BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale

Bulletin de la S. M. F., tome 92 (1964), p. 11-100
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__11_0>

Bull. Soc. math. France,
92, 1964, p. 11 à 100.

CHAMPS SPINORIELS ET PROPAGATEURS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE ;

PAR

ANDRÉ LICHNEROWICZ
(Paris).

Un des problèmes fondamentaux de la physique mathématique contemporaine concerne *la quantification d'un champ physique quelconque sur un espace-temps courbe.*

Le formalisme utilisé par la théorie quantique des champs dans le cadre de la relativité restreinte fait intervenir d'une manière essentielle la transformation de Fourier. Sur un espace-temps courbe, il n'existe rien d'analogue. Il nous a donc fallu développer une théorie équivalente à la théorie usuelle dans le cas de l'espace-temps plat et qui ne fasse aucun usage de la transformation de Fourier. Cela a été rendu possible par l'étude directe des solutions élémentaires de l'opérateur de Klein-Gordon sur les champs physiques des différents types. Je me suis limité pour le moment aux champs libres, car ce sont provisoirement les seuls pour lesquels une étude mathématique rigoureuse peut être développée. Une telle étude fait appel aux travaux de LERAY sur les systèmes différentiels hyperboliques et à ceux de M^me^ CHOQUET-BRUHAT.

Depuis 1958, j'ai systématiquement introduit les *propagateurs*, différence de solutions élémentaires de l'opérateur de Klein-Gordon et montré comment ces propagateurs permettent la construction de commutateurs rigoureux pour les champs tensoriels. Dans différentes publications dont [9], j'ai développé la théorie mathématique des propagateurs tensoriels et je l'ai appliquée à la construction des commutateurs du méson scalaire (spin 0), du champ électromagnétique (spin 1) et du champ gravitationnel varié (spin 2) en relativité générale. Un instrument apparemment semblable a été introduit en physique par Bryce DE WITT et appliqué de manière intéressante à l'étude de problèmes variés par Bryce et Cecile DE WITT.

Dans une conférence au Colloque international de Varsovie (1962) encore sous presse, j'ai montré comment l'introduction du propagateur G et celle d'un noyau symétrique G_1 relié à G par une identité intégrale et solution de l'équation de Klein-Gordon homogène, permet la définition directe des opérateurs de création-annihilation.

***

Le présent travail est consacré aux principaux champs spinoriels ou relevant du formalisme spinoriel, dans le cadre de la relativité générale. Dans un premier chapitre, je rappelle brièvement, en les adaptant au but poursuivi, les éléments de la théorie des propagateurs tensoriels. Pour plus de détails, on pourra se reporter à LICHNEROWICZ [9]. Le second chapitre est relatif à la théorie des spineurs en relativité générale dans l'optique d'Élie CARTAN. Je me suis efforcé d'exposer et de préciser cette théorie du point de vue de la géométrie différentielle contemporaine (introduction de l'espace fibré des repères spinoriels), mais en conservant des notations qui rendent la théorie accessible sans grand effort aux physiciens théoriciens. Un exposé entièrement intrinsèque — certainement plus satisfaisant pour le mathématicien pur — aurait vite lassé la patience du physicien.

Les chapitre III et IV portent respectivement sur le champ de Dirac (spin $1/2$, masse $\neq 0$) et sur le champ de Rarita-Schwinger (spin $3/2$, masse $\neq 0$). On y trouvera, exposée en termes de propagateurs spinoriels, la théorie des anticommutateurs qui généralisent rigoureusement ceux élaborés dans le cadre de la relativité restreinte et en particulier l'anticommutateur dû à TAKAHASHI, UMEZAWA et VISCONTI.

Le dernier chapitre est consacré à la théorie de PETIAU-DUFFIN-KEMMER, c'est-à-dire à la théorie en formalisme spinoriel du champ de spin maximum 1, en accord avec la méthode de fusion de Louis DE BROGLIE. On exploite ici essentiellement la correspondance classique entre les formes extérieures et les spineurs d'ordre 2. A l'opérateur de Dirac correspond ainsi l'opérateur $(d + \delta)$ sur les formes, dont le carré n'est autre que le laplacien de Georges DE RHAM.

Les principaux résultats de ce travail ont été publiés dans les *Comptes rendus*. Ils ont fait l'objet d'un cours professé au Collège de France pendant l'année 1962-1963.

I. — Rappel sur la théorie des propagateurs.

1. Tenseurs-distributions sur une variété. — Le présent travail s'appuie essentiellement sur la notion de *propagateur* relatif, sur une variété différentiable, à un opérateur hyperbolique. Ces propagateurs apparaissent comme des généralisations du propagateur scalaire de Jordan-Pauli qui joue un rôle fondamental dans la théorie quantique des champs usuels. Ce sont ces propagateurs qui permettent, en particulier, la construction de commutateurs et d'anticommutateurs des champs en relativité générale.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de rappeler brièvement la notion de propagateur telle que je l'ai développée dans le cas tensoriel [1]. Les principaux résultats que nous dégagerons s'établissent de manière tout à fait analogue dans le cas spinoriel.

a. Soit V_n une variété différentiable orientée de dimension n, de classe C^∞, munie d'un élément de volume η. Si T est un p-tenseur covariant et U un p-tenseur contravariant, nous appelons $(T, U)_x$ le produit contracté de T et U au point x de V_n. En coordonnées locales (x^α) (α, tout indice grec $= 1, \ldots, n$) nous avons

$$(T, U)_x = T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x)\, U^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x), \tag{1.1}$$

$\mathcal{D}^p_{V_n}$ est l'espace des p-tenseurs contravariants de V_n de classe C^∞ à support $S(U)$ compact. Si $U \in \mathcal{D}^p_{V_n}$:

$$\langle T, U \rangle = \int_{V_n} (T, U)_x \eta(x). \tag{1.2}$$

b. Un p-tenseur-distribution covariant (resp. contravariant) T est une fonctionnelle linéaire continue à valeurs scalaires sur les p-tenseurs contravariants (resp. covariants) à support compact de classe C^∞. Si $U \in \mathcal{D}^p_{V_n}$ nous désignons par $T[U]$ ou $\langle T, U \rangle$ la valeur pour U du tenseur-distribution covariant T. Un tenseur ordinaire T définit un tenseur-distribution par la formule (1.2) dans laquelle l'élément de volume intervient.

Si nous considérons seulement des tenseurs antisymétriques covariants — ou formes — nous obtenons *les p-formes-distributions* définies comme fonctionnelles linéaires continues sur les p-tenseurs antisymétriques contravariants à support compact. Cette notion diffère de la notion de courant due à G. de Rham. Mais si V_n est munie d'une structure riemannienne et si η est l'élément de volume correspondant, les fonctionnelles respectives se correspondent par l'action de l'opérateur $*$ d'adjonction sur les formes.

Si T est un scalaire-distribution et V un p-tenseur covariant, TV est le p-tenseur-distribution covariant défini par

$$TV[U] = T[(V, U)] \qquad (U \in \mathcal{D}^p_{V_n}).$$

---

[1] Lichnerowicz [9].

Avec cette définition, on voit que si T est un p-tenseur-distribution covariant dans un voisinage ouvert Ω de coordonnées, il peut être écrit

$$T = T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\, dx^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\alpha_p},$$

où les composantes $T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ de T sont des scalaires-distributions de Ω.

c. Supposons V_n munie d'une structure riemannienne dont le tenseur métrique g admet une signature arbitraire, et soit η l'élément de volume riemannien correspondant. Nous avons, en coordonnées locales,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \tag{1.3}$$

Soit ∇ l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne, δ l'opérateur de codifférentiation défini sur les $(p + 1)$-tenseurs par

$$\delta : \quad U_{\beta_1 \ldots \beta_{p+1}} \to - \nabla_\rho U^\rho{}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}. \tag{1.4}$$

Si T est un p-tenseur ordinaire, U un $(p + 1)$-tenseur à support compact, on obtient par intégration par parties,

$$\langle \nabla T, U \rangle = \langle T, \delta U \rangle. \tag{1.5}$$

Nous sommes ainsi conduits à définir par (1.5) *le $(p + 1)$-tenseur-distribution dérivée covariante du p-tenseur-distribution T.* Les propriétés classiques de la dérivation covariante dans une connexion riemannienne et les formules correspondantes sont valables pour les tenseurs-distributions.

Si T est un tenseur-distribution et U un tenseur ordinaire tels que l'intersection $S(T) \cap S(U)$ soit compacte, $\langle T, U \rangle$ a un sens. Sous la même hypothèse, la formule (1.5) est valable et il en est encore ainsi pour la formule

$$\langle \delta T, U \rangle = \langle T, \nabla U \rangle, \tag{1.6}$$

où T est un $(p + 1)$-tenseur-distribution et U un p-tenseur ordinaire.

2. Bitenseurs de Dirac.

a. Dans la théorie des opérateurs différentiels tensoriels sur une variété, les notions de bitenseurs et bitenseurs-distributions relatifs à $V_n \times V_n$ interviennent nécessairement. Si T_x est l'espace vectoriel tangent en x, un bitenseur en (x, x') est un élément du produit tensoriel $T_x^{(p)} \otimes T_{x'}^{(q)}$.

A chaque point x de V_n, associons le scalaire-distribution δ_x défini par

$$\langle \delta_x(x'), f(x') \rangle_{V_n} = f(x) \tag{2.1}$$

pour tout scalaire $f \in \mathcal{D}^0_{V_n}$. De δ_x on déduit un biscalaire-distribution δ : si $f(x, x') \in \mathcal{D}^0_{V_n \times V_n}$,

$$\langle \delta(x, x'), f(x, x') \rangle_{V_n \times V_n} = \langle \delta_x(x'), f(x, x') \rangle_{V_n \times V_n}, \tag{2.2}$$

$\delta(x, x')$ est le *biscalaire de Dirac* de V_n. Nous abandonnons la notation δ_x et écrivons (2.1) :

$$\langle \delta(x, x'), f(x') \rangle = f(x). \tag{2.3}$$

b. Dans la suite, nous désignons par $\tau(x, x')$ un bi-1-tenseur arbitraire, de composantes mixtes $\tau^\alpha_{\lambda'}(x, x')$ en repères quelconques, astreint seulement à ce que $\tau(x, x')$ coïncide avec le tenseur représentatif de l'opérateur identité en x, soit

$$\tau^\alpha_{\lambda'}(x, x) = \delta^\alpha_{\lambda'},$$

où les $\delta^\alpha_{\lambda'}$ désignent les symboles de Kronecker.

Par produit tensoriel de τ par lui-même, nous obtenons des bi-p-tenseurs $\overset{p}{\otimes}\tau$. Les *bitenseurs de Dirac* de V_n sont les bitenseurs-distributions

$$D^{(p)}(x, x') = \left(\overset{p}{\otimes}\tau\right)\delta(x, x')$$

qui dépendent seulement de la structure riemannienne et non du choix de τ. $D^{(p)}(x, x')$ peut être défini par

$$\langle D^{(p)}(x, x'), U(x') \rangle = U(x),$$

où U est un p-tenseur. Par antisymétrisation, nous déduisons de $D^{(p)}$ une bi-p-forme-distribution $\hat{D}^{(p)}$ ($p = 0, 1, \ldots, n$). Si α est une p-forme,

$$\left\langle \frac{1}{p!}\hat{D}^{(p)}(x, x'), \alpha(x') \right\rangle = \alpha(x). \tag{2.4}$$

Si $\star_x$ désigne l'opérateur de dualité en x sur les formes, il résulte des propriétés de cet opérateur que si β est une $(n-p)$-forme, on a, *si g est négatif,*

$$\left\langle \frac{1}{(n-p)!}\star_{x'}\hat{D}^{(p)}(x, x'), \beta(x') \right\rangle = \left\langle \frac{1}{p!}\hat{D}^{(p)}(x, x'), -\overset{-1}{\star}_{x'}\beta(x') \right\rangle = -\overset{-1}{\star}_x\beta(x).$$

En multipliant par $\star_x$, il vient

$$\left\langle \frac{1}{(n-p)!}\star_x\star_{x'}\hat{D}^{(p)}(x, x'), \beta(x') \right\rangle = -\beta(x).$$

De (2.4) il résulte ainsi

$$\hat{D}^{(n-p)}(x, x') = -\star_x \star_{x'} \hat{D}^{(p)}(x, x'). \tag{2.5}$$

Désignons par d_x l'opérateur de *différentiation extérieure* en x sur les formes, par δ_x celui de *codifférentiation.* Si α est une p-forme et β une $(p+1)$-forme, on a, lorsque l'intersection des supports de ces deux formes est compacte,

$$\langle \beta(x), d_x \alpha(x) \rangle = (p+1) \langle \delta_x \beta(x), \alpha(x) \rangle.$$

On en déduit

$$\left\langle \frac{1}{p!} \delta_{x'} \hat{D}^{(p+1)}(x, x'), \alpha(x') \right\rangle = \left\langle \frac{1}{(p+1)!} \hat{D}^{(p+1)}(x, x'), d_{x'} \alpha(x') \right\rangle,$$

soit

$$\left\langle \frac{1}{p!} \delta_{x'} \hat{D}^{(p+1)}(x, x'), \alpha(x') \right\rangle = d_x \alpha(x).$$

D'autre part, par différentiation en x de (2.4), il vient

$$\left\langle \frac{1}{p!} d_x \hat{D}^{(p)}(x, x'), \alpha(x') \right\rangle = d_x \alpha(x).$$

On en déduit la formule

$$\delta_{x'} \hat{D}^{(p+1)} = d_x \hat{D}^{(p)} \qquad (p = 0, \ldots, n-1). \tag{2.6}$$

c. Par symétrisation de $D^{(p)}$, nous obtenons un bitenseur-distribution $\tilde{D}^{(p)}$ qui intervient dans le cas $p = 2$.

Si A est un vecteur, nous appelons $\mathcal{D}A$ le tenseur symétrique $\mathcal{L}(A)\, g$ transformé infinitésimal (ou dérivée de Lie) du tenseur métrique, soit

$$(\mathcal{D}A)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta + \nabla_\beta A_\alpha.$$

Par un raisonnement analogue au raisonnement précédent, on établit la formule

$$\delta_{x'} \tilde{D}^{(2)} = \mathcal{D}_x D^{(1)}. \tag{2.7}$$

3. **Opérateurs différentiels hyperboliques sur les tenseurs.** — Notre théorie des propagateurs est valable pour les systèmes hyperboliques au sens de Leray. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux opérateurs hyperboliques du second ordre sur les tenseurs ou, plus tard, sur les spineurs.

a. Considérons sur la variété riemannienne V_n, l'opérateur $\bar{\Delta}$ sur les p-tenseurs défini par

$$(\bar{\Delta} T)_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = -\nabla^\rho \nabla_\rho T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}.$$

Si C est un champ d'opérateurs linéaires sur les p-tenseurs, B un champ d'applications linéaires B_x des $(p+1)$-tenseurs dans les p-tenseurs (B_x est défini dans un domaine de coordonnées locales par un ensemble de n opérateurs B_x^ρ sur les p-tenseurs), nous considérons l'opérateur différentiel

$$NT = \bar{\Delta} T + B^\rho \nabla_\rho T + CT. \tag{3.1}$$

L'opérateur adjoint est alors défini à l'aide des opérateurs adjoints de C_x et B_x^ρ :

$$N^* U = \bar{\Delta} U - \nabla_\rho (B^{*\rho} U) + C^* U. \tag{3.2}$$

Pour que N soit autoadjoint, il faut et il suffit que

$$B^{*\rho} = -B^\rho, \qquad C^* = C - \nabla_\rho B^\rho.$$

Si T est un p-tenseur-distribution et U un p-tenseur tels que $S(T) \cap S(U)$ soit compact, on a

$$\langle NT, U \rangle = \langle T, N^* U \rangle. \tag{3.3}$$

b. J'ai introduit sur les tenseurs un laplacien qui diffère de $\bar{\Delta}$ et se prête mieux aux applications géométriques et physiques. Dans le cas particulier des tenseurs antisymétriques, DE RHAM utilise le laplacien défini par

$$\Delta T = (d\delta + \delta d)\, T,$$

Δ commute dans ce cas avec d et δ puisqu'ici $d^2 = \delta^2 = 0$. Ce laplacien peut s'écrire explicitement

$$(\Delta T)_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = (\bar{\Delta} T)_{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \sum_k R_{\alpha_k \mu} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\mu}{}_{\dots \alpha_p} - \sum_{k \neq l} R_{\alpha_k \rho, \alpha_l \sigma} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\rho \dots \sigma}{}_{\dots \alpha_p}. \tag{3.4}$$

J'appelle laplacien d'un tenseur arbitraire T le tenseur ΔT défini par la formule (3.4). L'opérateur Δ jouit des propriétés suivantes : il est autoadjoint, commute avec la contraction, commute avec les opérateurs de transposition sur les indices et par suite préserve les symétries ou antisymétries possibles de T. Si T est à dérivée covariante nulle,

$$\Delta(T \otimes U) = T \otimes \Delta U.$$

Si le tenseur de Ricci de V_n est *à dérivée covariante nulle*, on a pour tout 2-tenseur T et vecteur A :

$$\delta \Delta T = \Delta \delta T, \qquad \nabla \Delta A = \Delta \nabla A. \tag{3.5}$$

4. **Noyaux élémentaires et propagateurs.** — Nos opérateurs différentiels N sur les p-tenseurs peuvent être écrits

$$NT = \Delta T + B^{\rho}\nabla_{\rho} T + CT.$$

La métrique de V_n est supposée de *type hyperbolique normal* et dans la suite, nos considérations sont purement *locales* ([2]). Soit un voisinage homéomorphe à une boule ouverte tel que le *conoïde caractéristique* $\Gamma_{x'}$, de sommet $x' \in \Omega$, engendré par les géodésiques isotropes issues de x', soit régulier dans Ω et définisse trois régions : le futur $\mathcal{E}^+(x')$, le passé $\mathcal{E}^-(x')$ et l'ailleurs. Si K est un ensemble de Ω, le futur $\mathcal{E}^+(K)$ est l'ensemble des chemins temporels issus des points x' de K dans le futur de x'; le passé de K est l'ensemble $\mathcal{E}^-(K)$ des chemins temporels aboutissant aux points x' de K dans le passé de x'.

Un ensemble K est dit *compact vers le passé* (resp. le futur) si l'intersection de K avec $\mathcal{E}^-(x)$ [resp. $\mathcal{E}^+(x)$] est compacte ou vide pour tout $x \in \Omega$; $\mathcal{E}^+(K)$ et tout sous-ensemble fermé de $\mathcal{E}^+(K)$ sont alors aussi compacts vers le passé. D'un lemme de Leray, il résulte que *si K est compact vers le passé et K' compact, l'intersection $\mathcal{E}^+(K) \wedge \mathcal{E}^-(K')$ est compacte.*

a. En ce qui concerne les solutions élémentaires ou noyaux élémentaires de N nous avons le résultat suivant : *il existe deux noyaux élémentaires $E^{(p)\pm}(x, x')$ de N dans $\Omega \times \Omega$, c'est-à-dire deux bi-p-tenseurs-distributions satisfaisant*

$$N^*_x E^{(p)\pm}(x, x') = D^{(p)}(x, x') \tag{4.1}$$

et qui, pour chaque x', ont leurs supports respectivement dans $\mathcal{E}^+(x')$ et $\mathcal{E}^-(x')$. Ces noyaux se trouvent ainsi définis d'une manière unique. L'unicité des noyaux élémentaires est un cas particulier d'un théorème général d'unicité.

THÉORÈME D'UNICITÉ. — *Tout tenseur-distribution T, satisfaisant $NT = 0$ et à support compact vers le passé ou vers le futur, est nécessairement nul.*

Désignons par $\overset{*}{E}{}^{(p)\pm}(x, x')$ les noyaux élémentaires de l'opérateur N^*. Par le jeu du théorème d'unicité, on établit aisément ([3]) que

$$\overset{*}{E}{}^{(p)\pm}(x', x) = E^{(p)\pm}(x, x'). \tag{4.2}$$

En particulier, les $E^{(p)\pm}$ satisfont aussi la relation

$$N_{x'} E^{(p)\pm}(x, x') = D^{(p)}(x, x'). \tag{4.3}$$

([2]) Les considérations qui suivent sont valables sur la variété V_n si celle-ci est « globalement hyperbolique » au sens de LERAY.

