \chi, v \rangle = \langle f, v \rangle + (u_0, v(0));$$

or, d'après (1.3),

$$-\langle u, v' \rangle = \langle u', v \rangle - (u(T), v(T)) + (u(0), v(0)),$$

d'où l'on déduit que

$$u(0) = u_0. \tag{5.7}$$

Il reste donc à montrer que $\chi = A(u)$.

5.2. — Posons

$$X_\varepsilon = \int_0^T |u'_\varepsilon(t)|^2\, dt - \langle u_\varepsilon - u, u'_\varepsilon - u' \rangle + |u_\varepsilon(T) - u(T)|^2$$
$$+ \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon - u \rangle.$$

On a

$$X_\varepsilon = X_\varepsilon^1 - X_\varepsilon^2 + X_\varepsilon^3 - X_\varepsilon^4 + X_\varepsilon^5,$$
$$X_\varepsilon^1 = \int_0^T |u'_\varepsilon|^2\, dt - \langle u_\varepsilon, u'_\varepsilon \rangle + |u_\varepsilon(T)|^2 + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle,$$
$$X_\varepsilon^2 = -\langle u_\varepsilon, u' \rangle + (u_\varepsilon(T), u(T)) + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle,$$
$$X_\varepsilon^3 = \langle u, u'_\varepsilon - u' \rangle - (u(T), u_\varepsilon(T) - u(T)),$$
$$X_\varepsilon^4 = \langle A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon \rangle,$$
$$X_\varepsilon^5 = \langle A(u_\varepsilon, u), u \rangle.$$

Mais

$$X_\varepsilon^1 = \hat{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \langle f, u_\varepsilon \rangle + (u_0, u_\varepsilon(0)) \to \langle f, u \rangle + |u_0|^2.$$
$$X_\varepsilon^2 \to -\langle u, u' \rangle + |u(T)|^2 + \langle \chi, u \rangle = \langle u' + \chi, u \rangle + |u_0|^2$$

[car $u_\varepsilon(T) \to u(T)$ dans H faible]; comme $u' + \chi = f$, on a donc

$$X_\varepsilon^1 - X_\varepsilon^2 \to 0.$$

Puis $X_\varepsilon^3 \to 0$. Ensuite $X_\varepsilon^4 \to \langle \psi, u \rangle$ d'après l'hypothèse (II), (iii), et enfin $X_\varepsilon^5 \to \langle \psi, u \rangle$. *Donc* $X_\varepsilon \to 0$. Donc $\operatorname{Re} X_\varepsilon \to 0$; or

$$\operatorname{Re} X_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T |u'_\varepsilon(t)|^2\, dt + \frac{1}{2} |u_\varepsilon(T) - u(T)|^2 + \frac{1}{2} |u_\varepsilon(0)|^2 +$$
$$+ \operatorname{Re} \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon - u \rangle.$$

Donc

(5.8) $\sqrt{\varepsilon}\, u'_\varepsilon \to 0$ dans $L_2(0, T; H)$ *fort*,

(5.9) $u_\varepsilon(T) \to u(T)$, $u_\varepsilon(0) \to u(0)$ dans H fort,

(5.10) $\operatorname{Re} \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon - u \rangle \to 0$.

5.3. — Soit φ *fixée* avec $\varphi \in F$, $\varphi' \in F'$. Posons

$$Y_{\varepsilon,\varphi} = -\langle u_\varepsilon - \varphi, u'_\varepsilon - \varphi' \rangle + |u_\varepsilon(T) - \varphi(T)|^2$$
$$+ \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, \varphi), u_\varepsilon - \varphi \rangle.$$

On a

$$Y_{\varepsilon,\varphi} = Y_\varepsilon^1 - Y_{\varepsilon,\varphi}^2 + Y_{\varepsilon,\varphi}^3 - Y_{\varepsilon,\varphi}^4 + Y_{\varepsilon,\varphi}^5,$$
$$Y_\varepsilon^1 = -\langle u_\varepsilon, u'_\varepsilon \rangle + |u_\varepsilon(T)|^2 + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle,$$
$$Y_{\varepsilon,\varphi}^2 = -\langle u_\varepsilon, \varphi' \rangle + (u_\varepsilon(T), \varphi(T)) + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon), \varphi \rangle,$$
$$Y_{\varepsilon,\varphi}^3 = \langle \varphi, u'_\varepsilon - \varphi' \rangle - (\varphi(T), u_\varepsilon(T) - \varphi(T)),$$
$$Y_{\varepsilon,\varphi}^4 = \langle A(u_\varepsilon, \varphi), u_\varepsilon \rangle,$$
$$Y_\varepsilon^5 = \langle A(u_\varepsilon, \varphi), \varphi \rangle.$$

