BULLETIN DE LA S. M. F.

P. EYMARD

L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact

Bulletin de la S. M. F., tome 92 (1964), p. 181-236
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__181_0>

Bull. Soc. math. France,
92, 1964, p. 181 à 236.

L'ALGÈBRE DE FOURIER D'UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT ;

PAR

PIERRE EYMARD [1]

(Nancy).

Cet article décrit une méthode permettant d'étendre aux groupes localement compacts quelconques un certain nombre de résultats de l'analyse harmonique sur les groupes abéliens.

Le cas de ces derniers est désormais classique : qu'on se reporte, par exemple, à l'Ouvrage de W. RUDIN [26]. Rappelons-en quelques points. Soit Γ un groupe localement compact abélien, et soit G son groupe dual. La théorie décrit notamment l'algèbre de convolution $M^1(\Gamma)$ des mesures de Radon bornées sur Γ et sa sous-algèbre $L^1(\Gamma)$ des fonctions intégrables pour la mesure de Haar sur Γ. Par transformation de Fourier, $M^1(\Gamma)$ et $L^1(\Gamma)$ deviennent des algèbres de Banach, notées $B(G)$ et $A(G)$ respectivement, de fonctions définies sur G, avec, pour norme de la transformée de Fourier de la mesure μ, la masse de $|\mu|$. Les résultats les plus significatifs se rapportent aux idéaux de $A(G)$; entre autres :

1° L'espace topologique des idéaux maximaux ou *spectre de Gelfand* de $A(G)$ s'identifie naturellement à G;

2° On connaît des conditions suffisantes pour qu'une fonction f appartenant à $L^\infty(\Gamma)$ soit limite faible de combinaisons linéaires de caractères appartenant au spectre de f; parmi ces énoncés de *synthèse spectrale*, les plus importants furent, dans l'ordre chronologique, le théorème taubérien de WIENER-GODEMENT ([35], [16]), le théorème sur les idéaux primaires de BEURLING-KAPLANSKY ([2], [20]), et enfin, les englobant,

---

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1964.

un théorème dont l'origine remonte à DITKIN [10], démontré par S. AGMON et S. MANDELBROJT [1] pour $G = \mathbf{R}$, et par H. HELSON ([18], théorème 2) pour G abélien.

Ces résultats, nous les avons plus particulièrement cités parce qu'ils reçoivent aux chapitres 3 et 4 du présent Mémoire une formulation valable pour tout groupe localement compact G. Mais en l'absence, dans le cas général, de groupe dual Γ, il nous a fallu d'abord définir et étudier les algèbres $B(G)$ et $A(G)$ *en soi*, sans recourir, via la transformation de Fourier, à des algèbres de mesures.

$B(G)$ est l'algèbre commutative des combinaisons linéaires complexes de fonctions continues de type positif sur G, avec la norme d'espace de Banach dual de la $C^\star$-algèbre du groupe G. Le chapitre 2 expose les propriétés de $B(G)$ et de ses sous-espaces $B_{\mathcal{S}}(G)$ associés aux classes d'équivalence faible, au sens de J. M. G. FELL [14], de représentations unitaires continues de G. Les raisonnements s'appuient de façon essentielle sur les notions, brièvement rappelées au chapitre 1, d'algèbre de von Neumann biduale d'une $C^\star$-algèbre, et de valeur absolue d'une forme linéaire sur une $C^\star$-algèbre (*cf.* Z. TAKEDA [31], A. GROTHENDIECK [17], S. SAKAI [27], M. TOMITA [33]). Les propriétés fonctorielles de l'application $G \to B_{\mathcal{S}}(G)$ sont mises en évidence; notamment, on obtient en (2.24) une extension à un groupe quelconque d'un théorème dû à S. BOCHNER [3] et I. J. SCHOENBERG [28] pour $G = \mathbf{R}$, et à W. F. EBERLEIN [11] pour G abélien.

L'algèbre de Fourier $A(G)$ est définie au début du chapitre 3 : c'est la sous-algèbre de Banach de $B(G)$ engendrée par les fonctions continues de type positif à support compact. L'espace de Banach dual de $A(G)$ s'identifie, au théorème (3.10), à l'algèbre de von Neumann $VN(G)$ engendrée par les opérateurs de translation à gauche dans $L^2(G)$, la topologie faible des opérateurs apparaissant comme topologie faible de la dualité avec $A(G)$. Ici, comme en maintes occasions, $VN(G)$ joue donc le rôle dévolu à $L^\infty(\Gamma)$ dans le cas abélien. On démontre pour $A(G)$ un certain nombre de propriétés familières dans le cas classique, par exemple l'existence de partitions de l'unité, et l'identité de $A(G)$ avec l'ensemble des fonctions $f \star \tilde{g}$, où f et g parcourent $L^2(G)$. Les relations de $A(G)$ et $VN(G)$ avec la théorie des distributions sur les groupes (*cf.* F. BRUHAT [6]) sont analysées, mais on notera que l'ensemble de nos résultats est établi indépendamment de cette théorie, donc ne repose pas sur la solution du cinquième problème. En (3.34), enfin, est énoncé le résultat principal du chapitre, concernant le spectre de Gelfand de $A(G)$, et son corollaire, l'extension à un groupe localement compact quelconque du théorème taubérien de Wiener-Godement.

Le chapitre 4 est consacré à la synthèse spectrale. On commence par définir et étudier la notion de support d'un opérateur T appartenant à $VN(G)$, notion qui joue dans la question le rôle tenu, dans le cas abélien, par le spectre d'une fonction f appartenant à $L^{\infty}(\Gamma)$. Puis on donne deux démonstrations essentiellement différentes, dont l'une fondée sur la théorie des distributions, d'un énoncé qui généralise aux groupes non nécessairement abéliens le théorème de Beurling-Kaplansky. (A. GROTHENDIECK m'a dit avoir obtenu cet énoncé, qu'il n'a pas publié, et que j'ai établi indépendamment.) L'article s'achève sur une extension du théorème de Ditkin; la formulation n'en est absolument satisfaisante que pour les opérateurs obéissant à une certaine condition (H), mais nous n'avons pas réussi à construire un exemple d'opérateur qui ne remplisse pas cette condition.

Les résultats obtenus ont été annoncés dans [13].

Le présent travail constitue une partie de ma thèse. Au cours de son élaboration, de fructueuses conversations avec M. J. DIXMIER m'ont bien souvent mis sur la voie. Qu'il veuille trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

CHAPITRE 1.

PRÉLIMINAIRES.

Avant toute considération sur les groupes, rappelons sans démonstration quelques propriétés des $C^{\star}$-algèbres, que nous aurons à utiliser.

(1.1) L'algèbre de von Neumann biduale d'une $C^{\star}$-algèbre.

Soit M une $C^{\star}$-algèbre. Soit M' l'espace de Banach des formes linéaires continues sur M, soit M'_h l'ensemble des $u \in M'$ qui sont hermitiennes [i. e. telles que $u(T^{\star}) = \overline{u(T)}$ quel que soit $T \in M$], soit M'_+ l'ensemble des $u \in M'_h$ qui sont positives [i. e. telles que $u(TT^{\star}) \geqq 0$ quel que soit $T \in M$]. Toute $u \in M'_+$ définit, comme il est décrit par exemple dans C. E. RICKART ([25], chap. IV, § 5), une représentation π_u de M dans un espace hilbertien $\mathcal{H}_u$. Soit ϖ la représentation somme des π_u, laquelle s'effectue dans l'espace $\mathcal{H}_{\varpi}$, somme hilbertienne des $\mathcal{H}_u$ quand u parcourt M'_+. Alors, d'après Z. TAKEDA [31], A. GROTHENDIECK [17], on sait que ϖ applique isométriquement M dans l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\varpi})$ des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_{\varpi}$, et que la bitransposée de l'application ϖ [quand $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\varpi})$ est muni de la topologie faible, donc réflexif] identifie isométriquement le bidual de l'espace de Banach M à l'algèbre de von Neumann M'' engendrée par $\varpi(M)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\varpi})$. De plus, la topologie faible $\sigma(M'', M')$ de dualité est identique à la topologie ultrafaible des opérateurs de M'', et les éléments de M' [resp. M'_h, resp. M'_+] correspondent exactement aux formes linéaires ultrafaiblement continues [resp. ultrafaiblement continues hermitiennes, resp. positives normales] sur M''. L'algèbre M'' ainsi décrite sera dite *l'algèbre de von Neumann biduale de la $C^\star$-algèbre M.*

On a, de plus, la propriété suivante : toute représentation π de M dans un espace hilbertien $\mathcal{H}_\pi$ s'écrit de façon unique $\pi = \pi'' \circ \varpi$, où π'' est une représentation normale de l'algèbre de von Neumann M'' dans $\mathcal{H}_\pi$, π'' s'obtenant d'ailleurs en bitransposant l'application π de M dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$.

(1.2) Décomposition de Jordan et décomposition polaire d'une fonctionnelle.

Soit M'' une algèbre de von Neumann (on songera en particulier au cas où M'' est la biduale d'une $C^\star$-algèbre), soit M' (resp. M'_h, resp. M'_+) l'ensemble des formes linéaires ultrafaiblement continues (resp. ultrafaiblement continues hermitiennes, resp. positives normales) sur M''. Alors, d'après A. Grothendieck [17], *toute $u \in M'_h$ s'écrit de façon unique sous la forme $u = u^+ - u^-$, où $u^+ \in M'_+$, $u^- \in M'_+$, et où $\| u \| = \| u^+ \| + \| u^- \|$* (décomposition de Jordan de u).

Si $T \in M''$ et si $u \in M'$, notons Tu l'élément de M' défini par : quel que soit $S \in M''$, $\langle S, Tu \rangle = \langle ST, u \rangle$. Alors, d'après S. Sakai [27], M. Tomita [33], Effrös [12], *pour tout $u \in M'$, il existe un couple* (V, p) *et un seul avec les propriétés suivantes :*

a. $p \in M'_+$ *et* $\| p \| = \| u \|$;

b. V est un opérateur partiellement isométrique de M'' dont le projecteur final est égal au support de p ([9], p. 61);

c. $u = Vp$, $p = V^\star u$.

On dit que p est la *valeur absolue* de u, et on la note $|u|$. L'égalité $u = V|u|$ s'appelle la *décomposition polaire* de u. De plus, *la « valeur absolue » $|u|$ de u est l'unique élément de M'_+ qui vérifie les conditions :*
(1.3) $\| |u| \| = \| u \|$ et, quel que soit $T \in M''$,

$$|\langle T, u \rangle|^2 \leq \| u \| \langle TT^\star, |u| \rangle$$

(*cf.* M. Tomita [33], p. 67); si, plus précisément, M'' est la biduale d'une $C^\star$-algèbre M, il suffit même de vérifier (1.3) pour les $T \in M$. Enfin, si u est hermitienne, et si $u = u^+ - u^-$ est sa décomposition de Jordan, alors on a $|u| = u^+ + u^-$, et donc

$$u^+ = \frac{1}{2}(u + |u|) \qquad \text{et} \qquad u^- = \frac{1}{2}(|u| - u)$$

(*cf.* [33], p. 68).

Notations et formulaire.

Soit G un groupe localement compact. On désigne par $M^1(G)$ l'algèbre de Banach involutive des mesures complexes bornées sur G, pour le produit de convolution, la norme $\|\mu\|_1 = \int d|\mu|(x)$, et l'involution isométrique $\mu \to \mu^*$, où $d\mu^*(x) = \overline{d\mu(x^{-1})}$. On note δ_a la masse 1 au point $a \in G$.

On désigne par $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues, à valeurs complexes, définies dans G, et par $L(G)$ le sous-ensemble de celles qui sont à support compact. Une mesure de Haar à gauche dx sur G est choisie une fois pour toutes. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit comme d'habitude les espaces $L^p(G)$ relatifs à dx.

Pour toute fonction complexe f sur G, adoptons les notations suivantes :

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}; \qquad \check{f}(x) = f(x^{-1}); \qquad {}_af(x) = f(ax); \qquad f_a(x) = f(xa).$$

Notons $x \to \Delta(x)$ le module du groupe G. On rappelle les formules :

$$(1.4) \qquad \int h(x)\,d\mu^*(x) = \overline{\int \tilde{h}(x)\,d\mu(x)},$$

$$(1.5) \qquad \int f(xa)\,dx = \Delta(a)^{-1} \int f(x)\,dx,$$

$$(1.6) \qquad \int f(x^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,dx = \int f(x)\,dx,$$

$$(1.7) \qquad \delta_a \star f = {}_{a^{-1}}f; \qquad f \star \delta_a = \Delta(a)^{-1} f_{a^{-1}},$$

où

$$h \in L(G), \qquad f \in L^1(G), \qquad a \in G, \qquad \mu \in M^1(G).$$

On rappelle que, par l'application $f \to f(x)\,dx$, $L^1(G)$ s'identifie isométriquement à un idéal bilatère fermé de $M^1(G)$. Restreinte de M^1 à L^1, l'involution est donnée par la formule

$$(1.8) \qquad f^* = \tilde{f}\Delta^{-1}.$$

De plus, on a la formule

$$(1.9) \qquad ({}_{a^{-1}}f)^* = \Delta(a)\,(f^*)_a.$$

Enfin, nous notons $P(G)$ l'ensemble des fonctions continues de type positif sur G, et nous renvoyons à R. Godement [15] en ce qui concerne les principales propriétés de ces fonctions.

Les $C^\star$-algèbres du groupe G.

Désignons par Σ l'ensemble de toutes les (classes de) représentations unitaires continues de G. Si $\pi \in \Sigma$, et si $\mathcal{H}_\pi$ est l'espace de la représentation π, on sait que π se prolonge par la formule

$$\mu \to \pi(\mu) = \int \pi(x)\, d\mu(x)$$

en une représentation de l'algèbre involutive $M^1(G)$ dans $\mathcal{H}_\pi$, dont la restriction à $L^1(G)$ est non dégénérée.

Soit $\mathcal{S}$ une partie de Σ. Pour toute $\mu \in M^1(G)$, posons

$$(1.10) \qquad \|\mu\|_{\mathcal{S}} = \sup_{\pi \in \mathcal{S}} |||\pi(\mu)|||,$$

où $|||\pi(\mu)|||$ désigne la norme dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ de l'opérateur $\pi(\mu)$. Il est immédiat que $\mu \to \|\mu\|_{\mathcal{S}}$ est une semi-norme sur l'espace vectoriel $M^1(G)$, et que, pour $\mu \in M^1$, $\nu \in M^1$, $f \in L^1$, $a \in G$, $b \in G$, on a les formules

$$(1.11) \qquad \begin{cases} \|\mu \star \nu\|_{\mathcal{S}} \leqq \|\mu\|_{\mathcal{S}} \|\nu\|_{\mathcal{S}}\,; \\ \|\mu\|_{\mathcal{S}} = \|\mu^\star\|_{\mathcal{S}}\,; \qquad \|\mu \star \mu^\star\|_{\mathcal{S}} = \|\mu\|_{\mathcal{S}}^2\,; \\ \|\mu\|_{\mathcal{S}} \leqq \|\mu\|_1\,; \qquad \|{}_af\|_{\mathcal{S}} = \|f\|_{\mathcal{S}}\,; \qquad \|f_b\|_{\mathcal{S}} = \Delta(b)^{-1} \|f\|_{\mathcal{S}}. \end{cases}$$

L'ensemble $N_{\mathcal{S}}$ des $f \in L^1$ telles que, quel que soit $\pi \in \mathcal{S}$, on ait $\pi(f) = 0$, est un idéal bilatère autoadjoint de L^1. Si $\dot{f}$ désigne la classe de f dans l'algèbre involutive quotient $L^1/N_{\mathcal{S}}$, le nombre

$$(1.12) \qquad \|\dot{f}\|_{\mathcal{S}} = \|f\|_{\mathcal{S}}$$

ne dépend pas du représentant f choisi dans $\dot{f}$, et définit une norme pour laquelle il est clair, d'après (1.11), que $L^1/N_{\mathcal{S}}$ est une algèbre normée, à involution isométrique, vérifiant

$$\|\dot{f} \star \dot{f}^\star\|_{\mathcal{S}} = \|\dot{f}\|_{\mathcal{S}}^2.$$

De plus, G opère par translation à droite et à gauche dans $L^1/N_{\mathcal{S}}$, et l'on a

$$\|{}_a\dot{f}\|_{\mathcal{S}} = \|\dot{f}\|_{\mathcal{S}} = \Delta(b)\, \|\dot{f}_b\|_{\mathcal{S}}.$$

(1.13) Définition. — *On note $C^\star_{\mathcal{S}}(G)$ l'algèbre de Gelfand-Neumark obtenue en complétant $L^1/N_{\mathcal{S}}$ pour la norme* (1.12).

Les opérateurs de translation par les éléments de G se prolongent de façon unique à $C^\star_{\mathcal{S}}(G)$, avec

$$\|{}_ag\|_{\mathcal{S}} = \|g\|_{\mathcal{S}} = \Delta(b)\, \|g_b\|_{\mathcal{S}} \quad \text{pour tout } g \in C^\star_{\mathcal{S}}(G).$$

(1.14) EXEMPLE 1. — Si $\mathcal{S} = \Sigma$ est l'ensemble de *toutes* les classes de représentations unitaires continues de G, on a $N_\Sigma = \{0\}$; on notera simplement $C^\star(G)$ l'algèbre $C^\star_\Sigma(G)$ ainsi obtenue en complétant $L^1(G)$ pour la norme $\|f\|_\Sigma$. Ses propriétés sont bien connues : *cf.* J. M. G. FELL [14]. On sait qu'il y a une bijection canonique de Σ sur l'ensemble des classes de représentations non dégénérées de l'algèbre involutive $C^\star(G)$; si $\pi \in \Sigma$, on notera encore π son « prolongement » à $C^\star(G)$. Pour éclairer la définition (1.13), remarquons que, en fait, pour chaque $\mathcal{S} \subset \Sigma$, l'algèbre $C^\star_{\mathcal{S}}(G)$ s'obtient à partir de $C^\star(G)$ par passage au quotient; de façon précise :

(1.15) PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{S} \subset \Sigma$, et soit $N'_{\mathcal{S}}$ l'intersection des noyaux dans $C^\star(G)$ des $\pi \in \mathcal{S}$* [prendre garde qu'en général $N'_{\mathcal{S}}$ est *strictement* plus grand que l'adhérence de $N_{\mathcal{S}}$ dans $C^\star(G)$; *cf.* ci-après (1.16)]. *Alors l'application $f \to \dot{f}$ de $L^1(G)$ sur $L^1/N_{\mathcal{S}}$ se prolonge en un homomorphisme surjectif de $C^\star$-algèbres, $\alpha_{\mathcal{S}} : C^\star(G) \to C^\star_{\mathcal{S}}(G)$, de noyau $N'_{\mathcal{S}}$.*

DÉMONSTRATION. — Comme $\|\dot{f}\|_{\mathcal{S}} \leq \|f\|_\Sigma$, $f \to \dot{f}$ se prolonge par continuité en un $\star$-homomorphisme $\alpha_{\mathcal{S}} : C^\star(G) \to C^\star_{\mathcal{S}}(G)$ diminuant les normes. L'homomorphisme $\alpha_{\mathcal{S}}$ est surjectif, car l'image, partout dense dans $C^\star_{\mathcal{S}}(G)$ puisqu'elle contient $L^1/N_{\mathcal{S}}$, y est aussi fermée, en vertu des propriétés des homomorphismes de $C^\star$-algèbres (*cf.* [24], p. 326). Soit $g \in N'_{\mathcal{S}}$; si $f_n \in L^1$ est une suite telle que $\|g - f_n\|_\Sigma$ tende vers zéro, on a *a fortiori*

$$\lim_n \|f_n\|_{\mathcal{S}} = 0, \qquad \text{donc} \quad \alpha_{\mathcal{S}}(g) = \lim_n \alpha_{\mathcal{S}}(f_n) = 0.$$

Réciproquement, soit $g \in C^\star(G)$ tel que $\alpha_{\mathcal{S}}(g) = 0$; il existe une suite $f_n \in L^1$ telle que $\|\dot{f}_n\|_{\mathcal{S}} = \|f_n\|_{\mathcal{S}}$ tende vers zéro, et telle que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{S}} |||\pi(g) - \pi(f_n)||| \leq \|g - f_n\|_\Sigma$$

tende vers zéro; d'où l'on déduit, en faisant tendre n vers l'infini, que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{S}} |||\pi(g)||| = 0, \qquad \text{donc} \quad g \in N'_{\mathcal{S}}.$$

Remarquons que l'$\star$-isomorphisme $C^\star(G)/N'_{\mathcal{S}} \to C^\star_{\mathcal{S}}(G)$ que nous venons de définir est même *isométrique* (*cf.* [24], p. 322).

(1.16) EXEMPLE 2. — Considérons la partie $\mathcal{S} = \{\rho\}$ de Σ réduite à la seule représentation *régulière gauche* ρ de G dans $L^2(G)$, dans laquelle, si $\mu \in M^1(G)$, $\rho(\mu)$ est l'opérateur $h \to \mu \star h$ dans $L^2(G)$. *Conventionnellement, dans toute la suite, si T est un opérateur borné sur $L^2(G)$, on notera $\|T\|_\rho$ sa norme d'opérateur.* On a évidemment $N_\rho = \{0\}$, ce qui permet d'identifier, comme nous le ferons toujours, $C^\star_\rho(G)$ à la sous-algèbre uniformément fermée de $\mathcal{L}(L^2(G))$ engendrée par les opérateurs $\rho(f)$, où $f\in L^1(G)$ [ou aussi $f\in L(G)$, ce qui revient au même]; cette identification respecte les normes. On prendra garde que, pour certains groupes, on n'a pas $N'_\rho=\{0\}$, et donc que les algèbres $C^\star(G)$ et $C^\star_\rho(G)$ diffèrent essentiellement; cette circonstance se produit exactement quand G ne possède pas la propriété (R) d'approximation suivante :

(R) *La constante* 1 *est limite uniforme sur tout compact de fonctions* $f\star\tilde{f}$, *où* $f\in L(G)$ (*cf.* R. Godement [15], problème 5; H. Yoshizawa [36]; O. Takenouchi [32]; W. F. Darsow [8]).

