

BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE SAMUEL

Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs

Bulletin de la S. M. F., tome 92 (1964), p. 237-249

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__237_0

© Bulletin de la S. M. F., 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**ANNEAUX GRADUÉS FACTORIELS
ET MODULES RÉFLEXIFS ;**

PAR

PIERRE SAMUEL

(Paris).

Étant donné un anneau factoriel A et un A -module M , on peut se demander à quelles conditions l'algèbre symétrique $S(M)$ est un anneau factoriel. C'est classiquement vrai lorsque M est libre, et déjà connu lorsque M est projectif [4]. Nous nous proposons de montrer que, pour que $S(M)$ soit factoriel, il faut et il suffit que M et toutes ses puissances symétriques $S^n(M)$ soient des modules réflexifs; en particulier nous retrouvons le résultat de [4] disant que, pour que l'algèbre symétrique d'un idéal \mathfrak{a} soit factorielle, il faut et il suffit que \mathfrak{a} soit principal. Nous donnons aussi l'exemple d'un module réflexif M sur un anneau factoriel tel que $S^2(M)$ ne soit pas réflexif, de sorte que $S(M)$ n'est pas factorielle; par contre, nous exhibons une classe de modules réflexifs non projectifs dont l'algèbre symétrique est factorielle. Pour arriver à ces résultats, nous démontrerons en chemin divers résultats sur les modules réflexifs et les anneaux gradués factoriels.

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux sont unitaires, commutatifs et *noëthériens*, tous les modules sont unitaires et *de type fini*. Les définitions et résultats classiques d'algèbre commutative qu'on trouve dans [3] et dans [6] sont utilisés sans avertissement.

1. Quelques propriétés des modules réflexifs.

Soit M un module sur un anneau A . Rappelons ([2], § 2, n° 7) que M est dit *réflexif* si l'homomorphisme canonique de M dans son bidual M^{**} est bijectif. Cette notion est conservée par somme directe finie, passage à un facteur direct, changement d'anneau et localisation. Les idéaux \mathfrak{a}

réflexifs sont les idéaux « divisoriels », c'est-à-dire tels que $A : (A : \alpha) = \alpha$, ou encore les intersections d'idéaux (fractionnaires) principaux; si A est factoriel, ce sont donc les idéaux principaux. Les modules réflexifs sur les anneaux intégralement clos sont étudiés dans [3], chap. VII (en préparation). Pour la commodité du lecteur nous commencerons par le résultat classique suivant :

PROPOSITION 1. — Soient A un anneau intégralement clos, $P(A)$ l'ensemble de ses idéaux premiers de hauteur 1, et M un A -module sans torsion. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a. M est réflexif;

b. on a $M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P(A)} M_{\mathfrak{p}}$ (M et les $M_{\mathfrak{p}}$ étant considérés comme plongés dans l'espace vectoriel $K \otimes_A M$ sur le corps des fractions K de A);

c. toute A -suite (a, b) à deux éléments est une M -suite.

Plongeons en effet M dans l'espace vectoriel $V = K \otimes_A M$. Alors le dual M^* s'identifie à l'ensemble des formes K -linéaires f sur V telles que $f(M) \subset A$. D'autre part, $(M_{\mathfrak{p}})^*$ s'identifie à $(M^*)_{\mathfrak{p}}$, de sorte que nous pouvons employer la notation $M_{\mathfrak{p}}^*$.

Comme A est l'intersection des $A_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p} \in P(A)$, on a

$$M^* = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P(A)} M_{\mathfrak{p}}^*$$

car $f(M_{\mathfrak{p}}) \subset A_{\mathfrak{p}}$, pour tout $\mathfrak{p} \in P(A)$, entraîne $f(M) \subset A$. En particulier M^{**} est l'intersection des $M_{\mathfrak{p}}^{**}$; comme $A_{\mathfrak{p}}$ est principal, $M_{\mathfrak{p}}$ est libre sur $A_{\mathfrak{p}}$, donc égal à son bidual, de sorte que M^{**} est aussi l'intersection des $M_{\mathfrak{p}}$. Ceci démontre l'équivalence de (a) et (b).

Supposons (b) vraie, et soit (a, b) une A -suite, et x, y des éléments de M tels que $ax + by = 0$. Comme, pour $\mathfrak{p} \in P(A)$, a et b sont étrangers dans $A_{\mathfrak{p}}$ et que $M_{\mathfrak{p}}$ est libre sur $A_{\mathfrak{p}}$, on a $y \in aM_{\mathfrak{p}}$. Or, par homothétie, on déduit de (b) que l'intersection des $aM_{\mathfrak{p}}$ est aM , d'où $y \in aM$. Ceci montre que (a, b) est une M -suite.