([3]) *Voir* par exemple LICHNEROWICZ [9], p. 18-19.

b. Considérons le bitenseur-distribution $E^{(p)}$ défini dans $\Omega \times \Omega$ par

$$E^{(p)}(x, x') = E^{(p)-}(x, x') - E^{(p)+}(x, x').$$

Pour chaque $x' \in \Omega$, $E^{(p)}$ a son support dans $\mathcal{E}^+(x') \cup \mathcal{E}^-(x')$ et satisfait

$$N^*_x E^{(p)}(x, x') = 0, \tag{4.4}$$

$E^{(p)}$ est par définition *le propagateur associé à l'opérateur N.* A l'opérateur adjoint N^* correspond le propagateur $\overset{*}{E}{}^{(p)}$ tel que

$$\overset{*}{E}{}^{(p)}(x', x) = \overset{*}{E}{}^{(p)-}(x', x) - \overset{*}{E}{}^{(p)+}(x', x) = E^{(p)+}(x, x') - E^{(p)-}(x, x').$$

On a ainsi

$$\overset{*}{E}{}^{(p)}(x', x) = -E^{(p)}(x, x') \tag{4.5}$$

et le propagateur $E^{(p)}$ satisfait aussi la relation

$$N_{x'} E^{(p)}(x, x') = 0. \tag{4.6}$$

c. Supposons l'opérateur N autoadjoint. On a alors, d'après (4.2) :

$$E^{(p)\pm}(x', x) = E^{(p)\mp}(x, x') \tag{4.7}$$

et il résulte de (4.5) :

$$E^{(p)}(x', x) = -E^{(p)}(x, x'). \tag{4.8}$$

Ainsi pour tout opérateur autoadjoint N, le propagateur $E^{(p)}$ est un noyau antisymétrique par rapport au couple (x, x') et vérifie l'équation homogène

$$N_x E^{(p)}(x, x') = 0. \tag{4.9}$$

d. Pour l'espace-temps de Minkowski et l'opérateur $N = \Delta + \mu$ (μ = Cte) correspondant, on déduit aisément du théorème d'unicité que, dans le cas scalaire, notre propagateur coïncide avec le propagateur D de Jordan-Pauli défini directement dans ce cas au moyen d'une transformée de Fourier. Si $t(x, x')$ est le bi-1-tenseur définissant dans cet espace-temps le parallélisme absolu entre vecteurs, les propagateurs tensoriels sont les produits de D par les bitenseurs $\overset{p}{\otimes} t$. De tels résultats ne s'étendent pas aux espaces-temps courbes.

e. Le propagateur $E^{(p)}$ intervient dans le théorème suivant dû à M^me^ Choquet-Bruhat [4].

Théorème. — *Tout tenseur-distribution T dans Ω satisfaisant NT = 0 peut être obtenu par composition de Volterra du propagateur $E^{(p)}$ relatif*

---

[4] Y. Bruhat [2].

à N et d'un tenseur-distribution U à support compact dans le passé et le futur.

Nous écrirons

$$T(x') = \int^{\bullet} E^{(p)}(x, x')\, U(x)\, \eta(x), \tag{4.10}$$

(4.10) signifie que pour tout $W \in \mathcal{D}^{p}_{\Omega}$, on a

$$\langle T, W \rangle = \langle U, V \rangle,$$

où $V(x)$ est donné par

$$V(x) = \langle E^{(p)}(x, x'), W(x') \rangle.$$

5. Le problème de Cauchy.

a. Considérons l'opérateur N défini sur les p-tenseurs par

$$NT = \Delta T + B^{\rho} \nabla_{\rho} T + CT.$$

Si T et U sont deux p-tenseurs, introduisons les deux vecteurs $V(T, U)$ et $W(T, U)$ définis par

$$V^{\rho}(T, U) = (\nabla^{\rho} T, U), \qquad W^{\rho}(T, U) = (B^{\rho} T, U).$$

Un calcul local aisé (5) donne

$$(NT, U) - (T, N^{*}U) = \delta \{ V(T, U) - V(U, T) - W(T, U) \}. \tag{5.1}$$

b. Considérons le bitenseur-distribution 1-tenseur en x, p-tenseur en x', défini par

$$\begin{aligned} A^{+}(T) = {} & V(T(x), E^{(p)+}(x, x')) \\ & - V(E^{(p)+}(x, x'), T(x)) - W(T(x), E^{(p)+}(x, x')), \end{aligned} \tag{5.2}$$

où $E^{(p)+}$ est un noyau élémentaire de N. De (5.1), il résulte

$$-\delta_{x} A^{+}(T) = (T(x), N^{*}_{x} E^{(p)+}(x, x')) - (N_{x} T(x), E^{(p)+}(x, x')).$$

Si T est un *tenseur solution dans Ω de l'équation homogène* $NT = 0$, on a donc

$$-\delta_{x} A^{+}(T) = (T(x), D^{(p)}(x, x')). \tag{5.3}$$

Désignons par $A^{-}(T)$ le bitenseur-distribution qui se déduit de $A^{+}(T)$ par la substitution de $E^{(p)-}(x, x')$ à $E^{(p)+}(x, x')$; $B(T)$ sera le bitenseur-

(5) LICHNEROWICZ [9], p. 23-25.

distribution construit de manière analogue à partir du propagateur $E^{(p)}$:

$$(5.4)\qquad B(T) = V(T(x), E^{(p)}(x, x')) - V(E^{(p)}(x, x'), T(x)) - W(T(x), E^{(p)}(x, x').$$

Si σ est une hypersurface orientée dans l'espace, les flux de $A^+(T)$, $A^-(T)$ et $B(T)$ à travers σ se définissent aisément ([6]) et l'on peut déduire de la formule (5.3) que *si T est une solution dans Ω de $NT = 0$*, on a pour x' :

$$(5.5)\qquad T(x') = -\operatorname{flux}_\sigma B(T),$$

formule qui résoud le problème de Cauchy relatif à σ.

Dans le cas où, par exemple, il n'y a pas de dérivées du premier ordre dans N, on peut écrire explicitement

$$T_{\lambda'_1\ldots\lambda'_p}(x') = -\int_\sigma \{ E^{(p)\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\lambda'_1\ldots\lambda'_p}(x, x')\nabla_\rho T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x) - T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x)\nabla_\rho E^{(p)}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\lambda'_1\ldots\lambda'_p}(x, x')\}\, d\sigma^\rho_x,$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire de l'hypersurface σ, n^ρ le vecteur unitaire normal et où $d\sigma^\rho = n^\rho\, d\sigma$.

6. **Propagateurs associés à l'opérateur $(\Delta + \mu)$.**

a. L'opérateur $(\Delta + \mu)$ ($\mu = \mathrm{Cte}$) agit sur les p-tenseurs antisymétriques. Par antisymétrisation tensorielle des noyaux $E^{(p)\pm}$, nous obtenons deux noyaux bi-p-formes distributions $G^{(p)\pm}$ satisfaisant

$$(6.1)\qquad (\Delta_x + \mu)\, G^{(p)\pm} = \hat{D}^{(p)}(x, x') \qquad (p = 0, 1, \ldots, n)$$

avec les mêmes propriétés que les $E^{(p)\pm}$ pour les supports. La différence $G^{(p)} = G^{(p)-} - G^{(p)+}$ est le *propagateur antisymétrique* associé à l'opérateur $(\Delta + \mu)$; $G^{(p)}$ satisfait

$$(6.2)\qquad (\Delta_x + \mu)\, G^{(p)} = 0 \qquad (p = 0, 1, \ldots, n)$$

et est évidemment antisymétrique par rapport au couple (x, x').

Les opérateurs Δ_x et d_x commutant, on a

$$(\Delta_x + \mu)\, d_x G^{(p)\pm} \equiv d_x \hat{D}^p \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Les opérateurs Δ_x et $\delta_{x'}$ commutant, nous avons pour l'ordre $(p+1)$:

$$(\Delta_x + \mu)\, \delta_{x'} G^{(p+1)\pm} = \delta_{x'} \hat{D}^{(p+1)}.$$

De (2.6) il résulte

$$(\Delta_x + \mu)(\delta_{x'} G^{(p+1)\pm} - d_x G^{(p)\pm}) \equiv 0$$

([6]) LICHNEROWICZ [9], p. 23-25.

et en vertu du théorème d'unicité :

$$\delta_{x'} G^{(p+1)\pm} = d_x G^{(p)\pm}.$$

Par différence, nous obtenons, pour les propagateurs antisymétriques, les relations importantes

$$(6.3) \qquad \delta_{x'} G^{(p+1)} = d_x G^{(p)} \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Par un raisonnement analogue, on déduit de (2.5) :

$$(6.4) \qquad G^{(n-p)} = - \star_x \star_{x'} G^{(p)} \qquad (p = 0, 1, \ldots, n).$$

b. $(\Delta + \mu)$ agit aussi sur les tenseurs symétriques d'ordre 2. On a

$$(\Delta T)_{\alpha\beta} = -\nabla^\rho \nabla_\rho T_{\alpha\beta} + R_{\alpha\rho} T^\rho{}_\beta + R_{\beta\rho} T_\alpha{}^\rho - 2 R_{\alpha\rho,\beta\sigma} T^{\rho\sigma}.$$

Par symétrisation tensorielle du propagateur ordinaire associé à $(\Delta - \mu)$, on obtient un *propagateur symétrique* K, bi-2-tenseur symétrique. Un raisonnement semblable au raisonnement précédent montre que, par contraction en x,

$$(6.5) \qquad \mathrm{Tr}_x K(x, x') = 2 g(x') G^{(0)}(x, x'),$$

où $G^{(0)}$ est le propagateur scalaire, soit, sous forme explicite,

$$g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta,\lambda'\mu'}(x, x') = 2 g_{\lambda'\mu'}(x') G^{(0)}(x, x').$$

Si le tenseur de Ricci est à dérivée covariante nulle, on déduit de (2.7) par un raisonnement identique,

$$(6.6) \qquad \delta_{x'} K(x, x') = \mathcal{D}_x G^{(1)}(x, x'),$$

où $G^{(1)}$ est le propagateur d'ordre 1.

Les relations (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) et d'autres relations analogues que nous obtiendrons dans le cas spinoriel, jouent un rôle essentiel dans la construction de commutateurs et d'anticommutateurs, en relativité générale.

7. **Commutateur pour le champ électromagnétique libre.** — A titre d'exemple, nous allons rappeler la construction du commutateur relatif au champ électromagnétique libre en relativité générale ([7]).

a. Dans l'espace-temps V_4, muni d'une métrique donnée, considérons un champ électromagnétique libre F correspondant à un potentiel-vecteur α avec $F = d\alpha$. Dans le cas d'un photon de masse non nulle, nous avons pour α l'équation

$$(7.1) \qquad \delta d\alpha = \varepsilon^2 \alpha \qquad (\varepsilon^2 = \mathrm{Cte}),$$

([7]) LICHNEROWICZ [9] et [10].

ε^2 étant différent de zéro, (7.1) entraîne $\delta\alpha = 0$ et (7.1) est équivalent au système

$$(\Delta - \varepsilon^2)\,\alpha = 0 \tag{7.2}$$

et

$$\delta\alpha = 0 \tag{7.3}$$

puisque $\Delta = d\delta + \delta d$. Supposons que α soit une forme linéaire à valeurs dans un espace d'opérateurs d'un espace de Hilbert. Nous cherchons à construire un commutateur $[\alpha(x), \alpha(x')]$ $(x, x' \in V_4)$, c'est-à-dire une bi-1-forme distribution X à valeurs scalaires qui, pour chaque x', a son support dans $\mathcal{E}^+(x) \cup \mathcal{E}^-(x')$, est antisymétrique par rapport au couple (x, x') et satisfait par rapport à x le système (7.2), (7.3).

En relativité restreinte, on a classiquement, avec nos notations,

$$[\alpha(x), \alpha(x')] = -\frac{\hbar}{i}\left\{ tD(x, x') - \frac{1}{\varepsilon^2} d_x d_{x'} D \right\},$$

où t est le bi-1-tenseur définissant le parallélisme absolu et D le propagateur scalaire de Jordan-Pauli associé à $\Delta - \varepsilon^2$.

Nous sommes ainsi conduits, en relativité générale, à considérer la bi-1-forme-distribution

$$X = G^{(1)} - \frac{1}{\varepsilon^2} d_x d_{x'} G^{(0)},$$

où $G^{(1)}$ et $G^{(0)}$ sont les propagateurs d'ordre 1 et 0 associés à $\Delta - \varepsilon^2$. La condition de support et celle d'antisymétrie en x, x' sont satisfaites. De plus $(\Delta_x - \varepsilon^2)\,X = 0$ et

$$\delta_x X = \delta_x G^{(1)} - \frac{1}{\varepsilon^2} d_{x'} \Delta_x G^{(0)} = \delta_x G^{(1)} - d_{x'} G^{(0)} = 0.$$

Ainsi

$$[\alpha(x), \alpha(x')] = -\frac{\hbar}{i}\left\{ G^{(1)}(x, x') - \frac{1}{\varepsilon^2} d_x d_{x'} G^{(0)} \right\} \tag{7.4}$$

nous fournit un commutateur compatible avec (7.2), (7.3) et qui se réduit en relativité restreinte au commutateur classique. Comme $d^2 = 0$, (7.4) conduit, pour le champ électromagnétique F, au commutateur

$$[F(x), F(x')] = -\frac{\hbar}{i} d_x d_{x'} G^{(1)}(x, x'). \tag{7.5}$$

b. En l'absence de termes de masse ($\varepsilon^2 = 0$), l'équation (7.1) est invariante par transformation de jauge. Une telle transformation permet d'astreindre α à la condition de Lorentz $\delta\alpha = 0$. Nous considérons alors classiquement comme équation pour le potentiel

$$\Delta\alpha = 0 \tag{7.6}$$

qui entraîne

$$\Delta\delta\alpha = 0 \tag{7.7}$$

et nous adoptons comme commutateur pour le potentiel,

$$[\alpha(x), \alpha(x')] = -\frac{\bar{h}}{i} G^{(1)}(x, x'), \tag{7.8}$$

où $G^{(1)}$ est associé à Δ. Il vient

$$[\delta_x \alpha(x), \delta_{x'} \alpha(x')] = 0.$$

Le commutateur (7.8) est compatible avec (7.6), mais non avec la condition de Lorentz. Il nous suffit alors d'astreindre les états Φ à la condition supplémentaire $\delta\alpha \mid \Phi \rangle = 0$ qui d'après (7.7) ne porte que sur les données initiales d'un problème de Cauchy ou, en présence d'une définition du vide, à une condition jouissant de la même propriété, mais encore affaiblie.

(7.8) entraîne pour F le commutateur (7.5) et le commutateur est *compatible avec les équations de Maxwell usuelles* :

$$dF = 0, \qquad \delta F = 0.$$

En effet, d'après les relations différentielles (6.3), nous avons

$$d_x d_{x'} G^{(1)} = d_x \delta_x G^{(2)} = \Delta_x G^{(2)} - \delta_x d_x G^{(2)} = -\delta_x d_x G^{(2)}.$$

De $d^2 = \delta^2 = 0$, on déduit que le commutateur est bien compatible avec les équations de Maxwell.

Une théorie strictement parallèle a pu être développée ([8]) sur un espace-temps d'Einstein pour le champ gravitationnel varié (spin 2). Nous voyons dans ce cas apparaître le propagateur symétrique K, l'opérateur différentiel $\mathcal{D}$ et les relations correspondantes (6.4) et (6.6). Nous rencontrerons de nouveau les propagateurs tensoriels précédents en liaison avec les propagateurs spinoriels qui apparaissent dans la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer relative au champ de spin maximum 1.

II. — Spineurs en relativité générale.

8. Rappel sur le groupe Spin (4) ([9]).

a. Considérons un espace-temps de Minkowski rapporté à un repère orthonormé et désignons par $\eta_{\alpha\beta}$ ($\eta_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, $\eta_{00} = 1$, $\eta_{AA} = -1$ pour $A = 1, 2, 3$) les composantes du tenseur métrique.

([8]) Lichnerowicz [9] et [10].

([9]) Lichnerowicz [11] et [12].

Introduisons l'algèbre de Clifford Γ^C défini sur le corps C des complexes par les quatre matrices 4×4 de Dirac à éléments complexes $\gamma_\alpha = (\gamma_\alpha{}^a{}_b)$ et l'unité e. Les indices grecs ou indices « tensoriels » prennent les valeurs 0, 1, 2, 3, les indices latins qui seront dits indices « spinoriels », les valeurs 1, 2, 3, 4. Nous utilisons systématiquement la convention de sommation d'Einstein pour les indices des deux types.

Dire que les γ_α définissent une algèbre de Clifford sur le corps C, c'est dire qu'on a l'identité

$$(8.1) \qquad (V^\alpha \gamma_\alpha)^2 = -(V^\alpha V^\beta \eta_{\alpha\beta})\, e$$

quels que soient les $V^\alpha \in C$; (8.1) peut s'écrire plus explicitement

$$\frac{1}{2} V^\alpha V^\beta (\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha) = -(V^\alpha V^\beta \eta_{\alpha\beta})\, e$$

et se traduire par les conditions fondamentales

$$(8.2) \qquad \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = -2\eta_{\alpha\beta}\, e.$$

Il est clair que les matrices γ_α et γ_β anticommutent pour $\alpha \neq \beta$ et que $\gamma_\alpha \gamma_\alpha = -\eta_{\alpha\alpha}\, e$. Introduisons les matrices-produits

$$(8.3) \qquad \gamma_\alpha \gamma_\beta, \quad \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma, \quad \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma \gamma_\delta,$$

où les indices α, β, γ, δ, sont supposés tous *distincts*; il y a donc antisymétrie par rapport à ces indices. On vérifie aisément qu'il résulte de (8.2) que les traces des matrices γ_α et des matrices-produits (8.3) précédentes sont toutes nulles. On en déduit que les 16 matrices 4×4 obtenues en adjoignant à e et aux γ_α les six matrices $\gamma_\alpha \gamma_\beta$ ($\alpha < \beta$), les quatre matrices $\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma$ ($\alpha < \beta < \gamma$) et la matrice $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ sont *linéairement indépendantes sur les complexes.*

Considérons l'espace vectoriel sur les complexes ayant pour base l'ensemble ordonné de ces 16 matrices. De (8.2), il résulte que tout produit de matrices γ peut s'exprimer par une combinaison linéaire des matrices de base. Nous obtenons ainsi sur l'espace vectoriel précédent une structure d'algèbre associative qui n'est autre que l'algèbre de Clifford Γ^C engendrée par les γ_α. On notera que Γ^C coïncide nécessairement avec l'algèbre des matrices 4×4 à éléments complexes.

Un élément Λ de Γ^C est dit *régulier* s'il est inversible. Les éléments réguliers de Γ^C définissent un groupe multiplicatif Γ^{*C}. Si $M \in \Gamma^{*C}$, l'application $N \to MNM^{-1}$, où $N \in \Gamma^C$, est un automorphisme $\tau(M)$ de l'algèbre Γ^C. On rappelle les résultats suivants :

1° *Toute matrice 4×4 qui commute avec les γ_α est de la forme ae où $a \in C$.*

2° *Si* $\{\gamma'_\alpha\}$ *est un autre système de matrices vérifiant* (8.2), *il existe* $M \in \Gamma^{*C}$ *tel que*

$$\gamma'_\alpha = \tau(M)\,\gamma_\alpha,$$

M est alors défini à un facteur complexe près.

3° *On a*

$$\text{dét}\,(\gamma_\alpha) = 1.$$

Nous supposons choisi un système de matrices γ. Le lemme suivant sera utile à différentes reprises dans la suite.

LEMME. — *Posons* $\gamma^\alpha = \gamma_\beta\,\eta^{\alpha\beta}$. *Pour* $\lambda \neq \mu$ *on a la formule suivante :*

$$\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\alpha = 0. \tag{8.4}$$

En effet, il résulte de (8.2) :

$$\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\alpha = -(2\,\eta_{\alpha\lambda} e + \gamma_\lambda \gamma_\alpha)\,\gamma_\mu \gamma^\alpha = -2\,\gamma_\mu \gamma_\lambda + \gamma_\lambda(2\,\eta_{\alpha\mu} + \gamma_\mu \gamma_\alpha)\,\gamma^\alpha,$$

soit

$$\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\alpha = 2\,\gamma_\lambda \gamma_\mu + 2\,\gamma_\lambda \gamma_\mu - 4\,\gamma_\lambda \gamma_\mu = 0,$$

ce qui démontre la formule (8.4).

b. Considérons maintenant l'*espace vectoriel sur les réels* ayant pour base l'ensemble des 16 matrices envisagées. D'après (8.2), tout produit de matrices γ peut s'exprimer par une combinaison linéaire à *coefficients réels* des matrices de base. Nous obtenons ainsi sur cet espace une structure d'algèbre associative Γ. Tout élément de Γ qui commute avec les γ_α est de la forme ae où $a \in R$. Le centre de Γ est Re.