(1.17) Exemple 3. — Supposons G *abélien*, de groupe dual $\hat{G}$. Prenons $\mathcal{S}\subset\hat{G}$; soit $\overline{\mathcal{S}}$ son adhérence dans $\hat{G}$. Alors $N_{\mathcal{S}}=N_{\overline{\mathcal{S}}}$ est l'ensemble des $f\in L^1(G)$ dont la transformée de Fourier $\hat{f}$ s'annule sur $\mathcal{S}$. On a $N_{\mathcal{S}}=0$ si et seulement si $\mathcal{S}$ est partout dense dans $\hat{G}$; dans ce cas,

$$\|f\|_{\mathcal{S}}=\|\hat{f}\|_\infty,$$

et $C^\star_{\mathcal{S}}(G)=C^\star_\rho(G)=C^\star(G)$ s'identifie, par la transformation de Fourier, à la $C^\star$-algèbre commutative $\mathcal{C}_0(\hat{G})$ des fonctions continues sur $\hat{G}$ tendant vers zéro à l'infini. Si $\mathcal{S}$ n'est pas dense dans $\hat{G}$, alors $L^1/N_{\mathcal{S}}$ s'identifie à l'algèbre des restrictions à $\overline{\mathcal{S}}$ des fonctions $\hat{f}$, où $f\in L^1(G)$, munie de la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{S}$, donc $C^\star_{\mathcal{S}}(G)$ s'identifie à $\mathcal{C}_0(\overline{\mathcal{S}})$.

(1.18) Exemple 4. — Désignons par G_d le groupe G *rendu discret*. Nous étudierons en (2.20) les relations entre les duals de $C^\star(G)$ et $C^\star_\Sigma(G_d)$. Notons que, si G est abélien, $C^\star_\Sigma(G_d)$ s'identifie à la $C^\star$-algèbre des fonctions presque-périodiques sur $\hat{G}$.

Formes linéaires positives sur $C^\star_{\mathcal{S}}(G)$.

(1.19) Si $u\in P(G)$, on associe canoniquement à u une représentation unitaire π_u de G et un vecteur totalisateur $\xi\in\mathcal{H}_{\pi_u}$ tels que $u(x)=(\pi_u\xi\mid\xi)$ pour tout $x\in G$ (*cf.* [15], p. 21). On sait qu'il existe une bijection $u\to\varphi_u$ de $P(G)$ sur l'ensemble des formes linéaires positives sur $C^\star(G)$, correspondance caractérisée par la formule

$$\varphi_u(f)=\int_G f(x)\,u(x)\,dx \qquad \text{si} \quad f\in L^1(G)$$

et, en outre,

$$(1.20) \qquad \varphi_u(g)=(\pi_u(g)\,\xi\mid\xi) \qquad \text{si} \quad g\in C^\star(G).$$

De plus, on a $\|\varphi_u\|=u(e)$.

A cause de (1.15), l'ensemble des formes linéaires positives sur $C^\star_{\mathcal{S}}(G)$ s'identifie à une partie de $P(G)$, caractérisée par la proposition suivante, due essentiellement à O. TAKENOUCHI [32] et J. M. G. FELL [14].

(1.21) PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{S}$ une partie de Σ, et soit $u \in P(G)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour la convergence compacte sur G, u est limite de sommes de fonctions de type positif associées à des $\pi \in \mathcal{S}$;*

(ii) *le noyau dans $C^\star(G)$ de π_u contient l'intersection des noyaux dans $C^\star(G)$ des $\pi \in \mathcal{S}$;*

(iii) *il existe une forme linéaire positive φ sur l'algèbre involutive $C^\star_{\mathcal{S}}(G)$ telle que, pour toute $f \in L^1(G)$ de classe $\dot{f}$ dans $L^1/N_{\mathcal{S}}$, on ait*

$$\varphi(\dot{f}) = \int f(x)\, u(x)\, dx. \tag{1.22}$$

DÉMONSTRATION. — Pour l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii), se reporter à J. M. G. FELL [14]. Montrons l'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). Soit $N'_{\mathcal{S}}$ l'intersection des noyaux dans $C^\star(G)$ des $\pi \in \mathcal{S}$. L'assertion (ii) énonce que $\pi_u(g) = 0$ pour tout $g \in N'_{\mathcal{S}}$, ce qui équivaut à

(ii)′ $(\pi_u(g)\xi \mid \xi) = 0$ pour tout $g \in N'_{\mathcal{S}}$,

comme il résulte immédiatement du fait que ξ est totalisateur et de la remarque que $N'_{\mathcal{S}}$ est un idéal bilatère de $C^\star(G)$. Mais, en vertu de (1.15), les formes linéaires positives sur $C^\star_{\mathcal{S}}(G)$ proviennent exactement des formes linéaires positives sur $C^\star(G)$ qui sont nulles sur $N'_{\mathcal{S}}$. Donc, (iii) équivaut à $\varphi_u(g) = 0$ pour tout $g \in N'_{\mathcal{S}}$, c'est-à-dire à (ii)′, d'après (1.20).

DÉFINITION. — *On notera $P_{\mathcal{S}}(G)$ l'ensemble des $u \in P(G)$ qui satisfont aux propriétés équivalentes* (1.21).

J. M. G. FELL [14] introduit la notion suivante. Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont deux parties de Σ, disons que $\mathcal{T}$ *est subordonnée à* $\mathcal{S}$ si $N'_{\mathcal{S}} \subset N'_{\mathcal{T}}$. (FELL dit : weakly contained.) D'après (1.21), il revient au même de dire que $P_{\mathcal{T}}(G) \subset P_{\mathcal{S}}(G)$. La précision suivante nous servira :

(1.23) LEMME. — *Pour que $\mathcal{T}$ soit subordonnée à $\mathcal{S}$, il faut que, pour toute $\mu \in M^1(G)$, on ait $\|\mu\|_{\mathcal{T}} \leq \|\mu\|_{\mathcal{S}}$, et il suffit que, pour toute $f \in L^1(G)$, on ait $\|f\|_{\mathcal{T}} \leq \|f\|_{\mathcal{S}}$.*

DÉMONSTRATION. — En effet, si cette dernière condition est remplie, et si $u \in P_{\mathcal{T}}(G)$, on a, pour $f \in L^1(G)$,

$$\left| \int f(x)\, u(x)\, dx \right| \leq \|f\|_{\mathcal{T}}\, u(e) \leq \|f\|_{\mathcal{S}}\, u(e);$$

par suite, u définit une forme linéaire continue et positive sur $L^1/N_{\mathcal{S}}$, laquelle se prolonge en une forme positive sur $C^*_{\mathcal{S}}(G)$ vérifiant (1.22); donc $u \in P_{\mathcal{S}}(G)$.

Réciproquement, puisque, d'après (1.15), $\|f\|_{\mathcal{S}}$ est la norme quotient de $\alpha_{\mathcal{S}}(f)$ dans $C^\star(G)/N'_{\mathcal{S}}$, il est clair que l'hypothèse $N'_{\mathcal{S}} \subset N'_{\mathcal{C}}$ entraîne qu'on a

$$\|f\|_{\mathcal{C}} \leqq \|f\|_{\mathcal{S}} \quad \text{pour toute } f \in L^1(G).$$

Par régularisation, nous allons étendre cette inégalité aux $\mu \in M^1(G)$. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble filtrant des voisinages de e et, pour chaque $V \in \mathcal{V}$, soit k_V une fonction $\geqq 0$, à support compact contenu dans V, et telle que $\|k_V\|_1 = 1$. Si l'on pose $f_V = \mu \star k_V$, on sait que les mesures $f_V(x)\,dx$ convergent vers μ selon $\mathcal{V}$ dans $M^1(G)$ muni de la topologie faible de dualité avec l'espace des fonctions continues bornées sur G. Soient $\pi \in \Sigma$, et ξ, η des vecteurs de $\mathcal{H}_\pi$. Puisque

$$\begin{aligned}(\pi(\mu)\xi \mid \eta) &= \int (\pi(x)\xi \mid \eta)\, d\mu(x) \\ &= \lim_{\mathcal{V}} \int (\pi(x)\xi \mid \eta) f_V(x)\, dx = \lim_{\mathcal{V}} (\pi(f_V)\xi \mid \eta),\end{aligned}$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ l'opérateur $\pi(\mu)$ est limite des $\pi(f_V)$ faiblement et même ultrafaiblement, car les $\pi(f_V)$ restent dans une boule fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$:

$$|||\pi(f_V)||| \leqq |||\pi(\mu)|||;$$

de telles boules étant faiblement fermées, on a même

$$|||\pi(\mu)||| = \sup_{V \in \mathcal{V}} |||\pi(f_V)|||.$$

Puisque $\mathcal{C}$ est subordonnée à $\mathcal{S}$, on a, pour toute $\pi \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}|||\pi(\mu)||| &= \sup_{V \in \mathcal{V}} |||\pi(f_V)||| \leqq \sup_{V \in \mathcal{V}} \|f_V\|_{\mathcal{C}} \\ &\leqq \sup_{V \in \mathcal{V}} \|f_V\|_{\mathcal{S}} = \sup_{\pi \in \mathcal{S}} \sup_{V \in \mathcal{V}} |||\pi(f_V)||| = \|\mu\|_{\mathcal{S}}\end{aligned}$$

donc

$$\|\mu\|_{\mathcal{C}} \leqq \|\mu\|_{\mathcal{S}}.$$

C. Q. F. D.

(1.24) Disons que deux parties $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ de Σ sont *coordonnées* (Fell dit weakly equivalent) si chacune est subordonnée à l'autre, autrement dit si $N'_{\mathcal{S}} = N'_{\mathcal{C}}$, ou encore si $P'_{\mathcal{S}} = P'_{\mathcal{C}}$. Pour cela, il suffit que, pour toute $f \in L^1(G)$, on ait $\|f\|_{\mathcal{C}} = \|f\|_{\mathcal{S}}$, et il faut que, pour toute $\mu \in M^1(G)$, on ait $\|\mu\|_{\mathcal{C}} = \|\mu\|_{\mathcal{S}}$.

Si c'est le cas, les algèbres $C^*_{\mathcal{S}}(G)$ et $C^*_{\mathcal{C}}(G)$ sont égales.

On sait (*cf.* R. Godement [15], p. 43; J. M. G. Fell [14], p. 375) que, pour toute $\mathcal{S} \subset \Sigma$, il existe un fermé et un seul du dual $\hat{G}$ de G qui soit coordonné à $\mathcal{S}$, « l'analyseur de $\mathcal{S}$ ». L'ensemble des $C^\star_{\mathcal{S}}$ peut être indexé par l'ensemble des fermés de $\hat{G}$; la relation de subordination dans Σ se traduit sur les analyseurs par la relation d'inclusion des parties fermées de $\hat{G}$. On a $C^\star(G) = C^\star_{\hat{G}}(G)$. Pour que $C^\star(G) = C^\star_{\rho}(G)$, i. e. pour qu'on ait la propriété (R) citée en (1.16), il faut et il suffit que toute représentation unitaire irréductible de G soit subordonnée à la représentation régulière gauche. Tel est le cas, par exemple, des groupes abéliens, et des groupes compacts.

(1.25) Pour terminer ces rappels, précisons, d'après O. Takenouchi [32] et W. F. Darsow [8], que, parmi les $u \in P(G)$, les fonctions u appartenant à $P_{\rho}(G)$ sont celles qui remplissent les conditions équivalentes qui suivent : u est limite, pour la convergence compacte sur G :

(i) de fonctions $f \star \tilde{f}$, où $f \in L(G)$;

(ii) de fonctions appartenant à $(P \cap L)(G)$;

(iii) de fonctions appartenant à $(P \cap L^2)(G)$. Dans ce cas particulier, ces assertions complètent (1.21).

CHAPITRE 2.

L'algèbre de Fourier-Stieltjes $B(G)$.

Propriétés générales.

(2.1) Proposition. — *Soit u une fonction sur G, et soit $\mathcal{S}$ une partie de Σ. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est combinaison linéaire, à coefficients complexes, de fonctions appartenant à $P_{\mathcal{S}}(G)$;*

(ii) *il existe $\pi \in \Sigma$, subordonnée à $\mathcal{S}$, et des vecteurs ξ, η dans $\mathcal{H}_\pi$ tels que $u(x) = (\pi(x)\xi \mid \eta)$;*

(iii) *la fonction u est continue bornée sur G, et*

$$\sup_{f \in L^1(G),\, \|f\|_{\mathcal{S}} \leq 1} \left| \int f(x)\, u(x)\, dx \right| < +\infty.$$

Démonstration. — (i) $\Rightarrow$ (ii). Puisque, d'après (1.21), (ii), toute $u \in P_{\mathcal{S}}(G)$ satisfait à (2.1), (ii), il suffit de voir que les fonctions remplissant (2.1), (ii) forment un espace vectoriel. Soient π_1 et π_2 des représentations subordonnées à $\mathcal{S}$, ξ_1 et η_1 des vecteurs de $\mathcal{H}_{\pi_1}$, ξ_2 et η_2 des vecteurs de $\mathcal{H}_{\pi_2}$, λ_1 et λ_2 des scalaires. Alors la représentation $\pi_1 \oplus \pi_2$, qui s'effectue dans $\mathcal{H}_{\pi_1} \oplus \mathcal{H}_{\pi_2}$, est encore subordonnée à $\mathcal{S}$, car $N'_{\pi_1} \cap N'_{\pi_2} = N'_{\pi_1 \oplus \pi_2}$; de plus,

$$\lambda_1(\pi_1(x)\xi_1 \mid \eta_1) + \lambda_2(\pi_2(x)\xi_2 \mid \eta_2) = (\pi_1 \oplus \pi_2(x)(\lambda_1\xi_1, \lambda_1\xi_2) \mid (\eta_1, \eta_2)).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Car, puisque π est subordonnée à $\mathcal{S}$, on a d'après (1.23),

$$\left| \int f(x)\, u(x)\, dx \right| = |(\pi(f)\xi \mid \eta)| \leq |||\pi(f)||| \, |\xi| . |\eta|$$
$$= \|f\|_\pi |\xi| . |\eta| \leq \|f\|_{\mathcal{S}} |\xi| . |\eta|.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Car (2.2) exprime que u définit une forme linéaire continue sur $C^\star_{\mathcal{S}}(G)$, donc une combinaison linéaire de formes positives, lesquelles sont données par (1.21), (iii).

(2.2) DÉFINITION. — *On notera $B_{\mathcal{S}}(G)$ l'ensemble des fonctions qui satisfont aux conditions équivalentes* (2.1). *On notera simplement $B(G)$ l'ensemble $B_\Sigma(G)$ des combinaisons linéaires de toutes les fonctions continues de type positif sur G,* autrement dit, l'ensemble de tous les coefficients $(\pi(x)\xi \mid \eta)$ des représentations unitaires continues de G. *Pour $u \in B_{\mathcal{S}}$, on pose*

$$\|u\| = \sup_{f \in L^1(G), \|f\|_{\mathcal{S}} \leq 1} \left| \int f(x)\, u(x)\, dx \right|.$$

[Cette quantité est indépendante de $\mathcal{S}$; *cf.* (2.6), 1°.]

En vertu de (2.1), (iii) et de (1.19), $B(G)$ *s'identifie au dual topologique de l'espace de Banach $C^\star(G)$* par la formule

$$(2.3) \qquad \langle f, u \rangle = \int f(x)\, u(x)\, dx, \qquad \text{où} \quad f \in L^1(G), \quad u \in B(G);$$

on a

$$(2.4) \quad \langle g, u \rangle = (\pi(g)\xi \mid \eta), \qquad \text{si } g \in C^\star(G) \quad \text{et} \quad \text{si } u(x) = (\pi(x)\xi \mid \eta).$$

Munissons $B(G)$ de la norme duale, i. e. posons, pour toute $u \in B(G)$,

$$(2.5) \qquad \|u\| = \sup_{f \in L^1(G), \|f\|_\Sigma \leq 1} \left| \int f(x)\, u(x)\, dx \right|.$$

EXEMPLE. — Si G est *abélien*, il résulte du théorème de Bochner que $B(G)$ est l'espace de Banach des transformées de Fourier u des mesures $\mu \in M^1(\hat{G})$, avec la norme $\|u\| = \|\mu\|_1$.

(2.6) REMARQUES.

1° Soit $\mathcal{S}$ une partie de Σ. Puisque, d'après (1.15), $C^\star_{\mathcal{S}}(G)$ s'identifie isométriquement à un quotient de l'espace de Banach $C^\star(G)$, son dual $B_{\mathcal{S}}(G)$ est un sous-espace vectoriel *fermé* de $B(G)$, et, si $u \in B_{\mathcal{S}}(G)$, les normes de u définies par (2.2) et (2.5) sont égales. En particulier, si $u \in B_\rho(G)$, on a

$$\| u \| = \sup_{f \in L(G), \|f\|_\rho \leqq 1} \left| \int f(x)\, u(x)\, dx \right|,$$

formule qui, dans certains cas, sera plus commode que (2.5).

2° Soit $u \in B_{\mathcal{S}} \subset B$. De (1.6) et (1.8), on déduit immédiatement que la forme linéaire définie par u sur $C^\star_{\mathcal{S}}$ est hermitienne si et seulement si $u = \tilde{u}$. D'autre part, en vertu de (1.2), *si* $u = \tilde{u}$, en considérant que $u \in B$, *on a une décomposition de Jordan de* u

$$(2.7) \qquad u = u^+ - u^- \quad (u^+ \in P,\ u^- \in P), \qquad \| u \| = u^+(e) + u^-(e).$$

Considérant maintenant que $u \in B_{\mathcal{S}}$, on a une décomposition de Jordan

$$u = u^+_{\mathcal{S}} - u^-_{\mathcal{S}} \quad (u^+_{\mathcal{S}} \in P_{\mathcal{S}},\ u^-_{\mathcal{S}} \in P_{\mathcal{S}}), \qquad \| u \| = u^+_{\mathcal{S}}(e) + u^-_{\mathcal{S}}(e).$$

Mais il n'y a pas lieu de faire cette distinction, car on a

$$u^+_{\mathcal{S}} = u^+ \qquad \text{et} \qquad u^-_{\mathcal{S}} = u^-,$$

sinon l'unicité de la décomposition (2.7) dans B serait infirmée. De même, si $u \in B_{\mathcal{S}}$, la valeur absolue $|u|$ de la fonctionnelle u sur $C^\star_{\mathcal{S}}$ est indépendante de $\mathcal{S}$, comme il résulte immédiatement de la caractérisation de $|u|$ citée en (1.2) d'après M. Tomita : $|u|$ est l'unique élément de $P(G)$ vérifiant $\| u \| = |u|(e)$ et, pour toute $f \in L^1(G)$, l'inégalité

$$(2.8) \qquad \left| \int f(x)\, u(x)\, dx \right|^2 \leqq \| u \| \int f \star f^\star(x)\, |u|(x)\, dx.$$

On voit donc que, *si u appartient à $B_{\mathcal{S}}(G)$, alors $|u|$ appartient à $P_{\mathcal{S}}(G)$, ainsi que u^+ et u^- si $u = \tilde{u}$.*

3° Soit ϖ la représentation de $C^\star(G)$ somme des π_u, où $u \in P(G)$, qui conduit à $[C^\star(G)]''$ comme on l'a décrit en (1.1). $[C^\star(G)]''$ est l'algèbre de von Neumann engendrée dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varpi)$ par les $\varpi(f)$, $f \in L^1(G)$, donc aussi par les $\varpi(x)$, où $x \in G$, car $\varpi(L^1)$ et $\varpi(G)$ ont même commutant dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varpi)$. Soit $\mu \in M^1(G)$, et soient f_V les régularisées de μ introduites dans la démonstration de (1.23). Puisque $\varpi(\mu)$ est limite ultrafaible des $\varpi(f_V)$, on voit que $\varpi(\mu)$ appartient à $[C^\star(G)]''$. De plus, $B(G) = [C^\star(G)]'$, et, de la formule

$$\langle \varpi(f_V), u \rangle = \int f_V(x)\, u(x)\, dx,$$

où $u \in B(G)$, on déduit, en passant à la limite que, dans la dualité entre $B(G) = [C^\star(G)]'$ et $[C^\star(G)]''$, on a la formule

$$(2.9) \qquad \langle \varpi(\mu), u \rangle = \int u(x)\, d\mu(x),$$

où $u \in B(G)$, $\mu \in M^1(G)$, et, en particulier,

$$(2.10) \qquad \langle \varpi(x), u \rangle = u(x),$$

où $u \in B(G)$, $x \in G$.

4° Enfin, soit $u \in B(G)$, et soit $u(x) = (\pi(x)\xi \mid \eta)$ une expression pour u du type (2.1), (ii). Dans la dualité entre $B(G)$ et $[C^\star(G)]''$, on a, si $g \in C^\star(G)$,

$$\langle \varpi(g), u \rangle = (\pi(g)\xi \mid \eta) = (\pi''(\varpi(g))\xi \mid \eta),$$

d'après (2.4) et (1.1), d'où l'on déduit plus généralement, en passant à la limite ultrafaible, la formule de dualité

$$(2.11) \qquad \langle T, u \rangle = (\pi''(T)\xi \mid \eta)$$

valable pour $T \in [C^\star(G)]''$, $u \in B(G)$, et $u(x) = (\pi(x)\xi \mid \eta)$.

(2.12) LEMME. — *Soit $u = \tilde{u} \in B(G)$. Alors les fonctions u^+, u^- et $|u|$ sont limites uniformes sur G de combinaisons linéaires de translatées à droite de la fonction u.*

DÉMONSTRATION. — Il suffit de la faire pour $|u|$. Soit $u = V|u|$ la décomposition polaire de u. Soit $\mathfrak{A}$ la sous-$\star$-algèbre de $[C^\star(G)]''$ engendrée par les $\varpi(x)$, $x \in G$. Étant partiellement isométrique, $V^\star$ est dans la boule unité de $[C^\star(G)]''$. D'après le théorème de densité de Kaplansky (*cf.* J. DIXMIER [9], p. 46), $V^\star$ est donc limite forte d'opérateurs $S_\alpha \in \mathfrak{A}$, avec $|||S_\alpha||| \leq 1$. Chaque fonction

$$x \to S_\alpha u(x) = \langle \varpi(x), S_\alpha u \rangle = \langle \varpi(x) S_\alpha, u \rangle$$

est une combinaison linéaire de translatées à droite de u. Soit $x \in G$. On a

$$\begin{aligned}
||u|(x) - S_\alpha u(x)|^2 &= |\langle \varpi(x), |u| \rangle - \langle \varpi(x) S_\alpha, u \rangle|^2 \\
&= |\langle \varpi(x), V^\star u \rangle - \langle \varpi(x) S_\alpha, u \rangle|^2 = |\langle \varpi(x)(V^\star - S_\alpha), u \rangle|^2 \\
&\leq \|u\| \langle (V^\star - S_\alpha)^\star \varpi(x^{-1}) \varpi(x)(V^\star - S_\alpha), |u| \rangle \\
&= \|u\| \langle (V^\star - S_\alpha)^\star (V^\star - S_\alpha), |u| \rangle.
\end{aligned}$$

On a appliqué (2.9), (1.3) et le fait que $|u(T^\star)| = |u(T)|$, puisque u est hermitienne. Or, les S_α tendant fortement vers $V^\star$, les $(V^\star - S_\alpha)^\star(V^\star - S_\alpha)$ tendent vers zéro faiblement, donc ultrafaiblement, car ils restent dans une boule de $[C^\star(G)]''$. Comme la topologie ultrafaible sur $[C^\star(G)]''$ n'est autre que $\sigma([C^\star(G)]'', B)$, l'inégalité précédente établit que $|u|$ est limite uniforme sur G des $S_\alpha u$.