Mais

$$Y_\varepsilon^1 = \hat{a}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \varepsilon \int_0^T |u'_\varepsilon|^2\,dt = \langle f, u_\varepsilon \rangle + (u_0, u_\varepsilon(0)) - \varepsilon \int_0^T |u'_\varepsilon|^2\,dt$$

et utilisant (5.8),

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon^1 \to \langle f, u \rangle + |u_0|^2 &= \langle u', u \rangle + |u_0|^2 + \langle \chi, u \rangle \\ &= -\langle u, u' \rangle + |u(T)|^2 + \langle \chi, u \rangle. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} &Y_{\varepsilon,\varphi}^2 \to -\langle u, \varphi' \rangle + (u(T), \varphi(T)) + \langle \chi, \varphi \rangle, \\ &Y_{\varepsilon,\varphi}^3 \to \langle \varphi, u' - \varphi' \rangle - (\varphi(T), u(T) - \varphi(T)); \end{aligned}$$

ensuite

$$Y_{\varepsilon,\varphi}^4 \to \langle A(u, \varphi), u \rangle; \tag{5.11}$$

en effet, d'après (5.10) et l'hypothèse (II), (ii), $A(u_\varepsilon, \varphi) \to A(u, \varphi)$ dans F' faible, et alors, d'après l'hypothèse (II), (iii), on a (5.11).

Enfin $Y_{\varepsilon,\varphi}^5 \to \langle A(u, \varphi), \varphi \rangle$. Donc

$$\begin{aligned} Y_{\varepsilon,\varphi} \to -\langle u - \varphi, u' - \varphi' \rangle + |u(T) - \varphi(T)|^2 + \\ + \langle \chi - A(u, \varphi), u - \varphi \rangle = Y_\varphi. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Y_{\varepsilon,\varphi} = \frac{1}{2}|u_\varepsilon(T) - (T)|^2 + \frac{1}{2}|u_\varepsilon(0) - \varphi(0)|^2 \\ + \operatorname{Re}\langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, \varphi), u_\varepsilon - \varphi \rangle \end{aligned}$$

et grâce à la monotonie [hypothèse (II), (i)] :

$$\operatorname{Re} Y_{\varepsilon,\varphi} \geqq 0.$$

Donc

$$\operatorname{Re} Y_\varphi \geqq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Y_\varphi = \frac{1}{2}|u(T) - \varphi(T)|^2 + \frac{1}{2}|u(0) - \varphi(0)|^2 \\ + \operatorname{Re}\langle \chi - A(u, \varphi), u - \varphi \rangle \geqq 0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ceci a lieu pour tout $\varphi \in F$, avec $\varphi' \in F'$.

On peut donc prendre

$$\varphi = u - \xi w, \qquad w \in F, \qquad w' \in F', \qquad \xi > 0.$$

Il vient, après division par ξ,

$$\frac{\xi}{2}(|w(T)|^2 + |w(0)|^2) + \operatorname{Re}\langle \chi - A(u, u - \xi w), w \rangle \geqq 0.$$

Faisant tendre ξ vers zéro, on a en utilisant l'hypothèse (II), (i),

(5.13) $\operatorname{Re}\langle \chi - A(u, u), w \rangle \geqq 0, \qquad \forall w \in F$ tel que $w' \in F'$.

Mais on a supposé [*cf.* (1.3)] que W est dense dans F. Donc (5.13) a lieu, $\forall w \in F$, donc

$$\chi = A(u, u) = A(u),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

6. **Solutions périodiques.**

On se donne les espaces H, F comme précédemment, les hypothèses (1.2), (1.4) étant remplacées par les hypothèses (6.1), (6.2) ci-dessous.