Réciproquement, supposons (c) vraie, et soit z un élément de l'intersection des $M_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} \in P(A)$). Écrivons $z = y/a$ avec $y \in M$ et $a \in A$, et aussi $z = x(\mathfrak{p})/s(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in P(A)$, avec $x(\mathfrak{p}) \in M$ et $s(\mathfrak{p}) \in A - \mathfrak{p}$. Soit (\mathfrak{p}_i) ($1 \leq i \leq m$) la famille des idéaux premiers associés à Aa ; on a $\mathfrak{p}_i \in P(A)$. L'idéal engendré par les $s(\mathfrak{p}_i)$ n'étant contenu dans

aucun \mathfrak{p}_i , il contient un élément $b = \sum_{c=1}^n c_i s(\mathfrak{p}_i)$ qui n'est contenu dans

aucun \mathfrak{p}_i (lemme d'évitement des idéaux premiers); alors (a, b) est une A -suite. Or on a

$$by = a \sum_{i=1}^n c_i x(\mathfrak{p}_i)$$

par construction; comme (a, b) est une M -suite, on en déduit que $y \in aM$; d'où $z \in M$, de sorte que (b) est vraie.

Remarque. — Un module réflexif est nécessairement sans torsion (car c'est un dual). Lorsque A est de dimension 1 (i. e. un anneau de Dedekind), (b) est automatiquement vrai par le théorème de globalisation, et (c) est trivialement vrai faute de A -suites à deux termes; dans ce cas, tout module sans torsion (de type fini rappelons-le) est projectif, donc réflexif.

PROPOSITION 2. — *Sur un anneau local régulier de dimension 2, tout module réflexif M est libre.*

En effet, si M est un module sur un anneau local régulier A , on a $\text{prof}(M) + \text{dh}(M) = \dim(A)$, où $\text{prof}(M)$ désigne la profondeur de M , c'est-à-dire la longueur des M -suites maximales, et $\text{dh}(M)$ sa dimension homologique (cf. [1]). Ici, on a $\dim(A) = 2$ et $\text{prof}(M) = 2$ d'après la proposition 1(c); d'où $\text{dh}(M) = 0$, ce qui montre que M est libre.

Par localisation on voit donc que, sur un anneau local régulier de dimension n , tout module réflexif M est « libre en codimension 2 »; d'autre part, on voit que $\text{dh}(M) \leq n - 2$. La réciproque est vraie en dimension 3.

PROPOSITION 3. — *Soit A un anneau local régulier de dimension 3. Pour qu'un A -module M soit réflexif, il faut et il suffit qu'on ait $\text{dh}(M) \leq 1$, et que $M_{\mathfrak{p}}$ soit libre sur $A_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier \mathfrak{p} distinct de l'idéal maximal \mathfrak{m} .*

On vient de voir la nécessité. Démontrons la suffisance. Montrons d'abord que M est sans torsion; soit \mathfrak{p} un idéal premier associé à M ; on a $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, sinon $\text{prof}(M) = 0$, et $\text{dh}(M) = 3$; alors, $M_{\mathfrak{p}}$ est libre sur $A_{\mathfrak{p}}$ de sorte que, comme $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est associé à $M_{\mathfrak{p}}$, on a $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = 0$, d'où $\mathfrak{p} = 0$, et M est sans torsion. Plongeons alors M dans $K \otimes_A M$ (K : corps des fractions de A), et soit z un élément de l'intersection des $M_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p} \in P(A)$. Comme $M_{\mathfrak{q}}$ est libre, donc réflexif, pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$, on a $z \in M_{\mathfrak{q}}$ pour tout tel idéal \mathfrak{q} . Donc, si $z \notin M$, l'idéal $M : Az$ est primaire pour \mathfrak{m} ; or M et z sont contenus dans un sous- A -module libre L de $K \otimes M$ (« dénominateur commun »), de sorte que, si $z \notin M$, L/M contient un élément dont l'annulateur est primaire pour \mathfrak{m} ; on a alors

$$\text{prof}(L/M) = 0, \quad \text{d'où} \quad \text{dh}(L/M) = 3.$$

Or la suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow L/M \rightarrow 0$ et les relations $\text{dh}(M) \leq 1$, $\text{dh}(L) = 0$ montrent qu'on a $\text{dh}(L/M) \leq 2$ ([6], chap. VII, § 13, formule (7)). Cette contradiction montre qu'on a $z \in M$, de sorte que M est réflexif par la proposition 1 (b). C. Q. F. D.