Les lemmes suivants (2.13) et (2.14) donnent pour la norme d'une $u \in B_{\mathcal{S}}(G)$ deux expressions formellement différentes de (2.2).

(2.13) LEMME. — *Soit* $\mathcal{S} \subset \Sigma$, *et soit* $u \in B_{\mathcal{S}}(G)$. *Alors on a*

$$\| u \| = \sup \left| \sum c_n\, u(x_n) \right|,$$

où le sup *est étendu à tous les systèmes finis de* $x_n \in G$ *et de* $c_n \in \mathbf{C}$ *tels que* $\left\| \sum c_n\, \delta_{x_n} \right\|_{\mathcal{S}} \leq 1$.

DÉMONSTRATION. — Supposons d'abord $\mathcal{S} = \Sigma$. Soit $\mathfrak{A}$ la sous-$\star$-algèbre de $[C^\star(G)]''$ engendrée par $\varpi(G)$. D'après le théorème de densité de Kaplansky, la boule unité de $\mathfrak{A}$ est ultrafaiblement dense dans celle de $[C^\star(G)]''$, donc

$$\begin{aligned} \| u \| &= \sup_{T \in [C^\star(G)]'',\, \||T\|| \leq 1} |\langle T, u \rangle| \\ &= \sup_{S \in \mathfrak{A},\, \||S\|| \leq 1} |\langle S, u \rangle| = \sup_{\| \sum c_n \delta_{x_n} \|_{\Sigma} \leq 1} \left| \sum c_n\, u(x_n) \right|, \end{aligned}$$

d'après (2.10).

Supposons maintenant $\mathcal{S}$ quelconque. Soit G_d le groupe G rendu discret. Il apparaît sur (1.21), (i) que $P_{\mathcal{S}}(G) \subset P_{\mathcal{S}}(G_d)$. Ainsi

$$u \in B_{\mathcal{S}}(G_d) \subset B_{\Sigma}(G_d)$$

et la remarque (2.6), 1°, appliquée au groupe G_d, montre que

$$\sup_{\| \sum c_n \delta_{x_n} \|_{\mathcal{S}} \leq 1} \left| \sum c_n\, u(x_n) \right| = \sup_{\| \sum c_n \delta_{x_n} \|_{\Sigma} \leq 1} \left| \sum c_n\, u(x_n) \right|.$$

On est donc ramené au cas précédent. [*N. B.* — Dans la formule (2.2), on a, sous le signe sup, remplacé $L^1(G)$ par $L(G)$, ce qui se justifie immédiatement par des arguments de densité.]

(2.14) LEMME. — *Pour toute expression de* $u \in B(G)$ *sous la forme* (2.1), (ii), *on a* $\| u \| \leq |\xi| . |\eta|$. *Réciproquement, si* $u \in B_{\mathcal{S}}(G)$, *il existe une représentation* $\pi \in \Sigma$, *subordonnée à* $\mathcal{S}$, *et des vecteurs* ξ, η *de* $\mathcal{H}_\pi$, *tels que*

$$u(x) = (\pi(x)\, \xi \mid \eta) \qquad \text{et} \qquad \| u \| = |\xi| . |\eta|.$$

De façon précise, si $u = V | u |$ *est la décomposition polaire de* u, *avec* $V \in [C^\star(G)]''$, *il suffit de prendre* π *et* η *tels que* $|u|(x) = (\pi(x)\, \eta \mid \eta)$, *avec* η *totalisateur dans* $\mathcal{H}_\pi$, *et de poser* $\xi = \pi''(V)\, \eta$.

DÉMONSTRATION. — Si $u(x) = (\pi_1(x)\, \xi_1 \mid \eta_1)$, alors

$$\| u \| = \sup_{f \in L^1,\, \|f\|_\Sigma \leq 1} \left| \int f(x)\, u(x)\, dx \right| = \sup_{f \in L^1,\, \|f\|_\Sigma \leq 1} |(\pi_1(f)\, \xi_1 \mid \eta_1)| \leq |\xi_1| . |\eta_1|.$$

Montrons que, en adoptant la procédure de l'énoncé, on a l'inégalité en sens contraire. D'abord, puisque $|u| \in P_{\mathcal{S}}(G)$, d'après (1.21), (ii), π est subordonnée à $\mathcal{S}$. Ensuite on a $|\xi| \leqq |\eta|$, car V est partiellement isométrique, donc $|||\pi''(V)||| \leqq 1$; par conséquent,

$$\| u \| = \| \, |u| \, \| = |u|(e) = (\eta \mid \eta) = |\eta|^2 \geqq |\xi| . |\eta|.$$

Enfin, on a, d'après (2.11),

$$\begin{aligned} u(x) &= \langle \varpi(x), u \rangle = \langle \varpi(x), V|u| \rangle = \langle \varpi(x) V, |u| \rangle \\ &= (\pi''(\varpi(x) V) \eta \mid \eta) = (\pi(x) \pi''(V) \eta \mid \eta) = (\pi(x) \xi \mid \eta). \end{aligned}$$

(2.15). Remarques.

1° D'après (2.5) et l'inégalité $\|f\|_{\mathcal{S}} \leqq \|f\|_1$, il est clair que, pour toute $u \in B(G)$, on a

$$\| u \|_\infty \leqq \| u \|.$$

2° Soit $\mu \in M^1(G)$. Alors, pour toute $\mathcal{S} \subset \Sigma$, on a la formule

$$\| \mu \|_{\mathcal{S}} = \sup_{u \in B_{\mathcal{S}}, \| u \| \leqq 1} \left| \int u(x) \, d\mu(x) \right|.$$

Soit, en effet, ψ la forme linéaire continue sur $B_{\mathcal{S}}(G)$ définie par

$$u \to \int u(x) \, d\mu(x).$$

Soit, d'après (2.14),

$$u(x) = (\pi(x) \xi \mid \eta) \in B_{\mathcal{S}}(G),$$

où π est subordonnée à $\mathcal{S}$ et où $\| u \| = |\xi| . |\eta|$. D'après (1.23),

$$\left| \int u(x) \, d\mu(x) \right| = |(\pi(\mu) \xi \mid \eta)| \leqq |||\pi(\mu)||| . |\xi| . |\eta| \leqq \| \mu \|_{\mathcal{S}} \| u \|,$$

donc $\| \mu \|_{\mathcal{S}} \geqq |||\psi|||$. Réciproquement, soient $\pi \in \mathcal{S}$, $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ tels que $|\xi| \leqq 1$, $|\eta| \leqq 1$. Posons

$$v(x) = (\pi(x) \xi \mid \eta).$$

On a $v \in B_{\mathcal{S}}(G)$, et

$$|(\pi(\mu) \xi \mid \eta)| = \left| \int v(x) \, d\mu(x) \right| \leqq |||\psi||| . \| v \| \leqq |||\psi||| . |\xi| . |\eta| \leqq |||\psi|||.$$

Comme $\| \mu \|_{\mathcal{S}}$ est la borne supérieure de ces $|(\pi(\mu) \xi \mid \eta)|$, on a

$$\| \mu \|_{\mathcal{S}} \leqq |||\psi|||.$$

3° Si u appartient à $B(G)$ [resp. à $B_\rho(G)$], alors $\tilde{u}$, $\bar{u}$ et $\check{u}$ appartiennent à $B(G)$ [resp. à $B_\rho(G)$], car les opérations en question laissent stable $P(G)$ [resp. $P_\rho(G)$]. On a, de plus,

$$\| u \| = \| \tilde{u} \| = \| \bar{u} \| = \| \check{u} \|.$$

En effet, posons

$$u(x) = (\pi(x)\xi \mid \eta), \qquad \text{avec} \quad \| u \| = |\xi| . |\eta|.$$

On a

$$\tilde{u}(x) = (\pi(x)\eta \mid \xi) \qquad \text{et} \qquad \bar{u}(x) = (\eta \mid \pi(x)\xi).$$

Donc

$$\| \tilde{u} \| \leqq |\eta| . |\xi| = \| u \|,$$

et, de même,

$$\| \bar{u} \| \leqq \| u \|.$$

Comme $u = (\tilde{u})^{\sim} = (\bar{u})^{-}$, on a aussi

$$\| u \| \leqq \| \tilde{u} \| \qquad \text{et} \qquad \| u \| \leqq \| \bar{u} \|.$$

Les normes de u, $\tilde{u}$, $\bar{u}$ et $\check{u} = (\bar{u})^{\sim}$ sont donc égales.

(2.16) PROPOSITION. — *$B(G)$ est une algèbre de Banach commutative à élément unité pour le produit ordinaire des fonctions et pour la norme* (2.5), *et $B_\rho(G)$ en est un idéal fermé.*

DÉMONSTRATION. — Que B soit une algèbre résulte de ce que P est stable pour la multiplication des fonctions ([15], p. 57). B_ρ en est un idéal, parce que $PP_\rho \subset P_\rho$ d'après (1.25). Montrons l'inégalité de la norme. Soient $u \in B$ et $v \in B$. D'après (2.14), posons

$$u(x) = (\pi(x)\xi \mid \eta) \qquad \text{et} \qquad v(x) = (\pi'(x)\xi' \mid \eta'),$$

avec

$$\| u \| = |\xi| . |\eta| \qquad \text{et} \qquad \| v \| = |\xi'| . |\eta'|.$$

Soit $\pi \otimes \pi'$ le produit tensoriel des représentations π et π'. On a

$$u(x)\,v(x) = (\pi(x)\xi \mid \eta)\,(\pi'(x)\xi' \mid \eta') = (\pi \otimes \pi'(x)\,\xi \otimes \xi' \mid \eta \otimes \eta'),$$

donc

$$\| uv \| \leqq |\xi \otimes \xi'| . |\eta \otimes \eta'| = |\xi| . |\xi'| . |\eta| . |\eta'| = \| u \| . \| v \|.$$

(2.17) PROPOSITION. — *Soient $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ deux parties de Σ telles que $P_{\mathfrak{T}} P_{\mathfrak{S}} \subset P_{\mathfrak{S}}$. Pour toute $u \in B_{\mathfrak{S}}$ et toute $\mu \in M^1$, la mesure bornée $u.\mu$ vérifie l'inégalité :*

$$u\mu \|_{\mathfrak{T}} \leqq \| u \| . \| \mu \|_{\mathfrak{S}}.$$

Démonstration. — On a $B_{\mathfrak{T}} B_{\mathfrak{S}} \subset B_{\mathfrak{S}}$, donc, d'après la remarque (2.15), 2°,

$$\| u\mu \|_{\mathfrak{T}} = \sup_{\nu \in B_{\mathfrak{T}}, \|\nu\| \leq 1} \left| \int u(x)\, v(x)\, d\mu(x) \right|$$
$$\leq \sup_{\nu \in B_{\mathfrak{T}}, \|\nu\| \leq 1} \| uv \| . \| \mu \|_{\mathfrak{S}} \leq \| u \| . \| \mu \|_{\mathfrak{S}},$$

en vertu de l'inégalité

$$\| uv \| \leq \| u \| . \| v \|.$$

Cas particuliers :

1° Si $u \in B$ et $\mu \in M^1$, on a

$$\| u\mu \|_{\Sigma} \leq \| u \| . \| \mu \|_{\Sigma};$$

2° Si $u \in B_\rho$ et $\mu \in M^1$, on a plus précisément :

$$\| u\mu \|_{\Sigma} \leq \| u \| . \| \mu \|_{\rho}.$$

(2.18) Proposition. — *Soit* $\mathfrak{S} \subset \Sigma$, *et soit* $u \in B_{\mathfrak{S}}(G)$. *Alors :*

1° *Si* $\mu \in M^1(G)$, *on a*

$$\mu \star u \in B_{\mathfrak{S}}(G) \qquad \textit{et} \qquad \| \mu \star u \| \leq \| \mu \|_{\mathfrak{S}} \| u \|;$$

2° *Si* $\Delta^{-1}\mu \in M^1(G)$, *on a*

$$u \star \mu \in B_{\mathfrak{S}}(G) \qquad \textit{et} \qquad \| u \star \mu \| \leq \| \Delta^{-1}\mu \|_{\mathfrak{S}} \| u \|.$$

Démonstration. — D'après (2.14), posons

$$u(x) = (\pi(x)\xi \mid \eta),$$

où π est subordonnée à $\mathfrak{S}$, et où $\| u \| = |\xi| . |\eta|$.

1° $$\mu \star u(x) = \int u(t^{-1}x)\, d\mu(t) = \int (\pi(t^{-1}x)\xi \mid \eta)\, d\mu(t)$$
$$= \int (\pi(x)\xi \mid \pi(t)\eta)\, d\mu(t) = (\pi(x)\xi \mid \pi(\mu)\eta).$$

Donc, d'après (2.1), (ii), $\mu \star u \in B_{\mathfrak{S}}(G)$, et

$$\| \mu \star u \| \leq |\xi| . \||\pi(\mu)\|| . |\eta| \leq \| u \| . \| \mu \|_{\mathfrak{S}}.$$

2° $$u \star \mu(x) = \int u(xt^{-1})\, \Delta^{-1}(t)\, d\mu(t) = \int (\pi(xt^{-1})\xi \mid \eta)\, \Delta^{-1}(t)\, d\mu(t)$$
$$= (\pi(x)[\pi(\Delta^{-1}\mu)]^\star \xi \mid \eta).$$

Donc, d'après (2.1), (ii), $u \star \mu \in B_{\mathfrak{S}}(G)$, et

$$\| u \star \mu \| \leq \||\pi(\Delta^{-1}\mu)\|| \, |\xi| . |\eta| \leq \| \Delta^{-1}\mu \|_{\mathfrak{S}} \| u \|.$$

(2.19) Corollaire. — *Soit* $u \in B_{\mathcal{S}}(G)$, *et soient* $a \in G$, $b \in G$. *Alors*

$$ {}_a u \in B_{\mathcal{S}}(G) \qquad \text{et} \qquad u_b \in B_{\mathcal{S}}(G). $$

De plus

$$ \| {}_a u \| = \| u \| = \| u_b \|. $$

Eu égard aux formules (1.7), il suffit d'appliquer (2.18), 1°, avec $\mu = \delta_{a^{-1}}$ et (2.18), 2°, avec $\mu = \Delta \delta_{b^{-1}}$.

Propriétés fonctorielles.

Soient G_1 et G deux groupes localement compacts, et soit σ une représentation de G_1 dans G, c'est-à-dire une application continue de G_1 dans G vérifiant l'identité $\sigma(xy) \equiv \sigma(x)\sigma(y)$. Soit Σ (resp. Σ_1) l'ensemble des classes de représentations unitaires continues de G (resp. G_1). Si $\pi \in \Sigma$, $\pi \circ \sigma$ est une représentation unitaire continue de G_1 dans $\mathcal{H}_\pi$. Si $\mathcal{S} \subset \Sigma$, on notera $\mathcal{S} \circ \sigma$ la partie de Σ_1 formée des $\pi \circ \sigma$, où $\pi \in \mathcal{S}$. Si $u(x) = (\pi(x)\xi \mid \xi)$ est un élément de $P(G)$ associé à π, alors

$$ u \circ \sigma(y) = (\pi \circ \sigma(y) \xi \mid \xi) $$

est évidemment une fonction continue de type positif sur G_1 associée à $\pi \circ \sigma$.

Si f est une fonction sur G, la fonction $f \circ \sigma$ sur G_1 sera notée $j(f)$.

(2.20) Théorème.

1° *L'application* $j : u \to u \circ \sigma$ *est un homomorphisme, diminuant les normes, de l'algèbre de Banach* $B(G)$ *dans l'algèbre de Banach* $B(G_1)$ *qui, pour tout* $\mathcal{S} \subset \Sigma$, *applique* $P_{\mathcal{S}}(G)$ *dans* $P_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1)$ *et* $B_{\mathcal{S}}(G)$ *dans* $B_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1)$.

2° *Supposons que* $\sigma(G_1)$ *est dense dans* G. *Alors* j *est isométrique, et*

$$ j(B(G)) = B(G_1) \cap j(\mathcal{C}(G)) = B_{\Sigma \circ \sigma}(G_1) \cap j(\mathcal{C}(G)). \tag{2.21} $$

De plus, si $u = \tilde{u} \in B(G)$, *on a*

$$ (u \circ \sigma)^+ = u^+ \circ \sigma \qquad \text{et} \qquad (u \circ \sigma)^- = u^- \circ \sigma. $$

3° *Supposons* σ *surjective et telle que, pour tout compact* K *de* G, *il existe un compact* K_1 *de* G_1 *avec* $\sigma(K_1) = K$. *Alors, pour toute* $\mathcal{S} \subset \Sigma$, *on a*

$$ j(B_{\mathcal{S}}(G)) = B_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1) \cap j(\mathcal{C}(G)). \tag{2.22} $$

Démonstration.

1° Soit $u \in P_{\mathcal{S}}(G)$. On sait que $u \circ \sigma \in P(G_1)$. En utilisant (1.21), (i), montrons plus précisément que $u \circ \sigma \in P_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1)$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit K_1 un compact de G_1. Puisque $K = \sigma(K_1)$ est compact dans G, il existe $u_1, \ldots, u_p$ appartenant à $P(G)$ et associées à des représentations $\pi_1, \ldots, \pi_p$ dans $\mathcal{S}$, telles que

$$\left| u(x) - \sum_{i=1}^{p} u_i(x) \right| \leqq \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in K,$$

donc telles que, pour tout $y \in K_1$,

$$\left| u \circ \sigma(y) - \sum_{i=1}^{p} u_i \circ \sigma(y) \right| \leqq \varepsilon.$$

Comme les $u_i \circ \sigma$ sont associées aux $\pi_i \circ \sigma$, on a bien $u \circ \sigma \in P_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1)$.

Par linéarité, on obtient aussitôt que j applique $B_{\mathcal{S}}(G)$ dans $B_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1)$, et donc $B(G)$ dans $B(G_1)$, même plus précisément dans $B_{\Sigma \circ \sigma}(G_1)$; c'est évidemment un homomorphisme de l'algèbre $B(G)$ dans l'algèbre $B(G_1)$. D'après (2.14), si $u \in B(G)$, posons

$$u(x) = (\pi(x)\xi \mid \eta), \qquad \text{avec} \quad \| u \| = |\xi| . |\eta|;$$

alors

$$u \circ \sigma(y) = (\pi \circ \sigma(y)\xi \mid \eta), \qquad \text{donc} \quad \| u \circ \sigma \| \leqq |\xi| . |\eta|,$$

ainsi j diminue les normes.

2° et 3° Supposons désormais que $\sigma(G_1)$ est dense dans G. Soit $\mathcal{A}_1$ la sous-$\star$-algèbre de $[C^\star(G)]''$ formée des combinaisons linéaires des $\varpi(x)$, où $x \in \sigma(G_1)$, et où ϖ est la représentation de G somme des représentations définies par tous les éléments de $P(G)$. Puisque l'application $x \to \varpi(x)$ est continue de G dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varpi)$ muni de la topologie forte, $\mathcal{A}_1$ est fortement dense dans $[C^\star(G)]''$, donc le théorème de densité de Kaplansky assure que la boule unité de $\mathcal{A}_1$ est ultrafaiblement dense dans celle de $[C^\star(G)]''$. Soit

$$u \in B(G) = B_{\{\varpi\}}(G).$$

Alors, d'après le 1°, on a

$$u \circ \sigma \in B_{\{\varpi \circ \sigma\}}(G_1),$$

et donc, d'après (2.13),

$$\begin{aligned} \| u \circ \sigma \| &= \sup_{y_n \in G_1, \left\| \sum c_n \varpi \circ \sigma(y_n) \right\| \leqq 1} \left| \sum c_n u \circ \sigma(y_n) \right| \\ &= \sup_{x_n \in \sigma(G_1), \left\| \sum c_n \varpi(x_n) \right\| \leqq 1} \left| \sum c_n u(x_n) \right| \\ &= \sup_{S \in \mathcal{A}_1, \|S\| \leqq 1} |\langle S, u \rangle| = \| u \|. \end{aligned}$$

Ainsi est établi que j est isométrique.

Soit $u = \tilde{u} \in B(G)$; alors

$$u \circ \sigma = (u \circ \sigma)^{\sim} = u^{+} \circ \sigma - u^{-} \circ \sigma.$$

Puisque j est isométrique, on a, d'autre part,

$$\| u \circ \sigma \| = \| u \| = u^{+}(e) + u^{-}(e) = u^{+} \circ \sigma(e) + u^{-} \circ \sigma(e),$$

ce qui, en vertu de l'unicité dans (2.7), prouve que

$$(u \circ \sigma)^{+} = u^{+} \circ \sigma \qquad \text{et} \qquad (u \circ \sigma)^{-} = u^{-} \circ \sigma.$$

Montrons enfin (2.21) [resp. (2.22)]. Les inclusions

$$j(B(G)) \subset B_{\Sigma \circ \sigma}(G_1) \cap j(\mathcal{C}(G)) \subset B(G_1) \cap j(\mathcal{C}(G))$$
$$[(\text{resp. } j(B_{\mathcal{S}}(G)) \subset B_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1) \cap j(\mathcal{C}(G))]$$

ont été obtenues au 1°.