Les éléments réguliers de Γ définissent un groupe multiplicatif Γ^*; Γ, en tant qu'espace vectoriel réel, admet une structure de variété analytique réelle pour laquelle les opérations de Γ sont analytiques. De plus, si $\Lambda \in \Gamma^*$, Λ^{-1} dépend analytiquement de Λ. Ainsi se trouve définie naturellement sur Γ^* une structure de groupe de Lie.

Si $\Lambda \in \Gamma^*$, la restriction $\theta(\Lambda)$ de $\tau(\Lambda)$ à Γ^* est un automorphisme de l'algèbre Γ. L'application $\Lambda \rightarrow \theta(\Lambda)$ est une représentation de Γ^* dont le noyau est l'intersection de Γ^* avec le centre de Γ.

Si $N \in \Gamma^C$ il est clair que son déterminant est invariant par $\tau(M)$ où $M \in \Gamma^{*C}$. *Introduisons alors le sous-espace vectoriel* $\mathfrak{M}$ *sur les réels qui admet pour base les* γ_α *et envisageons l'ensemble G des éléments* Λ *de* Γ^* *satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

1° $\theta(\Lambda)$ *laisse* $\mathfrak{M}$ *invariant*;
2° $\text{dét}\,(\Lambda) = 1$.

Cet ensemble est manifestement un *sous-groupe fermé* de Γ^* que nous allons étudier.

Si Λ est un élément de G, on a $\theta(\Lambda)\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$. En rapportant $\theta(\Lambda)\gamma_\alpha$ à cette base elle-même de $\mathfrak{M}$, on a [10]

$$(8.5)\qquad \theta(\Lambda)\gamma_\alpha = A_\alpha^{\lambda'}\gamma_{\lambda'},$$

où $A=(A_\alpha^{\lambda'})$ est une matrice 4×4 à éléments réels. Soit

$$M = V^\alpha\gamma_\alpha, \qquad V^\alpha\in R$$

un élément de $\mathfrak{M}$. On a, d'après (8.1) :

$$M^2 = (V^\alpha\gamma_\alpha)^2 = V^\alpha V^\beta\gamma_\alpha\gamma_\beta = -(V^\alpha V^\beta\eta_{\alpha\beta})\,e$$

et par suite :

$$(8.6)\qquad \theta(\Lambda)M^2 = \Lambda M^2\Lambda^{-1} = -(V^\alpha V^\beta\eta_{\alpha\beta})\,e.$$

D'autre part, d'après la définition de $\theta(\Lambda)$:

$$\theta(\Lambda)M^2 = V^\alpha V^\beta\theta(\Lambda)(\gamma_\alpha\gamma_\beta) = V^\alpha V^\beta(\theta(\Lambda)\gamma_\alpha)(\theta(\Lambda)\gamma_\beta)$$

soit, d'après (8.5) :

$$\theta(\Lambda)M^2 = V^\alpha V^\beta A_\alpha^{\lambda'}A_\beta^{\mu'}\gamma_{\lambda'}\gamma_{\mu'} = \frac{1}{2}V^\alpha V^\beta A_\alpha^{\lambda'}A_\beta^{\mu'}(\gamma_{\lambda'}\gamma_{\mu'}+\gamma_{\mu'}\gamma_{\lambda'}).$$

De (8.2) il résulte

$$(8.7)\qquad \theta(\Lambda)M^2 = -(V^\alpha V^\beta A_\alpha^{\lambda'}A_\beta^{\mu'}\eta_{\lambda'\mu'})\,e.$$

De la comparaison de (8.6) et (8.7), on déduit

$$(8.8)\qquad A_\alpha^{\lambda'}A_\beta^{\mu'}\eta_{\lambda'\mu'} = \eta_{\alpha\beta},$$

(8.8) exprime que la matrice A appartient au groupe de Lorentz homogène complet $L(4)$. Si $\Lambda\in G$ la restriction de $\theta(\Lambda)$ à $\mathfrak{M}$ est un endomorphisme de $\mathfrak{M}$ que nous noterons $\bar\theta(\Lambda)$. Ainsi

$$(8.9)\qquad \bar\theta(G)\subset L(4).$$

Il est aisé de voir que l'application $\bar\theta : \Lambda\in G\to A\in L(4)$ est un *homomorphisme de G dans $L(4)$*. En effet, si Λ, $\Lambda'\in G$, on a

$$\bar\theta(\Lambda)\gamma_\alpha = \Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{1} = A_\alpha^{\lambda'}\gamma_{\lambda'} \qquad [A=(A_\alpha^{\lambda'})\in L(4)]$$

---

(10) L'ensemble ordonné des matrices $\gamma_{\lambda'}$ n'est autre, au nom de l'indice près, que l'ensemble ordonné choisi des matrices γ_α; de même l'ensemble des $\eta_{\lambda'\mu'}$ (*voir* plus bas) coïncide avec l'ensemble des $\eta_{\alpha\beta}$.

et

$$\bar\theta(\Lambda')\gamma_{\lambda'} = \Lambda'\gamma_{\lambda'}\Lambda'^{-1} = B^{\beta}_{\lambda'}\gamma_\beta \qquad [B = B^{\beta}_{\lambda'} \in L(4)].$$

Il en résulte

$$\bar\theta(\Lambda'\Lambda)\gamma_\alpha = \Lambda'\Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1}\Lambda'^{-1} = B^{\beta}_{\lambda'}A^{\lambda'}_{\alpha}\gamma_\beta$$

et à $\Lambda'\Lambda$ correspond BA.

c. Le groupe de Lorentz complet $L(4)$ comprend quatre composantes dont la composante de l'identité sera notée $L_0(4)$ et dite le *groupe de Lorentz connexe.* La symétrie dans l'espace relativement au repère orthonormé envisagé fournit un élément d'une seconde composante qui définit avec $L_0(4)$ un groupe noté $L_e(4)$ et dit le *groupe de Lorentz orthochrone.* De même la symétrie dans le temps définit une troisième composante qui constitue avec $L_0(4)$ un groupe noté $L_t(4)$ et dit le *groupe de Lorentz orthospatial.* Enfin la symétrie dans l'espace-temps fournit un élément de la quatrième composante qui définit avec $L_0(4)$ un groupe noté $L_u(4)$ et dit le *groupe de Lorentz unimodulaire.*

Au groupe G nous donnons le nom de groupe spinoriel et nous le notons Spin (4) ([11]). Sa composante connexe de l'identité sera notée $\mathrm{Spin}_0(4)$. Par la considération des algèbres de Lie (*voir* § 9), on établit que

$$\dim\bar\theta\,\{\mathrm{Spin}(4)\} = \dim L(4).$$

Il en résulte, d'après (8.9) :

$$\bar\theta(\mathrm{Spin}\,4) = L_0(4). \tag{8.10}$$

La *symétrie dans l'espace* se trouve aussi atteinte comme image par $\bar\theta$ d'un élément de Spin (4). En effet la matrice γ_0 de déterminant 1 est telle que

$$\gamma_0\gamma_\alpha\gamma_0^{-1} = -(2\eta_{0\alpha}e + \gamma_\alpha\gamma_0)\gamma_0^{-1} = 2\eta_{0\alpha}\gamma_0 - \gamma_\alpha,$$

soit

$$\gamma_0\gamma_\alpha\gamma_0^{-1} = (S_e)^{\lambda'}_{\alpha}\gamma_{\lambda'}, \tag{8.11}$$

où $S_e \in L(4)$ est la matrice représentant la symétrie dans l'espace. On en déduit que $\bar\theta$ (Spin (4)) contient le groupe $L_e(4)$.

La *symétrie dans le temps* se trouve aussi atteinte. En effet la matrice $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ vérifie

$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\gamma_\alpha(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{-1} = -2\sum_A \eta_{A\alpha}\gamma_A - \gamma_\alpha \qquad (A = 1, 2, 3),$$

([11]) C'est en général à la composante de l'identité que les mathématiciens donnent le nom de groupe spinoriel.

ce qu'on déduit immédiatement de (8.2). On peut encore écrire

$$(8.12) \qquad (\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\gamma_\alpha(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{-1} = (S_t)_\alpha^{\lambda'}\gamma_{\lambda'},$$

où $S_t \in L_t(4)$ est la matrice représentant la symétrie dans le temps. Par produit, on obtient aussi la symétrie d'espace-temps. Nous avons ainsi montré que

$$(8.13) \qquad \bar{\theta}(\mathrm{Spin}(4)) = L(4).$$

La restriction p de $\bar{\theta}$ à Spin (4) définit ainsi un *homomorphisme de* Spin (4) sur $L(4)$ dont il est aisé d'obtenir le noyau : celui-ci est à l'intersection de G et du centre Re de Γ. Pour qu'une matrice ae $(a \in R)$ appartienne à G, il faut et il suffit d'après la condition de déterminant que $a = \pm 1$. Le noyau est donc constitué par les deux éléments $\pm e$ et $L(4)$ est isomorphe au groupe quotient de Spin (4) par ce noyau. Nous pouvons préciser que ce noyau appartient à Spin (4). On a en effet :

Lemme. — *La matrice*

$$\exp(t\gamma_1\gamma_2) = e\cos t + \gamma_1\gamma_2 \sin t \qquad (t \in R)$$

appartient à $\mathrm{Spin}_0(4)$.

Si $\Lambda(t) = \exp(t\gamma_1\gamma_2)$, il résulte de la nullité de la trace de $\gamma_1\gamma_2$ que dét $\Lambda(t) = 1$. De la relation

$$\Lambda(-t)\frac{d\Lambda}{dt} = \gamma_1\gamma_2,$$

on déduit qu'on a aussi

$$\exp(t\gamma_1\gamma_2) = e\cos t + \gamma_1\gamma_2 \sin t$$

et l'on vérifie aisément sur cette seconde expression de $\Lambda(t)$:

$$\begin{aligned} \Lambda(t)\gamma_1\Lambda(t)^{-1} &= \gamma_1\cos 2t + \gamma_2 \sin 2t, \\ \Lambda(t)\gamma_2\Lambda(t)^{-1} &= -\gamma_1\sin 2t + \gamma_2\cos 2t \end{aligned}$$

tandis que

$$\Lambda(t)\gamma_\alpha\Lambda(t)^{-1} = \gamma_\alpha \qquad \text{pour} \quad \alpha \neq 1,\ 2.$$

$\theta(\Lambda(t))$ laisse donc $\mathfrak{M}$ invariant et correspond d'ailleurs à une rotation spatiale relative au plan 1, 2, ce qui démontre le lemme.

Pour $t = \pi$, on obtient l'élément $-e$ qui est donc dans $\mathrm{Spin}_0(4)$. Nous voyons que $\mathrm{Spin}_0(4)$ est pour la restriction de p, un revêtement d'ordre 2 de $L_0(4)$, un résultat symétrique valant pour Spin (4) et $L(4)$. Nous pouvons résumer l'étude précédente par l'énoncé :

Théorème. — *Le groupe* Spin (4) [*resp.* $\mathrm{Spin}_0(4)$] *est un revêtement d'ordre* 2 *du groupe de Lorentz* $L(4)$ [*resp.* $L_0(4)$]. *La projection cano-*

nique p de Spin (4) *sur* L (4) *est telle que si* $A = (A_\alpha^{\lambda'}) = p\Lambda\,[A \in L(4),\ \Lambda \in \text{Spin}(4)]$, *on a*

$$\Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1} = A_\alpha^{\lambda'}\gamma_{\lambda'}, \tag{8.14}$$

$p^{-1}A$ se compose des deux matrices $\pm\Lambda$ de déterminant 1 satisfaisant (8.14).

De l'étude du groupe de Poincaré de L_0 (4), il résulte que Spin_0 (4) est simplement connexe et est, pour la restriction de p, le groupe *revêtement universel* de L_0 (4). Nous notons Spin_e (4), Spin_t (4) et Spin_u (4) les trois sous-groupes de Spin (4) se projetant respectivement sur L_e (4), L_t (4), L_u (4).

9. Isomorphisme entre les algèbres de Lie de L (4) et Spin.(4)

a. En vertu du théorème précédent, la projection p induit un isomorphisme entre l'algèbre de Lie — notée **Spin** (4) — du groupe Spin (4) et l'algèbre de Lie — notée $\mathfrak{L}$ (4) — du groupe de Lorentz.

Soit $\Lambda(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ un chemin différentiable de Spin_0 (4). Par la projection p, il lui correspond un chemin $A(t)$ de L_0 (4) avec

$$\Lambda(t)\,\gamma_\alpha\Lambda(t)^{-1} = A_\alpha^{\lambda'}(t)\,\gamma_{\lambda'}, \qquad A(t) = (A_\alpha^{\lambda'}(t)). \tag{9.1}$$

De $\Lambda^{-1}\Lambda = e$ on déduit par dérivation,

$$\Lambda^{-1}\frac{d\Lambda}{dt} + \frac{d\Lambda^{-1}}{dt}\Lambda = 0. \tag{9.2}$$

En dérivant (9.1) par rapport au paramètre t, on obtient

$$\frac{d\Lambda}{dt}\gamma_\alpha\Lambda^{-1} + \Lambda\gamma_\alpha\frac{d\Lambda^{-1}}{dt} = \frac{dA_\alpha^{\lambda'}}{dt}\gamma_{\lambda'}. \tag{9.3}$$

Multiplions les deux membres de (9.3) à gauche par Λ^{-1} et à droite par Λ. Il vient, en tenant compte de (9.2) :

$$\Lambda^{-1}\frac{d\Lambda}{dt}\gamma_\alpha - \gamma_\alpha\Lambda^{-1}\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{dA_\alpha^{\lambda'}}{dt}\Lambda^{-1}\gamma_{\lambda'}\Lambda.$$

Or, d'après (8.14) :

$$\Lambda^{-1}\gamma_{\lambda'}\Lambda = A_{\lambda'}^{\beta}\gamma_\beta, \qquad A^{-1} = (A_{\lambda'}^{\beta}).$$

Nous obtenons ainsi

$$\Lambda^{-1}\frac{d\Lambda}{dt}\gamma_\alpha - \gamma_\alpha\Lambda^{-1}\frac{d\Lambda}{dt} = \left(A^{-1}\frac{dA}{dt}\right)_\alpha^\beta\gamma_\beta,$$

$\Lambda^{-1}\dfrac{d\Lambda}{dt}$ est un élément λ de l'algèbre **Spin** (4) auquel correspond par p

un élément $\mu = A^{-1}\dfrac{dA}{dt}$ de l'algèbre $\mathfrak{L}(4)$. Ainsi, à tout élément λ de **Spin** (4) correspond par p l'élément μ de $\mathfrak{L}(4)$ tel que si $\mu^{\alpha\beta}$ est le tenseur antisymétrique contravariant correspondant, on ait

$$(9.4)\qquad \lambda\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\lambda = \mu^{\beta\alpha}\gamma_\beta.$$

Inversement, supposons donné un élément μ de l'algèbre $\mathfrak{L}(4)$ et cherchons l'élément $\lambda \in$ **Spin** (4) qui lui correspond. Multiplions (9.4) à droite par γ_α; il vient

$$(9.5)\qquad 4\lambda + \gamma^\alpha\lambda\gamma_\alpha = -\mu^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta.$$

Posons

$$(9.6)\qquad \lambda = -\frac{1}{4}\mu^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta.$$

De la formule (8.4), il résulte que, pour ce λ,

$$\gamma^\rho\lambda\gamma_\rho = -\frac{1}{4}\mu^{\alpha\beta}\gamma^\rho\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\rho = 0.$$

Par suite (9.6) fournit une solution de l'équation (9.5) ou de l'équation (9.4). La solution générale de (9.4) s'obtient en ajoutant, à cette solution particulière de l'équation avec second membre, une solution arbitraire de l'équation homogène $\lambda\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\lambda = 0$. Ainsi toute solution de (9.4) peut s'écrire

$$\lambda = -\frac{1}{4}\mu^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta + ae.$$

Pour que $\Lambda = \exp\lambda \in \mathrm{Spin}_0(4)$ satisfasse à la condition dét$(\Lambda) = 1$, il faut et il suffit d'après un théorème classique, que la trace de λ soit nulle, c'est-à-dire que $a = 0$. Ainsi ([12]) :

THÉORÈME. — *L'isomorphisme p' induit par p entre l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz et celle du groupe spinoriel peut être défini de la manière suivante : à tout élément μ de L (4) décrit par un tenseur antisymétrique contravariant $\mu^{\alpha\beta}$ correspond l'élément $\lambda = p'^{-1}$ donné par*

$$(9.7)\qquad \lambda = -\frac{1}{4}\mu^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta$$

de l'algèbre de Lie de Spin (4).

10. Espace fibré des repères spinoriels et spineurs ([13]).

a. Soit V_4 la variété orientable espace-temps de la relativité générale. Cette variété est supposée munie d'un tenseur métrique g de type hyper-

---

([12]) Il est clair que le même raisonnement présenté un peu différemment permet de montrer que dim $\overline{\mathfrak{o}}$ (Spin$_0$ (4) = dim L_0 (4).

([13]) *Voir* LICHNEROWICZ [11] et [12].

bolique normal et nous la rapportons exclusivement aux repères orthonormés éléments d'un fibré principal $\mathcal{E}(V_4)$ admettant pour groupe structural le groupe de Lorentz $L(4)$. Relativement à de tels repères, la métrique V_4 s'écrit localement

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\,\theta^\beta,$$

où les θ^α sont quatre formes de Pfaff locales définissant en chaque point x d'un ouvert Ω de V_4 un corepère dual d'un repère orthonormé. Ainsi $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$.

Une *orientation* ε de V_4 est un pseudoscalaire de carré 1. Elle peut être définie relativement aux repères $y \in \mathcal{E}(V_4)$ par une composante $\varepsilon_y = \pm 1$ telle que si $y' = yA$ $[A \in L(4)]$, on ait

$$\varepsilon_{y'} = \varepsilon_y \operatorname{dét}(A). \tag{10.1}$$

Une orientation ε étant choisie, les repères y tels que $\varepsilon_y = 1$ seront dits *directs* et les autres *inverses*. Les repères orthonormés directs sont les éléments d'un fibré principal $\mathcal{E}_u(V_4)$ admettant pour groupe structural le groupe de Lorentz unimodulaire $L_u(4)$.

Si $A \in L(4)$, nous appelons *signature temporelle* ρ_A de A un nombre égal à $+1$ ou -1 selon que A appartient au groupe orthochrone ou à son complémentaire dans $L(4)$. Si $\Lambda \in \mathrm{Spin}(4)$ sa signature temporelle ρ_Λ est la signature temporelle de $A = p\Lambda$. Une *orientation temporelle* ρ est définie sur V_4 relativement aux repères $y \in \mathcal{E}(V_4)$ par une composante $\rho_y = \pm 1$ telle que si $y' = yA$ $[A \in L(4)]$, on ait

$$\rho_{y'} = \rho_y \rho_A. \tag{10.2}$$

Si ρ et ρ' sont deux orientations temporelles de V_4, $\rho\rho'$ est un scalaire de V_4 de carré 1; par suite on a sur V_4 soit $\rho\rho' = 1$, soit $\rho\rho' = -1$. Ainsi V_4 admet au plus deux orientations temporelles. Nous supposons qu'il en admet une; une orientation temporelle ρ étant choisie, les repères y tels que $\rho_y = 1$ sont dits *orthochrones* (orientés vers le futur), ceux pour lesquels $\rho_y = -1$ antichrones (orientés vers le passé). Les repères orthochrones sont les éléments d'un fibré principal $\mathcal{E}_e(V_4)$ admettant pour groupe structural le groupe orthochrone $L_e(4)$. Les repères *orthochrones directs* sont les éléments d'un fibré principal $\mathcal{E}_0(V_4)$ de groupes structural $L_0(4)$.

b. Nous avons vu que Spin (4) est un revêtement d'ordre 2 de $L(4)$. Nous supposons dans la suite la variété V_4 telle que de $\mathcal{E}(V_4)$ on puisse déduire *par extension* un fibré principal $\mathcal{S}(V_4)$ de groupe structural Spin (4). C'est une condition portant sur l'homologie de la variété [14].