Si $g \in F'$, on définit $K_i^\varepsilon g$ $(i = 1, 2)$ par

$$K_1^\varepsilon g(t) = \int_0^t \exp\left(\frac{t - s - T}{\varepsilon}\right) g(s)\, ds \qquad (\varepsilon > 0),$$

$$K_2^\varepsilon g(t) = \int_t^T \exp\left(\frac{t - s}{\varepsilon}\right) g(s)\, ds;$$

on suppose alors que

$$(6.1) \quad \begin{cases} K_i^\varepsilon g \in F' \quad \text{et} \quad |||\, K_i^\varepsilon g \,|||_* \leqq c \,|||\, g \,|||_* & (\varepsilon \to 0,\ i = 1, 2), \\ c = \text{Cte}. \end{cases}$$

L'hypothèse (1.3) est sans changement; (1.4) est remplacée par

$$(6.2) \quad \begin{cases} \text{L'ensemble parcouru ar } \varphi(0) \text{ lorsque } \varphi \in F, \dfrac{d\varphi}{dt} \in L_2(0, T; H) \\ \quad \text{avec } \varphi(0) = \varphi(T), \text{ est dense dans } H. \end{cases}$$

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 6.1. — *On suppose que* (1.1), (6.1), (1.3), (6.2) *et les hypothèses* (I), (II), n° 1, *ont lieu. Soit f donné dans F'. Il existe $u \in F$ tel que $u' \in F'$ avec*

$$(6.3) \qquad u' + A(u) = f,$$

$$(6.4) \qquad u(0) = u(T).$$

La condition (6.4) est une condition de *périodicité*.

La démonstration de ce théorème repose sur les mêmes principes que celle du théorème 2.1. Donnons-en seulement les grandes lignes. On introduit

$$\tilde{V} = \{ v \mid v \in F,\ v' \in L_2(0, T; H),\ v(0) = v(T) \}$$

et pour $u, v \in \tilde{V}$, on pose ($\varepsilon > 0$)

(6.5) $$\tilde{a}_\varepsilon(u, v) = \varepsilon\langle u', v' \rangle + \langle u', v \rangle + \langle A(u), v \rangle.$$

On montre alors, comme à la proposition 3.1, *qu'il existe* $u_\varepsilon \in \tilde{V}$ *tel que*

$$\tilde{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in \tilde{V}.$$

On vérifie ensuite, comme à la proposition 4.1, que

(6.6) u_ε demeure dans un borné de F,

(6.7) $\sqrt{\varepsilon}\, u'_\varepsilon$ demeure dans un borné de $L_2(0, T; H)$.

Montrons (car ici la vérification est différente) que

(6.8) u'_ε demeure dans un borné de F'.

Tout d'abord, u_ε vérifie

(6.9) $$-\varepsilon u''_\varepsilon + u'_\varepsilon + A(u_\varepsilon) = f$$

et, par des intégrations par parties, on vérifie que

(6.10) $$u'_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(T).$$

De (6.9), (6.10), on déduit que [avec les notations de (6.1)] :

(6.11) $$\begin{cases} u'_\varepsilon = \exp\left(\dfrac{T}{\varepsilon}\right)\left(\exp\left(\dfrac{T}{\varepsilon}\right) - 1\right)^{-1} (K_1^\varepsilon g_\varepsilon + K_2^\varepsilon g_\varepsilon), \\ \qquad\qquad g_\varepsilon = f - A(u_\varepsilon). \end{cases}$$

Alors (6.8) résulte de (6.1).

On peut alors, grâce à (6.6), (6.8), extraire une suite — encore désignée par u_ε — telle que $u_\varepsilon \to u$ dans F faible, $u'_\varepsilon \to u'$ dans F' faible, $A(u_\varepsilon) \to \chi$ dans F' faible, $A(u_\varepsilon, u) \to \psi$ dans F' faible et $u' + \chi = f$.

On a $u(0) = u(1)$, et il reste à vérifier que $\chi = A(u)$.

On introduit cette fois (comparer à 5.2)

$$\tilde{X}_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T |u'_\varepsilon(t)|^2\, dt + \langle u'_\varepsilon - u', u_\varepsilon - u \rangle + \\ + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon - u \rangle$$

et l'on vérifie que $\tilde{X}_\varepsilon \to 0$. D'où

(6.12) $$\operatorname{Re}\langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, u), u_\varepsilon - u \rangle \to 0.$$

Soit φ fixée avec $\varphi \in F$, $\varphi' \in F'$, $\varphi(0) = \varphi(T)$.