Soit $v = u \circ \sigma$, où $u \in \mathcal{C}(G)$ et où $v \in B(G_1)$ [resp. où $v \in B_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1)$]; il s'agit de montrer que $u \in B(G)$ [resp. $u \in B_{\mathcal{S}}(G)$], et pour cela on peut évidemment supposer $v = \tilde{v}$. D'après le lemme (2.12), v^{+} et v^{-} sont limites uniformes sur G_1 de combinaisons linéaires de translatées à droite de $v = u \circ \sigma$. Ainsi, pour chaque entier $q > 0$, il existe des $a_n \in G_1$ et des $c_n \in \mathbf{C}$ en nombre fini, tels que, pour tout $y \in G_1$, on ait

$$\left| v^{+}(y) - \sum c_n (u \circ \sigma)_{a_n}(y) \right| \leq \frac{1}{q}.$$

En posant $h_q = \sum c_n u_{\sigma a_n}$, et en remarquant que

$$\sum c_n (u \circ \sigma)_{a_n} = \sum c_n u_{\sigma a_n} \circ \sigma = \left(\sum c_n u_{\sigma a_n} \right) \circ \sigma = h_q \circ \sigma,$$

on voit que, pour tout entier $q > 0$, il existe une combinaison linéaire h_q de translatées de u (par conséquent une fonction *continue* sur G), telle que

$$(2.23) \qquad | v^{+}(y) - h_q \circ \sigma(y) | \leq \frac{1}{q} \quad \text{pour tout } y \in G_1.$$

De (2.23) résulte immédiatement que la suite de fonctions h_q converge uniformément sur $\sigma(G_1)$, donc, par densité, sur G, vers une fonction p^{+} *continue sur* G, qui vérifie évidemment la relation $v^{+} = p^{+} \circ \sigma$, d'après (2.23). De plus, puisque v^{+} est de type positif sur G_1, p^{+} est de type positif sur $\sigma(G_1)$, donc sur G par continuité. Ainsi $v^{+} = p^{+} \circ \sigma$, où $p^{+} \in P(G)$. De même, il existe $p^{-} \in P(G)$ telle que $v^{-} = p^{-} \circ \sigma$. Alors, puisque

$$u \circ \sigma = v = v^{+} - v^{-} = p^{+} \circ \sigma - p^{-} \circ \sigma = (p^{+} - p^{-}) \circ \sigma,$$

on a

$$u = p^+ - p^-, \qquad \text{donc} \quad u \in B(G),$$

ce qui achève de montrer (2.21).

Supposons maintenant que σ est surjective et remplit l'hypothèse supplémentaire du 3° concernant les parties compactes. Si $v \in B_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1)$, alors v^+ et v^- sont dans $P_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1)$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit K un compact de G; soit K_1 un compact de G_1 tel que $\sigma(K_1) = K$. Puisque v^+ et v^- sont approchées uniformément sur K_1, à moins de ε, par des sommes de fonctions continues de type positif associées à des $\pi \circ \sigma$ avec $\pi \in \mathcal{S}$, de même p^+ et p^- sont approchées uniformément sur K, à moins de ε, par des sommes de fonctions continues de type positif associées à ces π. Donc p^+ et p^- sont dans $P_{\mathcal{S}}(G)$, d'après (1.21), (i). Par suite, $u = p^+ - p^- \in B_{\mathcal{S}}(G)$, et l'on a (2.22).

(2.24) Corollaire 1. — *Soit G un groupe localement compact, et soit G_d le même groupe rendu discret. Soit u une fonction sur G. Pour qu'on ait $u \in B(G)$, il faut et il suffit que u soit continue sur G et qu'on ait $u \in B(G_d)$. Si c'est le cas, les normes de u dans $B(G)$ et $B(G_d)$ sont les mêmes.*

Ce corollaire étend au cas d'un groupe localement compact quelconque une caractérisation des transformées de Fourier-Stieltjes due à Bochner [3] et Schœnberg [28] pour $G = \mathbf{R}$, et à Eberlein [11] pour G abélien (*cf.* W. Rudin [26], p. 32).

(2.25) Corollaire 2. — *Soit G un groupe localement compact. Alors la boule unité de $B(G)$ est fermée dans l'espace $\mathcal{C}(G)$ de toutes les fonctions continues sur G muni de la convergence simple.*

Démonstration. — Si $v \in B(G)$ vérifie $\| v \| \leq 1$, on a, d'après (2.13),

$$\left| \sum_{n=1}^{p} c_n \, v(x_n) \right| \leq \left\| \sum_{n=1}^{p} c_n \, \delta_{x_n} \right\|_{\Sigma}$$

pour tout système fini de $x_n \in G$, $c_n \in \mathbf{C}$. Soit $u \in \mathcal{C}(G)$ limite simple de telles fonctions v; les mêmes inégalités ont lieu pour u, par passage à la limite avec c_n et x_n fixés, d'où suit, d'après (2.1), que u appartient à $B(G_d)$. Donc $u \in B(G)$, d'après (2.24). Enfin, ces mêmes inégalités prouvent que $\| u \| \leq 1$.

(2.26) Corollaire 3. — *Soit G_1 un groupe localement compact, et soit H un sous-groupe distingué fermé de G_1. Soit σ l'homomorphisme canonique de G_1 sur $G = G_1/H$. Soit $\mathcal{S} \subset \Sigma$. Alors l'application $u \to u \circ \sigma$ est une isométrie de $B(G)$ sur le sous-espace de $B(G_1)$ formé des fonctions de $B(G_1)$ qui sont constantes sur les classes de G_1 modulo H, et l'image de $B_{\mathcal{S}}(G)$ par cette application est $B_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1)$.*

En effet, σ remplit les hypothèses de (2.20), 3°; d'autre part, pour qu'une fonction u soit continue sur G, il faut et il suffit que $u \circ \sigma$ soit continue sur G_1; enfin, il est clair que les fonctions de $B_{\mathcal{S} \circ \sigma}(G_1)$ sont constantes sur les classes de G_1 modulo H, donc appartiennent à $j(\mathcal{C}(G))$.

On observera que le corollaire 3 pourrait s'obtenir directement par un simple raisonnement de dualité des espaces de Banach fondé sur l'existence d'un homomorphisme canonique $C^\star(G_1) \to C^\star(G_1/H)$, qu'on construit comme suit. L'application $f_1 \to f$ définie par la formule

$$f(\sigma y) = \int_H f_1(ys)\, ds$$

est, comme on sait, un $\bigstar$-homomorphisme surjectif ψ de $L^1(G_1)$ sur $L^1(G)$. Soient

$$\pi \in \Sigma, \qquad \xi \in \mathcal{H}_\pi, \qquad \eta \in \mathcal{H}_\pi, \qquad f_1 \in L^1(G_1);$$

alors, puisque $\sigma(s) = e$ pour $s \in H$,

$$\begin{aligned}
(\pi \circ \sigma(f_1)\xi \mid \eta) &= \int_{G_1} (\pi \circ \sigma(y)\xi \mid \eta) f_1(y)\, dy \\
&= \int_{G_1/H} d(\sigma y) \int_H (\pi \circ \sigma(ys)\xi \mid \eta) f_1(ys)\, ds \\
&= \int_{G_1/H} (\pi \circ \sigma(y)\xi \mid \eta)\, d(\sigma y) \int_H f_1(ys)\, ds \\
&= \int_G (\pi(x)\xi \mid \eta) f(x)\, dx = (\pi(f)\xi \mid \eta),
\end{aligned}$$

si les mesures de Haar sont harmonisées, d'où l'on déduit la formule

$$\pi \circ \sigma(f_1) = \pi(f).$$

Elle montre aussitôt que ψ diminue les normes induites sur $L^1(G_1)$ et $L^1(G)$ par les $C^\star$-algèbres de groupe correspondantes, donc se prolonge en un $\bigstar$-homomorphisme de $C^\star(G_1)$ sur $C^\star(G)$, dont l'application transposée, de $B(G)$ dans $B(G_1)$, est précisément j, comme le montre la formule

$$\int_{G_1} f_1(y)(u \circ \sigma)(y)\, dy = \int_{G_1/H} d(\sigma y) \int_H f_1(ys)(u \circ \sigma)(ys)\, ds = \int_G u(x) f(x)\, dx.$$

(2.27) Corollaire 4. — *Soit G un groupe localement compact, soit $\overline{G}$ le groupe associé à G par compactification presque-périodique, et soit σ la représentation canonique de G dans $\overline{G}$. Soit $PP(G)$ l'ensemble des fonctions presque-périodiques sur G. Alors $u \to u \circ \sigma$ est une isométrie de $B(\overline{G})$ sur $B(G) \cap PP(G)$.*

Puisque $\sigma(G)$ est dense dans $\overline{G}$, on applique (2.20), en remarquant que, dans (2.21), on a

$$j(\mathcal{C}(\overline{G})) = PP(G).$$

Si G est abélien, notons que la surjectivité dans (2.27) redonne le fait connu que, si une mesure bornée a une transformée de Fourier presque-périodique, c'est une mesure discrète.

Contre-exemple. — On sait [*cf.*, par exemple, C. S. Herz [19], théorème (5.2)] que, pour les groupes *abéliens*, les propriétés fonctorielles de l'application $G \to B(G)$ sont bonnes sans réserve [alors que, dans (2.20), 2° et 3°, nous avons fait des hypothèses sur σ]. Par exemple, si H est un sous-groupe fermé d'un groupe G abélien, la restriction $u \to u \mid H$ applique $B(G)$ *sur* $B(H)$, et toute fonction continue de type positif sur H se prolonge en une fonction continue de type positif sur G. En général, il n'en est plus ainsi dans le cas non abélien; ceci résulte de l'exemple suivant, que m'a communiqué oralement A. Douady.

Soit H un sous-groupe abélien distingué fermé d'un groupe localement compact G. Soit χ un caractère continu sur H. Supposons que, pour tout voisinage V de e dans G, il existe $s \in V$ et $h \in H$ tels que $\chi(shs^{-1}) \neq \chi(h)$. Alors χ n'est pas prolongeable en une fonction continue de type positif sur G.

Démontrons-le par l'absurde. Si χ est prolongeable, il existe une représentation unitaire continue π de G dans un espace hilbertien $\mathcal{H}$ et un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ tels que

$$(2.28) \qquad (\pi(h)\xi \mid \xi) = \chi(h) \quad \text{pour tout } h \in H.$$

Le vecteur ξ est de longueur 1. Ceci entraîne que

$$|(\pi(h)\xi \mid \xi)| = |\chi(h)| = 1 = |\xi|.|\pi(h)\xi|,$$

donc

$$\pi(h)\xi = \chi(h)\xi \quad \text{pour tout } h \in H.$$

Si l'on pose, pour tout $x \in G$, $\xi_x = \pi(x^{-1})\xi$, on a, pour tout $h \in H$,

$$\pi(h)\xi_x = \pi(x^{-1})\pi(xhx^{-1}).\xi = \pi(x^{-1}).\chi(xhx^{-1})\xi = \chi(xhx^{-1})\pi(x^{-1})\xi,$$

soit

$$(2.29) \qquad \pi(h)\xi_x = \chi(xhx^{-1})\xi_x \quad \text{pour tout } x \in G \text{ et tout } h \in H.$$

Or, en vertu de la continuité de l'application $x \to \pi(x^{-1})\xi = \xi_x$ de G dans $\mathcal{H}$, il existe un voisinage V de e dans G tel que, pour tout $x \in V$, $\|\xi_x - \xi\| < \sqrt{2}$. D'après l'hypothèse, soient $s \in V$ et $h \in H$ tels que $\chi(shs^{-1}) \neq \chi(h)$. Il résulte de (2.29) que les vecteurs (de longueur 1) ξ et ξ_s

sont orthogonaux dans $\mathcal{H}$, comme vecteurs propres, à valeurs propres distinctes, d'un même opérateur unitaire $\pi(h)$. Donc $\|\xi_s - \xi\| = \sqrt{2}$, ce qui est contradictoire.

Voici un exemple concret d'une telle situation. Prenons pour G le groupe des applications $t \to kt + h$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, où k est réel > 0 et h réel quelconque. Prenons pour H le sous-groupe distingué fermé des translations $t \to t + h$, que nous identifions au groupe additif de $\mathbf{R}$. Alors, sur H, *aucune* exponentielle $h \to \exp(i\chi h)$, où χ est réel $\neq 0$, ne se laisse prolonger en une fonction continue de type positif sur G. Un calcul facile montre en effet que l'hypothèse du contre-exemple est satisfaite.

Par contre, nous allons voir que, sous certaines hypothèses, le problème reçoit une réponse affirmative. Soit G_1 un sous-groupe *ouvert* d'un groupe localement compact G, muni de la mesure de Haar à gauche induite par celle qui a été choisie sur G. Soit ρ (resp. ρ_1) la représentation régulière gauche de G (resp. G_1). Si f est une fonction sur G_1, on notera $\mathring{f}$ la fonction définie sur G, égale à f sur G_1 et nulle dans le complémentaire de G_1.

(2.30) LEMME. — *Soit G_1 un sous-groupe ouvert non compact de G. Soit K un compact de G_1. Soit $f \in L(G)$. Alors il existe une fonction à support compact $g \in L^2(G_1)$ [resp. $h \in L^2(G_1)$] telle que, pour tout $x \in K$, on ait*

$$f \star_G \tilde{f}(x) = g \star_{G_1} \tilde{g}(x) \qquad [\textit{resp.}\ f \star_G f^\star(x) = h \star_{G_1} h^\star(x)].$$

La seconde assertion du lemme se déduit de la première en utilisant la formule

$$f \star f^\star(x) = \Delta^{-\frac{1}{2}}(x).\left(\Delta^{\frac{1}{2}} f\right) \star \left(\Delta^{\frac{1}{2}} f\right)^{\sim}(x).$$

On trouvera la démonstration de la première implicitement dans O. TAKENOUCHI ([32], p. 162-163).

(2.31) PROPOSITION. — *Soit G_1 un sous-groupe ouvert d'un groupe localement compact G. Alors :*

1° *pour toute $u \in (P \cap L)(G_1)$, on a $\mathring{u} \in (P \cap L)(G)$;*

2° *l'application $f \to \mathring{f}$ de $L(G_1)$ dans $L(G)$ se prolonge de manière unique en un $\star$-homomorphisme isométrique de l'algèbre $C^\star_{\rho_1}(G_1)$ dans l'algèbre $C^\star_\rho(G)$, et l'application de restriction $v \to v \mid G_1$, qui en est la transposée, est un homomorphisme surjectif de l'algèbre de Banach $B_\rho(G)$ sur l'algèbre de Banach $B_{\rho_1}(G_1)$, qui applique $P_\rho(G)$ sur $P_{\rho_1}(G_1)$.*

DÉMONSTRATION.

1° Si G_1 est compact, u est limite uniforme sur G_1 de fonctions u_α de la forme $k \star_{G_1} \tilde{k}$, avec $k \in L(G_1)$, donc $\mathring{u}$ est limite uniforme sur G

des fonctions $\mathring{u}_\alpha$ qui sont de la forme $(k \star_{G_1} \tilde{k})^\circ = \mathring{k} \star_G \mathring{k}^\sim$, appartiennent donc à $P(G)$, donc $\mathring{u}$ appartient à $P(G)$.

Si G_1 n'est pas compact, soit K le support de u. Pour $f \in L(G)$,

$$\int_G f \star f^\star(x)\, \mathring{u}(x)\, dx = \int_K f \star f^\star(x)\, u(x)\, dx = \int_{G_1} h \star h^\star(x)\, u(x)\, dx \geq 0,$$

où $h \in L^2(G_1)$ est déduite de f et K selon le lemme (2.30). Donc $\mathring{u} \in P(G)$.

2° Montrons d'abord l'inclusion $P_\rho(G) \mid G_1 \subset P_{\rho_1}(G_1)$. Si G_1 est compact, elle est évidente, car $P_{\rho_1}(G_1) = P(G_1)$. Supposons G_1 non compact, et soit $v \in P_\rho(G)$. D'après (1.25), v est limite uniforme sur tout compact de G de fonctions $f \star_G \tilde{f}$, où $f \in L(G)$. Donc, d'après le lemme (2.30), $v \mid G_1$ est limite uniforme sur tout compact de G_1 de fonctions $g \star_{G_1} \tilde{g}$, où $g \in L(G_1)$. Par suite,

$$v \mid G_1 \in P_{\rho_1}(G_1).$$

$f \to \mathring{f}$ est évidemment un $\star$-homomorphisme injectif de l'algèbre de convolution $L(G_1)$ dans l'algèbre de convolution $L(G)$. De plus,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\rho_1} &= \sup_{g \in L(G_1),\, \|g\|_2 \leq 1} \|f \star g\|_2 \\ &= \sup_{g \in L(G_1),\, \|\mathring{g}\|_2 \leq 1} \|\mathring{f} \star \mathring{g}\|_2 \leq \sup_{g \in L(G),\, \|g\|_2 \leq 1} \|\mathring{f} \star g\|_2 = \|\mathring{f}\|_\rho \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \|\mathring{f}\|_\rho &= \sup_{v \in B_\rho(G),\, \|v\| \leq 1} \left| \int \mathring{f}(x)\, v(x)\, dx \right| = \sup_{v \in B_\rho(G),\, \|v\| \leq 1} \left| \int_{G_1} f(x)\, (v \mid G_1)(x)\, dx \right| \\ &\leq \sup_{u \in B_{\rho_1}(G_1),\, \|u\| \leq 1} \left| \int_{G_1} f(x)\, u(x)\, dx \right| = \|f\|_{\rho_1}, \end{aligned}$$

car, par linéarité, l'inclusion ci-dessus montre que $B_\rho(G) \mid G_1 \subset B_{\rho_1}(G_1)$ et, de plus, on sait que $\|v \mid G_1\| \leq \|v\|$, d'après (2.20), 1°. On a donc l'égalité des normes $\|\mathring{f}\|_\rho = \|f\|_{\rho_1}$, d'où, par prolongement, l'isométrie annoncée de $C^\star_{\rho_1}(G_1)$ dans $C^\star_\rho(G)$. Puisque, pour toute $v \in B_\rho(G)$ et toute $f \in L(G)$,

$$\int_G f(x)\, v(x)\, dx = \int_{G_1} f(x)\, (v \mid G_1)(x)\, dx,$$

la transposée de cette isométrie n'est autre que l'application $v \to v \mid G_1$, laquelle envoie donc $B_\rho(G)$ *sur* $B_{\rho_1}(G_1)$.

Enfin, soit $u \in P_{\rho_1}(G_1)$. Considérant u comme forme linéaire sur l'espace de Banach réel des éléments hermitiens de $C^\star_{\rho_1}(G_1)$, on voit, d'après le théorème de Hahn-Banach, que u se prolonge en une fonction $v = \tilde{v} \in B_\rho(G)$

telle que $\| v \| = \| u \|$. Soit alors $v = v^+ - v^-$ la décomposition de Jordan de v. On a

$$v^+(e) - v^-(e) = u(e) = \| u \| = \| v \| = v^+(e) + v^-(e),$$

donc $v^- = 0$. Par suite, $v \in P_\rho(G)$. Donc

$$P_\rho(G) \mid G_1 = P_{\rho_1}(G_1).$$

(2.32) REMARQUES.

1° La proposition (2.31) sera précisée et renforcée en (3.20).

2° Soit G_1 un sous-groupe fermé d'un groupe *compact* G. Alors $v \to v \mid G_1$ applique $P(G)$ *sur* $P(G_1)$. En effet (*cf.* [34], p. 83), on sait que toute représentation unitaire irréductible de G_1 est équivalente à une représentation contenue dans la restriction à G_1 d'une représentation irréductible de G. Par conséquent, toute fonction élémentaire appartenant à $P(G_1)$ se prolonge en une fonction (même élémentaire) appartenant à $P(G)$. Maintenant, si $u \in P(G)$, on a

$$u(x) = \sum_n \lambda_n u_n(x), \qquad \text{où} \quad \lambda_n \geqq 0, \qquad \sum_n \lambda_n < +\infty,$$

et où les u_n sont élémentaires sur G_1 (*cf.* [15], p. 52). Pour chaque n, soit $v_n \in P(G)$ un prolongement de u_n. Il est clair que $v = \sum_n \lambda_n v_n$ appartient à $P(G)$ et prolonge u.

CHAPITRE 3.

L'ALGÈBRE DE FOURIER $A(G)$.

Définition et premières propriétés.

(3.1) LEMME. — *Soient f et g deux fonctions appartenant à $L^2(G)$. Alors la fonction $f \star \tilde{g}$ appartient à $B_\rho(G)$, et*

$$\| f \star \tilde{g} \| \leqq \| f \|_2 \, \| g \|_2.$$

DÉMONSTRATION. — Puisque

$$f \star \tilde{g}(x) = \int f(xt)\, \overline{g(t)}\, dt = (\rho(x^{-1}) f \mid g),$$

le lemme est conséquence de (2.15), 3°; (2.2); (2.1), (ii) et (2.14).

(3.2) LEMME. — *Soit K une partie compacte, et soit U une partie ouverte de G telles que $U \supset K$. Alors il existe une combinaison linéaire u de fonctions appartenant à $P \cap L(G)$ telle que*

$$0 \leqq u \leqq 1, \qquad u(x) = 1 \quad si\ x \in K, \qquad u(x) = 0 \quad si\ x \notin U.$$

DÉMONSTRATION. — K étant compact, il existe dans G un voisinage symétrique compact V de e tel que $KV^2 \subset U$. Soit f la fonction caractéristique de KV, soit g la fonction caractéristique de V. Posons

$$u(x) = \frac{1}{\operatorname{mes}(V)} f \star \tilde{g}(x) = \frac{1}{\operatorname{mes}(V)} \int f(y)\, g(x^{-1}y)\, dy = \frac{\operatorname{mes}(xV \cap KV)}{\operatorname{mes}(V)}.$$

Sous cette dernière forme, on voit que $0 \leqq u \leqq 1$. Soit $x \in K$; alors $xV \subset KV$, donc

$$\operatorname{mes}(xV \cap KV) = \operatorname{mes}(xV) = \operatorname{mes} V;$$

par suite, $u(x) = 1$. Soit maintenant $x \notin U$; alors $x \notin KV^2$, donc $xV \cap KV = \emptyset$; par suite, $u(x) = 0$. Enfin, de l'identité

$$(3.3) \qquad 4 f \star \tilde{g} = (f+g) \star (f+g)^{\sim} - (f-g) \star (f-g)^{\sim} + i(f+ig) \star (f+ig)^{\sim} - i(f-ig) \star (f-ig)^{\sim}$$

résulte que u est combinaison linéaire de fonctions $h \star \tilde{h}$, où $h \in L^\infty(G)$ est à support compact, donc de fonctions : 1° continues; 2° de type positif; 3° à support compact.

(3.4) PROPOSITION. — *Les espaces vectoriels complexes de fonctions :*

E_1 *engendré par les $f \star \tilde{g}$, où $f \in L(G)$, $g \in L(G)$;*

E_2 *engendré par les $h \star \tilde{h}$, où $h \in L(G)$;*

E_3 *engendré par les $f \star \tilde{g}$, où $f \in L^\infty(G)$, $g \in L^\infty(G)$ sont à support compact;*

E_4 *engendré par les $h \star \tilde{h}$, où $h \in L^\infty(G)$ est à support compact;*

$E_5 = B \cap L(G)$;

E_6 *engendré par $(P \cap L)(G)$;*

E_7 *engendré par les $u \in P(G)$ telles que $\Delta^{-\frac{1}{2}} u \in L_1(G)$;*

E_8 *engendré par $(P \cap L^2)(G)$;*

E_9 *engendré par les $h \star \tilde{h}$, où $h \in L^2(G)$;*

E_{10} *engendré par les $f \star \tilde{g}$, où $f \in L^2(G)$, $g \in L^2(G)$*

vérifient les relations

$$E_1 = E_2 \subset E_3 = E_4 \subset E_5 = E_6 \subset E_7 \subset E_8 \subset E_9 = E_{10} \subset B_\rho(G),$$

et ont tous, dans l'espace de Banach $B_\rho(G)$ la même adhérence $A(G)$, qui est une sous-algèbre de Banach (et même un idéal fermé) de $B(G)$.