---

[14] A ce sujet, *voir* HAEFLIGER [5].

De $\mathcal{E}_0(V_4)$, $\mathcal{E}_e(V_4)$, $\mathcal{E}_u(V_4)$ se déduisent par extension des sous-fibrés notés $\mathcal{S}_0(V_4)$, $\mathcal{S}_e(V_4)$, $\mathcal{S}_u(V_4)$ de groupes structuraux respectifs $\mathrm{Spin}_0(4)$, $\mathrm{Spin}_e(4)$, $\mathrm{Spin}_u(4)$. Lorsqu'il en est ainsi un point z de $\mathcal{S}(V_4)$ est dit un *repère spinoriel* et $\mathcal{S}(V_4)$ l'*espace fibré des repères spinoriels.* Nous désignons par π la projection canonique sur V_4 de $\mathcal{S}(V_4)$. A tout repère spinoriel $z \in \mathcal{S}(V_4)$ correspond canoniquement un point $y = pz$ de $\mathcal{E}(V_4)$, c'est-à-dire un repère orthonormé de V_4. Un tenseur de V_4 est dit rapporté à un repère spinoriel z s'il est rapporté au repère orthonormé $y = pz$ correspondant à z.

Un 1-*spineur contravariant* ψ de la variété V_4 est une application différentiable $z \to \psi(z)$ de $\mathcal{S}(V_4)$ dans un espace vectoriel M de matrices à une ligne 1×4 à éléments complexes, sur lequel opère le groupe Spin (4), application telle qu'on ait

$$\psi(\Lambda z^{-1}) = \Lambda \psi(z) \qquad [\Lambda \in \mathrm{Spin}(4)]. \tag{10.3}$$

Si $\psi(z)$ est la matrice (ψ^a), nous dirons que les ψ^a sont les *composantes* du 1-spineur ψ par rapport au repère spinoriel z attaché au point $x = \pi z$ de V_4.

Désignons par $\psi^{b'}$ les composantes de ψ par rapport au repère spinoriel $z\Lambda^{-1}$ attaché au même point x et par $\Lambda_a^{b'}$ les éléments de Λ. La relation (10.3) peut s'écrire sous forme explicite,

$$\psi^{b'} = \Lambda_a^{b'} \psi^a, \qquad \Lambda = (\Lambda_a^{b'}) \in \mathrm{Spin}(4). \tag{10.4}$$

Un 1-*spineur covariant* φ est une application différentiable $z \to \varphi(z)$ de $\mathcal{S}(V_4)$ dans l'espace M^* dual de M telle que

$$\varphi(z\Lambda^{-1}) = \varphi(z)\Lambda^{-1} \qquad [\Lambda \in \mathrm{Spin}(4)]. \tag{10.5}$$

Si $\varphi(z)$ est la matrice (φ_a) à 1 colonne, nous dirons que les φ_a sont les *composantes* du 1-spineur φ par rapport au repère spinoriel z attaché au point $x = \pi z$ de V_4.

Désignons par $\varphi_{b'}$ les composantes de φ par rapport au repère spinoriel $z\Lambda^{-1}$ attaché au même point x et par $\Lambda_{b'}^a$ les éléments de Λ^{-1}. La relation (10.5) peut s'écrire

$$\varphi_{b'} = \Lambda_{b'}^a \varphi_a, \qquad \Lambda^{-1} = (\Lambda_{b'}^a) \in \mathrm{Spin}(4). \tag{10.6}$$

Un 1-spineur contravariant (resp. covariant) *au point x de V_4* est défini par une application de $\pi^{-1}(x)$ sur M (resp. M^*) satisfaisant (10.3) [resp. (10.5)]. Les 1-spineurs contravariants en x engendrent un espace vectoriel complexe $\mathcal{S}_x$ et les 1-spineurs covariants l'espace dual $\mathcal{S}_x^*$, la forme bilinéaire fondamentale étant

$$(\psi, \varphi)_x = \psi^a(x)\varphi_a(x).$$

Les 1-spineurs contravariants ψ de V_4 engendrent un module sur l'anneau des fonctions de V_4 à valeurs complexes, tandis que les 1-spineurs covariants φ engendrent le module dual. La forme bilinéaire fondamentale est

$$(\psi, \varphi) = \psi^a \varphi_a. \tag{10.7}$$

Par produit tensoriel de la représentation triviale et de la représentation duale de Spin (4) que nous venons d'envisager on obtient la définition de *spineurs* plusieurs fois covariants et contravariants. A ces représentations nous pouvons adjoindre les représentations définies à partir de l'homomorphisme canonique de Spin (4) sur L (4). On obtient ainsi par produit tensoriel des *tenseurs-spineurs* de types variés.

Il est possible d'interpréter à l'aide de ces notions, la relation (8.14) qui peut s'écrire

$$\gamma_{\lambda'} = A^{\alpha}_{\lambda'} \Lambda \gamma_\alpha \Lambda^{-1}.$$

En explicitant cette relation en termes d'indices des deux types, on a

$$\gamma_{\lambda'}{}^{l'}{}_{m'} = A^{\alpha}_{\lambda'} \Lambda^{l'}_a \Lambda^b_{m'} \gamma_\alpha{}^a{}_b \qquad [\Lambda = \Lambda^{l'}_a;\ \Lambda^{-1} = (\Lambda^b_{m'});\ A^{-1} = (A^{\alpha}_{\lambda'})]. \tag{10.8}$$

(10.8) et par suite (8.14) expriment que les $\gamma_\alpha{}^a{}_b$ sont les composantes par rapport à un repère spinoriel d'un tenseur-spineur déterminé qui est tensoriel covariant d'ordre 1 et spinoriel une fois contravariant, une fois covariant ou de type (1, 1). Au tenseur-spineur γ défini par les γ_α nous donnons le nom de *tenseur-spineur fondamental.*

A tout vecteur X de V_4, le tenseur-spineur γ fait correspondre un spineur une fois contravariant, une fois covariant noté $i(X)\gamma$ [15] : si X admet les composantes X^α le spineur $i(X)\gamma$ admet les composantes

$$(i(X)\gamma)^a_b = X^\alpha \gamma_\alpha{}^a{}_b. \tag{10.9}$$

11. L'adjoint de Dirac. — Nous désignons par * le passage aux complexes conjugués, par T le passage d'une matrice à la matrice transposée, par ~ le passage d'une matrice à la matrice adjointe.

a. Dans un but de simplicité, nous supposons dans la suite que le système choisi de matrices γ_α satisfait à la condition suivante :

$$\tilde{\gamma}_\alpha = - g_{\alpha\alpha} \gamma_\alpha. \tag{11.1}$$

On vérifie aisément que les γ_α sont alors définis à la transformation près $\gamma_\alpha \rightarrow M \gamma_\alpha M^{-1}$ où M est telle que

$$\tilde{M} M = \pm e \qquad \text{ou} \qquad \tilde{M} M = \pm ie.$$

[15] Nous désignons par i (X) l'opérateur de produit intérieur par X.

Il est aisé de vérifier que les matrices suivantes satisfont (8.2) et (11.1) :

$$(11.2)\qquad \begin{cases} \gamma_0 = i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

Elles seront dites les matrices γ standard.

Cela posé, de (8.11) il résulte, d'après (11.1) :

$$(11.3)\qquad \gamma_0\gamma_\alpha\gamma_0^{-1} = -\tilde{\gamma}_\alpha$$

Si $\Lambda \in \mathrm{Spin}\,(4)$, on déduit de (8.14) :

$$\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\gamma}_\alpha\tilde{\Lambda} = A_\alpha^{\lambda'}\tilde{\gamma}_{\lambda'}$$

et par suite :

$$\tilde{\Lambda}^{-1}\gamma_0\gamma_\alpha\gamma_0^{-1}\tilde{\Lambda} = A_\alpha^{\lambda'}\gamma_0\gamma_{\lambda'}\gamma_0^{-1}.$$

Il en résulte

$$(11.4)\qquad (\gamma_0^{-1}\tilde{\Lambda}^{-1}\gamma_0)\,\gamma_\alpha\,(\gamma_0^{-1}\tilde{\Lambda}\gamma_0) = A_\alpha^{\lambda'}\gamma_{\lambda'} = \Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1}.$$

La relation (11.4) montre qu'il existe un scalaire complexe a_Λ dépendant de Λ tel que

$$(11.5)\qquad \Lambda = a_\Lambda\gamma_0^{-1}\tilde{\Lambda}^{-1}\gamma_0.$$

En égalant les déterminants des deux membres de (11.5), on a $(a_\Lambda)^4 = 1$, c'est-à-dire $a_\Lambda = \pm 1$ ou $\pm i$; a_Λ, dépendant continûment de Λ et ne pouvant prendre que des valeurs discrètes, conserve la même valeur dans chaque composante connexe de Spin (4). Pour $\Lambda = e$ et $\Lambda = \gamma_0$, on a $a_\Lambda = 1$. Pour $\Lambda = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$, on a $a_\Lambda = -1$. Ainsi (11.5) s'écrit

$$(11.6)\qquad \Lambda = \rho_\Lambda\gamma_0^{-1}\tilde{\Lambda}^{-1}\gamma_0,$$

où ρ_Λ est la signature temporelle de Λ.

b. Sur la variété V_4, supposons donnée une *orientation temporelle* ρ. Si ρ_z est la composante de ρ relativement au repère spinoriel z, c'est-à-dire par rapport au repère orthonormé correspondant de $\mathcal{E}\,(V_4)$, on a

$$(11.7)\qquad \rho_{z\Lambda} = \rho_z\rho_\Lambda.$$

Soit ψ un 1-spineur contravariant, on a

$$\psi(z\Lambda^{-1}) = \Lambda\psi(z).$$

Par passage aux adjoints, il vient

$$\tilde{\psi}(z\Lambda^{-1}) = \tilde{\psi}(z)\tilde{\Lambda}$$

et par suite :

$$\tilde{\psi}(z\Lambda^{-1})\gamma_0 = \tilde{\psi}(z)\tilde{\Lambda}\gamma_0. \tag{11.8}$$

Or (11.6) peut s'écrire

$$\tilde{\Lambda}\gamma_0 = \rho_\Lambda\gamma_0\Lambda^{-1}.$$

Nous pouvons donc mettre (11.8) sous la forme

$$\tilde{\psi}(z\Lambda^{-1})\gamma_0 = \rho_\Lambda\tilde{\psi}(z)\gamma_0\Lambda^{-1},$$

soit d'après (11.7) :

$$\rho_{z\Lambda^{-1}}\tilde{\psi}(z\Lambda^{-1})\gamma_0 = \rho_z\tilde{\psi}(z)\gamma_0\Lambda^{-1}. \tag{11.9}$$

Il est commode d'introduire la matrice symétrique réelle $\beta = - i\gamma_0$ qui satisfait manifestement $\beta^2 = e$. De plus

$$\beta\gamma_\alpha\beta^{-1} = -\tilde{\gamma}_\alpha, \tag{11.10}$$

(11.9) peut s'écrire

$$\rho_{z\Lambda^{-1}}\tilde{\psi}(z\Lambda^{-1})\beta = \rho_z\tilde{\psi}(z)\beta\Lambda^{-1}. \tag{11.11}$$

La relation (11.11) exprime que, sur la variété V_4 *munie de l'orientation temporelle* ρ, on peut faire correspondre à tout 1-spineur contravariant ψ, le 1-spineur covariant

$$\mathcal{C}\psi = \bar{\psi} = \rho\tilde{\psi}\beta. \tag{11.12}$$

Inversement tout 1-spineur covariant φ est l'image par $\mathcal{C}$ du 1-spineur contravariant $\rho\beta\tilde{\varphi}$. Le 1-spineur $\bar{\psi} = \mathcal{C}\psi$ est dit l'*adjoint de Dirac de* ψ. Nous avons ainsi défini une *application antilinéaire* $\mathcal{C}$ du module des 1-spineurs contravariants sur le module des 1-spineurs covariants. Il lui correspond une forme sesquilinéaire non dégénérée définie par

$$(\psi_1, \mathcal{C}\psi_2) = (\psi_2, \mathcal{C}\psi_1)^*, \tag{11.13}$$

où ψ_1, ψ_2 sont des 1-spineurs contravariants; $\mathcal{C}$ s'étend d'une manière naturelle aux spineurs et tenseurs-spineurs de type quelconque. Pour un 2-spineur de type (1, 1) par exemple, on a pour adjoint de Dirac le 2-spineur de même type

$$\mathcal{C}\psi = \beta\tilde{\psi}\beta.$$

12. La conjugaison de charge et la 2-forme spinorielle.

a. Considérons les transposées $\overset{T}{\gamma}_\alpha$ des matrices γ_α. Le système des matrices $-\overset{T}{\gamma}_\alpha$ satisfaisant aux relations (8.2), il existe une matrice C, définie à un facteur près, telle que

$$C\gamma_\alpha C^{-1} = -\overset{T}{\gamma}_\alpha. \tag{12.1}$$

De (12.1) on déduit par transposition

$$\overset{T}{C}{}^{-1}\overset{T}{\gamma}_\alpha \overset{T}{C} = -\gamma_\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\overset{T}{C}\gamma_\alpha \overset{T}{C}{}^{-1} = -\overset{T}{\gamma}_\alpha.$$

Il existe ainsi un scalaire complexe a tel que

$$\overset{T}{C} = aC.$$

On en déduit

$$C = a\overset{T}{C}$$

et par suite $a^2 = 1$ ou $a = \pm 1$. On vérifie aisément qu'en termes de matrices γ standard, on peut prendre par exemple :

$$C = -\gamma_0\gamma_1. \tag{12.2}$$

On a alors

$$\overset{T}{C} = -\overset{T}{\gamma}_1\overset{T}{\gamma}_0 = -\gamma_1\gamma_0 = \gamma_0\gamma_1.$$

On a ainsi en fait

$$\overset{T}{C} = -C. \tag{12.3}$$

D'après (12.2) on a choisi le facteur complexe arbitraire dans C tel que

$$C^2 = e \tag{12.4}$$

et C se trouve défini par la condition supplémentaire (12.4) au signe près.

b. Si $\Lambda \in \mathrm{Spin}(4)$, on déduit de (8.14) par transposition,

$$\overset{T}{\Lambda}{}^{-1}\overset{T}{\gamma}_\alpha \overset{T}{\Lambda} = A_\alpha^{\lambda'}\overset{T}{\gamma}_{\lambda'}$$

et par suite :

$$\overset{T}{\Lambda}{}^{-1} C\gamma_\alpha C^{-1}\overset{T}{\Lambda} = A_\alpha^{\lambda'} C\gamma_{\lambda'} C^{-1}.$$

Il en résulte évidemment

$$(12.5)\qquad \left(C^{-1}\overset{T}{\Lambda}{}^{-1}C\right)\gamma_\alpha\left(C^{-1}\overset{T}{\Lambda}C\right)=A_\alpha^{\lambda'}\gamma_{\lambda'}=\Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1}.$$

La relation (12.5) montre qu'il existe un scalaire complexe dépendant de Λ, soit b_Λ, tel que

$$\Lambda=b_\Lambda C^{-1}\overset{T}{\Lambda}{}^{-1}C.$$

En égalant les déterminants des deux membres, on voit que $b_\Lambda=\pm 1$ ou $\pm i$; b_Λ conserve encore la même valeur dans chaque composante connexe de Spin (4). Pour $\Lambda=e$ ou γ_0, on a $b_\Lambda=1$; pour $\Lambda=\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ on a $b_\Lambda=-1$. Ainsi la relation précédente s'écrit

$$(12.6)\qquad \Lambda=\rho_\Lambda C^{-1}\overset{T}{\Lambda}{}^{-1}C,$$

où ρ_Λ est la signature temporelle de la matrice Λ.

c. De (11.3) on déduit par passage aux complexes conjugués

$$\gamma_0^\star\gamma_\alpha^\star\gamma_0^{\star-1}=-\overset{T}{\gamma}_\alpha$$

Par comparaison avec (12.1), il vient

$$C\gamma_\alpha C^{-1}=\gamma_0^\star\gamma_\alpha^\star\gamma_0^{\star-1},$$

soit

$$(\gamma_0^{\star-1}C)\gamma_\alpha(C^{-1}\gamma_0^\star)=\gamma_\alpha^\star.$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire la matrice réelle

$$\alpha=C^{-1}\gamma_0^\star=-\gamma_0\gamma_1\gamma_0^\star=\gamma_0\gamma_1\gamma_0=-\gamma_0^2\gamma_1=\gamma_1$$

(avec $\alpha^2=e$). On obtient ainsi la formule qui nous sera utile ultérieurement,

$$(12.7)\qquad \alpha^{-1}\gamma_\alpha\alpha=\gamma_1^{-1}\gamma_\alpha\gamma_1=\gamma_\alpha^\star.$$

De même de (11.6) il résulte

$$\Lambda^*=\rho_\Lambda\gamma_0^{\star-1}\overset{T}{\Lambda}{}^{-1}\gamma_0^\star$$

et par comparaison avec (12.6), il vient

$$\Lambda^*=(\gamma_0^{\star-1}C)\Lambda(C^{-1}\gamma_0^\star),$$

soit

$$(12.8)\qquad \Lambda^*=\alpha^{-1}\Lambda\alpha.$$

Soit alors ψ un 1-spineur contravariant. De

$$\psi(z\Lambda^{-1})=\Lambda\psi(z)$$

on déduit par passage aux complexes conjugués,

$$\psi^*(z\Lambda^{-1}) = \Lambda^*\psi^*(z).$$

Soit d'après (12.8) :

$$\alpha\psi^*(z\Lambda^{-1}) = \Lambda\alpha\psi^*(z), \tag{12.9}$$

(12.9) exprime qu'au 1-spineur contravariant ψ correspond un autre 1-spineur contravariant dépendant antilinéairement de ψ et défini par

$$\mathcal{C}\psi = \alpha\psi^*. \tag{12.10}$$

Cherchons l'image par $\mathcal{C}$ de ce nouveau spineur. Elle est donnée par

$$\alpha(\alpha\psi^*)^* = \alpha^2\psi = \psi.$$

Nous avons ainsi défini sur les 1-spineurs contravariants une *anti-involution* ou *conjugaison*, c'est-à-dire une application antilinéaire régulière $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C}^2 = \text{Id}$. A $\mathcal{C}$ on donne le nom de *conjugaison de charge.* On notera que la conjugaison de charge ne fait intervenir aucune orientation temporelle de V_4.

Par dualité et produit tensoriel, $\mathcal{C}$ peut-être étendue d'une manière naturelle à des spineurs de type quelconque. Le conjugué de charge d'un 1-spineur covariant φ est

$$\mathcal{C}\varphi = \varphi^*\alpha \tag{12.11}$$

et satisfait

$$(\mathcal{C}\psi, \varphi) = (\psi, \mathcal{C}\varphi)^*. \tag{12.12}$$

d. Cherchons la loi de commutation entre adjonction de Dirac et conjugaison de charge. Si ψ est un 1-spineur contravariant,

$$\mathfrak{A}\psi = \rho\tilde{\psi}\beta$$

et d'après (12.11) :

$$\mathcal{C}\mathfrak{A}\psi = \rho\overset{T}{\psi}\beta\alpha = -\rho\overset{T}{\psi}\alpha\beta.$$

D'autre part de (12.10) on tire

$$\mathfrak{A}\mathcal{C}\psi = \rho\overset{T}{\psi}\alpha\beta. \tag{12.13}$$

On a ainsi

$$\mathfrak{A}\mathcal{C}\psi = -\mathcal{C}\mathfrak{A}\psi. \tag{12.14}$$

Ainsi l'*adjonction de Dirac et la conjugaison de charge anticommutent.*

(12.13) peut s'écrire

$$\mathfrak{A}\mathcal{C}\psi = -i\rho\overset{T}{\psi}C. \tag{12.15}$$

e. A tout 1-spineur contravariant ψ, faisons correspondre le 1-spineur covariant $\mathcal{A}\mathcal{C}\psi$. On définit ainsi un isomorphisme Γ (application *linéaire* sur) du module des 1-spineurs contravariants sur le module des 1-spineurs covariants, c'est-à-dire un 2-spineur covariant Γ non dégénéré. Si les Γ_{ab} sont les composantes du 2-spineur Γ,

$$(\Gamma\psi)_a = \Gamma_{ab}\psi^b. \tag{12.16}$$

Si l'on note C_{ab} les éléments C_a^b de la matrice C, il vient d'après (12.15) :

$$\Gamma_{ab} = -i\rho C_{ab}. \tag{12.17}$$

Si ψ_1, ψ_2 sont deux 1-spineurs contravariants, on a d'après (11.13) :

$$(\Gamma\psi_1, \psi_2) = (\mathcal{A}\mathcal{C}\psi_1, \psi_2) = (\mathcal{C}\psi_1, \mathcal{A}\psi_2)^*,$$

soit d'après (12.12) :

$$(\Gamma\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, \mathcal{C}\mathcal{A}\psi_2) = -(\psi_2, \mathcal{A}\mathcal{C}\psi_2).$$

Il vient ainsi

$$(\Gamma\psi_1, \psi_2) + (\psi_1, \Gamma\psi_2) = 0. \tag{12.18}$$

La relation (12.18) exprime que le 2-spineur Γ est antisymétrique ($\Gamma_{ab} + \Gamma_{ba} = 0$), ce qu'on vérifie immédiatement aussi sur (12.17) puisque $C^T = -C$. La 2-forme Γ de rang maximum est dite la *2-forme spinorielle fondamentale*. A l'aide de Γ on peut identifier les 1-spineurs contravariants et covariants et par suite, le cas échéant, n'envisager qu'un type de spineur de chaque ordre.