Nous allons maintenant donner un exemple de modules réflexifs, non projectifs en général :

PROPOSITION 4. — Soient A un anneau, q un entier ≥ 1 et $P_q(A)$ l'ensemble des idéaux premiers \mathfrak{p} de A pour lesquels il existe une

A -suite $(b_1, \dots, b_{q'})$ avec $q' \leq q$, telle que \mathfrak{p} soit associé à l'idéal $\sum_{i=1}^{q'} Ab_i$.

D'autre part, soient M le A -module défini par les générateurs (x_i) ($i = 1, \dots, n$)

et la relation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ ($a_i \in A$), et à l'idéal $\sum_{i=1}^n A a_i$. Alors les conditions

suivantes sont équivalentes :

- a. toute A -suite $(b_1, \dots, b_{q'})$ avec $q' \leq q$ est une M -suite;
- b. l'idéal \mathfrak{a} n'est contenu dans aucun élément de $P_q(A)$.

Procédons par récurrence sur q , et traitons d'abord le cas $q = 1$. La négation de (a) veut dire qu'il existe un élément b de A , non inversible

et non diviseur de 0, et un élément $x = \sum_{i=1}^n c_i x_i \neq 0$ de M tels que $bx = 0$.

Ceci veut dire que les bc_i sont des équimultiples des a_i , ou encore qu'il existe $d \in A$ tel qu'on ait $d/b \notin A$ et $da_i \in A$ pour tout i (les quotients étant pris dans l'anneau total de fractions de A). En d'autres termes, il existe b et d tels que $d \notin Ab$ et $d \in Ab : \mathfrak{a}$, c'est-à-dire b est tel que $Ab \not\cong Ab : \mathfrak{a}$. Ceci se traduit en disant que \mathfrak{a} est formé de diviseurs de 0 modulo Ab , ou encore que \mathfrak{a} est contenu dans un idéal premier associé à Ab , c'est-à-dire dans un élément de $P_1(A)$. Ainsi, pour $q = 1$, la négation de (a) est équivalente à la négation de (b), donc (a) équivaut à (b).

Ceci étant, montrons, par récurrence sur q , que (b) implique (a). Soit $(b_1, \dots, b_{q'})$ une A -suite avec $q' \leq q$. Si $q' < q$, c'est une M -suite d'après l'hypothèse de récurrence. Supposons donc $q' = q$. Alors (b_1, \dots, b_{q-1}) est une M -suite d'après l'hypothèse de récurrence. Posons $A^0 = A/(b_1, \dots, b_{q-1})$ et $M^0 = A^0 \otimes_A M$. Il s'agit de montrer que la classe b_q^0 de b_q dans A^0 n'est pas un diviseur de zéro dans M^0 . Or ceci résulte du cas $q = 1$ appliqué à A^0 et M^0 , en tenant compte du fait que les images réciproques dans A des éléments de $P_1(A^0)$ sont des éléments de $P_q(A)$.

Réciproquement montrons que (a) implique (b). Raisonnons par l'absurde et supposons que \mathfrak{a} soit contenu dans un idéal premier \mathfrak{p} associé

à l'idéal \mathfrak{b} engendré par une A -suite (b_1, \dots, b_q) . Soient A^0 , M^0 et b_q^0 comme ci-dessus. L'image \mathfrak{a}^0 de \mathfrak{a} dans A^0 est alors contenue dans l'image \mathfrak{p}^0 de \mathfrak{p} , qui est un idéal premier associé à $A^0 b_q^0$. Le cas $q=1$ appliqué à A^0 et M^0 montre que b_q^0 est un diviseur de zéro dans M^0 ; donc (b_1, \dots, b_q) n'est pas une M -suite. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. — *Avec les hypothèses et notations de la proposition 4, supposons A intègre. Pour que M soit sans torsion, il faut et il suffit que \mathfrak{a} ne soit contenu dans aucun idéal premier associé d'un idéal principal (c'est-à-dire dans aucun idéal premier de hauteur 1 lorsque A est intégralement clos ou de Macaulay).*

C'est en effet un cas particulier du cas $q=1$.