(3.5) DÉFINITION. — $A(G)$ prendra le nom d'*algèbre de Fourier du groupe G.*

DÉMONSTRATION de (3.4). — Les égalités $E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, $E_9 = E_{10}$ résultent de l'identité (3.3). Les inclusions $E_2 \subset E_3$, $E_4 \subset E_5$, $E_6 \subset E_7$ sont évidentes. L'inclusion $E_7 \subset E_8$ résulte de la proposition 12 (p. 68), dans R. GODEMENT [15]. On a $E_8 \subset E_9$ parce que, d'après R. GODEMENT [15] (p. 73, théorème 17), toute $u \in P \cap L^2$ s'écrit $h \star \tilde{h}$, où $h \in L^2$.

On a évidemment $E_6 \subset E_5$; montrons l'inclusion inverse. Soit

$$v \in E_5 = B \cap L, \qquad \text{et} \qquad v = v_1 - v_2 + i\,(v_3 - v_4),$$

où les v_i sont dans $P(G)$. En vertu du lemme (3.2), soit $u = \sum c_j u_j$ une fonction égale à 1 sur le support de v, avec

$$u_j \in (P \cap L)(G) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors $v = uv = \sum_j c_j u_j\,[v_1 - v_2 + i\,(v_3 - v_4)]$ est combinaison linéaire des $u_j v_i$, lesquelles appartiennent à $P \cap L(G)$, donc $v \in E_6$.

L'inclusion $E_{10} \subset B_\rho(G)$ est établie au lemme (3.1). Pour montrer que tous les E_i ont même fermeture dans $B_\rho(G)$ [ou, ce qui revient au même, dans $B(G)$], nous prouvons que E_1 est dense dans E_{10}. Soient $f \in L^2(G)$, $g \in L^2(G)$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h_\varepsilon \in L(G)$ et $k_\varepsilon \in L(G)$ telles que

$$\| f - h_\varepsilon \|_2 \leqq \varepsilon, \qquad \| g - k_\varepsilon \|_2 \leqq \varepsilon.$$

Alors, d'après (3.1),

$$\begin{aligned}
&\| f \star \tilde{g} - h_\varepsilon \star \tilde{k}_\varepsilon \| = \| (f - h_\varepsilon) \star \tilde{g} + h_\varepsilon \star (\tilde{g} - \tilde{k}_\varepsilon) \| \\
&\quad \leqq \| (f - h_\varepsilon) \star \tilde{g} \| + \| h_\varepsilon \star (\tilde{g} - \tilde{k}_\varepsilon) \| \leqq \| f - h_\varepsilon \|_2 \| g \|_2 + \| h_\varepsilon \|_2 \| g - k_\varepsilon \|_2 \\
&\quad \leqq \varepsilon [\| g \|_2 + \| f \|_2 + \varepsilon],
\end{aligned}$$

donc, par linéarité, $E_{10} \subset \overline{E}_1$.

Enfin, si $u \in P$ et $v \in P \cap L$, alors $uv \in P \cap L$, donc E_6 est un idéal de B; par suite, $A(G)$ est un idéal de $B(G)$.

(3.6) EXEMPLES.

1° Si G est compact, on a $A(G) = B(G)$;

2° Si G est abélien, $A(G)$ n'est autre que l'algèbre des fonctions $\hat{f}$, transformées de Fourier des $f \in L^1(\hat{G})$, avec la norme $\| \hat{f} \| = \| f \|_1$. Dans ce cas, en effet, grâce au théorème de Plancherel, on sait même que cette algèbre des $\hat{f}$, évidemment fermée dans $B(G)$, coïncide avec E_{10}. Plus loin, nous généraliserons l'égalité $A(G) = E_{10}$ à tout groupe localement compact.

(3.7) PROPOSITION.

1° *Toute* $u \in A(G)$ *tend vers zéro à l'infini;*

2° *Toute fonction continue sur* G *tendant vers zéro à l'infini est limite uniforme sur* G *de fonctions appartenant à* $A(G)$.

DÉMONSTRATION. — Le 1° résulte de l'inégalité

$$\|u\|_\infty \leqq \|u\| \quad [cf.\ (2.15)]$$

et de la densité de

$$E_3 = B \cap L(G) = A \cap L(G) \quad \text{dans } A(G).$$

Le 2° s'obtient en appliquant le théorème de Weierstrass-Stone à la sous-algèbre E_3 évidemment autoadjointe, et séparante d'après (3.2).

(3.8) PROPOSITION. — *Soit* $u \in A(G)$, *et soient* $a \in G$, $b \in G$. *Alors les fonctions* $\tilde{u}$, $\bar{u}$, $\check{u}$, ${}_a u$ *et* u_b *sont dans* $A(G)$.

En effet, d'après (2.15), 3° et (2.19), les applications linéaires de $B(G)$ dans $B(G)$ qui, *à* u, font correspondre ces diverses fonctions, sont continues. D'autre part, il est clair qu'elles laissent stable $B \cap L(G)$, dense dans $A(G)$.

Le dual de l'espace de Banach $A(G)$.

(3.9) DÉFINITION. — Nous noterons $VN(G)$ l'algèbre de von Neumann engendrée dans $\mathcal{L}(L^2(G))$ par les opérateurs de translation à gauche ou, ce qui revient au même, par les opérateurs $\rho(f)$, où $f \in L(G)$. On a $VN(G) \supset C^*_\rho(G)$; d'autre part, $VN(G)$ contient les opérateurs $\rho(\mu)$, où $\mu \in M^1(G)$. Notons que $VN(G)$ est aussi l'ensemble des opérateurs bornés sur $L^2(G)$ qui commutent aux opérateurs de convolution à droite par les $f \in L(G)$: on le voit en appliquant le théorème de commutation (*cf.* J. DIXMIER [9], chap. 1, § 5) à l'algèbre de convolution $L(G)$, laquelle est quasi hilbertienne pour le produit scalaire

$$(f \mid g) = \int f(x)\, \overline{g(x)}\, dx,$$

l'opération $f \to \hat{f} = f \Delta^{-\frac{1}{2}}$ et l'antiautomorphisme involutif $f \to \tilde{f} \Delta^{-\frac{1}{2}}$.

A maints égards, $VN(G)$ va jouer le rôle dévolu à $L^\infty(\Gamma)$ en analyse harmonique abélienne; telle est déjà l'idée directrice de l'énoncé suivant :

(3.10) THÉORÈME. — *Soit* $A'(G)$ *l'espace de Banach dual de* $A(G)$. *Pour tout opérateur* $T \in VN(G)$, *il existe une forme linéaire* $\varphi_T \in A'(G)$, *et une seule, telle que*

$$(3.11) \qquad \begin{aligned} \varphi_T((f \star g)^\vee) &= \varphi_T(\bar{g} \star \check{f}) \\ &= (Tf \mid g) \quad \textit{quels que soient } f \in L^2(G),\ g \in L^2(G). \end{aligned}$$

L'application $T \to \varphi_T$ ainsi définie est un isomorphisme isométrique de l'espace de Banach $VN(G)$ sur $A'(G)$. Par cette application, la topologie ultrafaible de $VN(G)$ se transporte en la topologie faible de dualité $\sigma(A', A)$; quand u parcourt $A(G)$, l'ensemble des applications $T \to \varphi_T(u)$ est exactement l'ensemble des formes linéaires ultrafaiblement continues sur $VN(G)$.

DÉMONSTRATION. — S'il existe $\varphi_T \in A'(G)$ telle qu'on ait (3.11), elle est unique, puisque, d'après (3.4), E_{10} est dense dans $A(G)$.

Soit $T \in VN(G)$. Pour toute $u \in E_1$ [*cf.* (3.4)], posons $\varphi_T(u) = T\check{u}(e)$; cela a un sens car, si $u = f \star \tilde{g}$, $f \in L(G)$, $g \in L(G)$, on a

$$Tu = T(f \star \tilde{g}) = Tf \star \tilde{g},$$

donc $Tu(x)$ est fonction continue de x. Pour toute $u \in E_1$, on a

$$|\varphi_T(u)| \leqq \|T\|_\rho \|u\|. \tag{3.12}$$

Montrons (3.12) d'abord quand $T = \rho(f)$, où $f \in L(G)$,

$$|\varphi_T(u)| = |f \star \check{u}(e)| = \left| \int f(y)\, u(y)\, dy \right| \leqq \|u\| \cdot \|f\|_\rho.$$

Si maintenant T est quelconque, soient, d'après le théorème de densité de Kaplansky, des $h_\alpha \in L(G)$ tels que $\|h_\alpha\|_\rho \leqq \|T\|_\rho$, et tels que T soit limite forte des $\rho(h_\alpha)$. Alors, si $\check{u} = \sum c_n f_n \star \tilde{g}_n \in E_1$ on a

$$\varphi_T(u) = T\check{u}(e) = \sum_n c_n (Tf_n | g_n) = \lim_\alpha \left| \sum_n c_n (h_\alpha \star f_n | g_n) \right| = \lim_\alpha |\varphi_{\rho(h_\alpha)}(u),$$

ce qui donne (3.12) en passant à la limite.

E_1 étant dense dans $A(G)$, il résulte de (3.12) que φ_T se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur $A(G)$, encore notée φ_T, de norme $\|\varphi_T\| \leqq \|T\|_\rho$. Visiblement linéaire, l'application $T \to \varphi_T$ de $VN(G)$ dans $A'(G)$ est injective car, si $\varphi_T = 0$, quels que soient $f \in L(G)$ et $g \in L(G)$, on a

$$(Tf | g) = T(f \star \tilde{g})(e) = \varphi_T((f \star \tilde{g})^\vee) = 0, \qquad \text{donc} \quad T = 0.$$

Réciproquement, si $\varphi \in A'(G)$, on a, d'après (3.1) et 2.15, 3°, pour f et g dans $L^2(G)$,

$$|\varphi((f \star \tilde{g})^\vee) \leqq \|\varphi\|_{A'} \|(f \star \tilde{g})^\vee\| = \|\varphi\|_{A'} \|f \star \tilde{g}\| \leqq \|\varphi\|_{A'} \|f\|_2 \|g\|_2,$$

donc il existe un opérateur $T_\varphi \in \mathcal{L}(L^2(G))$ tel que

$$\varphi((f \star \tilde{g})^\vee) = (T_\varphi f | g) \quad \text{et} \quad \|T_\varphi\|_\rho \leqq \|\varphi\|_{A'}. \tag{3.13}$$

De plus, on a $T_\varphi \in VN(G)$, car, si $h \in L(G)$, on a, quels que soient $f \in L^2$, $g \in L^2$:

$$\begin{aligned}(T_\varphi(f \star h) \mid g) &= \varphi(\bar{g} \star (f \star h)^\vee) = \varphi((\bar{g} \star \check{h}) \star \check{f}) \\ &= (T_\varphi f \mid g \star \tilde{h}) = (T_\varphi(f) \star h \mid g),\end{aligned}$$

donc T_φ commute aux convolutions à droite par les $h \in L$. Appliquant (3.13) avec $f \in L$, $g \in L$, on voit que $\varphi = \varphi_{T_\varphi}$, donc $T \to \varphi_T$ est surjective, et isométrique en vertu de (3.12) et (3.13). De plus, (3.11) est satisfaite par définition de T_φ.

Ainsi $VN(G)$ est le dual fort de l'espace de Banach $A(G)$; ce dernier est fermé dans son bidual VN^*. Comme, d'autre part, l'ensemble $VN_\sim$ des formes linéaires faiblement continues sur VN s'identifie, d'après (3.11), au sous-espace E_{10} dense dans $A(G)$, il résulte du théorème 1 (p. 40) dans J. Dixmier [9] que $A(G)$ s'identifie à l'ensemble des formes linéaires ultrafaiblement continues sur VN, et que la topologie faible $\sigma(A', A)$ s'identifie à la topologie ultrafaible de $VN(G)$.

(3.14) Remarque. — Si $T \in C^*_\rho(G) \subset VN(G)$ et si $u \in A(G)$, on a la formule

$$< T, u > = \varphi_T(u),$$

où, dans le premier membre, figure l'accouplement défini au début du chapitre 2 par

$$< f, u > = \int f(x)\, u(x)\, dx \qquad \text{si} \quad f \in L^1(G).$$

De plus, si $\mu \in M^1(G)$ on a

$$\varphi_{\rho(\mu)}(u) = \int u(x)\, d\mu(x)\,;$$

donc, si $x \in G$, on a

$$\varphi_{\rho(x)}(u) = u(x).$$

(3.15) Proposition. — *Soit $u \in A(G)$. Alors $|u|$ appartient à $A(G)$, ainsi que u^+ et u^- si u est hermitienne.*

Démonstration. — Il suffit de la faire pour $|u|$. En vertu du rappel (1.2) appliqué à l'algèbre de von Neumann $M'' = VN(G)$, la forme linéaire ultrafaiblement continue sur $VN(G)$ associée à u admet une « valeur absolue », qui est une forme linéaire positive normale sur $VN(G)$, laquelle est donc associée à une fonction $p \in A(G)$, où p est de type positif, car elle correspond par restriction à une forme linéaire positive sur $C^*_\rho(G) \subset VN(G)$. Mais la caractérisation de la « valeur absolue », rappelée en (1.3), montre, quand on la restreint à $C^*_\rho(G)$, que $p = |u|$, compte tenu de (2.6), 2°. Donc $|u| \in A(G)$.

(3.16) Nous noterons $\check{T}$ l'opérateur de $VN(G)$ tel que, pour tout $u \in A(G)$, on ait $\varphi_{\check{T}}(u) = \varphi_T(\check{u})$; autrement dit, $T \to \check{T}$ est la transposée de l'isométrie $u \to \check{u}$ de $A(G)$ sur lui-même. On voit aussitôt, d'après (3.14), que, si $\mu \in M^1(G)$, on a

$$\rho(\mu)^{\vee} = \rho(\check{\mu}), \qquad \text{où} \quad d\check{\mu}(x) = d\mu(x^{-1}).$$

Par passage à la limite ultrafaible, on en déduit que $T \to \check{T}$ est une involution (isométrique et ultrafaiblement continue) de l'algèbre $VN(G)$.

DÉFINITION. — *Soit $T \in VN(G)$, et soit $u \in A(G)$. Nous noterons Tu la fonction appartenant à $A(G)$ et telle que, quel que soit $S \in VN(G)$, on ait*

$$\varphi_S(Tu) = \varphi_{\check{T}S}(u).$$

On vérifie immédiatement que la loi externe $(T, u) \to Tu$ fait de $A(G)$ un $VN(G)$-module à gauche. [On voit facilement que, pour G abélien, cette structure de $VN(G)$-module correspond, par transformation de Fourier, à la structure de $L^\infty(\hat{G})$-module de $L^1(\hat{G})$ pour la multiplication ordinaire.]

(3.17) PROPOSITION. — *Soit G un groupe localement compact. Soit $T \in VN(G)$ et soit $u \in A(G)$.*

1° *L'opérateur $u \to Tu$ sur l'espace de Banach $A(G)$ est continu et a pour norme $\| T \|_\rho$.*

2° *On a, pour tout $x \in G$, la formule*

$$T\check{u}(x) = \varphi_T({}_{x^{-1}}u).$$

3° *Si $u \in (A \cap L^2)(G)$, alors $Tu \in (A \cap L^2)(G)$, et Tu n'est autre que la transformée de u par T opérant sur $L^2(G)$.*

DÉMONSTRATION. — Au cours de la démonstration, si $u \in (A \cap L^2)(G)$, on notera $T(u)$ sa transformée par T opérant dans $L^2(G)$, pour la distinguer (provisoirement) de Tu définie dans l'énoncé.

1° On a

$$\| Tu \| = \sup_{\| S \|_\rho \leq 1} |\varphi_S(Tu)| = \sup_{\| S \|_\rho \leq 1} |\varphi_{\check{T}S}(u)| \leq \| \check{T} \|_\rho \| u \| = \| T \|_\rho \| u \|,$$

donc $u \to Tu$ est une application linéaire continue de $A(G)$ dans $A(G)$. Par définition, sa transposée est l'application $S \to \check{T}S$ de $VN(G)$ dans $VN(G)$; donc elle a même norme que cette dernière, c'est-à-dire $\| T \|_\rho$.

2° Si $\check{u} = f \star \tilde{g}$, où $f \in L(G)$ et $g \in L(G)$, remarquons que

$$T(\check{u}) = T(f \star \tilde{g}) = T(f) \star \tilde{g}$$

est une fonction continue et que, pour tout $x \in G$,

$$\begin{aligned}(3.18) \qquad T(\check{u})(x) &= T(f) \star \tilde{g}(x) = (T(f) \mid {}_{x^{-1}}g) \\ &= \varphi_T({}_{x^{-1}}\check{\bar{g} \star f}) = \varphi_T({}_{x^{-1}}(f \star \tilde{g})^{\vee}) = \varphi_T({}_{x^{-1}}u)\end{aligned}$$

ce qui, en vertu du fait que $\varphi_T(u) = T(\check{u})(e)$ pour $u \in E_1$, entraîne que

$$\begin{aligned}\varphi_T({}_{x^{-1}}u) &= T(\check{u})(x) = (\rho(x^{-1})T)(\check{u})(e) \\ &= \varphi_{\rho(x^{-1})T}(u) = \varphi_{\check{T}\rho(x)}(\check{u}) = \varphi_{\rho(x)}(T\check{u}) = T\check{u}(x).\end{aligned}$$

On obtient donc déjà, par linéarité, que $T(u) = Tu$ pour toute $u \in E_1$. Mais, de plus, *pour toute* $u \in A(G)$, en vertu de (2.19), (3.4) et (3.8), on a, par passage à la limite,

$$(3.19) \qquad T\check{u}(x) = \varphi_T({}_{x^{-1}}u).$$

3° *Soit* $\mathfrak{A}$ la sous-$\bigstar$-algèbre de $VN(G)$ formée des $T = \rho(\nu)$, où $\nu = \sum c_n \delta_{x_n}$ est une mesure à support fini. Soit $u \in (A \cap L^2)(G)$. Si $f \in L(G)$ et si, d'abord, $T = \rho(\nu) \in \mathfrak{A}$, on a $\rho(x_n)\, u = {}_{x_n^{-1}}u$ [en appliquant par exemple (3.19)], et donc

$$\begin{aligned}\left|\int Tu(x)\,\overline{f(x)}\,dx\right| &= \left|\int \sum c_n u(x_n^{-1}x)\,\overline{f(x)}\,dx\right| \\ &= \left|\int u(x)\Big(\sum c_n \overline{f(x_n x)}\,dx\right| \\ &= \left|\int \Big(\nu^* \bigstar f\Big)(x)\,\overline{u(x)}\,dx\right. \\ &= \left|\int T^*(f)(x)\,\overline{u(x)}\,dx\right| \\ &\leqq \| T \|_\rho \, \| f \|_2 \, \| u \|_2,\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Schwarz. Si maintenant $T \in VN(G)$ est quelconque, selon le théorème de densité de Kaplansky, il existe des $T_\alpha \in \mathfrak{A}$, tels que $\| T_\alpha \|_\rho \leqq \| T \|_\rho$, tendant ultrafaiblement vers T. Cela entraîne, d'après (3.14), que

$$\int T_\alpha u(x)\,\overline{f(x)}\,dx = \varphi_{\rho(\bar f)}(T_\alpha u) = \varphi_{\check{T}_\alpha\,\rho(\bar f)}(u)$$

a pour limite

$$\varphi_{\check{T}\ (\bar f)}(u) = \varphi_{\rho(\bar f)}(Tu) = \left|\int Tu(x)\,\overline{f(x)}\,dx\right|\cdot$$

A la limite, l'inégalité

$$\left|\int Tu(x)\,\overline{f(x)}\,dx\right| \leqq \| T \|_\rho \, \| f \|_2 \, \| u \|_2$$

vaut donc pour tout $T \in VN(G)$. Elle prouve aussitôt que $Tu \in L^2(G)$, et que l'application $u \to Tu$ est continue au sens de L^2 sur $(A \cap L^2)(G)$. Mais, puisqu'on a vu plus haut que $Tu = T(u)$ pour toute $u \in E_1$, on a cette égalité par continuité pour toute $u \in (A \cap L^2)(G)$, car E_1 est dense dans $L^2(G)$.

REMARQUE. — A partir de (3.19), on vérifie aisément que, si $u \in A(G)$ et si $\mu \in M^1(G)$, on a

$$\rho(\mu)\, u = \mu \star u.$$

En effet, si $x \in G$, on a

$$\rho(\mu)\, u(x) = \varphi_{\rho(\mu)}((u_x)^{\vee}) = \int (u_x)^{\vee}(y)\, d\mu(y)$$
$$= \int u(y^{-1}x)\, d\mu(y) = \mu \star u(x).$$

Propriétés fonctorielles (*suite*).

(3.20) Soit G_1 un sous-groupe *ouvert* de G. On reprend les notations indiquées avant (2.31). De plus, si $T \in VN(G)$ et si $f \in L^2(G)$, posons

$$T \mid G_1(f) = T(\mathring{f}) \mid G_1.$$

Puisque

$$\int_{G_1} | T(\mathring{f}) |^2 (y)\, dy \leqq \int_G | T(\mathring{f}) |^2 (x)\, dx \leqq \| T \|_\rho^2 \, \| \mathring{f} \|_2^2 = \| T \|_\rho^2 \, \| f \|_2^2,$$

$T \mid G_1$ est un opérateur sur $L^2(G_1)$, de norme $\leqq \| T \|_\rho$. On a même $T \mid G_1 \in VN(G_1)$, car, pour toute $h \in L(G_1)$,

$$T \mid G_1(f \star h) = T(\mathring{f} \star \mathring{h}) \mid G_1 = T(\mathring{f}) \star \mathring{h} \mid G_1 = T(\mathring{f}) \mid G_1 \star h = T \mid G_1(f) \star h.$$

Notons que, si $h \in L(G)$, on a

$$\rho(h) \mid G_1 = \rho_1(h \mid G_1).$$

(3.21) PROPOSITION. — *Soit G_1 un sous-groupe ouvert d'un groupe localement compact G.*

1° *L'application $u \to \mathring{u}$ est un homomorphisme isométrique de l'algèbre de Banach $A(G_1)$ dans l'algèbre de Banach $A(G)$, qui applique $(P \cap A)(G_1)$ dans $(P \cap A)(G_1)$. L'application $T \to T \mid G_1$, qui en est la transposée, applique $VN(G)$ sur $VN(G_1)$ et $C^*_\rho(G)$ sur $C^*_\rho(G_1)$.*

2° *L'application de restriction $v \to v \mid G_1$ applique $A(G)$ sur $A(G_1)$. Sa transposée, notée $T \to \mathring{T}$, est un isomorphisme de l'algèbre de von Neumann $VN(G_1)$ sur la sous-algèbre de von Neumann $VN_{G_1}(G)$ de $VN(G)$ engendrée par les $\rho(y)$, $y \in G_1$; elle applique $C^*_{\rho_1}(G_1)$ dans $C^*_\rho(G)$* [plus précisément, elle prolonge l'homomorphisme de (2.31), 2°].