On introduit (comparer à 5.3)

$$\tilde{Y}_{\varepsilon,\varphi} = \langle u'_\varepsilon - \varphi', u_\varepsilon - \varphi \rangle + \langle A(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - A(u_\varepsilon, \varphi), u_\varepsilon - \varphi \rangle$$

et l'on vérifie [utilisant (6.12) et les hypothèses (II)] que

$$\tilde{Y}_{\varepsilon,\varphi} \to \langle u' - \varphi', u - \varphi \rangle + \langle \chi - A(u, \varphi), u - \varphi \rangle.$$

Alors

$$\operatorname{Re} \tilde{Y}_{\varepsilon,\varphi} \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re} \tilde{Y}_{\varepsilon,\varphi} \to \operatorname{Re} \langle \chi - A(u, \varphi), u - \varphi \rangle,$$

d'où

$$\operatorname{Re} \langle \chi - A(u, \varphi), u - \varphi \rangle \geqq 0$$

et l'on termine comme au n° 5.

REMARQUE 5.1. — Les hypothèses (6.1), (6.2), (6.3) sont vérifiées pour les exemples 1°, 2°, n° 1 (1.1).

2. Applications.

1. Application (I).

1.1. NOTATIONS.

Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^n$; $Q = \Omega \times]0, T[$;
$W_p^m(\Omega) = \{ v \mid D^\alpha v \in L_p(\Omega), |\alpha| \leqq m \}$, norme habituelle, $1 < p < \infty$ (les fonctions considérées sont à valeurs réelles);
$\overset{0}{W}{}_p^m(\Omega)$ = adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_p^m(\Omega)$;
$\overset{0}{W}{}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega)$, V fermé dans $W_p^m(\Omega)$; norme $\| \ \|$;
N = nombre de D_x^α, $|\alpha| \leqq m - 1$;
M = nombre de D_x^α, $|\alpha| = m$;

$$A_\alpha(x, t, \eta, \xi) = \text{fonction} \begin{cases} \text{mesurable en } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \text{continue en } \eta, \xi \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M. \end{cases}$$

Si $u = u(x, t)$, on pose

$$\delta u = \{ D_x^\alpha u, |\alpha| \leqq m - 1 \}$$
$$D^m u = \{ D_x^\alpha u, |\alpha| = m \}.$$

Alors $A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u)$ a un sens (avec des hypothèses convenables sur u)

$$F = L_p(0, T; V), \qquad |||f||| = \left(\int_0^T \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

HYPOTHÈSE 1.1. — Pour $u, v \in F$, on a

$$(1.1) \qquad A_\alpha(x, t, \delta u, D^m v) \in L_{p'}(Q), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

On peut naturellement donner des conditions algébriques sur la croissance de $A_\alpha(x, t, \eta, \xi)$ pour que (1.1) ait lieu.

Pour $u, v, w \in F$ on peut alors définir

$$(1.2)\qquad \left\{\begin{aligned} a\,(u, v, w) &= a_1(u, v, w) + a_2(u, w),\\ a_1(u, v, w) &= \sum_{|\alpha|=m} \int_Q A_\alpha(x, t, \delta u, D^m v)\, D^\alpha w\, dx\, dt,\\ a_2(u, w) &= \sum_{|\alpha|\leq m-1} \int_Q A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u)\, D^\alpha w\, dx\, dt. \end{aligned}\right.$$

La forme $w \to a(u, v, w)$ est continue sur F, donc

$$(1.3)\qquad a(u, v, w) = \langle A(u, v), w \rangle, \qquad A(u, v) \in F';$$

ici

$$(1.4)\qquad F' = L_{p'}(0, T;\ V').$$

On pose

$$(1.5)\qquad A(u) = A(u, u) \qquad (u \in F).$$

On fait maintenant les *hypothèses suivantes* :

HYPOTHÈSE 1.2. — *On a (Monotonie en v)*

$$(1.6)\qquad a_1(u, u, u-v) - a_1(u, v, u-v) \geq 0, \qquad \forall\, u, v \in F.$$

HYPOTHÈSE 1.3. — *Soit $u_\mu \in F$, $u_\mu \to u$ dans F faible, $u'_\mu \to u'$ dans F' faible et*

$$(1.7)\qquad a_1(u_\mu, u_\mu, u_\mu - u) - a_1(u_\mu, u, u_\mu - u) \to 0.$$

Alors, $\forall\, \alpha$,

$$(1.8)\quad A_\alpha(x, t, \delta u_\mu, D^m u_\mu) \to A_\alpha(x, t, \delta u, D^m u) \quad \textit{dans } L_{p'}(Q) \textit{ faible.}$$

On peut donner, exactement comme dans [3], des conditions algébriques suffisantes pour que (1.8) ait lieu (en employant [1] comme dans la vérification ci-dessus de (ii), (II), § 1).