COROLLAIRE 2. — *Avec les hypothèses et notations de la proposition 4, supposons A intégralement clos et de Macaulay. Pour que M soit réflexif, il faut et il suffit que l'idéal \mathfrak{a} ne soit contenu dans aucun idéal premier de hauteur 2.*

C'est un cas particulier du cas $q=2$, compte tenu de la proposition 1 (c),

REMARQUES :

1° Supposons A intègre et, ou bien intégralement clos, ou bien de Macaulay. Disons que deux éléments (a_i) , (a'_i) de A^n sont proportionnels s'il existe un élément x du corps des fractions de A tels que $a'_i = xa_i$ pour $i=1, \dots, n$. Le corollaire 1 peut se traduire comme suit : si l'idéal engendré par les a_i n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 1, alors tout élément de A^n proportionnel à (a_i) en est un multiple.

2° Soit M un module défini par n générateurs x_i et une relation $\sum_i a_i x_i = 0$. La proposition 4 et ses corollaires montrent que certaines propriétés de M ne dépendent que de l'idéal \mathfrak{a} engendré par les a_i , et non du choix des générateurs a_i . Ceci s'explique de la façon suivante. Soit (a'_j) ($j=1, \dots, n'$) un autre système de générateurs de \mathfrak{a} , et soit M' le module défini par n' générateurs x'_j et la relation $\sum_j a'_j x'_j = 0$. Alors il existe des modules libres L et L' tels que les modules $\overset{j}{M} \oplus L$ et $M' \oplus L'$ soient isomorphes (i. e. M et M' sont « librement équivalents »).

En effet, par comparaison avec le système (a_i, a'_j) , on se ramène au cas où (a'_j) se déduit de (a_i) en lui ajoutant un élément $b = \sum_{i=1}^n c_i a_i$. Alors M' est défini par les générateurs (y_1, \dots, y_n, y) et la relation

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i + by = 0.$$

Comme

$$\sum_{i=1}^n a_i(y_i + c_i y) = 0,$$

il existe un homomorphisme u de M dans M' tel que $u(x_i) = y_i + c_i y$ pour tout i . On voit aisément que u est injectif, et que M' est somme directe de $u(M)$ et de Ay . D'où notre assertion.

Lorsque A est *local*, il y a, parmi les modules correspondant comme ci-dessus aux systèmes de générateurs de \mathfrak{a} , ceux qui correspondent aux systèmes *minimaux* de générateurs. Comme on passe d'un système minimal de générateurs (a_i) de \mathfrak{a} à un autre (a'_i) par des formules

$$a'_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} a_j$$

où $\det(b_{ij})$ est inversible, les formules

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^n b_{ji} x'_j$$

définissent un isomorphisme du module défini par les générateurs x_i et la relation

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

sur le module défini par les générateurs (x'_i) et la relation

$$\sum_{i=1}^n a'_i x'_i = 0.$$

Donc les modules correspondant aux systèmes minimaux de générateurs de \mathfrak{a} sont *tous isomorphes*; soit M_0 l'un de ceux-ci. Alors tout module correspondant à un système quelconque de générateurs de \mathfrak{a} est isomorphe à $M_0 \oplus L$, où L est libre.

2. Factorialité des algèbres symétriques.

THÉORÈME 1. — Soit $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ un anneau gradué factoriel à degrés positifs. Alors A_0 est factoriel, et les A_n sont des modules réflexifs sur A_0 .

Soient $a, b \in A_0$; alors $aA \cap Ab$ est un idéal principal et homogène, donc engendré par un générateur homogène c , nécessairement de degré 0;

on a donc $A_0 a \cap A_0 b = A_0 c$, de sorte que A_0 est factoriel. Comme A est intègre, les A_n sont des A_0 -modules sans torsion. Pour montrer leur réflexivité, utilisons la proposition 1(c) : si (a, b) est une A_0 -suite, les éléments a, b sont étrangers dans A_0 , donc aussi dans A , car un diviseur commun de a et b est nécessairement de degré 0; donc (a, b) est une A -suite, et, *a fortiori*, une A_n -suite pour tout n . C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. — *Soient B un anneau factoriel et P un B -module projectif. Alors l'algèbre symétrique $S(P)$ est factorielle.*

Soit P' un B -module tel que $P \oplus P'$ soit un module libre L . Graduons $T = S(L) = S(P) \otimes S(P')$ par les $T_n = S(P) \otimes S^n(P')$. Comme T est factoriel (GAUSS), le théorème 1 montre que $T_0 = S(P)$ est factoriel.

COROLLAIRE 2. — *Soient B un anneau et \mathfrak{b} un idéal de B . Pour que $S(\mathfrak{b})$ soit factorielle, il faut et il suffit que B soit factoriel et \mathfrak{b} principal.*

La suffisance est évidente par GAUSS. La nécessité résulte du théorème 1, puisqu'un idéal réflexif d'un anneau factoriel est principal.