DÉMONSTRATION. — Depuis (2.20), 1°, nous savons que $v \to v \mid G_1$ applique, en diminuant les normes, $B(G)$ dans $B(G_1)$, et évidemment $(B\cap L)(G)$ dans $(B\cap L)(G_1)$. Par continuité, d'après (3.4), elle applique donc $A(G)$ dans $A(G_1)$. Notons $T\to\mathring{T}$ la transposée de cette dernière application : c'est une application linéaire de $VN(G_1)$ dans $VN(G)$ continue pour les topologies uniformes et pour les topologies ultrafaibles. On vérifie que, pour $f\in L(G)$, on a $\rho_1(f)^\circ=\rho(\mathring{f})$, d'où suit, par densité uniforme, que $T\to\mathring{T}$ applique $C^*_{\rho_1}(G_1)$ dans $C^*_\rho(G)$ en prolongeant (2.31), 2°, et, par densité ultrafaible, que $(T^*)^\circ=(T^\circ)^*$ et que $(ST)^\circ=S^\circ T^\circ$, pour $S, T\in VN(G_1)$. Ainsi $T\to\mathring{T}$ est un homomorphisme de l'algèbre de von Neumann $VN(G_1)$ dans l'algèbre de von Neumann $VN(G)$ et, plus précisément dans $VN_{G_1}(G)$, car, si $y\in G_1$, on a $\rho_1(y)^\circ=\rho(y)$.

Notons la formule

$$\mathring{T}(u)\mid G_1=T(u\mid G_1) \tag{3.22}$$

déduite immédiatement de (3.17), 2°. Elle entraîne que, pour tout $T\in VN(G_1)$, on a $T=\mathring{T}\mid G_1$, donc l'application $T\to T\mid G_1$ applique $VN(G)$ sur $VN(G_1)$ [resp. $C^*_\rho(G)$ sur $C^*_{\rho_1}(G_1)$]. Notons θ l'application transposée de $VN(G_1)^*$ dans $VN(G)^*$; d'après (3.20), elle diminue les normes.

Soient f, $g\in L(G_1)$ et soit

$$u=f\star\tilde{g}\in E_1(G_1)\subset A(G_1)\subset VN(G_1)^*;$$

pour $T\in VN(G)$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_T(\mathring{u}^\vee)&=\varphi_T((\mathring{f}\star\mathring{g}^\sim)^\vee)=(T\mathring{f}\mid\mathring{g})=(T(\mathring{f})\mid G_1\mid g)=(T\mid G_1(f)\mid g)\\&=\varphi_{T\mid G_1}((f\star\tilde{g})^\vee)=\varphi_{T\mid G_1}(\check{u}),\end{aligned}$$

donc

$$\theta(u)=\mathring{u}\in E_1(G)\qquad\text{si}\quad u\in E_1(G_1).$$

Par continuité de θ, on déduit alors de (3.4) que

$$\theta(A(G_1))\subset A(G).$$

De plus, pour tout $u\in A(G_1)$, on a

$$\theta(u)=\mathring{u},\qquad\text{donc}\quad\mathring{u}\in A(G)$$

(il suffit de noter que $u\to\mathring{u}$ est continue pour les convergences simples, et que E_1 est dense dans A). D'autre part,

$$\|\mathring{u}\|=\|\theta(u)\|\leqq\|u\|=\|\mathring{u}\mid G_1\|\leqq\|\mathring{u}\|,$$

donc

$$\|\mathring{u}\|=\|u\|.$$

Par suite, si $u \in (P \cap A)(G_1)$, on a $\mathring{u} \in (P \cap A)^{\vee}(G)$, car $\mathring{u}$ est hermitienne et

$$\|\mathring{u}\| = \|u\| = u(e) = \mathring{u}(e).$$

Désormais, il est clair que $v \to v \mid G_1$ applique $A(G)$ *sur* $A(G_1)$. Par conséquent, il résulte des propriétés de la dualité (*cf.* [4], chap. IV, § 4) que sa transposée $T \to \mathring{T}$ est un isomorphisme de $VN(G_1)$ dans $VN(G)$ pour les topologies ultrafaibles, dont l'image est ultrafaiblement fermée dans $VN(G)$, donc coïncide avec $VN_{G_1}(G)$.

(3.23) Soit maintenant K un *sous-groupe distingué compact* d'un groupe localement compact G. Désignons par μ_K la mesure de Haar sur K, normalisée de sorte que $\mu_K(K) = 1$, et identifiée à une mesure sur G. Soit σ_K l'application canonique de G sur G/K. Alors $j_K : f \to f \circ \sigma_K$ est un isomorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(G/K)$ sur $L^2_K(G)$, sous-espace de Hilbert de $L^2(G)$ des fonctions constantes sur les classes de G modulo K. On a $g \in L^2_K(G)$ si et seulement si $g \in L^2(G)$ et $g = g \star \mu_K$; par suite, si $T \in VN(G)$, on a $T(L^2_K) \subset L^2_K$. On peut donc poser, pour $T \in VN(G)$ et $f \in L^2(G/K)$,

$$(3.24) \qquad T_K(f) = j_K^{-1} \circ T \circ j_K(f).$$

Il est aisé de voir que l'opérateur T_K ainsi défini appartient à $VN(G/K)$ et que, pour $S \in VN(G)$, $T \in VN(G)$, on a

$$(ST)_K = S_K T_K \qquad \text{et} \qquad (T^*)_K = (T_K)^*.$$

(3.25) PROPOSITION. — *Soit K un sous-groupe distingué compact d'un groupe localement compact G.*

1° *L'application $u \to u \circ \sigma_K$ est un isomorphisme isométrique de l'algèbre de Banach $A(G/K)$ sur la sous-algèbre $A_K(G)$ de $A(G)$ formée des $u \in A(G)$ qui sont constantes sur les classes de G modulo K.*

2° *L'application $T \to T_K$, qui en est la transposée, est un homomorphisme ultrafaiblement continu de l'algèbre de von Neumann $VN(G)$ sur l'algèbre de von Neumann $VN(G/K)$.*

DÉMONSTRATION.

1° D'après (2.26), on sait que $u \to u \circ \sigma_K$ est une isométrie de $B(G/K)$ sur $B_K(G)$, l'ensemble des $u \in B(G)$ constantes sur les classes modulo K; elle applique évidemment $(B \cap L)(G/K)$ sur $(B_K \cap L)(G)$. Donc, en vertu de (3.4), il suffit de voir que $B_K \cap L(G)$ est dense dans $A_K(G)$. Soit $u \in A_K(G)$ et soit $u_n \in (B \cap L)(G)$ une suite tendant en norme vers u; alors, d'après (2.18), 2°, $u = u \star \mu_K$ est limite en norme des $u_n \star \mu_K$, lesquels sont dans $(B_K \cap L)(G)$.

2° Après ce qui est dit en (3.23), et compte tenu des propriétés de la dualité des espaces de Banach, il suffit de voir que $T \to T_K$ est la transposée de $u \to u \circ \sigma_K$. Or, si $u \in (A \cap L^2)(G/K)$, d'après (3.17) et (3.24), on a pour tout $T \in VN(G)$:

$$\varphi_{T_K}(u) = T_K \check{u}(e) = j_K \circ T_K(\check{u})(e) = T \circ j_K(\check{u})(e) = T(\check{u} \circ \sigma_K)(e) = \varphi_T(u \circ \sigma_K)$$

d'où la propriété annoncée, car $T \to T_K$ est continue en normes d'opérateurs.

Une caractérisation de $A(G)$.

Théorème. — *Soit G un groupe localement compact. Alors $A(G)$ est exactement l'ensemble des fonctions $f \star \tilde{g}$, où $f \in L^2(G)$ et $g \in L^2(G)$.*

Démonstration.

1° Supposons d'abord que le groupe G est *séparable*. Alors l'espace $L^2(G)$ est séparable, donc l'algèbre de von Neumann $VN(G)$ est de genre dénombrable. D'après (3.9), il existe une involution de $L^2(G)$ transformant $VN(G)$ en son commutant. D'après ([9], p. 70, corollaire), cette involution commute aux projecteurs du centre de $VN(G)$; alors, d'après ([9], p. 234, lemme 5), $VN(G)$ possède un élément séparateur, donc (*cf.* [9], p. 233, théorème 4) toute forme linéaire positive normale sur $VN(G)$ est de la forme $T \to (Tf \mid f)$, avec $f \in L^2(G)$; par suite, d'après ([9], p. 283, prop. 5), toute forme linéaire ultrafaiblement continue sur $VN(G)$ est de la forme

$$T \to (Tf \mid g) = \varphi_T(\bar{g} \star \check{f}), \qquad \text{où} \quad f \in L^2(G), \quad g \in L^2(G).$$

C'est l'assertion du théorème, puisque, d'après (3.10), les formes linéaires ultrafaiblement continues sur $VN(G)$ sont précisément les $T \to \varphi_T(u)$, avec $u \in A(G)$.

2° Supposons maintenant *G dénombrable à l'infini*. Soit $u \in A(G)$; puisque u est continue et tend vers zéro à l'infini, u est uniformément continue. Alors, d'après S. Kakutani et K. Kodaira (*Proc. Imp. Acad. Tokyo*, t. 20, 1944, p. 444-450, Satz 6), il existe un sous-groupe distingué compact K de G possédant les propriétés suivantes : *a.* G/K est séparable; *b.* u est constante sur les classes modulo K. D'après (3.25), il existe une $v \in A(G/K)$ telle que $u = v \circ \sigma_K$. Alors, d'après le 1° de la démonstration, il existe f et g appartenant à $L^2(G/K)$, telles que $v = f \star \tilde{g}$. On en déduit que

$$u = (f \circ \sigma_K) \star (g \circ \sigma_K)^{\sim}.$$

3° Passons au *cas général*. Soit $u \in A(G)$. Pour $n = 1, 2, \ldots,$ soit (C_n) une suite croissante de parties compactes de G telles que, pour tout n,

C_n est un voisinage de e et contient l'ensemble des $x \in G$ tels que $|u(x)| \geqq \frac{1}{n}$. Soit L_n le sous-groupe (ouvert) de G engendré par C_n. Soit G_1 la réunion des L_n: c'est un sous-groupe ouvert de G; de plus, G_1 est dénombrable à l'infini, et u est nulle hors de G_1. D'après (3.21), on a $u \mid G_1 \in A(G_1)$, donc, d'après le 2° de la démonstration,

$$u \mid G_1 = f \star \tilde{g}, \qquad \text{où} \quad f,\ g \in L^2(G_1);$$

donc $u = \mathring{f} \star \mathring{g}^{\sim}$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Soit G un groupe localement compact. Alors, sur $VN(G)$, les topologies faible et ultrafaible des opérateurs sont identiques.*

Dans la suite, nous emploierons sur $VN(G)$ de préférence la terminologie de la topologie faible.

Notons en passant que le théorème ci-dessus peut encore s'énoncer en disant que *$A(G)$ est exactement l'ensemble des coefficients de la représentation régulière gauche de G.*

REMARQUE. — Dans notre Note [13], le théorème ci-dessus n'était annoncé que sous l'hypothèse : G unimodulaire. C'est M. J. DIXMIER qui nous a montré comment le prouver dans le cas général.

$VN(G)$ en tant qu'algèbre de distributions.

Précisons les rapports de $VN(G)$ et $A(G)$ avec la théorie des distributions, telle que F. BRUHAT [6] l'a généralisée aux groupes localement compacts. Soit $\mathcal{D}(G)$ l'espace des fonctions régulières à support compact sur G, et soit $\mathcal{D}'(G)$ l'espace des distributions sur G, au sens de cet auteur.

(3.26) PROPOSITION. — *$\mathcal{D}(G)$ est un sous-ensemble partout dense de $A(G)$ et, sur $\mathcal{D}(G)$, la topologie de Schwartz-Bruhat est plus fine que la topologie induite par la norme de $A(G)$.*

DÉMONSTRATION.

1° Suposons en premier lieu que G est un groupe de Lie. Soit $f_n \in L^1(G)$ une suite telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n\|_\rho = 0$. Alors, quelle que soit $\alpha \in \mathcal{D}(G)$, les $f_n \star \alpha$ tendent vers zéro dans $L^2(G)$, donc dans $\mathcal{D}'(G)$; par conséquent, les f_n tendent vers zéro dans $\mathcal{D}'(G)$ (*cf.* L. SCHWARTZ [29], t. 2, chap. VI, théorème XXIII). Ainsi, sur $L^1(G)$, la topologie induite par $C^\star_\rho(G)$ est plus fine que la topologie induite par $\mathcal{D}'(G)$, d'où résulte par dualité que $\mathcal{D}(G)$ est contenu dans $B_\rho(G) \cap L(G)$, donc dans $A(G)$, et que, sur $\mathcal{D}(G)$, la topologie de Schwartz est plus fine que celle qui est induite par $A(G)$.

2° Supposons maintenant G quelconque, et soit G_1 un sous-groupe ouvert de G, dont la famille $\mathcal{F}$ des sous-groupes distingués compacts K à quotient G_1/K de Lie ait une intersection réduite à $\{e\}$. D'abord $\mathcal{D}(G) \subset A(G)$: pour le voir, on peut remplacer G par G_1 à cause de (3.21), 1°, de (3.8) et du fait que toute $u \in \mathcal{D}(G)$ est somme finie de translatées de fonctions appartenant à $\mathcal{D}(G_1)$; mais, si $u \in \mathcal{D}(G_1)$, il existe $K \in \mathcal{F}$ tel que $u \in \mathcal{D}_K(G_1) = j_K[\mathcal{D}(G_1/K)]$ [se reporter aux notations (3.24)], donc $u \in A(G_1)$ d'après le 1° de la démonstration et d'après (3.25), 1°. Puis, la topologie de $\mathcal{D}(G)$ est plus fine que celle induite par $A(G)$: cela résulte du 1° de la démonstration et des règles de continuité d'une application, ici l'application identique de $\mathcal{D}$ dans A, définie dans une limite inductive, compte tenu de (3.21) et (3.25). Enfin, $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $A(G)$, car les $f \star \tilde{g}$, où $f \in \mathcal{D}(G)$, $g \in \mathcal{D}(G)$, appartiennent à $\mathcal{D}(G)$ et forment dans $A(G)$ un ensemble total, par suite de (3.4), de (3.1) et compte tenu de la densité de $\mathcal{D}(G)$ dans $L^2(G)$.

(3.27) Proposition. — *Soit $T \in VN(G)$. Alors il existe une distribution $\overset{-1}{\rho}(T)$ et une seule telle qu'on ait, pour toute $\alpha \in \mathcal{D}(G)$,*

$$T(\alpha) = \overset{-1}{\rho}(T) \star \alpha.$$

On voit donc que $VN(G)$ s'interprète comme l'algèbre d'opérateurs transformée par la représentation régulière gauche d'une algèbre de distributions : celles qui, par convolution à gauche, appliquent $L^2(G)$ continûment dans $L^2(G)$; ceci justifie la notation $\overset{-1}{\rho}(T)$.

Démonstration. — L'unicité a lieu parce que les relations : $S \in \mathcal{D}'(G)$, et $S \star \alpha = 0$ pour toute $\alpha \in \mathcal{D}(G)$, entraînent $S = 0$. Pour toute $\beta \in \mathcal{D}(G)$, posons

$$\langle \overset{-1}{\rho}(T), \beta \rangle = \varphi_T(\beta).$$

D'après (3.26), $\overset{-1}{\rho}(T)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(G)$, donc un élément de $\mathcal{D}'(G)$. De plus, pour toute $\alpha \in \mathcal{D}(G)$, on a, d'après (3.17), 2°, si $x \in G$,

$$\overset{-1}{\rho}(T) \star \alpha(x) = \langle \overset{-1}{\rho}(T), (\alpha_x)^{\vee} \rangle = \varphi_T((\alpha_x)^{\vee}) = T\alpha(x).$$

Le spectre de l'algèbre de Banach $A(G)$.

Dans ce paragraphe, nous étendons à un groupe G localement compact quelconque le résultat, classique pour G abélien, selon lequel le spectre de l'algèbre de Banach $A(G)$ s'identifie à G, ainsi que son corollaire, le théorème *taubérien* de Wiener-Godement. Mais auparavant, nous présentons l'argument essentiel de la démonstration sous forme d'un lemme [*cf.* (3.28)], qui d'ailleurs servira à nouveau par la suite [*cf.* (4.9)].

Pour G abélien, les idées intervenant dans la démonstration de ce lemme figurent déjà dans l'article de H. Helson ([18], p. 498).

(3.28) Lemme. — *Soit $T \in VN(G)$ un opérateur tel que, pour toute $u \in (A \cap L)(G)$, le support de Tu soit contenu dans le support de u. Alors $T = \lambda I$, où λ est une constante.*

Démonstration. — Nous la faisons par étapes. L'hypothèse que T contracte les supports s'exprime comme suit :

(3.29) *Soit Ω un ouvert de G, et soit $u \in (A \cap L)(G)$ une fonction identiquement nulle sur Ω. Alors Tu est identiquement nulle sur Ω.*

On en déduit d'abord que :

(3.30) *Pour tout ouvert Ω relativement compact dans G, et pour toute $u \in (A \cap L)(G)$ constante sur Ω, Tu est une fonction constante sur Ω.*

Considérons, en effet, deux points p et q de Ω. Soit V un voisinage ouvert de e tel que $Vp \cup Vq \subset \Omega$. Posons $U = Vq$. Si $x \in U$, on a $x \in \Omega$ et $xq^{-1}p \in \Omega$. La fonction $u - u_{q^{-1}p}$ appartient à $(A \cap L)(G)$ et s'annule identiquement sur l'ouvert U. Il en est donc de même, d'après (3.29), de la fonction $Tu - T(u_{q^{-1}p})$; en particulier, cette dernière fonction s'annule pour $x = q$, ce qui s'écrit

$$Tu(q) = Tu(qq^{-1}p) = Tu(p),$$

car T commute aux translations à droite.

(3.31) *Il existe une constante λ, ne dépendant que de T, telle que, pour tout ouvert relativement compact Ω de G et pour toute $u \in (A \cap L)(G)$ identique à 1 sur Ω, la fonction Tu vaut identiquement λ sur Ω.*

D'après (3.30), on a, pour tout $x \in \Omega$, $Tu(x) = \lambda(u, \Omega)$, quantité indépendante de x; montrons qu'à Ω fixé elle ne dépend pas de u : en effet, si u_1 et u_2 appartiennent à $A(G)$ et valent 1 sur Ω, $u_1 - u_2$ s'annule identiquement sur Ω, donc aussi $Tu_1 - Tu_2$ d'après (3.29). Enfin, si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts relativement compacts de G, et si $u \in (A \cap L)(G)$ vaut 1 inentiquement sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$, on a

$$\lambda(\Omega_1) = \lambda(u, \Omega_1) = \lambda(u, \Omega_1 \cup \Omega_2) = \lambda(u, \Omega_2) = \lambda(\Omega_2),$$

donc λ ne dépend pas de Ω.

(3.32) *Soit K un ensemble compact dans G, dont la frontière est de mesure nulle. Alors, si ξ est la fonction caractéristique de K, on a $T\xi = \lambda\xi$, où λ est la constante de* (3.31).

En effet, il existe une suite croissante d'ouverts Ω_n tels que $\overline{\Omega}_n \subset \mathring{K}$, et tels que

$$\text{mes}\,(K - \overline{\Omega}_n) = \text{mes}\,(\mathring{K} - \overline{\Omega}_n) < \frac{1}{n}\cdot$$

Pour tout n, il existe d'après (3.2) une fonction $u_n \in A \cap L(G)$, de valeur absolue ≤ 1, telle que

$$u_n(x) = 1 \quad \text{si } x \in \overline{\Omega}_n \qquad \text{et} \qquad u_n(x) = 0 \quad \text{si } x \notin K.$$

D'après (3.29) et (3.31), la fonction continue bornée Tu_n est nulle hors de K, et vaut λ sur $\overline{\Omega}_n$. Or $\xi = \lim_n u_n$ dans $L^2(G)$, donc

$$T\xi = \lim_n Tu_n = \lambda\xi.$$

(3.33) *Montrons enfin que* $T = \lambda I$. Tout d'abord, le résultat de (3.32) vaut pour un compact K de frontière quelconque : en effet, il existe une suite d'ouverts relativement compacts U_n, à frontière de mesure nulle, tels que $U_n \supset K$ et tels que mes $U_n \leq$ mes $K + \frac{1}{n}$ (cela se voit en raisonnant comme il est indiqué dans N. Bourbaki ([5], chap. IV, § 5, exerc. 13, *d*).

On a $\xi_K = \lim_n \xi_{U_n}$ dans $L^2(G)$. Or, d'après (3.32), $T\xi_{U_n} = \lambda\xi_{U_n}$. Donc $T\xi_K = \lambda\xi_K$ par passage à la limite. Comme les ξ_K forment un ensemble total dans L^2, on a démontré que $T = \lambda I$.

(3.34) Théorème. — *Si* $a \in G$, *désignons par* χ_a *l'application* $u \to u(a)$ *de* $A(G)$ *dans* $\mathbf{C}$. *Alors* $a \to \chi_a$ *est un homéomorphisme de* G *sur le spectre de Gelfand de l'algèbre* $A(G)$ [ce dernier est muni de la topologie induite par $\sigma(A', A)$].

Démonstration. — D'après (3.2), on sait que $a \to \chi_a$ est un homéomorphisme de G sur un fermé du spectre de $A(G)$ (*cf.* C. E. Rickart, [25], p. 121, théorème (3.2.4)). Soit χ un caractère $\neq 0$ de l'algèbre $A(G)$; reste à démontrer qu'il existe $a \in G$ tel que $\chi = \chi_a$.