Au tenseur-spineur γ correspond le tenseur-spineur covariant

$$\gamma_{\alpha ab} = \Gamma_{ar}\gamma_\alpha{}^r{}_b. \tag{12.19}$$

Des propriétés de la matrice C il résulte

$$(C\gamma_\alpha)^T = \gamma_\alpha^T C^T = -C^T\gamma_\alpha = C\gamma_\alpha.$$

Par suite de (12.7) on déduit que le tenseur-spineur (12.19) est symétrique en tant que spineur

$$\gamma_{\alpha ab} = \gamma_{\alpha ba}.$$

13. Connexion spinorielle.

a. Par définition, une connexion spinorielle est une connexion infinitésimale sur le fibré principal $\mathcal{S}(V_4)$ [16]. Une telle connexion est définie

[16] En ce qui concerne la théorie des connexions infinitésimales, *voir* par exemple LICHNEROWICZ [11].

par une 1-forme σ sur $\mathcal{S}(V_4)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe structural Spin (4) et satisfaisant les deux conditions suivantes :

1° Si V_z est un vecteur vertical en $z \in \mathcal{S}(V_4)$, $\sigma(V_z)$ est l'élément d'algèbre de Lie de Spin (4) « engendré » par V_z quand on identifie la fibre avec Spin (4).

2° Si $\Lambda \in \text{Spin}(4)$ et si V_z est un vecteur arbitraire en $z \in \mathcal{S}(V_4)$, on a

$$\sigma(V_z \Lambda^{-1}) = \text{ad}(\Lambda)\,\sigma(V_z).$$

Cela posé, soit ω une connexion lorentzienne de V_4, c'est-à-dire une connexion infinitésimale sur $\mathcal{E}(V_4)$; ω est une 1-forme de $\mathcal{E}(V_4)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de $L(4)$ satisfaisant aux deux conditions analogues aux précédentes. Nous avons désigné par p la projection de $\mathcal{S}(V_4)$ sur $\mathcal{E}(V_4)$. A la 1-forme ω de $\mathcal{E}(V_4)$, nous pouvons faire correspondre la 1-forme σ de $\mathcal{S}(V_4)$ définie par

$$\sigma(V_z) = \overset{-1}{p'}\,\omega(p\,V_z), \tag{13.1}$$

où pV_z désigne la projection de V_z sur $\mathcal{E}(V_4)$ et p' l'isomorphisme de **Spin** (4) sur $\mathfrak{L}$ (4) (§ 9).

Il est clair que la condition 1° est satisfaite. D'autre part

$$\sigma(V_z \Lambda^{-1}) = \overset{-1}{p'}\,\omega\,\{\,p(V_z \Lambda^{-1})\,\} = \overset{-1}{p'}\,\omega\,\{\,(p\,V_z)\,A^{-1}\,\} \qquad (A = p\,\Lambda),$$

soit

$$\sigma(V_z \Lambda^{-1}) = \overset{-1}{p'}\,\text{ad}(A)\,\omega(p\,V_z).$$

Or on a manifestement

$$\Lambda \mu^\alpha{}_\beta \gamma_\alpha \gamma^\beta \Lambda^{-1} = (A_\alpha^{\lambda'} A^\beta{}_{\mu'} \mu^\alpha{}_\beta)\,\gamma_{\lambda'} \gamma^{\mu'}, \qquad A = (A_\alpha^{\lambda'}) = p\,\Lambda,$$

soit

$$\text{ad}\,\Lambda\,\overset{-1}{p'} = \overset{-1}{p'}\,\text{ad}\,A.$$

Ainsi

$$\sigma(V_z \Lambda^{-1}) = \text{ad}(\Lambda)\,\overset{-1}{p'}\,\omega(p\,V_z) = \text{ad}(\Lambda)\,\sigma(V_z).$$

La 1-forme σ donnée par (13.1) définit donc une connexion spinorielle canoniquement attachée à la connexion lorentzienne. Dans la suite, nous prendrons pour ω la connexion riemannienne de V_4 et pour σ la connexion spinorielle correspondante qui sera dite la connexion spinorielle canonique.

Au point $y \in \mathcal{E}(V_4)$, la 1-forme ω peut être définie par une matrice $(\omega^\alpha{}_\beta)$ [ou $(\omega^{\alpha\beta})$] dont les éléments sont des formes linéaires en $y \in \mathcal{E}(V_4)$. La 1-forme σ en $z \in \mathcal{S}(V_4)$ peut alors être définie par la matrice [*voir* (9.7)]

$$\sigma = -\frac{1}{4}\,\omega^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta = -\frac{1}{4}\,\omega^\alpha{}_\beta\gamma_\alpha\gamma^\beta \tag{13.2}$$

dont les éléments sont des formes linéaires σ^a_b en $z \in \mathcal{S}(V_4)$:

(13.3) $$\sigma^a_b = -\frac{1}{4}\,\omega^\alpha{}_\beta\,\gamma_\alpha{}^a{}_r\,\gamma^{\beta r}{}_b.$$

Sur un voisinage ouvert Ω de V_4 muni de repères spinoriels et par suite de repères orthonormés, la connexion ω admet des coefficients que nous noterons $C^\alpha_{\beta\rho}$. Les coefficients correspondants de la connexion spinorielle peuvent s'écrire

(13.4) $$\sigma^a_{b\rho} = -\frac{1}{4}\,C^\alpha_{\beta\rho}\,\gamma_\alpha{}^a{}_r\,\gamma^{\beta r}{}_b.$$

b. D'après la théorie générale des connexions, un 1-spineur contravariant admet pour différentielle absolue, dans la connexion σ, une 1-forme de type 1-spinoriel contravariant

$$\nabla\psi = d\psi + \sigma\psi.$$

De même un 1-spineur covariant admet pour différentielle absolue

$$\nabla\varphi = d\varphi - \varphi\sigma.$$

A ces différentielles absolues sont attachés des tenseurs-spineurs dérivées covariantes, de composantes dans le voisinage Ω muni de repères spinoriels,

(13.5) $$\nabla_\rho\psi^a = \partial_\rho\psi^a + \sigma^a_{b\rho}\psi^b$$

dans le cas contravariant, et

(13.6) $$\nabla_\rho\varphi_\alpha = \partial_\rho\varphi_a - \sigma^b_{a\rho}\varphi_b$$

dans le cas covariant. Dans les relations (13.5), (13.6) et dans la suite ∂_ρ désigne la *dérivation pfaffienne* par rapport aux formes $\{\theta^\rho\}$ définissant les corepères duaux des repères orthonormés (§ 10 *a*).

Par produit tensoriel, on obtient immédiatement l'expression des composantes de la dérivée covariante d'un tenseur-spineur arbitraire. Nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans la connexion spinorielle canonique la différentielle absolue du tenseur-spineur fondamental γ est nulle.*

En effet,

$$\nabla\gamma^\alpha = d\gamma^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta\gamma^\beta + \sigma\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\sigma,$$

soit

$$\nabla\gamma^\alpha = \omega^{\alpha\beta}\gamma_\beta + \sigma\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\sigma = -\omega^{\beta\alpha}\gamma_\beta + \sigma\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\sigma$$

qui est nul d'après (9.4) puisque σ est une solution de cette équation en λ lorsqu'on prend ω pour p.

14. Courbure de la connexion spinorielle.

a. La courbure de la connexion spinorielle est définie par la 2-forme $\mathbf{\Pi}$ de $\mathcal{S}(V_4)$ de type adj. qui se déduit de $\mathbf{\Pi}$ par la formule

$$(14.1) \qquad \mathbf{\Pi} = d\sigma + \frac{1}{2}[\sigma, \sigma],$$

où [ ] est le classique crochet de formes à valeurs dans une algèbre de Lie.

Sur chaque voisinage Ω muni de repères spinoriels, $\mathbf{\Pi}$ est définie par la matrice ayant pour éléments les 2-formes locales

$$(14.2) \qquad \mathbf{\Pi}^a_b = d\sigma^a_b + \sigma^a_r \wedge \sigma^r_b.$$

A $\mathbf{\Pi}$ est canoniquement associé un tenseur-spineur P dont les composantes sur Ω sont définies par

$$(14.3) \qquad \mathbf{\Pi}^a_b = \frac{1}{2} P^a{}_{b,\lambda\mu}\,\theta^\lambda \wedge \theta^\mu \qquad (P^a{}_{b,\lambda\mu} = -P^a{}_{b,\mu\lambda}).$$

Les $P^a{}_{b,\lambda\mu}$ s'expriment explicitement en fonction des coefficients de la connexion spinorielle σ par la formule

$$(14.4) \quad P^a{}_{b,\lambda\mu} = \partial_\lambda \sigma^a_{b\mu} - \partial_\mu \sigma^a_{b\lambda} + \sigma^a_{r\lambda}\sigma^r_{b\mu} - \sigma^a_{r\mu}\sigma^r_{b\lambda} - \sigma^a_{b\rho}(C^\rho_{\mu\lambda} - C^\rho_{\lambda\mu}).$$

Au tenseur-spineur $P^a{}_{b,\lambda\mu}$ antisymétrique en λ et μ on donne le nom de *tenseur-spineur de courbure* de la connexion spinorielle.

Dans la suite, il sera souvent commode de raisonner de la manière suivante. Étant donné un point x de V_4, munissons un voisinage Ω de ce point de repères spinoriels tels que pour les repères orthonormés correspondants, les coefficients $C^\alpha_{\beta\rho}$ de la connexion riemannienne *soient nuls en x*. Il en est alors de même pour les coefficients $\sigma^a_{b\rho}$ de la connexion spinorielle. Nous dirons que les repères choisis sont *normaux en x*. On a alors pour le tenseur-spineur de courbure en x,

$$(14.5) \quad P^a{}_{b,\lambda\mu} = \partial_\lambda \sigma^a_{b\mu} - \partial_\mu \sigma^a_{b\lambda} = -\frac{1}{4}(\partial_\lambda C^\alpha_{\beta\mu} - \partial_\mu C^\alpha_{\beta\lambda})(\gamma_\alpha \gamma^\beta)^a_b.$$

Il en résulte en x,

$$(14.6) \qquad P^a{}_{b,\lambda\mu} = -\frac{1}{4} R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}(\gamma_\alpha\gamma^\beta)^a_b,$$

où $R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}$ désigne les composantes du tenseur de courbure en x de la connexion riemannienne. On a donc entre la courbure de la connexion spinorielle et celle de la connexion riemannienne décrite par la 2-forme $\Omega = (\Omega^\alpha{}_\beta)$ la relation suivante :

$$(14.7) \qquad \mathbf{\Pi} = -\frac{1}{4}\Omega^\alpha{}_\beta \gamma_\alpha \gamma^\beta,$$

où au second nombre figure le tenseur-spineur fondamental :

Le tenseur-spineur de courbure P satisfait à l'*identité de Bianchi* :

$$(14.8) \qquad \nabla_\lambda P^a{}_{b,\mu\nu} + \nabla_\mu P^a{}_{b,\nu\lambda} + \nabla_\nu P^a{}_{b,\lambda\mu} = 0.$$

On pourrait établir directement cette identité, mais elle est une conséquence immédiate de (14.6) et de l'identité de Bianchi relative à la connexion riemannienne.

b. Le tenseur-spineur P apparaît dans l'*identité de Ricci* relative aux spineurs qui nous sera utile dans la suite et que nous allons former.

Si ψ est un 1-spineur contravariant, on a

$$\nabla_\mu \psi^a = \partial_\mu \psi^a + \sigma^a_{r\mu} \psi^r$$

et par une nouvelle dérivation

$$(14.9) \qquad \nabla_\lambda \nabla_\mu \psi^a = \partial_\lambda \partial_\mu \psi^a + \partial_\lambda \sigma^a_{r\mu} \psi^r + \sigma^a_{r\mu} \partial_\lambda \psi^r + \sigma^a_{r\lambda} \nabla_\mu \psi^r - C^\rho_{\mu\lambda} \nabla_\rho \psi^a.$$

D'autre part,

$$d\psi = \partial_\mu \psi^a \theta^\mu,$$

on déduit par différentiation extérieure

$$\partial_\lambda \partial_\mu \psi^a \theta^\lambda \wedge \theta^\mu + \partial_\rho \psi^a d\theta^\rho = 0.$$

Le tenseur de torsion de la connexion riemannienne étant nul

$$d\theta^\rho + \omega^\rho_\mu \wedge \theta^\mu = 0,$$

il en résulte

$$(14.10) \qquad (\partial_\lambda \partial_\mu \psi^a - C^\rho_{\mu\lambda} \partial_\rho \psi^\alpha)\, \theta^\lambda \wedge \theta^\mu = 0.$$

Pour des repères normaux en $x \in V_4$, on a en ce point d'après (14.9) :

$$(14.11) \qquad \nabla_\lambda \nabla_\mu \psi^0 = \partial_\lambda \partial_\mu \psi^a + \partial_\lambda \sigma^a_{r\mu} \psi^r$$

et d'après (14.10) :

$$\partial_\lambda \partial_\mu \psi^a \theta^\lambda \wedge \theta^\mu = 0.$$

Ainsi $\partial_\lambda \partial_\mu \psi^a$ est symétrique par rapport aux indices λ, μ en x et par soustraction on déduit de (14.11) qu'en x,

$$(\nabla_\lambda \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\lambda)\, \psi^a = (\partial_\lambda \sigma^a_{r\mu} - \partial_\mu \sigma^a_{r\lambda})\, \psi^r,$$

soit d'après (14.5) :

$$(14.12) \qquad (\nabla_\lambda \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\lambda)\, \psi^a = P^a{}_{r,\lambda\mu} \psi^r.$$

Nous avons ainsi établi l'identité de Ricci (14.12) pour un 1-spineur contravariant. Plus généralement pour un spineur quelconque on établit aisément l'identité

$$(14.13)\quad (\nabla_\lambda \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\lambda)\,\psi^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q} = \sum_{i=1}^{p} P^{a_i}{}_{r,\lambda\mu}\,\psi^{a_1\ldots r\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q} - \sum_{j=1}^{q} P^{r}{}_{b_j,\lambda\mu}\,\psi^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots r\ldots b_q}.$$

15. **Quelques identités utiles.** — Nous allons établir quelques identités concernant le tenseur de courbure de la connexion riemannienne et le tenseur-spineur γ, identités qui nous seront utiles dans la suite.

Nous nous proposons d'évaluer le vecteur-spineur de type (1, 1) défini par

$$T^\alpha = R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu.$$

A cet effet nous partirons de la relation

$$(R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu} + R^\alpha{}_{\lambda,\mu\beta} + R^\alpha{}_{\mu,\beta\lambda})\,\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu = 0$$

qui est une conséquence immédiate d'une identité bien connue vérifiée par le tenseur de courbure. En modifiant le nom des indices elle peut s'écrire

$$(15.1)\qquad R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}(\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu + \gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\beta + \gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\lambda) = 0.$$

En développant et utilisant (8.2), il vient

$$T^\alpha - R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}\gamma^\lambda(2\,g^{\mu\beta}e + \gamma^\beta\gamma^\mu) - R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\mu = 0.$$

Soit

$$(15.2)\qquad T^\alpha - 2R^\alpha{}_\lambda\gamma^\lambda - 2R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\mu = 0,$$

où $R_{\alpha\lambda}$ désigne le tenseur de Ricci. En utilisant de nouveau (8.2) dans le dernier terme du premier membre de (15.2), on a

$$T^\alpha - 2R^\alpha{}_\beta\gamma^\beta + 2R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}(2\,g^{\lambda\beta}e + \gamma^\beta\gamma^\lambda)\,\gamma^\mu = 0,$$

soit

$$3\,T^\alpha - 6R^\alpha{}_\beta\gamma^\beta = 0.$$

Nous avons ainsi obtenu l'identité

$$(15.3)\qquad T^\alpha = R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu = 2R^\alpha{}_\beta\gamma^\beta.$$

En reportant dans (15.2) on en déduit

$$(15.4)\qquad R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\mu = 0.$$

De (15.1) enfin, il résulte

(15.5) $$R^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta} = -2R^{\alpha}{}_{\beta}\gamma^{\beta}.$$

Évaluons maintenant à partir de (15.3) :

$$R^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu}\gamma_{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu} = 2R_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta},$$

soit d'après (8.2) :

$$R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu} = -2R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}.$$

On obtient ainsi

(15.6) $$R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu} = -2Re,$$

où R est la courbure riemannienne scalaire.

16. Spineurs-distributions.

a. Si ψ est un p-spineur contravariant, φ un p-spineur covariant, nous désignons par $(\psi, \varphi)_x$ le scalaire

$$(\psi, \varphi)_x = \psi^{a_1\dots a_p}(x)\,\varphi_{a_1\dots a_p}(x).$$

Si l'intersection des supports sur V_4 de deux spineurs est compacte, nous posons

(16.1) $$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_{V_4} (\psi, \varphi)_x \eta(x),$$

où η est l'élément de volume riemannien.

Un p-spineur-distribution contravariant (resp. covariant) est une fonctionnelle linéaire continue à valeurs scalaires complexes sur les p-spineurs covariants (resp. contravariants) à support compact de classe C^{∞}. Si ψ est un p-spineur contravariant ordinaire, il définit par (16.1) un p-spineur-distribution.

Un p-spineur-distribution contravariant ψ dans un voisinage Ω muni de repères admet des composantes $\psi^{a_1\dots a_p}$ qui sont des scalaires-distributions dans Ω. Les mêmes définitions et notations s'étendent aux *tenseurs-spineurs-distributions* de tous les types.

b. Si ψ est un p-spineur contravariant ordinaire, φ un 1-tenseur-p-spineur covariant tel que $S(\psi) \cap S(\varphi)$ soit compact, on obtient par intégration par parties, la relation relative au tenseur-spineur $\nabla\psi$,

(16.2) $$\langle \nabla\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \delta\varphi \rangle,$$

où δ est l'opérateur de codifférentiation défini par

(16.3) $$\delta : \quad \varphi_{\rho\, a_1\dots a_p} \to -\nabla_{\rho}\varphi^{\rho}{}_{a_1\dots a_p}$$

Nous sommes ainsi conduits à définir par (16.2) le *tenseur-spineur-distribution* $\nabla\psi$ dérivée covariante du p-tenseur-distribution contravariant. Les considérations développées pour les tenseurs-distributions s'adaptent ainsi sans difficulté aux *spineurs et tenseurs-spineurs-distributions.*

17. Bispineurs de Dirac.

a. Dans la théorie des opérateurs différentiels spinoriels, nous devons naturellement faire intervenir les notions de bispineurs et bispineurs-distributions sur $V_4 \times V_4$. Si $\mathcal{S}_x$ est l'espace vectoriel des 1-spineurs contravariants en x, un bispineur en (x, x') est un élément du produit tensoriel d'un espace $\mathcal{S}_x^{(q)} \otimes \mathcal{S}^{*(q)}_x$ par un espace $\mathcal{S}_{x'}^{(p')} \otimes \mathcal{S}^{*(q')}_{x'}$.