La réciproque du théorème 1 est fautive, comme on le voit en prenant pour A_0 un corps. Cependant :

THÉORÈME 2. — *Soient A un anneau et M un A -module. Pour que l'algèbre symétrique $S(M)$ soit factorielle, il faut et il suffit que A soit factoriel et que les $S^n(M)$ soient tous des A -modules réflexifs.*

La nécessité résulte du théorème 1. Démontrons la suffisance. Alors $S(M)$ est un A -module sans torsion, donc un anneau intègre : en effet, en notant T l'ensemble des éléments non nuls de A , $S(M)$ s'injecte alors dans $T^{-1}S(M) = S_{T^{-1}A}(T^{-1}M)$ qui est un anneau de polynômes sur le corps $T^{-1}A$, donc un anneau intègre. Montrons maintenant que tout élément premier p de A est premier dans $S(M)$; il suffit de montrer que, si x, y sont des éléments homogènes de $S(M)$ tels que p divise xy , alors p divise l'un d'eux; posons $\mathfrak{p} = Ap$; l'anneau $S(M)_{\mathfrak{p}} = S_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ est factoriel, car $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète et $M_{\mathfrak{p}}$ est un module libre sur $A_{\mathfrak{p}}$; donc p divise par exemple x dans cet anneau, de sorte qu'on a, en notant n le degré de x , $x/p \in S^n(M)_{\mathfrak{p}}$; d'autre part, on a évidemment $x/p \in S^n(M)_{\mathfrak{q}}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ de hauteur 1 de A ; comme $S^n(M)$ est réflexif, on a donc $x/p \in S^n(M)$, de sorte que p divise x . Ceci étant, l'ensemble T des éléments non nuls de A est engendré par des éléments premiers de $S(M)$; comme $T^{-1}S(M)$ est factoriel en tant qu'anneau de polynômes sur un corps, $S(M)$ est factoriel par le théorème de Nagata ([5], § 1, corollaire de la proposition 2).

C. Q. F. D.

REMARQUE. — Soient A un anneau intègre et M un A -module. On a montré en cours de route que, pour que $S(M)$ soit intègre, il faut et il suffit que ce soit un A -module sans torsion.

Étant donné un anneau factoriel A et un A -module réflexif M , le problème se pose donc de savoir si tous les $S^n(M)$ sont des modules réflexifs [c'est-à-dire si $S(M)$ est factoriel]. Nous verrons plus loin que c'est faux. Il y a cependant un cas non trivial où c'est vrai (« non trivial » en ce sens que M n'est pas projectif) :

PROPOSITION 5. — Soient A un anneau de Macaulay factoriel (a_1, \dots, a_n) un système d'éléments de A , \mathfrak{a} l'idéal qu'ils engendrent, M le A -module défini par les générateurs (x_i) et la relation

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0,$$

et $S(M) = A[X_1, \dots, X_n] / \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right)$ son algèbre symétrique. Si \mathfrak{a} n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 2 (d'où $n \geq 3$), alors $S(M)$ est factorielle et les $S^n(M)$ sont des A -modules réflexifs.

Nous aurons besoin de deux lemmes :

LEMME 1. — Soient A un anneau intègre, et (a, b) une A -suite. Alors l'idéal $(aX + b)$ de $A[X]$ est premier.

On montre en effet sans difficultés que le A -homomorphisme f de $A[X]$ dans le corps des fractions de A défini par $f(X) = -b/a$ admet $(aX + b)$ pour noyau (cf. [5], § 3, proposition 8).

LEMME 2. — Soient A un anneau de Macaulay intègre, (a_1, \dots, a_n) un système d'éléments de A tel que l'idéal qu'ils engendrent ne soit contenu dans aucun idéal premier de hauteur 1 (d'où $n \geq 2$). Alors l'idéal $(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n)$ de $A[X_1, \dots, X_n]$ est premier.

On peut supposer $a_n \neq 0$. Posons

$$B = A[X_1, \dots, X_{n-1}] \quad \text{et} \quad b = a_1 X_1 + \dots + a_{n-1} X_{n-1}.$$

En vertu du lemme 1 (appliqué à B) il suffit de démontrer que (b, a_n) est une B -suite, c'est-à-dire (comme B est de Macaulay) que b et a_n ne sont tous deux contenus dans aucun idéal premier \mathfrak{P} de hauteur 1 de B . Or, si \mathfrak{P} était un tel idéal, on aurait $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A \neq (0)$ (car $a_n \in \mathfrak{P}$), d'où $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}B$ [car $h(\mathfrak{P}) = 1$], ce qui impliquerait que a_1, \dots, a_{n-1} soient dans \mathfrak{p} ; comme $a_n \in \mathfrak{p}$, on obtiendrait une contradiction.