Si $y \in G$, disons que y *supporte* χ si, pour tout voisinage V de y, il existe une fonction $u \in A \cap L(G)$, à support dans V, telle que $\chi(u) \neq 0$. Cette définition appelle les remarques suivantes :

(3.35) *Il existe au plus un point de G qui supporte* χ : en effet, si $y \neq y_1$ étaient deux tels points, soient V un voisinage de y et V_1 un voisinage de y_1 tels que $V \cap V_1 = \emptyset$; soient des fonctions $u \in A \cap L$, $u_1 \in A \cap L$, avec support $(u) \subset V$, support $(u_1) \subset V_1$, et $\chi(u) \neq 0$, $\chi(u_1) \neq 0$; alors on aurait à la fois $uu_1 = 0$ et $\chi(uu_1) = \chi(u)\chi(u_1) \neq 0$, ce qui est absurde.

(3.36) *Soit un compact* K *tel que* χ *ne soit supporté par aucun point de K; alors, pour toute* $v \in A(G)$ *à support dans K, on a* $\chi(v) = 0$: en effet, par hypothèse, quel que soit $y \in K$, il existe un ouvert Ω_y tel que $y \in \Omega_y$, et tel que $\chi(u) = 0$ pour toute $u \in (A \cap L)(G)$ à support dans Ω_y. Extrayons des Ω_y un recouvrement fini de K, soit $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{y_i}$. S'appuyant sur (3.2), un raisonnement classique de partition de l'unité (*cf.* par exemple [24], p. 231) montre qu'il existe des fonctions $u_i \in A \cap L(G)$, avec support $(u_i) \subset \Omega_{\gamma_i}$, et telles que $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ vaut 1 sur K. Donc $\chi(u) = 0$. Mais $uv = v$, donc

$$\chi(v) = \chi(u)\,\chi(v) = 0.$$

(3.37) *Il existe un point de G qui supporte χ :* sinon, d'après (3.36), on aurait $\chi(v) = 0$ pour toute $v \in A \cap L(G)$, donc $\chi \equiv 0$, car, d'après (3.4), $A \cap L$ est dense dans A.

Ainsi il existe un point a et un seul supportant χ. Pour terminer la démonstration, on peut supposer $a = e$: en effet, d'après (3.8), $u \to \chi({}_{a^{-1}}u)$ est encore un caractère $\neq 0$ sur $A(G)$, et n'est supporté que par e; de plus, la relation $\chi(a) = u(a)$ équivaut à la relation $\chi({}_{a^{-1}}u) = u(e)$. Supposant donc $a = e$, soit $T \in VN(G)$ un opérateur qui, selon (3.10), est tel que $\varphi_T = \chi$; il reste à prouver que T est l'identité : en effet, on aura alors $\chi(u) = \varphi_T(u) = Tu(e) = u(e)$ pour tout $u \in A(G)$, d'après (3.17). Montrons à cet effet que T satisfait à l'hypothèse du lemme (3.28). Soit $u \in (A \cap L)(G)$; si x n'est pas dans le support de u, alors e n'est pas dans le support de u_x, donc

$$Tu(x) = \varphi_T(u_x) = \chi(u_x) = 0,$$

d'après (3.36). Il en résulte que : support $(Tu) \subset$ support (u). Alors, d'après (3.28), $T = \lambda I$, où λ est une constante, et donc $\chi = \lambda\chi_e$. Mais, χ étant multiplicatif, il faut que $\lambda^2 = \lambda$, donc $\lambda = 1$, car $\chi \neq 0$.

(3.38) Corollaire (théorème *taubérien*). — *Soit I un idéal fermé de $A(G)$ tel que, pour tout $x \in G$, il existe $u \in I$, avec $u(x) \neq 0$. Alors $I = A(G)$.*

En effet, de (3.2) et (3.34) résulte que $A(G)$ est une algèbre régulière au sens de Šilov, et, d'après (3.4), $A \cap L$ est dense dans A. Il suffit donc de se référer à ([22], § 25 D).

Du corollaire, citons le cas particulier suivant, déjà signalé par M. Krein [21] et H. Mirkil [23] : si une fonction u partout non nulle est combinaison linéaire de fonctions continues de type positif sur G *compact*, alors $\frac{1}{u}$ possède la même propriété. C'est une généralisation non abélienne du théorème de N. Wiener [35] sur la stabilité par $u \to \frac{1}{u}$ de la classe des fonctions périodiques sommes de séries de Fourier absolument convergentes. D'autre part, W. F. Stinespring [30] a associé à tout groupe localement compact *unimodulaire* G une algèbre de Banach involutive et commutative ($L_1(\Gamma)$ dans les notations de [30]); il définit, en outre, une transformation de Fourier, qui est un isomorphisme de l'algèbre involutive $L_1(\Gamma)$ sur une algèbre involutive de fonctions continues sur G; cette dernière coïncide avec notre algèbre $A(G)$, comme on peut le voir en utilisant ([30], p. 47, lignes 3-6 à partir du bas). Ceci posé, les théorèmes 10.1 et 10.4 de [30] peuvent être considérés comme un cas particulier de notre théorème (3.34). Ils donnent, en effet, les caractères *involutifs* de $L_1(\Gamma)$. En fait, notre résultat prouve que tout caractère de $A(G)$ est involutif.

CHAPITRE 4.

Théorèmes de synthèse spectrale.

Support d'un opérateur de $VN(G)$.

On reprend les notations de (3.10). Si $T \in VN(G)$, et si $v \in B(G)$, alors $u \to \varphi_T(uv)$ est une forme linéaire continue sur $A(G)$.

(4.1) Définition. — *Soient $T \in VN(G)$, $v \in B(G)$. On note vT l'opérateur appartenant à $VN(G)$ qui est défini par $\varphi_{vT}(u) = \varphi_T(uv)$, quel que soit $u \in A(G)$.*

On vérifie facilement que $VN(G)$ devient ainsi un $B(G)$-module.

Si $u \in A(G)$, $v \in B(G)$, alors $(vT)(u) \in A(G)$ d'après (3.17), et l'on a

(4.2) $$(vT)(u)(x) = T[u(\check{v})_{x^{-1}}](x) \quad \text{pour tout } x \in G.$$

En effet,

$$(vT)(u)(x) = \varphi_{vT}((u_x)^\vee) = \varphi_T((u_x)^\vee v) = \varphi_T[(u_x\check{v})^\vee] = T[u(\check{v})_{x^{-1}}](x).$$

Remarques.

1° Si $u \in A(G)$ et si $T \in VN(G)$, on se gardera de confondre l'*opérateur $uT \in VN(G)$* défini en (4.1) et la *fonction $Tu \in A(G)$* définie en (3.18).

2° Si $T = \rho(\mu)$, où $\mu \in M^1(G)$, et si $v \in B(G)$, alors on a

$$v\,\rho(\mu) = \rho(v\mu),$$

où $v\mu$ est le produit au sens usuel de la mesure μ par la fonction v. En effet, si $u \in A(G)$ on a d'après (4.2) et (3.17),

(4.3) $$\begin{aligned}[v\,\rho(\mu)](u)(x) &= \rho(\mu)[(u\check{v}_{x^{-1}})](x) \\ &= \mu \star (u\check{v}_{x^{-1}})(x) = \int \check{v}(y^{-1}xx^{-1})\,u(y^{-1}x)\,d\mu(y) \\ &= \int u(y^{-1}x)\,v(y)\,d\mu(y) = v\mu \star u(x) = [\rho(v\mu)\,u](x),\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

3° De (4.1), il résulte immédiatement que, si $u \in B(G)$ et si $T \in VN(G)$, on a

$$\| uT \|_\rho \leq \| u \| . \| T \|_\rho.$$

(4.4) PROPOSITION. — *Soit $T \in VN(G)$, et soit $a \in G$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) [resp. (i)′] *L'opérateur $\rho(a)$ est limite faible dans $VN(G)$ d'opérateurs vT, où $v \in A(G)$ [resp. où $v \in \mathcal{D}(G)$].*

(ii) *Si $u \in A(G)$ et si $uT = 0$, alors $u(a) = 0$.*

(iii) [resp. (iii)′] *Pour tout voisinage V de a, il existe une fonction $u \in A(G)$ [resp. $u \in \mathcal{D}(G)$], à support dans V et telle que $\varphi_T(u) \neq 0$.*

DÉMONSTRATION. — Désignons par I_T l'ensemble des $u \in A(G)$ tels que $uT = 0$. D'après (4.1), il est clair que I_T est un idéal fermé de $A(G)$ et que, dans la dualité entre VN et A, I_T est l'ensemble des u orthogonaux au sous-espace E_T de $VN(G)$ formé des vT, où $v \in A(G)$; donc I_T est aussi l'orthogonal de l'ensemble des vT, où $v \in \mathcal{D}(G)$, car $\mathcal{D}$ est dense dans A d'après (3.26). Par suite, (i) et (i)′ expriment tous deux que $\rho(a)$ est orthogonal à I_T, donc (i) $\Leftrightarrow$ (i)′. De plus, (i) $\Leftrightarrow$ (ii), car, en vertu de (3.14), (ii) énonce que : $u \in I_T$ entraîne que $u(a) = \varphi_{\rho(a)}(u) = 0$; donc l'assertion (ii) énonce elle aussi que $\rho(a)$ est orthogonal à I_T.

Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (iii)′. Supposons, en effet, non-(iii)′. Il existe un voisinage V de a tel que, pour toute $u \in \mathcal{D}(G)$ à support dans V, on ait $\varphi_T(u) = 0$. Or il existe (*cf.* F. BRUHAT [6], p. 46, prop. 2) une fonction $u_0 \in \mathcal{D}(G)$ telle que support $(u_0) \subset V$ et telle que $u_0(a) \neq 0$. Pour toute $v \in \mathcal{D}(G)$, on a

$$\text{support } (vu_0) \subset V, \qquad \text{donc} \quad \varphi_{vT}(u_0) = \varphi_T(u_0 v) = 0;$$

par densité de $\mathcal{D}$ dans A, on a même $\varphi_T(u_0 v) = 0$ pour toute $v \in A(G)$, donc $u_0 T = 0$, alors que $u_0(a) \neq 0$; c'est nier l'assertion (ii).

Il est évident que (iii)′ $\Rightarrow$ (iii). Reste à voir que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Soit $u \in A$ telle que $u(a) \neq 0$; nous avons alors à démontrer que $u \notin I_T$. Il existe $\delta > 0$ et un voisinage compact V de a, tels que $|u(x)| \geq \delta$ pour tout $x \in V$. En vertu de (3.34) et de (3.2), $A(G)$ est régulière au sens de ŠILOV : par conséquent, il existe $w \in A$ telle que $w(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ pour tout $x \in V$ (*cf.* par exemple C. E. RICKART [25], p. 172, théorème (3.6.15)). Soit alors, en vertu de (iii), une fonction $h \in A$, à support dans V, et telle que $\varphi_T(h) \neq 0$. Posons $v = hw$. On constate que $h = vu$; en effet, les deux membres sont nuls hors de V. Ainsi

$$\varphi_{vT}(u) = \varphi_T(uv) = \varphi_T(h) \neq 0, \qquad \text{donc} \quad u \notin I_T.$$

(4.5) DÉFINITION. — Soit $T \in VN(G)$. On appelle *support de* T, et l'on note $\mathrm{supp}(T)$, *l'ensemble des* $a \in G$ *qui satisfont aux cinq conditions équivalentes de* (4.4).

Le support de l'opérateur zéro est la partie vide de G. Réciproquement :

(4.6) PROPOSITION. — *Si* $T \in VN(G)$, *et si* $T \neq 0$, *le support de* T *est un ensemble fermé non vide de* G.

DÉMONSTRATION. — D'après (4.4), (ii), le support de T, ensemble des zéros communs aux $v \in I_T$, est fermé dans G. D'après le théorème taubérien [*cf.* (3.38)], pour montrer que cet ensemble est non vide, il suffit de voir que, si $T \neq 0$, alors $I_T \neq A(G)$. Or, si $T \neq 0$, il existe $u \in A \cap L(G)$ telle que $\varphi_T(u) \neq 0$. Soit une fonction $v \in A(G)$ valant 1 sur le support de u; alors $u = uv$, donc

$$\varphi_T(u) = \varphi_T(uv) = \varphi_T(u) \neq 0.$$

Par suite, $u \notin I_T$.

(4.7) REMARQUE. — Soit $T \in VN(G)$ et, d'après (3.27), soit

$$\bar{\rho}^1(T) \in \mathcal{D}'(G)$$

telle que, pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(G)$, on ait : $T(\alpha) = \bar{\rho}^1(T) \star \alpha$. Alors *le support de* T *n'est autre que le support de la distribution* $\bar{\rho}^1(T)$. Cela résulte immédiatement de (4.4), (iii)' et de la formule $\langle \bar{\rho}^1(T), \alpha \rangle = \varphi_T(\alpha)$. En particulier, si $\mu \in M^1(G)$, le support de l'opérateur $\rho(\mu)$ coïncide avec le support (au sens usuel) de la mesure μ.

Rassemblons maintenant quelques propriétés élémentaires de la notion de support, qui trouveront leur utilité dans la suite.

(4.8) PROPOSITION.

1° *Si* $v \in B(G)$, *et si* $T \in VN(G)$, *on a*

$$\mathrm{supp}\,(vT) \subset \mathrm{supp}\,(T) \cap \mathrm{supp}(v).$$

En particulier, *si* $v \in B(G)$ *s'annule au voisinage de* $\mathrm{supp}(T)$, *on a* $vT = 0$.

2° $\mathrm{supp}\,(T)$ *est le plus petit des fermés* F *de* G *qui remplissent la condition suivante : pour toute* $v \in A \cap L(G)$ *s'annulant au voisinage de* F, *on a* $\varphi_T(v) = 0$.

3° $\mathrm{supp}(T)$ *est le plus petit des fermés* F *de* G *qui remplissent la condition suivante : pour tout voisinage fermé* Ω *de* F *tel que le complémentaire de* Ω *soit relativement compact, l'opérateur* T *est limite faible dans* $VN(G)$ *de combinaisons linéaires d'opérateurs* $\rho(x)$, *où* $x \in \Omega$.

4° *Soit* $T \in VN(G)$, *et soit* σ *un fermé de* G. *Soient* T_α *des opérateurs de* $VN(G)$ *convergeant faiblement vers* T, *avec* $\mathrm{supp}(T_\alpha) \subset \sigma$ *pour tout* α. *Alors* $\mathrm{supp}(T) \subset \sigma$.

5° *Soient* $\lambda \in \mathbf{C}$ *non nul, et* T, T_1, $T_2 \in VN(G)$. *On a les formules :*

a. $\operatorname{supp}(\lambda T) = \operatorname{supp}(T)$;

b. $\operatorname{supp}(T^\star) = [\operatorname{supp}(T)]^{-1}$;

c. $\operatorname{supp}(T_1 + T_2) \subset \operatorname{supp}(T_1) \cup \operatorname{supp}(T_2)$, *avec égalité si, de plus,* $\operatorname{supp}(T_1) \cap \operatorname{supp}(T_2) = \emptyset$;

d. Si T_1 *ou* T_2 *est à support compact,* $\operatorname{supp}(T_1 T_2) \subset [\operatorname{supp}(T_1)][\operatorname{supp}(T_2)]$.

6° *Soit* $T \in VN(G)$, *et soit* $u \in (A \cap L)(G)$. *Alors on a*

$$\operatorname{supp}(Tu) \subset [\operatorname{supp}(T)][\operatorname{supp}(u)].$$

DÉMONSTRATION.

1° Sur la définition (4.4), (i), il est évident que

$$\operatorname{supp}(vT) \subset \operatorname{supp}(T).$$

Montrons que $\operatorname{supp}(vT) \subset \operatorname{supp}(v)$. Si $a \notin \operatorname{supp}(v)$, il existe un voisinage V de a sur lequel v s'annule identiquement. Alors, pour toute $u \in A(G)$ à support dans V, on a $uv = 0$, donc

$$\varphi_{vT}(u) = \varphi_T(uv) = 0.$$

Par suite, $a \notin \operatorname{supp}(vT)$, d'après (4.4), (iii). Si $v \in B(G)$ s'annule au voisinage de $\operatorname{supp}(T)$, on a

$$\operatorname{supp}(T) \cap \operatorname{supp}(v) = \emptyset, \qquad \text{donc} \quad \operatorname{supp}(vT) = \emptyset,$$

donc $vT = 0$, d'après (4.6).

2° D'abord, $\operatorname{supp}(T)$ remplit la condition indiquée : soit, en effet, $v \in A \cap L(G)$ nulle au voisinage de $\operatorname{supp}(T)$, et soit, d'après (3.2), une fonction $k \in A(G)$, valant 1 sur $\operatorname{supp}(v)$, et s'annulant au voisinage de $\operatorname{supp}(T)$. Alors $kT = 0$, d'après le 1°. Or $kv = v$. Donc,

$$\varphi_T(v) = \varphi_T(kv) = \varphi_{kT}(v) = 0.$$

Si maintenant F est un fermé remplissant la condition de l'énoncé, montrons que $\operatorname{supp}(T) \subset F$. Si $a \notin F$, il existe un voisinage compact V de a et un voisinage Ω de F tels que $V \cap \Omega = \emptyset$. Pour toute $u \in A(G)$ à support dans V, donc s'annulant au voisinage de F, on a

$$\varphi_T(u) = 0.$$

Donc $a \notin \operatorname{supp}(T)$, d'après (4.4), (iii).

3° Soit Ω un voisinage fermé de F tel que le complémentaire de Ω soit relativement compact, et soit I_Ω l'idéal des $v \in A(G)$ s'annulant sur Ω. Par bipolarité, dire que, pour toute $v \in I_\Omega$, on a $\varphi_T(v) = 0$ revient à dire que T est faiblement adhérente aux combinaisons linéaires des $\rho(x)$, $x \in \Omega$. Ainsi 3° se déduit de 2°.

4° Pour toute $u \in A \cap L(G)$ s'annulant au voisinage de σ, on a $\varphi_{T_\alpha}(u) = 0$ d'après 2°, donc $\varphi_T(u) = 0$ par passage à la limite faible. Par suite, $\mathrm{supp}(T) \subset \sigma$, d'après 2°.

5° a est évident sur (4.4), (i). Quant à b, il résulte par exemple de 3°, de la continuité de l'application $T \to T^\star$ pour la topologie faible, et de la formule

$$\rho(x)^\star = \rho(x^{-1}).$$

Montrons c. Si $v \in (A \cap L)(G)$ s'annule au voisinage du fermé $\mathrm{supp}(T_1) \cup \mathrm{supp}(T_2)$, elle s'annule au voisinage de $\mathrm{supp}(T_1)$ et au voisinage de $\mathrm{supp}(T_2)$; donc

$$\varphi_{T_1+T_2}(v) = \varphi_{T_1}(v) + \varphi_{T_2}(v) = 0, \quad \text{d'après } 2°.$$

Alors, d'après 2°, on a

$$\mathrm{supp}(T_1 + T_2) \subset \mathrm{supp}(T_1) \cup \mathrm{supp}(T_2).$$

Supposons de plus que

$$\mathrm{supp}(T_1) \cap \mathrm{supp}(T_2) = \emptyset.$$

Soit $v \in A(G)$ telle que $v(T_1 + T_2) = 0$. Alors

$$vT_1 = -vT_2 = S.$$

Puisque, d'après 1°, on a

$$\mathrm{supp}(S) \subset \mathrm{supp}(T_1) \cap \mathrm{supp}(T_2) = \emptyset,$$

il faut, d'après (4.6), qu'on ait $S = 0$. Ainsi $v(T_1 + T_2) = 0$ entraîne $vT_1 = vT_2 = 0$. Par conséquent,

$$\mathrm{supp}(T_1) \cup \mathrm{supp}(T_2) \subset \mathrm{supp}(T_1 + T_2),$$

d'après (4.4), (ii).

Supposons, par exemple, $\mathrm{supp}(T_2)$ compact. La formule (d) s'obtient immédiatement (par exemple à l'aide du 3°) si T_1 est de la forme $\rho(x)$, où $x \in G$, puis, à l'aide de (a) et (c), si T_1 est combinaison linéaire finie d'opérateurs $\rho(x)$. D'après 3°, pour tout voisinage fermé Ω à complémentaire relativement compact de $\mathrm{supp}(T_1)$, l'opérateur T_1 est limite faible de combinaisons linéaires S_α d'opérateurs $\rho(x)$, avec $x \in \Omega$; donc, en vertu des cas particuliers ci-dessus traités et en vertu de 4°, on a

$$\mathrm{supp}(T_1 T_2) \subset \Omega[\mathrm{supp}(T_2)],$$

ce qui fournit (d), quand on remarque que, $\mathrm{supp}(T_2)$ étant compact,

$$[\mathrm{supp}(T_1)][\mathrm{supp}(T_2)] = (\cap\, \Omega)[\mathrm{supp}(T_2)],$$

Ω parcourant l'ensemble des voisinages fermés de $\mathrm{supp}(T_1)$ à complémentaires relativement compacts.

6° Soit

$$a \notin [\mathrm{supp}(T)]\,[\mathrm{supp}(u)], \qquad \text{donc} \quad a[(\mathrm{supp}\,u)^{-1}] \cap \mathrm{supp}(T) = \emptyset.$$

Puisque supp(u) est compact, il existe un voisinage fermé V de a et un voisinage fermé Ω de supp(T) tels que : 1° $V[(\mathrm{supp}\,u)^{-1}] \cap \Omega = \emptyset$; 2° le complémentaire de Ω dans G soit compact. D'après 3°, T est limite faible dans $VN(G)$ de combinaisons linéaires T_α d'opérateurs $\rho(s)$, avec $s \in \Omega$; donc, pour tout α, et pour tout $x \in G$, $\varphi_{T_\alpha}((u_x)^\vee)$ est une somme finie $\sum_i c_i u(s_i^{-1} x)$, où $c_i \in \mathbf{C}$, $s_i \in \Omega$. Pour $x \in V$, on a

$$s_i^{-1} x \in \Omega^{-1} V, \qquad \text{donc} \quad s_i^{-1} x \notin \mathrm{supp}(u),$$

d'où suit que les $\varphi_{T_\alpha}((u_x)^\vee)$ s'annulent identiquement pour $x \in V$. Par passage à la limite faible, il vient que $Tu(x) = \varphi_T((u_x)^\vee)$ s'annule identiquement pour $x \in V$, donc $a \notin \mathrm{supp}(Tu)$.

Le théorème de Beurling.