On suppose enfin

HYPOTHÈSE 1.4. $\dfrac{a(v, v, v)}{|||v|||} \to \infty$ lorsque $|||v||| \to \infty$.

On va vérifier qu'on est alors, pour l'opérateur A, dans les conditions d'application de la théorie générale du paragraphe 1.

L'hypothèse (I), § 1, est évidemment identique à 1.4.

L'opérateur $A(u, v)$ est déjà défini, et la monotonie (i), (II), § 1, est équivalente à 1.2; pour la continuité de (i), (II), § 1, utiliser le lemme 3.2 de [6].

Vérification de (ii), (II), § 1. — On a une suite satisfaisant aux conditions de l'hypothèse 1.3. Il faut montrer que, pour φ fixée dans F, $A(u_\mu, \varphi) \to A(u, \varphi)$ dans F' faible, donc que

$$a(u_\mu, \varphi, w) \to a(u, \varphi, w), \qquad \forall w \in F.$$

On a déjà (1.8), donc $a_2(u_\mu, w) \to a_2(u, w)$.

Reste donc à voir que

$$a_1(u_\mu, \varphi, w) \to a_1(u, \varphi, w).$$

Or considérons $W_p^{m-1}(\Omega)$; l'injection $V \to W_p^{m-1}(\Omega)$ est *compacte* [2]; donc, d'après [1], si $u_\mu \to u$ dans $L_p(0, T; V)$ faible, $u'_u \to u'$ dans $L_{p'}(0, T; V')$ faible, alors $u_\mu \to u$ dans $L_p(0, T; W_p^{m-1}(\Omega))$ *fort* et alors $A_\alpha(x, t, \delta u_\mu, D^m\varphi) \to A_\alpha(x, t, \delta u, D^m\varphi)$ dans $L_{p'}(Q)$ fort, d'où le résultat.

Vérification de (iii), (II), § 1. — On a une suite u_μ telle que

$$u_\mu \to u \text{ dans } F \text{ faible}, \quad u'_\mu \to u' \text{ dans } F' \text{ faible};$$
$$A(u_\mu, \varphi) \to \psi \text{ dans } F' \text{ faible} \quad (\varphi \text{ fixé dans } F)$$

et l'on veut montrer que

$$X_\mu = \langle A(u_\mu, \varphi), u_\mu \rangle \to \langle \psi, u \rangle.$$

On écrit l'identité

$$\begin{aligned} X_\mu &= a_1(u_\mu, \varphi, u_\mu) + a_2(u_\mu, u_\mu - u) + a_2(u_\mu, u) \\ &= a_1(u_\mu, \varphi, u_\mu) + a_2(u_\mu, u_\mu - u) + (A_1(u_\mu, \varphi), u) - a_1(u_\mu, \varphi, u). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$a_1(u_\mu, \varphi, u_\mu) + a_2(u_\mu, u_\mu - u) - a_1(u_\mu, \varphi, u) \to 0.$$

Or $u_\mu \to u$ dans $L_p(0, T; W_p^{m-1}(\Omega))$ fort (comme déjà vu au point précédent), donc $A_\alpha(x, t, \delta u_\mu, D^m\varphi) \to A_\alpha(x, t, \delta u, D^m\varphi)$ dans $L_{p'}(Q)$ fort, et donc

$$a_1(u_\mu, \varphi, u_\mu) \to a_1(u, \varphi, u), \; a_1(u_\mu, \varphi, u) \to a_1(u, \varphi, u).$$

---

[2] On suppose la frontière de Ω assez régulière pour que cela ait lieu. Aucune condition si $V = \mathring{W}_p^m(\Omega)$.

Reste à montrer que $a_2(u_\mu, u_\mu - u) \to 0$. Or

$$|a_2(u_\mu, u_\mu - u)| \leqq c \| u_\mu - u \|_{L_p(0, T; W_p^{m-1}(\Omega))} \to 0,$$

d'où le résultat.