C. Q. F. D.

Démontrons maintenant la proposition 5. Le lemme 2 montre que $S = S(M)$ est intègre. Soit p un élément premier de A . On a $S/pS = (A/AP)[X_1, \dots, X_n]/\left(\sum_{i=1}^n a_i^0 X_i\right)$, où les a_i^0 désignent les images canoniques des a_i dans A/AP . Les a_i^0 ne sont contenus dans aucun idéal premier de hauteur 1 de A/AP , car, sinon, les a_i seraient contenus dans un idéal premier de hauteur 2 de A . Le lemme 2, appliqué à A/AP , montre que S/pS est intègre, donc que p est premier dans S . Comme au théorème 2, le théorème de Nagata montre que $S = S(M)$ est factoriel. La réflexivité des $S^n(M)$ résulte alors du théorème 2.

C. Q. F. D.

UN EXEMPLE. — Nous dirons qu'une variété (affine ou projective) est *factorielle* si son anneau de coordonnées est factoriel. Alors, si H est une hypersurface affine non singulière en codimension 2 et factorielle, son *fibré tangent est une variété factorielle*. En effet, si $A = K[x_1, \dots, x_n]$ est l'anneau de H , et si $F(x) = 0$ est son équation, l'anneau du fibré tangent est $A[U_1, \dots, U_n]/\left(\sum_{i=1}^n F'_i(x) U_i\right)$; or l'idéal engendré par les dérivées partielles $F'_i(x)$ définit le lieu singulier de H , et l'on conclut par la proposition 5. D'après un théorème de Grothendieck-Severi, l'hypothèse (et la conclusion donc) sont vraies lorsque $\dim(H) \geq 3$, et que H est une hypersurface non singulière en codimension 3.

REMARQUE. — Les modules M décrits dans la proposition 5 ne sont pas projectifs en général [prendre A local régulier de dimension ≥ 3 , et pour (a_i) un système de paramètres]. Une hypothèse sur les puissances symétriques est donc nettement moins forte que l'hypothèse analogue sur les puissances tensorielles. Ainsi le théorème d'Auslander disant que, si $M \otimes M$ est sans torsion, alors M est projectif, n'a pas d'analogue ici.

UN CONTRE-EXEMPLE. — Nous allons construire un module réflexif M tel que $S^2(M)$ ne soit pas réflexif; alors $S(M)$ n'est pas factoriel par le théorème 2. Prenons pour A un anneau local régulier de dimension 3, et notons (a, b, c) un système de générateurs de son idéal maximal \mathfrak{m} . Prenons pour M le quotient de A^3 par le sous-module P engendré par les vecteurs

$$\begin{aligned} u = (a_i) &= (a, b, 0, c, 0), \\ v = (b_i) &= (0, a, b, 0, c). \end{aligned}$$

Comme ces vecteurs sont linéairement indépendants, P est libre, et l'on a donc $\text{dh}(M) \leq 1$. D'autre part, a^2, b^2, c^2 figurent parmi les

mineurs d'ordre 2 de la matrice ci-dessus; comme ils ne sont contenus dans aucun idéal premier \mathfrak{p} de hauteur 2 de A , on voit que, pour un tel \mathfrak{p} , deux des vecteurs de la base canonique de A^5 sont combinaisons $(A_{\mathfrak{p}})$ -linéaires des trois autres, de u et de v . Ainsi M est libre en codimension 2, de sorte qu'il est réflexif par la proposition 3 du paragraphe 1.