Voici une généralisation non abélienne d'un théorème de A. Beurling [2], théorème étendu de $\mathbf{R}$ à G abélien par I. Kaplansky [20] et H. Helson [18].

(4.9) Théorème. — *Soit G un groupe localement compact. Soit $a \in G$. Si $T \in VN(G)$ a son support réduit au point a, alors T est de la forme $\lambda\,\rho(a)$, où λ est une constante.*

Démonstration. — Sur (4.8), 5°, (*d*), il est clair, à l'aide d'une translation, qu'on peut, pour faire la démonstration, se placer dans le cas où $a = e$. Mais, alors, d'après (4.8), 6°, l'hypothèse du lemme (3.28) est remplie. Donc $T = \lambda I$ d'après ce lemme.

(4.10) Corollaire 1. — *Dans l'algèbre de Banach $A(G)$, tout idéal primaire fermé est maximal.*

En effet, soit J un idéal fermé de $A(G)$ tel que les $u \in J$ aient un seul zéro commun a. Soit E le sous-espace orthogonal à J dans $VN(G)$; E est faiblement fermé et invariant par les transformations $T \to vT$, où $v \in A$, car J est un idéal. Si $T \in E$ et si $T \neq 0$, il en résulte que $I_T \supset J$, et donc que supp(T) est réduit à $\{a\}$. Par suite, T est proportionnel à $\rho(a)$. Ainsi E est de dimension 1, donc J est maximal.

(4.11) Corollaire 2. — *Soit $a \in G$. Toute $u \in A(G)$ telle que $u(a) = 0$ est limite, au sens de la norme de A, de fonctions $v_n \in A \cap L(G)$ qui s'annulent dans un voisinage de a* (variable avec n).

C'est en effet une conséquence du corollaire 1 et de la caractérisation des idéaux primaires minimaux dans une algèbre de Banach régulière au sens de Šilov (*cf.*, par exemple, C. E. Rickart [25], p. 91, (2.7.24)).

Avant de poursuivre, il peut être intéressant de donner l'interprétation du théorème (4.9) en termes de distributions. On a vu en (4.7) que le support de la distribution $\bar{\rho}^1(T)$, où $T \in VN(G)$, n'est autre que $\operatorname{supp}(T)$. Donc (4.9) énonce que *les seules distributions à support ponctuel qui définissent par convolution des opérateurs bornés dans* L^2 *sont les mesures ponctuelles*. Cette interprétation suggère une démonstration de (4.9) d'un principe tout différent de la précédente, et que nous donnons maintenant.

(4.12) Lemme. — *Avec les notations de* (3.25), *si* $T \in VN(G)$, *on a*

$$\operatorname{supp}(T_K) \subset \sigma_K(\operatorname{supp} T).$$

Démonstration. — Soit $\dot{a} \in G/K$, tel que $\dot{a} \notin \sigma_K(\operatorname{supp} T)$. Pour tout $a \in \sigma_K^{-1}(\dot{a})$, on a $a \notin \operatorname{supp}(T)$, donc il existe un voisinage V_a de a tel que $\varphi_T(\alpha) = 0$ pour toutes les $\alpha \in \mathcal{D}$ à support dans V_a. Par suite de la compacité de $\sigma_K^{-1}(a)$ et de l'existence de partitions de l'unité dans $\mathcal{D}(G)$, il existe même un ouvert U, contenant $\sigma_K^{-1}(\dot{a})$ et tel que $\varphi_T(w) = 0$ pour toute $w \in \mathcal{D}(G)$, à support dans U. Comme K est compact, il existe un voisinage $\dot{V}$ de $\dot{a}$ dans G/K tel que $\sigma_K^{-1}(\dot{V}) \subset U$; soit alors v une fonction quelconque appartenant à $\mathcal{D}(G/K)$, et à support dans $\dot{V}$. D'après F. Bruhat ([6], prop. 10), on a $v \circ \sigma_K \in \mathcal{D}(G)$; de plus, le support de $v \circ \sigma_K$ est contenu dans U. Donc

$$\varphi_{T_K}(v) = \varphi_T(v \circ \sigma_K) = 0.$$

Par suite, $\dot{a} \notin \operatorname{supp}(T_K)$, d'après (4.4), (iii)'.

Remarquons qu'en général on ne peut remplacer l'inclusion par l'égalité dans (4.12), car on peut avoir

$$T \neq 0 \quad \text{et} \quad T_K = 0, \qquad \text{donc} \quad \operatorname{supp}(T) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(T_K) = \emptyset.$$

Passons maintenant à la démonstration annoncée de (4.9). Grâce à une translation, on peut, pour faire la démonstration, se placer dans le cas $a = e$.

a. Supposons en premier lieu que G est un groupe de Lie. D'après (4.7), la distribution $\bar{\rho}^1(T)$ associée à T d'après (3.27) a son support réduit à $\{e\}$. D'après L. Schwartz ([29], t. 1, théorème XXXV), $\bar{\rho}^1(T)$ est donc de la forme $\sum_{|p| \leq m} c_p D^p \delta_e$, où les D^p constituent une base de l'espace vectoriel des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G. D'autre part, d'après (3.27), il faut que, pour toute $\alpha \in \mathcal{D}(G)$, on ait

$$\| \bar{\rho}^1(T) \star \alpha \|_2 \leq k \| \alpha \|_2,$$

où k est une constante. Ceci n'est possible que si $c_p = 0$ pour les $p \neq 0$.

b. Supposons en deuxième lieu que, dans G, la famille $\mathcal{F}$ des sous-groupes compacts distingués K de G à quotient G/K de Lie ait son intersection réduite à $\{e\}$. D'après (4.12), si $K \in \mathcal{F}$, on a

$$\operatorname{supp}(T_K) = \{e\}_{G/K} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{supp}(T_K) = \emptyset.$$

Donc, d'après (*a*), on a $T_K = \lambda_K I_K$, où $\lambda_K \in \mathbf{C}$ et où I_K est l'identité de $VN(G/K)$. Autrement dit, avec les notations de (3.23), on a

$$T(f) = \lambda_K f \quad \text{pour toute } f \in L^2_K(G).$$

Soient $K_1 \in \mathcal{F}$ et $K_2 \in \mathcal{F}$; alors

$$K_1 \cap K_2 \in \mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad L^2_{K_1}(G) \cup L^2_{K_2}(G) \subset L^2_{K_1 \cap K_2}(G);$$

par conséquent, $\lambda_{K_1} = \lambda_{K_1 \cap K_2} = \lambda_{K_2}$ et, en fait, λ_K ne dépend pas de $K \in \mathcal{F}$, soit $\lambda_K = \lambda$. En particulier,

$$Tf = \lambda f \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{D}(G) = \bigcup_{K \in \mathcal{F}} \mathcal{D}_K(G),$$

donc pour toute $f \in L^2(G)$, car $\mathcal{D}$ est dense dans L^2.

c. Passons au cas général. Soit G_1 un sous-groupe ouvert de G rentrant dans le cas (*b*). Adoptons les notations de (3.21). Il est clair sur (4.8), 2° que $\operatorname{supp}(T \mid G_1) = \{e\}$; donc, d'après (*b*), il existe une constante λ telle que

$$\varphi_T(\alpha) = \lambda \alpha(e) \quad \text{pour toute } \alpha \in \mathcal{D}(G)$$

à support contenu dans G_1. Remarquons, d'autre part, que, en vertu de (4.8), 2°, on a

$$\varphi_T(\alpha) = 0 \quad \text{pour toute } \alpha \in \mathcal{D}(G)$$

à support disjoint de G_1. Comme toute $\alpha \in \mathcal{D}(G)$ est somme finie de translatées de fonctions appartenant à $\mathcal{D}(G)$ et à support dans G_1, on obtient par linéarité que la formule $\varphi_T(\alpha) = \lambda \alpha(e)$ est valable pour toute $\alpha \in \mathcal{D}(G)$, donc pour toute $\alpha \in A(G)$ par continuité, d'où $T = \lambda I$.

Le théorème de Ditkin-Helson.

Établissons d'abord un lemme en déduction de (4.11).

(4.13) LEMME. — *Soit $\mathcal{V}$ un système fondamental de voisinages compacts et symétriques V de e. Alors il existe des fonctions h_V vérifiant les conditions suivantes :*

1° $h_V \in P(G)$;

2° $\| h_V \| = h_V(e) = 1$;

3° *support* $(h_V) \subset V^2$;

4° *quel que soit* $u \in A(G)$ *vérifiant* $u(e) = 0$ *et quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe* $V_\varepsilon \in \mathcal{V}$ *tel que*

$$V \in \mathcal{V}, \qquad V \subset V_\varepsilon \;\Rightarrow\; \| h_V u \| < \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION. — Soit g_V la fonction caractéristique de $V \in \mathcal{V}$. Posons

$$h_V = \frac{g_V \star \tilde{g}_V}{\| g_V \|_2^2}.$$

Alors $h_V \in P(G)$. De plus, pour tout $x \in G$, on a

$$h_V(x) = \frac{1}{\| g_V \|_2^2} \int_G g_V(y)\, g_V(x^{-1}y)\, dy = \frac{1}{\| g_V \|_2^2} \int_V g_V(x^{-1}y)\, dy,$$

donc $h_V(e) = 1$; d'autre part, si $x \notin V^2$, alors pour tout $y \in V$, on a

$$x^{-1}y \notin V, \qquad \text{donc} \quad h_V(x) = 0,$$

d'où le 3°. Soit maintenant $u \in A(G)$ vérifiant $u(e) = 0$. D'après (4.11), considérons des $v_n \in (A \cap L)(G)$, nulles au voisinage de e, et telles que $\lim\limits_n \| u - v_n \| = 0$. Il existe un indice n_0 tel que, quel que soit $V \in \mathcal{V}$,

$$\| h_V u - h_V v_{n_0} \| \leqq \| h_V \| . \| u - v_{n_0} \| = \| u - v_{n_0} \| < \varepsilon.$$

Alors, si $V_\varepsilon \in \mathcal{V}$ est choisi tel que $V_\varepsilon^2 \cap \operatorname{supp}(v_{n_0}) = \emptyset$, on aura, pour tout $V \subset V_\varepsilon$,

$$h_V v_{n_0} = 0, \qquad \text{donc} \quad \| h_V u \| < \varepsilon.$$

(4.14) DÉFINITION. — Soit $T \in VN(G)$. On dira que T *remplit la condition* (H), *si* T *est limite faible dans* $VN(G)$ *d'opérateurs* vT, *où* $v \in A(G)$. Par bipolarité, il revient au même de dire que

$$u \in A(G) \qquad \text{et} \qquad uT = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_T(u) = 0.$$

En effet, cette dernière condition exprime que T est orthogonal à l'ensemble des $u \in A(G)$ qui sont tels que

$$\varphi_{vT}(u) = \varphi_{uT}(v) = 0 \quad \text{pour tout} \qquad v \in A(G),$$

c'est-à-dire des u qui sont orthogonaux aux vT, $v \in A(G)$.

Nous ne connaissons pas d'exemple, pour G convenable, d'un opérateur $T \in VN(G)$ qui ne satisfasse pas à l'hypothèse (H). Voici des cas où cette hypothèse est remplie.

(4.15) *Si* $\operatorname{supp}(T)$ *est compact,* T *remplit la condition* (H).

Soit, en effet [*cf.* (3.2)], $k \in A(G)$ une fonction égale à 1 dans un voisinage compact Ω de $\operatorname{supp}(T)$. Quel que soit $u \in (A \cap L)(G)$, on a $ku = u$ dans Ω. Comme $ku - u$ est à support compact, on a donc, d'après (4.8), 2°,

$$0 = \varphi_T(ku - u) = \varphi_{kT}(u) - \varphi_T(u) = \varphi_{kT-T}(u).$$

Par suite, $kT = T$, résultat plus précis que (H).

(4.16) *Si G est abélien, tout $T \in VN(G)$ remplit la condition* (H).

Dans ce cas, en effet, on sait (*cf.* [26], p. 6) que toute $u \in A(G)$ est limite en norme dans $A(G)$ d'une suite de la forme uv_n, où $v_n \in A(G)$. Par suite, si $u \in A(G)$ est fixé, tel que $uT = 0$, on a

$$\varphi_T(u) = \lim_n \varphi_T(uv_n) = \lim_n \varphi_{uT}(v_n) = 0,$$

d'où le résultat.

(4.17) *Supposons que G possède la propriété d'approximation* (R) citée en (1.16).

Soit $\overline{M}_1$ l'adhérence en norme dans $VN(G)$ des $\rho(\mu)$, où $\mu \in M^1(G)$. Alors *tout $T \in \overline{M}_1$ est limite en norme d'opérateurs vT*, où v appartient à l'ensemble P_0 des $v \in P \cap L(G)$ telles que $v(e) = 1$; ce qui est plus précis que la condition (H).

En effet, soit $T \in \overline{M}^1$, et soit $\varepsilon > 0$. Choisissons :

1° une mesure $\mu \in M^1$ telle que $\| T - \rho(\mu) \|_\rho \leq \varepsilon$;

2° un compact K de G tel que $|\mu|(G - K) \leq \varepsilon$;

3° une fonction $v \in P_0$ telle que, pour tout $x \in K$, on ait

$$|1 - v(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\|\mu\|_1};$$

[l'existence d'une telle v résulte immédiatement de la condition (R)]. Alors

$$\begin{aligned} \| \rho(\mu) - v\rho(\mu) \|_\rho &\leq \| (1 - v)\mu \|_1 \\ &\leq \int_K |1 - v(x)|\, d|\mu|(x) + 2\int_{G-K} d|\mu|(x) \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

et

$$\| v(T - \rho(\mu)) \|_\rho \leq v(e) \| T - \rho(\mu) \|_\rho \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\| T - vT \|_\rho \leq \| T - \rho(\mu) \|_\rho + \| \rho(\mu) - v\rho(\mu) \|_\rho + \| v(T - \rho(\mu)) \|_\rho \leq 5\varepsilon.$$

(4.18) Proposition. — *Soit $T \in VN(G)$ remplissant la condition* (H). *Alors, pour tout voisinage fermé Ω de* supp(T), *l'opérateur T est limite faible dans $VN(G)$ de combinaisons linéaires d'opérateurs $\rho(x)$, où $x \in \Omega$.*

Démonstration. — Soit E le sous-espace vectoriel de $VN(G)$ engendré par les $\rho(x)$, où $x \in \Omega$. Son orthogonal dans $A(G)$ est l'idéal I des fonctions $u \in A(G)$ telles que : $u(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. Pour toute $u \in I$, on a $uT = 0$, d'après (4.8), 1°, et donc $\varphi_T(u) = 0$, d'après la condition (H). Ainsi T appartient à l'orthogonal de I dans $VN(G)$, c'est-à-dire à l'adhérence faible de E.

(4.19) THÉORÈME. — *Soit* $T \in VN(G)$ *tel que la frontière de* supp(T) *ne contienne pas d'ensemble parfait non vide.*

1° *Soit une fonction* $u \in A(G)$ *s'annulant sur* supp(T). *Alors* $uT = 0$.

2° *Si, de plus,* T *remplit la condition* (H), *alors* T *est limite faible dans* $VN(G)$ *de combinaisons linéaires d'opérateurs* $\rho(x)$, *où* $x \in$ supp(T).

DÉMONSTRATION.

1° Remarquons, pour commencer, que supp(uT) est contenu dans la *frontière* de supp(T) : en effet, si a est dans l'intérieur de supp(T), il existe un voisinage V de a sur lequel u s'annule identiquement, donc $\varphi_{uT}(v) = \varphi_T(uv) = 0$ pour toute $v \in A(G)$ à support dans V, et par suite, $a \notin$ supp(uT) d'après (4.4), (iii). Pour montrer que $uT = 0$, il suffit, d'après le théorème taubérien, de voir que supp(uT) est vide, donc, en vertu de l'hypothèse, il suffit d'établir que supp(uT) *n'a pas de point isolé*, ce que nous prouvons par l'absurde. Soit p un point isolé de supp(uT); au prix d'une translation, on peut supposer $p = e$. D'après (3.2), soit $g \in A(G)$ une fonction valant 1 en e et s'annulant dans un ouvert qui contient supp$(uT) - \{e\}$. D'après (4.8), 1°,

$$\operatorname{supp}(guT) \subset \operatorname{supp}(g) \cap \operatorname{supp}(uT)$$

contient au plus le point e. Donc, d'après (4.9), on a $guT = \lambda I$, où λ est une constante. Introduisons les fonctions h_{V} du lemme (4.13). On a

$$h_V u . gT = h_V . guT = h_V \lambda I = \lambda h_V(e) I = \lambda I.$$

Mais, comme $u(e) = 0$, on a, d'après (4.13),

$$\lim_{\mathcal{V}} \| h_V u \| = 0, \qquad \text{donc} \quad \lambda = 0.$$

Ainsi $guT = 0$, alors que $g(e) \neq 0$, ce qui, d'après (4.4), (ii), contredit l'appartenance de e à supp(uT).

2° L'idéal I des fonctions $u \in A(G)$ telles que $u(x) = 0$ sur supp(T) est l'orthogonal dans $A(G)$ du sous-espace E de $VN(G)$ engendré par les $\rho(x)$, où $x \in$ supp(T). D'après 1°, quel que soit $u \in I$, on a $uT = 0$, et donc $\varphi_T(u) = 0$ d'après la condition (H). Ainsi T est orthogonal à I, donc faiblement adhérent à E.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AGMON (S.) et MANDELBROJT (S.). — Une généralisation du théorème taubérien de Wiener, *Acta scient. math. Univ. Szeged*, t. 12, 1950, p. 167-176.
[2] BEURLING (A.). — Un théorème sur les fonctions bornées et uniformément continues sur l'axe réel, *Acta Math.*, t. 77, 1945, p. 127-136.
[3] BOCHNER (S.). — A theorem on Fourier-Stieltjes integrals, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 40, 1934, p. 271-276.

[4] Bourbaki (N.). — Livre V : *Espaces vectoriels topologiques*, chap. 3-5. — Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1229; Éléments de Mathématique, 18).

[5] Bourbaki (N.). — Livre VI : *Intégration*, chap. 1-4. — Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1175; Éléments de Mathématique, 13).

[6] Bruhat (F.). — Distributions sur un groupe localement compact, et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques, *Bull. Soc. math. France*, t. 89, 1961, p. 43-75.

[7] Cartan (H.) et Godement (R.). — Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, Série 3, t. 64, 1947, p. 77-99.

[8] Darsow (W. F.). — Positive definite functions and states, *Annals of Math.*, Series 2, t. 60, 1954, p. 447-453.

[9] Dixmier (J.). — *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (*Algèbres de von Neumann*). — Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Cahiers scientifiques, 25).

[10] Ditkin (V. A.). — On the structure of ideals in certain normed rings, Učenye Zapiski Moskov, *Gos. Univ. Mat.*, t. 30, 1939, p. 83-130.

[11] Eberlein (W. F.). — Characterizations of Fourier-Stieltjes transforms, *Duke math. J.*, t. 22, 1955, p. 465-468.

[12] Effros (E. G.). — Order ideals in a C^*-algebra and its dual, *Duke math. J.*, t. 30, 1963, p. 391-411.

[13] Eymard (P.). — L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 1429-1431.

[14] Fell (J. M. G.). — The dual spaces of C^*-algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 94, 1960, p. 365-403.

[15] Godement (R.). — Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 63, 1948, p. 1-84.

[16] Godement (R.). — Théorèmes taubériens et théorie spectrale, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, Série 3, t. 64, 1947, p. 119-138.

[17] Grothendieck (A.). — Un résultat sur le dual d'une C^*-algèbre, *J. Math. pures et appl.*, Série 9, t. 36, p. 97-108.

[18] Helson (H.). — Spectral synthesis of bounded functions, *Arkiv för Mat.*, t. 1, 1952, p. 497-502.

[19] Herz (C. S.). — The spectral theory of bounded functions, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 94, 1960, p. 181-232.

[20] Kaplansky (I.). — Primary ideals in group algebras. *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 35, 1949, p. 133-136.

[21] Krein (M.). — On almost periodic functions on a topological group, *C. R. (Doklady) Acad. Sc. U. R. S. S.*, N. S., t. 30, 1941, p. 5-8; On positive functionals on almost periodic functions, *C. R. (Doklady) Acad. Sc. U. R. S. S.*, N. S., t. 30, 1941, p. 9-12.

[22] Loomis (L. H.). — *An introduction to abstract harmonic analysis.* — New York, Van Nostrand, 1953 (The University Series in higher Mathematics).

[23] Mirkil (H.). — Translation-invariant function algebras over compact groups, IV, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 59, 1953, p. 162-163.

[24] Neumark (M. A.). — *Normierte Algebren.* — Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959 (Hochschulbücher für Mathematik, 45).

[25] Rickart (C. E.). — *General theory of Banach algebras.* — Princeton, New York, Van Nostrand, 1960 (The University Series in higher Mathematics).

[26] Rudin (W.). — *Fourier analysis on groups.* — New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 12).

[27] Sakai (S.). — On linear functionals of W^*-algebras, *Proc. Japan Acad.*, t. 34, 1958, p. 571-574.

[28] Schœnberg (I. J.). — A remark on the preceding Note by Bochner, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 40, 1934, p. 277-278.

[29] Schwartz (L.). — *Théorie des distributions.* Tomes 1 (2^e^ éd.) et 2. — Paris, Hermann, 1950-1957 (Act. scient. et ind., 1091, 1245 et 1122; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).

[30] Stinespring (W. F.). — Integration theorems for gages and duality for unimodular groups, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 90, 1959, p. 15-56.

[31] Takeda (Z.). — Conjugate spaces of operators algebras, *Proc. Japan Acad.*, t. 30, 1954, p. 90-95.

[32] Takenouchi (O.). — Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact, *Math. J. Okayama Univ.*, t. 4, 1955, p. 143-173.

[33] Tomita (M.). — Spectral theory of operator algebras, I, *Math. J. Okayama Univ.*, t. 9, 1959-1960, p. 63-98.

[34] Weil (A.). — *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* — Paris, Hermann, 1940 (Act. scient. et ind., 869; Publ. Inst. Math. Univ. Clermont-Ferrand, 4).

[35] Wiener (N.). — Tauberian theorems, *Annals of Math.*, Series 2, t. 33, 1932, p. 1-100.

[36] Yoshizawa (H.). — Some remarks on unitary representations of the free group, *Osaka math. J.*, t. 3, 1951, p. 55-63.

(Manuscrit reçu le 21 septembre 1963.)

Pierre Eymard,
Ch. C. Fac. Sc. Nancy,
16, rue Jeanne-d'Arc,
Nancy (Meurthe-et-Moselle).