2. Application (II).

On considère maintenant

$\overset{0}{W}{}_{p_i}^{m_i}(\Omega) \subset V_i \subset W_{p_i}^{m_i}(\Omega) \quad (i = 1, 2;\ 1 < p_i < \infty);$

$N_i =$ nombre de dérivées D_x^α, $|\alpha| \leqq m_i - 1$;

$M_i =$ nombre de dérivées D_x^α, $|\alpha| = m_i$;

$A_\alpha^{(i)}(x, t, \eta, \xi)$ fonction $\begin{cases} \text{mesurable en } (x, t) \in Q; \\ \text{continue en } \eta, \xi \in \mathbf{R}^{N_i} \times \mathbf{R}^{M_i}; \end{cases}$

$\delta^{(i)}(u) = \{ D_x^\alpha u \mid |\alpha| \leqq m_i - 1 \}$;

$F = L_{p_1}(0, T;\ V_1) \cap L_{p_2}(0, T;\ V_2)$;

$$|||f||| = \left(\int_0^T \| f(t) \|_1^{p_1} dt \right)^{\frac{1}{p_1}} + \left(\int_0^T \| f(t) \|_2^{p_2} dt \right)^{\frac{1}{p_2}},$$

où $\| \ \|_i =$ norme dans V_i.

On définit alors $a(u, v, w)$, $u, v, w \in F$, par

$$(2.1) \quad \begin{cases} a(u, v, w) = a_1^{(1)}(u, v, w) + a_1^{(2)}(u, v, w) + a_2^{(1)}(u, w) + a_2^{(2)}(u, w), \\ a_1^{(i)}(u, v, w) = \displaystyle\sum_{|\alpha| = m_i} \int_Q A_\alpha^{(i)}(x, t, \delta^{(i)} u, D^{m_i} v) D^\alpha w \, dx \, dt, \\ a_2^{(i)}(u, w) \quad = \displaystyle\sum_{|\alpha| < m_i - 1} \int_Q A_\alpha^{(i)}(x, t, \delta^{(i)} u, D^{m_i} u) D^\alpha w \, dx \, dt. \end{cases}$$

On suppose

$$(2.2) \quad A_\alpha^{(i)}(x, t, \delta^{(i)}(u), D^{m_i} v) \in L_{p'_1}(Q) + L_{p'_2}(Q) \qquad (u, v \in F;\ i = 1, 2),$$

$$(2.3) \quad a_1^{(i)}(u, u, u - v) - a_1^{(i)}(u, v, u - v) \geqq 0 \qquad (i = 1, 2),$$

$$(2.4) \quad \begin{cases} \text{Si } u_\mu \to u \text{ dans } F \text{ faible, } u'_\mu \to u' \text{ dans } F' \text{ faible,} \\ \text{et } a_1^{(i)}(u_\mu, u_\mu, u_\mu u - u) - a_1^{(i)}(u_\mu, u, u_\mu - u) \to 0 \qquad (i = 1, 2), \\ \text{alors } A_\alpha^{(i)}(x, t, \delta^{(i)} u_\mu, D^{m_i} u_\mu) \to A_\alpha^{(i)}(x, t, \delta u, D^m u) \\ \text{dans } L_{p'}(Q) \text{ faible.} \end{cases}$$

Ajoutant la condition de coercivité, on vérifie qu'on est encore dans les conditions d'application de la théorie générale.

3. Application (III).

3.1. — Notre objet est ici de voir si la théorie du paragraphe 1 s'applique au système ($u = \{u_1, \ldots, u_n\}$) :

$$(3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} u = f + \operatorname{grad} p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(x, t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \partial\Omega = \Gamma \qquad (t > 0), \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{donné}, \end{cases}$$

(qui est le système de Navier-Stokes, si $p = 2$).

Dans (3.1) on a posé

$$(3.2)\qquad |\nabla u| = \left(\sum_{i,k=1} \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On va montrer que la théorie du paragraphe 1 *s'applique lorsque* $p \geqq 3$. Le cas $p = 2$ est par ailleurs résolu par des méthodes différentes ([3]). Les cas $1 < p < 3$ ($p \neq 2$) semblent ouverts.

3.2. Notations.

Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^n$;

$H = \{f \mid f = \{f_1, \ldots, f_n\},\quad f_i \in L_2(\Omega),\quad \operatorname{div} f = 0\}$;

$V = \{v \mid v = \{v_1, \ldots, v_n\},\quad v_i \in \overset{0}{W}{}_p^1(\Omega),\quad \operatorname{div} v = 0\}$;

$F = L_p(0, T; V)$.