Désignons par $s(x, x')$ un bi-1-spineur arbitraire élément de $\mathcal{S}_x \otimes \mathcal{S}^{*}_{x'}$ (c'est-à-dire contravariant en x, covariant en x'), de composantes $s^a_{s'}$ astreint seulement à ce que $s(x, x)$ puisse être identifié à l'opérateur-identité de $\mathcal{S}_{x'}$, soit

$$s^a_{s'}(x, x) = \delta^a_{s'}, \tag{17.1}$$

où les $\delta^a_{s'}$ désignent les symboles de Kronecker.

Le *bi-1-spineur de Dirac* de V_4 est le bi-spineur-distribution

$$\Sigma^{(1/2)}(x, x') = s(x, x')\,\delta(x, x') \qquad (\Sigma^{(1/2)a}{}_{s'} = s^a_{s'}\,\delta), \tag{17.2}$$

où $\delta(x, x')$ est le biscalaire de Dirac. Il ne dépend que de la structure riemannienne de V_4 et non du choix de s; $\Sigma^{(1/2)}(x, x')$ peut être défini par

$$\langle \Sigma^{(1/2)}(x, x'), \psi(x') \rangle = \psi(x), \tag{17.3}$$

où ψ est un 1-spineur contravariant. On a aussi

$$\langle \Sigma^{(1/2)}(x', x), \varphi(x') \rangle = \varphi(x), \tag{17.4}$$

où φ est un 1-spineur covariant.

En ce qui concerne les 1-tenseurs-spineurs, on peut définir un bi-1-tenseur-spineur de Dirac par

$$\Sigma^{(3/2)}(x, x') = \{\tau(x, x') \otimes s(x, x')\}\,\delta(x, x'), \tag{17.5}$$

où τ est le bi-1-tenseur introduit au paragraphe 2. $\Sigma^{(3/2)}$ a pour composantes

$$\Sigma^{(3/2)}(x, x') = \tau^{\alpha}_{\lambda'} s^a_{s'}\,\delta(x, x')$$

et peut être défini par

$$\langle \Sigma^{(3/2)}(x, x'), \psi(x') \rangle = \psi(x), \tag{17.6}$$

où ψ est un 1-tenseur-spineur contravariant de composantes $\psi^{\alpha a}$ en x.

On peut ainsi définir des bitenseurs-spineurs de Dirac relatifs à des types arbitraires de tenseurs-spineurs.

b. Il existe entre $\Sigma^{(1/2)}$ et $\Sigma^{(3/2)}$ des relations algébriques et différentielles qui nous seront utiles par la suite et que nous allons former; tout d'abord de

$$\Sigma^{(3/2)}{}^{\alpha}_{\lambda'}{}^{a}_{s'} = \delta^{\alpha}_{\lambda'}\,\delta^{a}_{s'}\,\delta(x,\,x'),$$

on peut déduire par produit par $\gamma^{\lambda'}$,

$$\Sigma^{(3/2)}{}^{\alpha}_{\lambda'}{}^{a}_{s'}\gamma^{\lambda' s'}{}_{r'} = \gamma^{\alpha a}{}_{r'}\,\delta(x,\,x') = \gamma^{\alpha a}{}_{b}\,\delta^{b}_{r'}\,\delta(x,\,x') = \gamma^{\alpha a}{}_{b}\,s^{b}_{r'}\,\delta(x,\,x'),$$

soit encore

$$\Sigma^{(3/2)}{}^{\alpha}_{\lambda'}{}^{a}_{s'}\gamma^{\lambda' s'}{}_{r'} = \gamma^{\alpha a}{}_{b}\,\Sigma^{(1/2)}{}^{b}_{r'}. \tag{17.7}$$

Désignons par $\Sigma^{(3/2)}{}^{\alpha}_{\lambda'}$, la matrice sur les indices spinoriels d'éléments $(\Sigma^{(3/2)}{}^{\alpha}_{\lambda'}{}^{a}_{s'})$; (17.7) peut se traduire par la relation matricielle

$$\Sigma^{(3/2)}{}^{\alpha}_{\lambda'}\gamma^{\lambda'} = \gamma^{\alpha}\,\Sigma^{(1/2)}. \tag{17.8}$$

Cherchons maintenant à évaluer $\delta_{x'}\Sigma^{(3/2)}(x,\,x')$ qui admet pour composantes

$$-\nabla^{\lambda'}\Sigma^{(3/2)}{}_{\alpha\lambda'}{}^{a}_{s'}(x,\,x') = -\nabla^{\lambda'}\{\tau_{\alpha\lambda'}\,s^{a}_{s'}\,\delta(x,\,x')\}.$$

Pour tout 1-spineur contravariant ψ à support compact, on a

$$\begin{aligned}\langle -\nabla^{\lambda'}\{\tau_{\alpha\lambda'}\,s^{a}_{s'}\,\delta(x,\,x')\},\,\psi^{s'}(x')\rangle_{x'} &= \langle \tau_{\alpha\lambda'}\,s^{a}_{s'}\,\delta(x,\,x'),\,\nabla^{\lambda'}\psi^{s'}\rangle_{x'}\\ &= \nabla_{\alpha}\psi^{a}(x).\end{aligned} \tag{17.9}$$

D'autre part de

$$\langle s^{a}_{s'}\,\delta(x,\,x'),\,\psi^{s'}(x')\rangle_{x'} = \psi^{a}(x),$$

on déduit par dérivation covariante en x,

$$\langle \nabla_{\alpha}\{s^{a}_{s'}\,\delta(x,\,x')\},\,\psi^{s'}(x')\rangle_{x'} = \nabla_{\alpha}\psi^{a}(x). \tag{17.10}$$

Par comparaison de (17.9) et (17.10), on obtient

$$-\nabla^{\lambda'}\{\tau_{\alpha\lambda'}\,s^{a}_{s'}\,\delta(x,\,x')\} = \nabla_{\alpha}\{s^{a}_{s'}\,\delta(x,\,x')\},$$

c'est-à-dire la relation différentielle

$$\delta_{x'}\Sigma^{(3/2)}(x,\,x') = \nabla_{x}\Sigma^{(1/2)}(x,\,x'), \tag{17.11}$$

où les deux membres sont des 1-tenseurs-1-spineurs contravariants en x, 1-spineurs covariants en x'.

c. Supposons la variété V_4 munie d'une orientation temporelle ρ. Si $E(x,\,x')$ est un bi-1-spineur contravariant en x, covariant en x', son adjoint de Dirac est le bi-1-spineur covariant en x, contravariant en x', défini par

$$\overline{E}(x,\,x') = \rho(x)\,\rho(x')\,\beta\,\tilde{E}(x,\,x')\,\beta. \tag{17.12}$$

Évaluons en particulier l'adjoint de Dirac du bispineur $\Sigma^{(1/2)}(x, x')$. On a

$$\overline{\Sigma}^{(1/2)}{}_{a}^{b'}(x, x') = \rho(x)\,\rho(x')\,\beta^{b'}_{r'}\,\tilde{\Sigma}^{(1/2)}{}^{r'}_{s}(x, x')\,\beta^{s}_{a}.$$

Soit en substituant à $\Sigma^{(1/2)}$ ses composantes

$$\overline{\Sigma}^{(1/2)}{}_{a}^{b'}(x, x') = \rho(x)\,\rho(x')\,\beta^{b'}_{r'}\,\delta^{r'}_{s}\,\beta^{s}_{a}\,\delta(x, x'),$$

compte tenu de $\beta^2 = e$, on obtient

$$\overline{\Sigma}^{(1/2)}{}_{a}^{b'}(x, x') = s^{b'}_{a}\,\delta(x, x').$$

Nous avons ainsi établi la formule

$$\overline{\Sigma}^{(1/2)}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x', x). \tag{17.13}$$

d. Reprenons le bi-1-spineur $E(x, x')$ que nous venons d'envisager. Nous désignons par $\overset{c}{E}(x, x')$ le bi-1-spineur de même variance défini par

$$\overset{c}{E}(x, x') = \alpha\,\overset{\star}{E}(x, x')\,\alpha. \tag{17.14}$$

Évaluons en particulier $\overset{c}{\Sigma}{}^{(1/2)}(x, x')$. On a

$$\overset{c}{\Sigma}{}^{(1/2)}{}^{a}_{b'}(x, x') = \alpha^{a}_{r}\,\overset{\star}{\Sigma}{}^{(1/2)}{}^{r}_{s'}(x, x')\,\alpha^{s'}_{b'}.$$

Soit en substituant à $\Sigma^{(1/2)}$ ses composantes

$$\overset{c}{\Sigma}{}^{(1/2)}{}^{a}_{b'}(x, x') = \alpha^{a}_{r}\,\delta^{r}_{s'}\,\alpha^{s'}_{b'}\,\delta(x, x').$$

Compte tenu de $\alpha^2 = e$, nous obtenons ainsi la formule

$$\overset{c}{\Sigma}{}^{(1/2)}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x, x'). \tag{17.15}$$

III. — Le champ de Dirac en relativité générale ([17]).

18. L'opérateur laplacien sur les 1-spineurs.

a. Étant donné, sur la variété espace-temps V_4, un *1-spineur contravariant* ψ, nous appelons laplacien de ψ et désignons par $\Delta\psi$ le 1-spineur contravariant défini par

$$\Delta\psi = \gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}, \tag{18.1}$$

où Δ est l'opérateur de dérivation covariante des tenseurs-spineurs défini par la connexion riemannienne et la connexion spinorielle canoniquement associée. Il est aisé de donner de l'opérateur Δ du second

([17]) LICHNEROWICZ [11].

ordre ainsi défini une expression simple. On peut écrire

$$\Delta\psi = \frac{1}{2}(\gamma^\lambda\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\lambda)\nabla_\lambda\nabla_\mu\psi + \frac{1}{2}(\gamma^\lambda\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\lambda)\nabla_\lambda\nabla_\mu\psi,$$

soit en modifiant dans le dernier terme le nom des indices,

$$\Delta\psi = \frac{1}{2}(\gamma^\lambda\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\lambda)\nabla_\lambda\nabla_\mu\psi + \frac{1}{2}\gamma^\lambda\gamma^\mu(\nabla_\lambda\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\lambda)\psi.$$

L'identité de Ricci nous donne

$$(\nabla_\lambda\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\lambda)\psi^a = P^a{}_{r,\lambda\mu}\psi^r.$$

Compte tenu de (8.2) et de l'expression du tenseur-spineur de courbure, il vient

$$\Delta\psi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\psi - \frac{1}{8}R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi,$$

soit à cause de la symétrie du tenseur de courbure de la connexion riemannienne

$$\Delta\psi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\psi - \frac{1}{8}R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu\psi.$$

De (15.6) il résulte

$$\Delta\psi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\psi + \frac{1}{4}R\psi, \tag{18.2}$$

où R est la courbure riemannienne scalaire de V_4.

b. Si φ est un 1-spineur covariant, nous notons encore, par abus de notation, $\Delta\varphi$ le 1-spineur covariant défini par

$$\Delta\varphi = \nabla_\lambda\nabla_\mu\varphi\gamma^\mu\gamma^\lambda. \tag{18.3}$$

Par un raisonnement identique, on obtient

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\nabla_\lambda\nabla_\mu\varphi(\gamma^\lambda\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\lambda) + \frac{1}{2}(\nabla_\lambda\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\lambda)\varphi\gamma^\lambda\gamma^\mu.$$

L'identité de Ricci nous donne

$$(\nabla_\lambda\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\lambda)\varphi_a = -\varphi_r P^r{}_{a,\lambda\mu}.$$

Il vient ainsi

$$\Delta\varphi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\varphi - \frac{1}{8}\varphi R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu \tag{18.4}$$

soit, d'après (15.6) :

$$\Delta\varphi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\varphi + \frac{1}{4}R\varphi.$$

On voit ainsi que, dans les deux cas, l'opérateur laplacien peut s'exprimer par

$$\Delta = -\nabla^\rho \nabla_\rho + \frac{1}{4} R. \tag{18.5}$$

Il est clair sur (18.5) que Δ est un opérateur spinoriel du second ordre de type hyperbolique normal dont le conoïde caractéristique de sommet $x \in V_4$ est le conoïde Γ_x déduit de la métrique de la variété V_4.

c. Nous allons établir une relation importante concernant l'opérateur Δ et la forme bilinéaire fondamentale. Si ψ est un 1-spineur contravariant, on a, φ étant un 1-spineur covariant,

$$(\Delta\psi, \varphi) = -(\nabla^\rho \nabla_\rho \psi, \varphi) + \frac{1}{4} R(\psi, \varphi).$$

Or

$$-(\nabla^\rho \nabla_\rho \psi, \varphi) = -\nabla^\rho \nabla_\rho \psi^a \varphi_a = -\nabla^\rho (\varphi_a \nabla_\rho \psi^a) + \nabla^\rho \psi^a \nabla_\rho \varphi_a.$$

Introduisons la 1-forme $u(\psi, \varphi)$ de V_4 définie par

$$u_\rho(\psi, \varphi) = \varphi_a \nabla_\rho \psi^a.$$

Il vient ainsi

$$(\Delta\psi, \varphi) = \delta u(\psi, \varphi) + \frac{1}{4} R(\psi, \varphi) + (\nabla\psi, \nabla\varphi). \tag{18.6}$$

Considérons, d'autre part,

$$(\psi, \Delta\varphi) = -(\psi, \nabla^\rho \nabla_\rho \varphi) + \frac{1}{4} R(\psi, \varphi).$$

On a

$$-(\psi, \nabla^\rho \nabla_\rho \varphi) = -\psi^a \nabla^\rho \nabla_\rho \varphi_a = -\nabla^\rho (\psi^a \nabla_\rho \varphi_a) + \nabla^\rho \psi^a \nabla_\rho \varphi_a.$$

Si l'on introduit la 1-forme $v(\psi, \varphi)$ de V_4 définie par

$$v_\rho(\psi, \varphi) = \psi^a \nabla_\rho \varphi_a,$$

il vient

$$(\psi, \Delta\varphi) = \delta v(\psi, \varphi) + \frac{1}{4} R(\psi, \varphi) + (\nabla\psi, \nabla\varphi). \tag{18.7}$$

En soustrayant (18.7) de (18.6), on obtient

$$(\Delta\psi, \varphi) - (\psi, \Delta\varphi) = \delta \{ u(\psi, \varphi) - v(\psi, \varphi) \}, \tag{18.8}$$

où le second membre est une divergence sur V_4.

Si ψ et φ sont tels que l'intersection $S(\psi) \cap S(\varphi)$ des supports de ces deux spineurs est compacte, on a par intégration sur V_4 la relation cherchée

$$\langle \Delta\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \Delta\varphi \rangle. \tag{18.9}$$

d. Nous supposons dans la suite la variété espace-temps V_4 *munie d'une orientation temporelle* ρ. Si ψ est un 1-spineur contravariant, proposons-nous d'évaluer le laplacien $\Delta\mathcal{A}\psi$ de l'adjoint de Dirac de ψ. A cet effet, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME :

1° *Si* $\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ *est un p-tenseur-1-spineur contravariant,*

$$\mathcal{A}\gamma^\alpha\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = -(\mathcal{A}\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p})\gamma^\alpha.$$

2° *Dans les mêmes conditions, la dérivation covariante et l'adjonction de Dirac sont permutables.*

1° On voit en effet que l'adjoint de Dirac de $\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ est

$$\mathcal{A}\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \rho\tilde{\psi}_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\beta.$$

On a

$$\mathcal{A}\gamma^\alpha\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \rho\tilde{\psi}_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\tilde{\gamma}^\alpha\beta.$$

Soit d'après (11.10) :

$$\mathcal{A}\gamma^\alpha\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = -\rho\tilde{\psi}_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\beta\gamma^\alpha,$$

ce qui démontre le 1°.

2° La dérivée covariante de $\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ a pour composantes

$$\nabla_\mu\psi^a_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \partial_\mu\psi^a_{\lambda_1\ldots\lambda_p} - \sum_{k=1}^{p} C^\rho_{\lambda_k\mu}\psi^a_{\lambda_1\ldots\rho\ldots\lambda_p} + \sigma^a_{r\mu}\psi^r_{\lambda_1\ldots\lambda_p}.$$

Par action de $\sim$ sur les indices spinoriels et produit par $\rho\beta$, il vient

$$\mathcal{A}\nabla_\mu\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \partial_\mu\mathcal{A}\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} - \sum_k C^\rho_{\lambda_k\mu}\mathcal{A}\psi_{\lambda_1\ldots\rho\ldots\lambda_p} - \frac{1}{4}\rho C^\alpha_{\beta\mu}\tilde{\psi}_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\tilde{\gamma}^\beta\tilde{\gamma}_\alpha\beta.$$

Or d'après (11.10) :

$$\tilde{\gamma}^\beta\tilde{\gamma}_\alpha\beta = -\tilde{\gamma}^\beta\beta\gamma_\alpha = \beta\gamma^\beta\gamma_\alpha.$$

Ainsi

$$\text{(18.10)}\qquad \mathcal{A}\nabla_\mu\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \partial_\mu\mathcal{A}\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} - \sum_k C^\rho_{\lambda_k\mu}\mathcal{A}\psi_{\lambda_1\ldots\rho\ldots\lambda_d} - \frac{1}{4}\rho C^\alpha_{\beta\mu}\tilde{\psi}_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\beta\gamma^\beta\gamma_\alpha.$$

Or, d'après l'antisymétrie en α, β de $C_{\alpha\beta\mu} = g_{\alpha\rho}C^\rho_{\beta\mu}$, on a

$$-C^\alpha_{\beta\mu}\gamma^\beta\gamma_\alpha = C^\alpha_{\beta\mu}\gamma_\alpha\gamma^\beta.$$

On obtient ainsi

$$\mathcal{C}\nabla_\mu \psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \partial_\mu \mathcal{C}\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} - \sum_k C^\rho_{\lambda_k \mu}\mathcal{C}\psi_{\lambda_1\ldots\rho\ldots\lambda_p} + \frac{1}{4}\mathcal{C}\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} C^\alpha_{\beta\mu}\gamma_\alpha\gamma^\beta,$$

soit la relation

$$\mathcal{C}\nabla_\mu \psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \nabla_\mu \mathcal{C}\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$$

qui peut s'étendre à des tenseurs-spineurs de type quelconque. Notre lemme est établi.

e. Cela posé, soit ψ un 1-spineur contravariant. Du lemme précédent il résulte

$$\mathcal{C}\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = -\nabla_\alpha(\mathcal{C}\psi)\gamma^\alpha. \tag{18.11}$$

On en déduit

$$\mathcal{C}\gamma^\alpha\gamma^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \psi = \mathcal{C}\gamma^\alpha \nabla_\alpha(\gamma^\beta \nabla_\beta \psi) = -\nabla_\alpha(\mathcal{C}\gamma^\beta\nabla_\beta\psi)\gamma^\alpha,$$

soit

$$\mathcal{C}\gamma^\alpha\gamma^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \psi = \nabla_\alpha\nabla_\beta(\mathcal{C}\psi)\gamma^\beta\gamma^\alpha.$$

On obtient ainsi

$$\mathcal{C}\Delta\psi = \Delta\mathcal{C}\psi. \tag{18.12}$$

Si nous utilisons la notation $\bar{\psi}$ pour l'adjoint de Dirac de ψ, il vient

$$\overline{\Delta\psi} = \Delta\bar{\psi}.$$

19. Conjugaison de charge.

a. Établissons le lemme suivant :

LEMME :

1° *Si $\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ est un p-tenseur-1-spineur contravariant, le produit à gauche par γ_μ et la conjugaison de charge sont permutables.*

2° *Dans les mêmes conditions, la dérivation covariante et la conjugaison de charge sont permutables.*

1° Le conjugué de charge de $\psi_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ est

$$(\mathcal{C}\psi)_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \alpha\psi^\star_{\lambda_1\ldots\lambda_p}.$$

De (12.7) il résulte, en supprimant les indices tensoriels,

$$\gamma_\mu \mathcal{C}\psi = \gamma_\mu \alpha\psi^\star = \alpha\gamma^\star_\mu\psi^\star,$$

soit

$$\gamma_\mu \mathcal{C}\psi = \mathcal{C}\gamma_\mu\psi. \tag{19.1}$$

2° La dérivée covariante de $\psi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ a pour composantes

$$\nabla_\mu \psi^a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \partial_\mu \psi^a_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} - \sum_k C^\rho_{\lambda_k \mu} \psi^a_{\lambda_1 \ldots \rho \ldots \lambda_p} + \sigma^a_{r\mu} \psi^r_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}.$$