D'autre part, $S^2(M)$ est le quotient de $S^2(A^5) = A^{15}$ par le sous-module E engendré par les ue_i et les ve_i [où (e_i) désigne la base canonique de A^5]. Comme M est de rang 3, $S^2(M)$ est de rang 6, donc E est de rang $15 - 6 = 9$. Or il est engendré par les 10 générateurs ue_i, ve_i ($i = 1, \dots, 5$), liés par l'évidente relation

$$\sum_{i=1}^5 b_i(ue_i) - \sum_{i=1}^5 a_i(ve_i) = 0$$

(traduction de $vu - uv = 0$). Mais le module défini par 10 générateurs x_i, y_i ($i = 1, \dots, 5$) et une relation

$$\sum_{i=1}^5 b_i x_i - \sum_{i=1}^5 a_i y_i = 0$$

est sans torsion d'après le corollaire 1 de la proposition 4 (§ 1) et de rang 9; il est donc isomorphe à E . Comme les coefficients b_i, a_i de l'unique relation liant les générateurs de E sont tous dans \mathfrak{m} , on a $[E/\mathfrak{m}E : A/\mathfrak{m}] = 10$; donc E n'est pas libre puisqu'il est de rang 9. Par conséquent, on a $\text{dh}(E) = 1$, d'où $\text{dh}(S^2(M)) = 2$; la proposition 3 du paragraphe 1 montre alors que $S^2(M)$ n'est pas réflexif.

3. Généralisations.

Nous allons généraliser certains résultats du paragraphe 1.

PROPOSITION 6. — Soient A un anneau de Macaulay, M un A -module, et q un entier ≥ 1 . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $_q$ on a $\text{prof}(M_{\mathfrak{p}}) \geq \inf(q, h(\mathfrak{p}))$ pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A ;
- (ii) $_q$ toute A -suite de longueur $\leq q$ est une M -suite.

Montrons d'abord que (ii) $_q$ implique (i) $_q$. Soient \mathfrak{p} un idéal premier et j un entier tels que $j \leq \inf(q, h(\mathfrak{p}))$. Comme A est un anneau de Macaulay, \mathfrak{p} contient une A -suite de longueur j ; c'est donc une M -suite, et son image canonique dans $A_{\mathfrak{p}}$ est ainsi une $M_{\mathfrak{p}}$ -suite. Donc $\text{prof}(M_{\mathfrak{p}}) \geq j$.

Pour montrer que (i) $_q$ implique (ii) $_q$ nous procéderons par récurrence sur q . Traitons d'abord le cas $q = 1$. Soit x un élément de A qui n'est pas diviseur de zéro dans A . Il s'agit de montrer que x n'est pas divi-

seur de zéro dans M , sous l'hypothèse que $\text{prof}(M_{\mathfrak{p}}) \geq 1$ pour tout idéal premier \mathfrak{p} de hauteur ≥ 1 . Or $\text{prof}(M_{\mathfrak{p}}) \geq 1$ implique $\mathfrak{p} \notin \text{Ass}(M)$ [sinon $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \text{Ass}(M_{\mathfrak{p}})$, et $\text{prof}(M_{\mathfrak{p}}) = 0$]. Donc les idéaux premiers associés à M sont tous de hauteur 0. Comme x n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 0, x n'est donc pas diviseur de zéro dans M .

Passons au cas général. Soit (x_1, \dots, x_q) une A -suite. Supposons $(i)_q$ vraie pour M . On a, *a fortiori*, $(i)_{q-1}$, donc $(ii)_{q-1}$ d'après l'hypothèse de récurrence, de sorte que (x_1, \dots, x_{q-1}) est une M -suite. Posons

$$A^0 = A/(x_1, \dots, x_{q-1}) \quad \text{et} \quad M^0 = A^0 \otimes_A M.$$

Soient \mathfrak{p} un idéal premier contenant (x_1, \dots, x_{q-1}) , et \mathfrak{p}^0 son image dans A^0 . Comme A est un anneau de Macaulay, on a

$$h(\mathfrak{p}) = h(\mathfrak{p}^0) + q - 1;$$

d'autre part, comme $M_{\mathfrak{p}^0}^0$ est un quotient de $M_{\mathfrak{p}}$ par une $M_{\mathfrak{p}}$ -suite de longueur $q - 1$, on a

$$\text{prof}(M_{\mathfrak{p}}) = \text{prof}(M_{\mathfrak{p}^0}^0) + q - 1.$$

Ainsi l'hypothèse $(i)_q$ faite sur M donne

$$\text{prof}(M_{\mathfrak{p}^0}^0) \geq \inf(1, h(\mathfrak{p}^0)),$$

de sorte que M^0 vérifie $(i)_1$. D'après le début de la démonstration, il vérifie $(ii)_1$, de sorte que l'image canonique de x_q dans A^0 n'est pas diviseur de zéro dans M^0 . Ainsi (x_1, \dots, x_q) est une M -suite.

C. Q. F. D.

REMARQUE. — Lorsque A est intègre, $(ii)_1$ veut dire que M est sans torsion. Lorsque A est intégralement clos, $(ii)_2$ veut dire que M est réflexif [§ 1, proposition 1 (c)].