Pour $u, v, w \in F$, on pose :

$$\alpha(v, w) = \sum_{i,k=1}^{n} \int_Q |\nabla v|^{p-2} D_i v_k D_i w_k \, dx\, dt \qquad \left(D_i = \frac{\partial}{\partial x_i};\ Q = \Omega \times]0, T[\right),$$

$$\beta(u, v, w) = \sum_{i,k=1}^{n} \int_Q u_k (D_k v_i) w_i \, dx\, dt;$$

$$a(u, v, w) = \alpha(v, w) + \beta(u, v, w).$$

Ces expressions ont un sens [pour $\beta(u, v, w)$, noter, par exemple, que u_k, $D_k v_i$ et w_i sont dans $L_3(Q)$ puisque $p \geqq 3$), et $w \to \alpha(v, w)$, $w \to \beta(u, v, w)$ sont des formes linéaires continues sur F.

([3]) « Résolu » signifiant : l'existence globale est connue, l'unicité n'étant connue qu'en dimension d'espace 2.

Donc

$$\alpha(v, w) = \langle \mathcal{A}(v), w \rangle, \qquad \mathcal{A}(v) \in F',$$
$$\beta(u, v, w) = \langle \mathcal{B}(u, v), w \rangle, \qquad \mathcal{B}(u, v) \in F',$$
$$a(u, v, w) = \langle A(u, v), w \rangle, \qquad A(u, v) = \mathcal{A}(v) + \mathcal{B}(u, v).$$

Comme on le vérifie sans peine, une formulation faible de (3.1) équivaut à la recherche de $u \in F$ solution de

$$u' + A(u) = f, \tag{3.3}$$

où

$$A(u) = A(u, u), \qquad f \in L_{p'}(0, T; V') = F' \quad (^4),$$
$$u(0) = u_0, \quad u_0 \text{ donné dans } H. \tag{3.4}$$

3.3. **Vérification du fait que les hypothèses (I), (II) du paragraphe 1, nº 1, ont lieu.**

D'abord, comme on le vérifie sans peine,

$$\beta(u, v, v) = 0, \qquad \forall v \in F$$

de sorte que

$$\langle A(v), v \rangle = \alpha(v, v)$$

et la coercivité est immédiate.

Monotonie en v :

$$\langle A(u, u) - A(u, v), u - v \rangle = \langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v), u - v \rangle + \langle \mathcal{B}(u, u) - \mathcal{B}(u, v), u - v \rangle.$$

Mais le dernier terme vaut $\beta(u, u - v, u - v) = 0$; reste donc à montrer que

$$\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v), u - v \rangle \geq 0,$$

ce qui résulte de

$$\sum_{i,k=1}^{n} (|\nabla u|^{p-2} D_i u_k - |\nabla v|^{p-2} D_i v_k)(D_i(u_k - v_k)) \geq 0,$$

ce qui résulte de la convexité de la fonction

$$\xi \to \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

---

(4) En passant au dual V' de V, on passe au quotient par les « gradients », d'où la disparition du terme en « grad p ».

HYPOTHÈSE (II) (ii). — En fait, on a beaucoup plus, à savoir : si $u_\mu \to u$ dans F faible, alors, $\forall \varphi \in F$, on a

$$A(u_\mu, \varphi) \to A(u, \varphi) \quad \text{dans } F' \text{ faible.}$$

En effet, il y a seulement à vérifier que $\mathcal{B}(u_\mu, \varphi) \to \mathcal{B}(u, \varphi)$ dans F' faible, ce qui est immédiat.

HYPOTHÈSE (II) (iii). — Soit u_μ avec $u_\mu \to u$ dans F faible, $u'_\mu \to u'$ dans F' faible, $A(u_\mu, \varphi) \to \psi$ dans F' faible; on veut montrer que

$$\langle A(u_\mu, \varphi), u_\mu \rangle \to \langle \psi, u \rangle.$$

Comme $A(u_\mu, \varphi) = \mathcal{A}(\varphi) + \mathcal{B}(u_\mu, \varphi)$, on a donc

$$\mathcal{B}(u_\mu, \varphi) \to \psi - \mathcal{A}(\varphi) \quad \text{dans } F' \text{ faible.}$$

Par ailleurs, $\mathcal{B}(u_\mu, \varphi) \to \mathcal{B}(u, \varphi)$ dans F' faible, donc

$$\psi - \mathcal{A}(\varphi) = \mathcal{B}(u, \varphi)$$

et il reste à montrer que

$$\langle \mathcal{B}(u_\mu, \varphi), u_\mu \rangle \to \langle \mathcal{B}(u, \varphi), u \rangle,$$

i. e. que

$$\beta(u_\mu, \varphi, u_\mu) \to \beta(u, \varphi, u).$$

Revenant à la définition de β, il faut montrer que

$$\int_Q u_{\mu k}(D_k \varphi_i) u_{\mu i} \, dx \, dt \to \int_Q u_k (D_k \varphi_i) u_i \, dx \, dt.$$