Par passage aux complexes conjugués et produit à gauche par α, il vient

$$\mathcal{C} \nabla_\mu \psi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \partial_\mu \mathcal{C} \psi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} - \sum_k C^\rho_{\lambda_k \mu} \mathcal{C} \psi_{\lambda_1 \ldots \rho \ldots \lambda_p} - \frac{1}{4} C^\alpha_{\beta\mu} \alpha \overset{*}{\gamma}_\alpha \overset{*}{\gamma}{}^\beta \overset{*}{\psi}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}.$$

Or d'après (12.7) :

$$\alpha \overset{*}{\gamma}_\alpha \overset{*}{\gamma}{}^\beta = \gamma_\alpha \gamma^\beta \alpha.$$

Il en résulte

$$\mathcal{C} \nabla_\mu \psi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \partial_\mu \mathcal{C} \psi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} - \sum_k C^\rho_{\lambda_k \mu} \mathcal{C} \psi_{\lambda_1 \ldots \rho \ldots \lambda_p} - \frac{1}{4} C^\alpha_{\beta\mu} \gamma_\alpha \gamma^\beta \alpha \overset{*}{\psi}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p},$$

soit

(19.2) $$\mathcal{C} \nabla_\mu \psi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \nabla_\mu \mathcal{C} \psi_{\lambda_1 \ldots \lambda_p},$$

ce qui démontre notre lemme. Des résultats analogues sont valables pour un tenseur-spineur de type quelconque.

b. Cela posé, soit ψ un 1-spineur contravariant. Du lemme précédent, il résulte

$$\mathcal{C} \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = \gamma^\alpha \mathcal{C} \nabla_\alpha \psi,$$

soit

(19.3) $$\mathcal{C} \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \nabla \psi.$$

On en déduit

$$\mathcal{C} \gamma^\alpha \gamma^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \psi = \gamma^\alpha \gamma^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \mathcal{C} \psi,$$

soit

(19.4) $$\mathcal{C} \Delta \psi = \Delta \mathcal{C} \psi.$$

Des lemmes des paragraphes 18 et 19 on déduit que Γ commute avec la dérivation covariante et par suite la 2-forme spinorielle fondamentale est à dérivée covariante nulle. De (18.12) et (19.4) il résulte immédiatement

(19.5) $$\Gamma \Delta \psi = \Delta \Gamma \psi.$$

20. Noyaux élémentaires et propagateurs relatifs à l'opérateur $(\Delta - \varepsilon^2)$.

a. Soit Ω le voisinage homéomorphe à une boule ouverte introduit au paragraphe 4 et tel que le *conoïde caractéristique* $\Gamma_{x'}$, de sommet $x' \in \Omega$, engendré par les géodésiques isotropes issues de x' soit régulier dans Ω et définisse le futur $\mathcal{E}^+(x')$, le passé $\mathcal{E}^-(x')$ et l'ailleurs du point x'.

Considérons l'*opérateur de Klein-Gordon* $(\Delta - \varepsilon^2)$ $(\varepsilon^2 = \mathrm{Cte})$ sur les 1-spineurs contravariants ou covariants. En ce qui concerne les noyaux élémentaires de $(\Delta - \varepsilon^2)$, on déduit du même raisonnement que dans le cas tensoriel, le résultat suivant : *il existe dans* $\Omega \times \Omega$ *deux noyaux élémentaires* $G^{(1/2)\pm}(x, x')$ *de l'opérateur* $(\Delta - \varepsilon^2)$, *c'est-à-dire deux bi-1-spineurs-distributions contravariants en* x *et covariants en* x' *satisfaisant* [18]

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\, G^{(1/2)\pm}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x, x') \tag{20.1}$$

et qui pour chaque x', *ont leurs supports respectivement dans* $\mathcal{E}^+(x')$ *et* $\mathcal{E}^-(x')$.

Ces noyaux se trouvent ainsi définis d'une manière unique. L'unicité des noyaux élémentaires est un cas particulier d'un théorème général d'unicité [19].

THÉORÈME D'UNICITÉ. — *Tout* 1-*spineur-distribution* χ *satisfaisant* $(\Delta - \varepsilon^2)\chi = 0$ *et à support compact vers le passé ou le futur est nécessairement nul.*

Nous allons étudier ces noyaux élémentaires.

b. Soit θ un 1-spineur covariant à support compact. *Toute solution* φ, *à support compact* VERS LE FUTUR DE L'ÉQUATION

$$(\Delta - \varepsilon^2)\,\varphi = \theta \tag{20.2}$$

s'écrit nécessairement

$$\varphi(x) = \langle G^{(1/2)+}(x', x),\ \theta(x') \rangle. \tag{20.3}$$

En effet l'intersection $K = \mathcal{E}^-(\mathcal{S}(\theta)) \cap \mathcal{E}^+(x)$ est compacte. Si f est une fonction à support compact égale à 1 dans un voisinage compact de K, on a

$$\langle G^{(1/2)+}(x', x),\ \theta(x') \rangle = \langle G^{(1/2)+}(x', x),\ (\Delta_{x'} - \varepsilon^2)(f\varphi)(x') \rangle,$$

soit d'après la propriété (18.9) et la définition de $\Sigma^{(1/2)}$,

$$\langle G^{(1/2)+}(x', x),\ \theta(x') \rangle = \langle (\Delta_{x'} - \varepsilon^2)\, G^{(1/2)+}(x', x),\ f(x')\,\varphi(x') \rangle = \varphi(x),$$

ce qui démontre la propriété.

Si χ est un 1-spineur contravariant à support compact, on voit immédiatement que la solution ψ à support compact vers le futur, de l'équation

$$(\Delta - \varepsilon^2)\,\psi = \chi \tag{20.4}$$

---

(18) Σ^{12} est le bi-1-spineur de Dirac.

(19) *Voir* LICHNEROWICZ [9], p. 18.

est donnée par la formule

$$(20.5) \qquad \varphi(x) = \langle G^{(1/2)-}(x, x'), \chi(x') \rangle.$$

Si $\chi = \overline{\theta}$, où θ est à support compact, on déduit de (18.12) que $\overline{\psi}$ est la solution à support compact vers le futur de l'équation (20.2). Évaluons $\overline{\psi}$ à partir de (20.5). Il vient

$$\overline{\psi}(x) = \rho(x)\,\tilde{\psi}(x)\,\beta = \langle \rho(x)\,\tilde{G}^{(1/2)-}(x, x')\,\beta, \tilde{\chi}(x') \rangle.$$

Faisons apparaître l'adjoint de Dirac du bispineur $G^{(1/2)-}$. Comme $\beta^2 = e$, on a

$$\rho(x)\,\tilde{G}^{(1/2)-}{}_{r}^{b'}(x, x')\,\beta_a^r\,\tilde{\chi}_b(x') = \rho(x)\,\rho(x')\,\beta_{s'}^{b'}\,\tilde{G}^{(1/2)-}{}_{r}^{s'}(x, x')\,\beta_a^r\,\rho(x')\,\tilde{\chi}_{t'}(x')\,\beta_{b'}^{t'},$$

où

$$\overline{G}^{(1/2)-}{}_{a}^{b'}(x, x') = \rho(x)\,\rho(x')\,\beta_{s'}^{b'}\,\tilde{G}^{(1/2)-}{}_{r}^{s'}(x, x')\,\beta_a^r$$

et

$$\theta_{b'}(x') = \overline{\chi}_{b'}(x') = \rho(x)\,\tilde{\chi}_{t'}(x')\,\beta_{b'}^{t'}.$$

Nous obtenons ainsi

$$(20.6) \qquad \overline{\psi}(x) = \langle \overline{G}^{(1/2)-}(x, x'), \theta(x) \rangle.$$

Or d'après (20.3) on a aussi, quel que soit le 1-spineur covariant θ à support compact,

$$\overline{\psi}(x) = \langle G^{(1/2)+}(x', x), \theta(x) \rangle.$$

Il en résulte la relation importante

$$(20.7) \qquad \overline{G}^{(1/2)\pm}(x, x') = G^{(1/2)\mp}(x', x).$$

De (20.1) on déduit par passage aux adjoints de Dirac et compte tenu de (17.13) :

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\,\overline{G}^{(1/2)\pm}(x, x') = \overline{\Sigma}^{(1/2)}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x', x).$$

De (20.7) il résulte que les noyaux $G^{(1/2)\pm}$ satisfont aussi

$$(20.8) \qquad (\Delta_x - \varepsilon^2)\,G^{(1/2)\pm}(x', x) = \Sigma^{(1/2)}(x', x)$$

et sont noyaux élémentaires pour l'opérateur $(\Delta - \varepsilon^2)$ portant sur les 1-spineurs covariants :

Transformons (20.1) par conjugaison de charge. Compte tenu de (19.3) et de (17.15) on a

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\,\overset{c}{G}{}^{(1/2)\pm}(x, x') = \overset{c}{\Sigma}{}^{(1/2)}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x, x').$$

Il en résulte

(20.9) $$\overset{c}{G}{}^{(1/2)\pm}(x, x') = G^{(1/2)\pm}(x, x').$$

c. Considérons le noyau $G^{(1/2)}(x, x')$ défini dans $\Omega + \Omega$ par

(20.10) $$G^{(1/2)}(x, x') = G^{(1/2)-}(x, x') - G^{(1/2)+}(x, x').$$

Pour chaque $x' \in \Omega$, $G^{(1/2)}$ a son support dans $\mathcal{E}^+(x') \cup \mathcal{E}^-(x')$. D'après (20.1) ce noyau satisfait

(20.11) $$(\Delta_x - \varepsilon^2)\, G^{(1/2)}(x, x') = 0$$

et d'après (20.8) il satisfait aussi

(20.12) $$(\Delta_{x'} - \varepsilon^2)\, G^{(1/2)}(x, x') = 0,$$

$G^{(1/2)}(x, x')$ est appelé le *propagateur associé à l'opérateur* $(\Delta - \varepsilon^2)$ *opérant sur les* 1-*spineurs.*

De (20.7) on déduit

$$\overline{G}{}^{(1/2)}(x', x) = \overline{G}{}^{(1/2)-}(x', x) - \overline{G}{}^{(1/2)+}(x', x) = G^{(1/2)+}(x, x') - G^{(1/2)-}(x, x').$$

Ainsi $G^{(1/2)}$ vérifie la relation importante

(20.13) $$\overline{G}{}^{(1/2)}(x', x) = - G^{(1/2)}(x, x').$$

On déduit de même de (20.9) que

(20.14) $$\overset{c}{G}{}^{(1/2)}(x, x') = G^{(1/2)}(x, x').$$

Par suite :

(20.15) $$\overline{G}{}^{c\,(1/2)}(x', x) = - G^{(1/2)}(x, x'),$$

ce qui traduit, dans le cas spinoriel, « l'antisymétrie » du propagateur.

21. Les opérateurs de Dirac.

a. Introduisons sur les 1-spineurs *contravariants* les deux opérateurs de Dirac du premier ordre :

(21.1) $$L\psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi - \varepsilon\psi, \qquad L'\psi = \gamma^\beta \nabla_\beta \psi + \varepsilon\psi \qquad (\varepsilon = \mathrm{Cte} > 0).$$

Le tenseur-spineur fondamental étant à dérivée covariante nulle, on a

$$LL'\psi = (\gamma^\alpha \nabla_\alpha - \varepsilon)(\gamma^\beta \nabla_\beta + \varepsilon)\psi = (\gamma^\alpha \gamma^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta - \varepsilon^2)\psi.$$

Ainsi ces opérateurs vérifient les relations

(21.2) $$LL'\psi = L'L\psi = (\Delta - \varepsilon^2)\psi.$$

Introduisons de même sur les 1-spineurs *covariants* les deux opérateurs

(21.3) $$\bar{L}\psi = -(\nabla_\alpha \varphi\gamma^\alpha + \varepsilon\varphi), \qquad \bar{L}'\varphi = -(\nabla_\beta \varphi\gamma^\beta - \varepsilon\varphi).$$

On voit que

$$\bar{L}\bar{L}'\varphi = \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi\gamma^\beta\gamma^\alpha - \varepsilon^2\varphi.$$

Pour ces opérateurs, on a donc les relations

(21.4) $$\bar{L}\bar{L}'\varphi = \bar{L}'\bar{L}\varphi = (\Delta - \varepsilon^2)\varphi.$$

b. ψ étant un 1-spineur contravariant et φ un 1-spineur covariant, évaluons

(21.5) $$(L\psi, \varphi) = \gamma^{\alpha a}{}_b \nabla_\alpha \psi^b \varphi_a - \varepsilon\psi^a\varphi_a.$$

Or γ étant à dérivée covariante nulle,

$$\gamma^{\alpha a}{}_b \nabla_\alpha \psi^b \varphi_a = \nabla_\alpha(\gamma^{\alpha a}{}_b \psi^b \varphi_a) - \psi^b \nabla_\alpha \varphi_a \gamma^{\alpha a}{}_b.$$

Introduisons la 1-forme $W(\psi, \varphi)$ définie par

$$W_\alpha(\psi, \varphi) = \varphi\gamma_\alpha\psi.$$

Il résulte de (21.5) qu'on a

(21.6) $$(L\psi, \varphi) = -\delta W + (\psi, \bar{L}\varphi).$$

Si l'intersection $S(\psi) \cap S(\varphi)$ des supports de ψ et φ est compacte, on déduit de (21.6) par intégration sur la variété V_4,

(21.7) $$\langle L\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \bar{L}\varphi \rangle.$$

On a de même en changeant ε en $-\varepsilon$,

(21.8) $$\langle L'\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \bar{L}'\varphi \rangle.$$

c. ψ étant un 1-spineur contravariant, proposons-nous d'évaluer l'adjoint de Dirac de $L\psi$ sur la variété V_4 munie de l'orientation temporelle ρ. De

$$L\psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi - \varepsilon\psi,$$

on déduit par l'opération $\sim$ et le produit à droite par $\rho\beta$,

$$\overline{L\psi} = \rho\,\widetilde{\nabla_\alpha\psi}\,\tilde{\gamma}^\alpha\beta - \varepsilon\bar{\psi}.$$

Or d'après (11.3), $\tilde{\gamma}^\alpha\beta = -\beta\gamma^\alpha$. Il en résulte

$$\overline{L\psi} = -\rho\,\widetilde{\nabla_\alpha\psi}\,\beta\gamma^\alpha - \varepsilon\bar{\psi}.$$

Du lemme du paragraphe 18, 2°, on déduit

$$\rho\,\widetilde{\overline{\nabla_\alpha \psi}}\,\beta = \overline{\nabla_\alpha \psi} = \nabla_\alpha \overline{\psi}.$$

Ainsi

$$\overline{L\psi} = -\nabla_\alpha \overline{\psi}\gamma^\alpha - \varepsilon\overline{\psi},$$

soit

$$(21.9) \qquad \overline{L\psi} = \overline{L}\,\overline{\psi}.$$

On a de même,

$$(21.10) \qquad \overline{L'\psi} = \overline{L}'\overline{\psi}.$$

22. Noyaux élémentaires et propagateurs pour les opérateurs de Dirac.

a. Le théorème d'unicité relatif à l'opérateur de Klein-Gordon $(\Delta - \varepsilon^2)$ entraîne un théorème analogue relatif aux opérateurs de Dirac : *tout 1-spineur-distribution contravariant ψ satisfaisant l'équation homogène*

$$(22.1) \qquad L\psi = 0$$

et à support compact vers le passé ou vers le futur est nécessairement nul. Il suffit de remarquer que, par produit par L', (22.1) entraîne $(\Delta - \varepsilon^2)\psi = 0$.

Soit $G^{(1/2)\pm}(x, x')$ les deux noyaux élémentaires de l'opérateur $(\Delta - \varepsilon^2)$. Introduisons les bi-1-spineurs-distributions contravariants en x, covariants en x' définis par

$$(22.2) \qquad S^{(1/2)\pm}(x, x') = L'_x\, G^{(1/2)\pm}(x, x').$$

De (21.2) on déduit

$$(22.3) \qquad L_x S^{(1/2)\pm}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x, x').$$

Ainsi les $S^{(1/2)\pm}(x, x')$ sont des bi-1-spineurs-distributions vérifiant (22.3) *et qui, pour chaque x', ont leurs supports respectivement dans $\mathcal{E}^+(x')$ ou $\mathcal{E}^-(x')$.* Du théorème d'unicité, il résulte que les noyaux $S^{(1/2)\pm}(x, x')$ sont caractérisés d'une manière unique par la double condition précédente.

b. Soit θ un 1-spineur covariant à support compact. *Toute solution φ* à support compact vers le futur de l'équation

$$(22.4) \qquad \overline{L}\varphi = \theta$$

s'écrit nécessairement :

$$(22.5) \qquad \varphi(x') = \langle S^{(1/2)+}(x, x'),\ \theta(x)\rangle.$$

Par raisonnement identique à celui qui établit (20.3), on déduit en effet de la formule (21.7) qu'on a

$$\langle S^{(1/2)+}(x, x'), \theta(x) \rangle = \langle L_x S^{(1/2)+}(x, x'), \varphi(x) \rangle = \langle \Sigma^{(1/2)}(x, x'), \varphi(x) \rangle,$$

soit (22.5).

Considérons d'autre part le 1-spineur φ défini par

$$(22.6) \qquad \varphi(x') = \langle \overline{L}'_{x'} G^{(1/2)+}(x, x'), \theta(x) \rangle.$$

Il est clair que

$$\overline{L}_{x'} \varphi(x') = \langle | \Delta_{x'} - \varepsilon^2 | G^{(1/2)+}(x, x'), \theta(x) \rangle,$$

soit d'après (20.8) :

$$\overline{L}_{x'} \varphi(x') = \theta(x')$$

et φ est une solution de (22.4) à support compact vers le futur. De (22.5) il résulte que pour tout 1-spineur covariant θ à support compact,

$$\langle S^{(1/2)+}(x, x'), \theta(x) \rangle = \langle \overline{L}'_{x'} G^{(1/2)+}(x, x'), \theta(x) \rangle.$$

Ainsi nous avons

$$(22.7) \qquad S^{(1/2)\pm}(x, x') = \overline{L}'_{x'} G^{(1/2)\pm}(x, x').$$

De (22.2) on déduit par passage aux adjoints de Dirac à l'aide de (21.6), compte tenu d'un produit à gauche par β,

$$\overline{S}^{(1/2)\pm}(x, x') = \overline{L}'_{x'} \overline{G}^{(1/2)\pm}(x, x'),$$

soit d'après la relation (20.7) :

$$\overline{S}^{(1/2)\pm}(x, x') = \overline{L}'_{x} G^{(1/2)\mp}(x', x).$$

De (22.7) on déduit ainsi pour les adjoints de Dirac des $S^{(1/2)\pm}$ la relation

$$(22.8) \qquad \overline{S}^{(1/2)\pm}(x, x') = S^{(1/2)\mp}(x', x).$$

Nous dirons que les $S^{(1/2)\pm}$ sont les *noyaux élémentaires des opérateurs L et $\overline{L}$.*

En ce qui concerne la conjugaison de charge, il résulte du lemme du paragraphe 19 que

$$\mathcal{C} L \psi = L \mathcal{C} \psi.$$

De (22.3) on déduit alors

$$L_x \{ \alpha \check{S}^{(1/2)}(x, x') \alpha \} = \alpha \check{\Sigma}^{(1/2)}(x, x') \alpha,$$

soit d'après (17.15) :

$$(22.9) \qquad L_x \overset{c}{S}{}^{(1/2)\pm}(x, x') = \overset{c}{\Sigma}{}^{(1/2)}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x, x').$$

Il résulte de (22.9) et de la condition de support que

$$\overset{c}{S}{}^{(1/2)\pm}(x, x') = S^{(1/2)\pm}(x, x'). \tag{22.10}$$

c. Soit $G^{(1/2)}(x, x')$ le propagateur relatif à l'opérateur de Klein-Gordon $(\Delta - \varepsilon^2)$ sur les 1-spineurs. Introduisons le noyau

$$S^{(1/2)}(x, x') = S^{(1/2)-}(x, x') - S^{(1/2)+}(x, x'). \tag{22.11}$$

On a d'après (22.7) :

$$S^{(1/2)}(x, x') = L'_x\, G^{(1/2)}(x, x') = \overline{L}'_{x'}\, G^{(1/2)}(x, x'). \tag{22.12}$$

Pour chaque $x' \in \Omega$, $S^{(1/2)}$ a son support dans $\mathcal{E}^+(x') \cup \mathcal{E}^-(x)$. Il vérifie les relations

$$L_x S^{(1/2)}(x, x') = 0 \tag{22.13}$$

et

$$\overline{L}_{x'} S^{(1/2)}(x, x') = 0. \tag{22.14}$$

Nous dirons que $S^{(1/2)}(x, x')$ est le *propagateur relatif aux opérateurs L et $\overline{L}$.* D'après (22.8) et (22.10) ce noyau vérifie la relation

$$\overline{S}{}^{(1/2)}(x, x') = -S^{(1/2)}(x', x) \tag{22.15}$$

et

$$\overset{c}{S}{}^{(1/2)}(x, x') = S^{(1/2)}(x, x'). \tag{22.16}$$

23. **Anticommutateur du champ de Dirac.**

a. Sur la variété espace-temps V_4 munie d'une orientation temporelle et d'une symétrie arbitraire, considérons le champ de Dirac par un 1-spineur contravariant ψ astreint à l'équation de champ

$$L\psi = 0. \tag{23.1}$$

Son adjoint de Dirac $\overline{\psi}$ vérifie d'après (21.9) :

$$\overline{L}\,\overline{\psi} = 0. \tag{23.2}$$

Proposons-nous de construire pour ce champ un anticommutateur $[\psi(x), \overline{\psi}(x')]_+$ qui soit un bi-1-spineur-distribution $X(x, x')$ à valeurs scalaires qui pour chaque x' a son support dans $\mathcal{E}^+(x') \cup \mathcal{E}^-(x')$, vérifie

$$\overline{X}(x, x') = X(x', x) \tag{23.3}$$

et satisfait respectivement en x et x' les équations (23.1) et (23.2).