COROLLAIRE 1. — Soient A un anneau de Macaulay, (a_i) des éléments de A , \mathfrak{a} l'idéal qu'ils engendrent, et M le A -module défini par les géné-

rateurs (x_i) et la relation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. Pour que M jouisse de $(i)_q$ ou $(ii)_q$, il faut et il suffit que \mathfrak{a} ne soit contenu dans aucun idéal premier de hauteur q .

Ceci résulte de la proposition 4 (§ 1), en tenant compte de ce que, pour un anneau de Macaulay A , l'ensemble $P_q(A)$ de la proposition 4 est celui des idéaux premiers de hauteur $\leq q$.

COROLLAIRE 2. — Soient A un anneau local régulier, M un A -module, et q un entier ≥ 1 . Alors les propriétés $(i)_q$ et $(ii)_q$ sont équivalentes à :

$(iii)_q$ on a $\text{dh}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \sup(h(\mathfrak{p}) - q, 0)$ pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A .

En effet, comme $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier de dimension $h(\mathfrak{p})$, on a

$$\text{prof}(M_{\mathfrak{p}}) = h(\mathfrak{p}) - \text{dh}(M_{\mathfrak{p}}).$$

Ainsi (i)_q équivaut à

$$h(\mathfrak{p}) - \text{dh}(M_{\mathfrak{p}}) \geq \inf(q, h(\mathfrak{p})),$$

relation élémentairement équivalente à (iii)_q.

Pour $q = 2$, le corollaire 2 donne le résultat suivant, qui contient la proposition 3 du paragraphe 1 :

COROLLAIRE 3. — *Soient A un anneau local régulier et M un A -module. Pour que M soit réflexif, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\text{dh}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \sup(h(\mathfrak{p}) - 2, 0)$$

pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A .

Remarque sur les anneaux gradués intégralement clos. — Si $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ est un anneau gradué intégralement clos, il est exact que A_0 est intégralement clos (c'est l'intersection de A et du corps formé par les quotients d'éléments homogènes de même degré), mais les A_n ne sont pas toujours des modules réflexifs sur A_0 : prenons pour A_0 l'anneau local $(k[a, b])_{(a, b)}$ de l'origine dans le plan, et $A = A_0[X, Y]/(aX + bY)$; alors A est intégralement clos (en tant que localisé de l'anneau d'une quadrique projective), mais A_1 n'est pas A_0 -libre (rang 1, et 2 générateurs) donc pas A_0 -réflexif (§ 1, proposition 2); on notera qu'il existe ici un idéal premier \mathfrak{P} de hauteur 1 de A tel que $\mathfrak{P} \cap A_0$ soit de hauteur 2, ce qui empêche de raisonner comme dans le théorème 1.

Par contre, une partie du théorème 2 se transpose : si A est intégralement clos, et si M est un A -module tel que les $S^n(M)$ soient tous réflexifs, alors l'algèbre symétrique $S = S(M)$ est intégralement close; en effet, pour tout $\mathfrak{p} \in P(A)$, $S_{\mathfrak{p}} = S(M_{\mathfrak{p}})$ est un anneau de polynômes sur un anneau de valuation discrète, donc un anneau intégralement clos; d'autre part, l'hypothèse de réflexivité montre qu'on a

$$S = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P(A)} S_{\mathfrak{p}},$$

d'où notre assertion.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] AUSLANDER (M.) and BUCHSBAUM (D.). — Homological dimension in local rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 85, 1957, p. 390-405.
 [2] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre*. Chapitre 2 : *Algèbre linéaire*. 3^e éd. — Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236; Bourbaki, 6).

- [3] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre commutative*. Chapitres 1-2, 3-4. — Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290-1293; Bourbaki, 27-28) [Chap. 5-7, à paraître].
- [4] MICALI (Artibano). — Sur les algèbres universelles, *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, t. 13, 1963-1964 (à paraître) (Thèse Sc. math. Paris, 1963).
- [5] SAMUEL (Pierre). — Sur les anneaux factoriels, *Bull. Soc. math. France*, t. 89, 1961, p. 155-173.
- [6] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). — *Commutative algebra*, Vol. 1 and 2. — Toronto, New York, London, . . ., Van Nostrand Company, 1958-1960 (The University Series in higher Mathematics).

(Manuscrit reçu le 15 novembre 1963.)

Pierre SAMUEL,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
3, avenue du Lycée-Lakanal,
Bourg-la-Reine (Seine).