Il suffit donc de montrer que $u_{\mu k} u_{\mu i} \to u_k u_i$ dans $L_{p'}(Q)$ faible; or $u_{\mu k} u_{\mu i}$ est borné dans $L_{p/2}(Q)$ et l'on peut extraire u_ν telle que $u_{\nu k} u_{\nu i} \to g_{ki}$ dans $L_{p/2}(Q)$ faible. Par ailleurs, d'après les hypothèses et [1], $u_\mu \to u$ dans $L_p(Q)$ fort (*par exemple*), on peut donc supposer que $u_{\nu k}(x) \to u_k(x)$ p. p., donc $g_{ki} = u_k u_i$, donc : $u_{\mu k} u_{\mu i} \to u_k u_i$ dans $L_{p/2}(Q)$ faible, et l'on a le résultat voulu si $L_{p/2}(Q) \subset L_{p'}(Q)$, i. e. si $\dfrac{2}{p} \leqq \dfrac{1}{p'}$, i. e. $p \geqq 3$.

Ceci achève la vérification des hypothèses (I) et (III).

3.4. Conclusion.

Si $p \geqq 3$, *il existe une solution du problème* (3.1) [le sens précis étant (3.3), (3.4)].

L'unicité n'est pas résolue.

De même, il existe une *solution périodique*, i. e. une solution du système (3.1), mais où la condition initiale « $u(0) = u_0$ » est remplacée par la condition « $u(0) = u(T)$ ».

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AUBIN (J. P.). — Un théorème de compacité, *C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 5042-5044.

[2] BROWDER (F. E.). — Non linear elliptic boundary value problems, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 69, 1963, p. 862-874.

[3] BROWDER (F. E.). — Strongly non linear parabolic boundary value problems, *Amer. J. Math.*, t. 86, 1964, p. 339-357.

[4] COHN (J.) and NIRENBERG (L.). — *Non coercive boundary value problem* (à paraître).

[5] KATO (T.). — *Non linear evolution equations in Banach spaces* (à paraître).

[6] LERAY (J.) et LIONS (J.-L.). — Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, *Bull. Soc. math. France*, t. 93, 1965, p. 97-107.

[7] LIONS (J.-L.). — Équations différentielles opérationnelles dans les espaces de Hilbert, *Centro Internazionale Matematico Estivo* [30 mai-8 juin 1963]: *Equazioni differenziale astratte*, n° 2, 71 pages. — Roma, Cremonese, 1963.

[8] LIONS (J.-L.). — *Singular perturbations and some non linear boundary value problems*, Mathematical Research Center, University of Wisconsin, Report 421, 36 pages.

[9] LIONS (J.-L.). — Quelques remarques sur certains problèmes d'évolution non linéaires, *Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze* [octobre 1964. Cagliari-Sassari] (à paraître).

[10] LIONS (J.-L.) et PEETRE (J.). — *Théorie de l'interpolation des opérateurs et applications* (Ouvrage en préparation).

[11] MINTY (G. J.). — Monotone (non linear) operators in Hilbert space, *Duke math. J.*, t. 29, 1962, p. 341-346.

[12] OLEJNIK (O. A.). — Sur un problème de Fichera [en russe], *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 157, 1964, p. 1297-1300.

[13] VIIŠK (I. M.). — Systèmes différentiels quasi-linéaires fortement elliptiques sous forme divergente [en russe], *Trudy Moskovskogo Mat. Obšč.*, t. 12, 1963, p. 125-184.

[14] VIŠIK (I. M.). — Résolution de problèmes aux limites pour équations paraboliques quasi-linéaires d'ordre quelconque [en russe], *Mat. Sbornik*, t. 59, 1962, p. 289-335.

(Manuscrit reçu le 25 novembre 1964.)

Note ajoutée à la correction des épreuves. — D'autres résultats sur l'existence de solutions périodiques d'équations non linéaires ont été récemment obtenus par G. PROUSE, G. PRODI (Congrès de Gênes, février 1965) et par F. E. BROWDER, (*Existence of periodic solutions for non linear equations of evolution*, à paraître).

Jacques-Louis LIONS,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
42, rue du Hameau, Paris 15e.