L'étude du champ spinoriel libre en relativité restreinte nous conduit à adopter

$$(23.4) \qquad [\psi(x), \overline{\psi}(x')]_+ = \frac{\bar{h}}{i} S^{(1/2)}(x, x'),$$

$S^{(1/2)}$ vérifie la condition de support et d'après (22.13) et (22.14) satisfait les équations de Dirac, (23.1) et (23.2). De (22.15) il résulte que $X = \frac{\bar{h}}{i} S^{(1/2)}$ vérifie (23.3).

Ainsi (23.4) nous fournit un anticommutateur rigoureusement compatible avec les équations de Dirac en relativité générale et qui se réduit en relativité restreinte à l'anticommutateur usuel de la théorie du champ spinoriel libre correspondant à une particule de spin 1/2.

b. Proposons-nous d'évaluer l'anticommutateur

$$[\mathcal{C}_x \psi(x), \overline{\mathcal{C}_{x'} \psi(x')}]_+$$

qui d'après (12.14) vaut

$$-[\mathcal{C}_x \psi(x), \mathcal{C}_{x'} \overline{\psi}(x')]_+.$$

On a

$$[\mathcal{C}_x \psi(x), \overline{\mathcal{C}_{x'} \psi(x')}] = -[\mathcal{A}_x \mathcal{C}_x \overline{\psi}(x), \mathcal{A}_{x'} \mathcal{C}_{x'} \overline{\psi}(x')]_+.$$

Ainsi pour l'anticommutateur (23.4) :

$$[\mathcal{C}_x \psi(x), \overline{\mathcal{C}_{x'} \psi(x')}]_+ = -\frac{\bar{h}}{i} \mathcal{A}_x \mathcal{A}_{x'} \mathcal{C}_x \mathcal{C}_{x'} S^{(1/2)}(x', x).$$

Soit d'après (22.16) :

$$(23.5) \qquad [\mathcal{C}_x \psi(x), \overline{\mathcal{C}_{x'} \psi(x')}]_+ = \frac{\bar{h}}{i} S^{(1/2)}(x, x'),$$

(23.5) traduit l'*invariance de notre anticommutateur par conjugaison de charge.*

IV. — Théorie de Rarita-Schwinger (spin 3/2) en relativité générale.

24. L'opérateur laplacien sur les vecteurs-spineurs.

a. En formalisme de Rarita-Schwinger [20], un champ correspondant au spin 3/2 peut être décrit par un vecteur-1-spineur contravariant χ

---

[20] *Voir* RARITA-SCHWINGER [15].

de composantes χ^a_ρ. Nous désignons par χ_ρ la matrice 1×4 de composantes (χ^a_ρ), l'indice tensoriel ρ étant fixé.

Nous appelons *laplacien* de χ et désignons par $\Delta\chi$ le vecteur-spineur contravariant défini par

$$\Delta\chi = \gamma^\lambda \gamma^\mu \nabla_\lambda \nabla_\mu \chi. \tag{24.1}$$

De cet opérateur, on peut aussi donner une expression plus explicite faisant intervenir la courbure de V_4. On peut écrire

$$\Delta\chi = \frac{1}{2}(\gamma^\lambda\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\lambda)\nabla_\lambda\nabla_\mu\chi + \frac{1}{2}\gamma^\lambda\gamma^\mu(\nabla_\lambda\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\lambda)\chi.$$

L'identité de Ricci nous donne

$$(\nabla_\lambda\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\lambda)\chi_\rho = -\frac{1}{4}R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\chi_\rho - R^\sigma{}_{\rho,\lambda\mu}\chi_\sigma.$$

Il vient ainsi, compte tenu de (8.2) et de la symétrie du tenseur de courbure

$$\Delta\chi_\rho = -\nabla^\lambda\nabla_\lambda\chi_\rho - \frac{1}{8}R_{\lambda\mu,\alpha\beta}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\chi_\rho + \frac{1}{2}R_{\rho\sigma,\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\mu\chi^\sigma.$$

Le deuxième terme du second membre peut s'exprimer à l'aide de l'identité (15.6). On obtient

$$\Delta\chi_\rho = -\nabla^\lambda\nabla_\lambda\chi_\rho + \frac{1}{4}R\chi_\rho + \frac{1}{2}R_{\rho\sigma,\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\mu\chi^\sigma. \tag{24.2}$$

Si ξ est un vecteur-1-spineur covariant, le *laplacien* $\Delta\xi$ donné par

$$\Delta\xi = \nabla_\lambda\nabla_\mu\xi\gamma^\mu\gamma^\lambda \tag{24.3}$$

s'exprime d'une manière analogue par

$$\Delta\xi_\rho = -\nabla^\lambda\nabla_\lambda\xi_\rho + \frac{1}{4}R\xi_\rho - \frac{1}{2}R_{\rho\sigma,\lambda\mu}\xi^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\mu. \tag{24.4}$$

On voit ainsi que, dans les deux cas, l'opérateur laplacien Δ est un opérateur du second ordre, sur les vecteurs-spineurs, de type hyperbolique normal, dont le conoïde caractéristique de sommet $x \in V_4$ est le conoïde Γ_x déduit de la métrique de V_4.

b. Étudions la relation entre l'opérateur Δ de la forme bilinéaire fondamentale. En notations matricielles, on a

$$(\Delta\chi, \xi) = -\xi_\rho\nabla^\lambda\nabla_\lambda\chi^\rho + \frac{1}{4}R\xi_\rho\chi^\rho + \frac{1}{2}R_{\rho\sigma,\lambda\mu}\xi^\rho\gamma^\lambda\gamma^\mu\chi^\sigma.$$

De même

$$(\chi, \Delta\xi) = -\nabla^\lambda\nabla_\lambda\xi_\rho\chi^\rho + \frac{1}{4}R\xi_\rho\chi^\rho - \frac{1}{2}R_{\rho\sigma,\lambda\mu}\xi^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\mu\chi^\rho,$$

soit

$$(\chi, \Delta\xi) = -\nabla^\lambda \nabla_\lambda \xi_\rho \chi^\rho + \frac{1}{4} R \xi_\rho \chi^\rho + \frac{1}{2} R_{\rho\sigma,\lambda\mu} \xi^\rho \gamma^\lambda \gamma^\mu \chi^\sigma.$$

Par différence, il vient

$$(\Delta\chi, \xi) - (\chi, \Delta\xi) = -\xi_\rho \nabla^\lambda \nabla_\lambda \chi^\rho + \nabla^\lambda \nabla_\lambda \xi_\rho \chi^\rho = -\nabla^\lambda (\xi_\rho \nabla_\lambda \chi^\rho - \nabla_\lambda \xi_\rho \chi^\rho).$$

En introduisant la 1-forme $W(\chi, \xi)$ définie par

$$W_\lambda(\chi, \xi) = \xi_\rho \nabla_\lambda \chi^\rho - \nabla_\lambda \xi_\rho \chi^\rho,$$

on obtient

(24.5) $$(\Delta\chi, \xi) - (\chi, \Delta\xi) = \delta W(\chi, \xi).$$

Si χ et ξ sont tels que l'intersection $S(\chi) \cap S(\xi)$ des supports de ces deux spineurs est compacte, on a par intégration sur V_4, la relation

(24.6) $$\langle \Delta\chi, \xi \rangle = \langle \chi, \Delta\xi \rangle.$$

c. Proposons-nous d'évaluer le laplacien du vecteur-spineur défini à partir d'un 1-spineur contravariant ψ par le tenseur-spineur γ, soit $\chi_\rho = \gamma_\rho \psi$. Il vient

$$\Delta(\gamma_\rho \psi) = -\nabla^\lambda \nabla_\lambda (\gamma_\rho \psi) + \frac{1}{4} R \gamma_\rho \psi + \frac{1}{2} R_{\rho\sigma,\lambda\mu} \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\sigma \psi,$$

soit en vertu de l'identité (15.5) et γ étant à dérivée covariante nulle,

$$\Delta(\gamma_\rho \psi) = \gamma_\rho \left(-\nabla^\lambda \nabla_\lambda \psi + \frac{1}{4} R \psi \right) - R_{\rho\sigma} \gamma^\sigma \psi.$$

On obtient ainsi la formule

(24.7) $$\Delta(\gamma_\rho \psi) = \gamma_\rho \Delta\psi - R_{\rho\sigma} \gamma^\sigma \psi.$$

Si l'espace-temps V_4 est espace-temps d'Einstein, c'est-à-dire si

(24.8) $$R_{\rho\sigma} = \lambda g_{\rho\sigma} \qquad (\lambda = \text{Cte}),$$

(24.7) se réduit à

(24.9) $$(\Delta + \lambda) \gamma_\rho \psi = \gamma_\rho \Delta\psi.$$

d. Proposons-nous enfin d'évaluer le laplacien du vecteur-spineur dérivée covariante d'un 1-spineur contravariant ψ soit $\chi_\rho = \nabla_\rho \psi$. Il vient

$$\Delta(\nabla_\rho \psi) = -\nabla^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\rho \psi + \frac{1}{4} R \nabla_\rho \psi + \frac{1}{2} R_{\rho\sigma,\lambda\mu} \gamma^\lambda \gamma^\mu \nabla^\sigma \psi.$$

De l'identité de Ricci, il résulte

$$\nabla_\lambda \nabla_\rho \psi = \nabla_\rho \nabla_\lambda \psi - \frac{1}{4} R_{\alpha\beta,\lambda\rho} \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi.$$

D'où

$$\nabla^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\rho \psi = \nabla^\lambda \nabla_\rho \nabla_\lambda \psi - \frac{1}{4} \nabla^\lambda R_{\alpha\beta,\lambda\rho} \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi - \frac{1}{4} R_{\alpha\beta,\lambda\rho} \gamma^\alpha \gamma^\beta \nabla^\lambda \psi.$$

Une nouvelle application de l'identité de Ricci donne

$$\nabla^\lambda \nabla_\rho \nabla_\lambda \psi = \nabla_\rho \nabla^\lambda \nabla_\lambda \psi - R^\sigma{}_{\lambda,}{}^\lambda{}_\rho \nabla_\sigma \psi - \frac{1}{4} R_{\alpha\beta,}{}^\lambda{}_\rho \gamma^\alpha \gamma^\beta \nabla_\lambda \psi.$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned}\nabla^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\rho \psi &= \nabla_\rho \nabla^\lambda \nabla_\lambda \psi + R_{\rho\sigma} \nabla^\sigma \psi \\ &\quad - \frac{1}{4} (\nabla_\alpha R_{\rho\beta} - \nabla_\beta R_{\rho\alpha}) \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi + \frac{1}{2} R_{\rho\sigma,\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \nabla^\sigma \psi.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\Delta(\nabla_\rho \psi) &= - \nabla_\rho \nabla^\lambda \nabla_\lambda \psi + \frac{1}{4} \nabla_\rho (R\psi) \\ &\quad - \frac{1}{4} \partial_\rho R \psi - R_{\rho\sigma} \nabla^\sigma \psi + \frac{1}{4} (\nabla_\alpha R_{\rho\beta} - \nabla_\beta R_{\rho\alpha}) \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi.\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la formule

$$\begin{aligned}(24.10) \qquad \Delta(\nabla_\rho \psi) &= \nabla_\rho \Delta\psi - \frac{1}{4} \partial_\rho R \psi - R_{\rho\sigma} \nabla^\sigma \psi \\ &\quad + \frac{1}{4} (\nabla_\alpha R_{\rho\beta} - \nabla_\beta R_{\rho\alpha}) \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi.\end{aligned}$$

Si l'espace-temps V_4 est *espace-temps d'Einstein*, $R =$ Cte et le dernier terme du second membre est nul. Par suite (24.10) se réduit à la formule simple

$$(24.11) \qquad (\Delta + \lambda) \nabla_\rho \psi = \nabla_\rho \Delta \psi.$$

25. **Noyaux élémentaires et propagateurs relatifs à l'opérateur** $(\Delta - \varepsilon^2)$. — Dans toute la suite, *la variété V_4 est supposée espace-temps d'Einstein :*

$$(25.1) \qquad R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta} \qquad (\lambda = \text{Cte})$$

et on la munit d'une orientation temporelle ρ.

a. Relativement à l'opérateur de Klein-Gordon $(\Delta - \varepsilon^2)$ $(\varepsilon^2 = \text{Cte})$ sur les vecteur-spineurs contravariants ou covariants, on a le résultat suivant : *il existe dans $\Omega \times \Omega$ deux noyaux élémentaires $G^{(3/2)\pm}(x, x')$ de l'opérateur $(\Delta - \varepsilon^2)$, c'est-à-dire deux bi-1-tenseurs-1-spineurs-distributions, contravariants en x, covariants en x', satisfaisant*

$$(25.2) \qquad (\Delta_x - \varepsilon^2)\, G^{(3/2)\pm}(x, x') = \Sigma^{(3/2)}(x, x')$$

et qui pour chaque x' ont leurs supports respectivement dans $\mathcal{E}^+(x')$ ou $\mathcal{E}^-(x')$. Le théorème général d'unicité est encore naturellement valable ici.

Par un procédé identique à celui du paragraphe 20, on démontre que

$$\overline{G}^{(3/2)\pm}(x, x') = G^{(3/2)\mp}(x', x). \tag{25.3}$$

Il en résulte que les noyaux élémentaires satisfont aussi

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\, G^{(3/2)\pm}(x', x) = \Sigma^{(3/2)}(x', x). \tag{25.4}$$

Le *propagateur* $G^{(3/2)}(x, x')$ relatif à l'opérateur $(\Delta - \varepsilon^2)$ sur les vecteurs-spineurs est défini par la différence des deux noyaux élémentaires. Pour chaque x' il a son support dans $\mathcal{E}^+(x') \cup \mathcal{E}^-(x')$ et il vérifie l'équation

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\, G^{(3/2)}(x, x') = 0, \tag{25.5}$$

ainsi que l'équation

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\, G^{(3/2)}(x', x) = 0. \tag{25.6}$$

D'après (25.3), son adjoint de Dirac satisfait la relation

$$\overline{G}^{(3/2)}(x', x) = -\, G^{(3/2)}(x, x'). \tag{25.7}$$

b. Des relations satisfaites par les bispineurs de Dirac $\Sigma^{(1/2)}$ et $\Sigma^{(3/2)}$, on peut déduire des relations analogues relatives aux noyaux élémentaires et aux propagateurs. Soit $G^{(1/2;\lambda)\pm}(x, x')$ les noyaux élémentaires relatifs à l'opérateur $(\Delta - \lambda - \varepsilon^2)$ sur les 1-spineurs. On a

$$(\Delta_x - \lambda - \varepsilon^2)\, G^{(1/2;\lambda)\pm}(x, x') = \Sigma^{(1/2)}(x, x'). \tag{25.8}$$

En effectuant le produit à gauche par γ_α des deux membres de (25.8), il vient, compte tenu de (24.9) :

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha(\Delta_x - \lambda - \varepsilon^2)\, G^{(1/2;\lambda)\pm}(x, x') \\ = (\Delta_x - \varepsilon^2)\,\{\gamma_\alpha\, G^{(1/2;\lambda)\pm}(x, x')\} = \gamma_\alpha\, \Sigma^{(1/2)}(x, x'),\end{aligned}$$

soit d'après (17.8) :

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\,\{\gamma_\alpha\, G^{(1/2;\lambda)\pm}(x, x')\} = \Sigma^{(3/2)}_{\alpha\lambda'}(x, x')\,\gamma^{\lambda'}. \tag{25.9}$$

D'autre part, de (25.4) on déduit par produit à droite par $\gamma^{\lambda'}$,

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\,\{G^{(3/2)\pm}_{\alpha\lambda'}(x, x')\,\gamma^{\lambda'}\} = \Sigma^{(3/2)}_{\alpha\lambda'}(x, x')\,\gamma^{\lambda'}. \tag{25.10}$$

De l'égalité des seconds membres de (25.9) et (25.10) et du théorème d'unicité, il résulte

$$G^{(3/2)\pm}_{\alpha\lambda'}(x, x')\,\gamma^{\lambda'} = \gamma_\alpha\, G^{(1/2;\lambda)\pm}(x, x'). \tag{25.11}$$

Par différence, on en déduit que les propagateurs correspondants vérifient la relation

$$G^{(3/2)}_{\alpha\lambda'}(x, x')\,\gamma^{\lambda'} = \gamma_\alpha\, G^{(1/2;\lambda)}(x, x'). \tag{25.12}$$

c. De même, à partir de (25.8), on déduit par dérivation covariante en x, compte tenu de (24.11) :

$$\nabla_\alpha(\Delta_x - \lambda - \varepsilon^2)\, G^{(1/2;\lambda)\pm}(x, x')$$
$$= (\Delta_x - \varepsilon^2)\{\nabla_\alpha G^{(1/2;\lambda)\pm}(x, x')\} = \nabla_\alpha \Sigma^{(1/2)}(x, x'),$$

soit d'après (17.11) :

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\{\nabla_x G^{(1/2;\lambda)\pm}(x, x')\} = \nabla_x \Sigma^{(1/2)}(x, x') = \delta_{x'} \Sigma^{(3/2)}(x, x').$$

D'autre part de (25.4) on déduit par action de $\delta_{x'}$,

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\{\delta_{x'} G^{(3/2)\pm}(x, x')\} = \delta_{x'} \Sigma^{(3/2)}(x, x').$$

De l'égalité des derniers membres des deux équations précédentes et du théorème d'unicité, il résulte

$$(25.13) \qquad \delta_{x'} G^{(3/2)\pm}(x, x') = \nabla_x G^{(1/2;\lambda)\pm}(x, x').$$

Par différence, on en déduit pour les propagateurs correspondants, la relation

$$(25.14) \qquad \delta_{x'} G^{(3/2)}(x, x') = \nabla_x G^{(1/2;\lambda)}(x, x').$$

26. **Les opérateurs du premier ordre dans la théorie de Rarita-Schwinger.**

a. Introduisons sur les vecteurs-1-spineurs contravariants de V_4, des opérateurs identiques formellement à ceux de Dirac :

$$(26.1) \qquad L\chi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \chi - \varepsilon\chi, \qquad L'\chi = \gamma^\beta \nabla_\beta \chi + \varepsilon\chi$$

qui vérifient

$$(26.2) \qquad LL'\chi = L'L\chi = (\Delta - \varepsilon^2)\chi,$$

où Δ est donné par (24.1) ou (24.2).

Si ξ est un vecteur-1-spineur covariant, nous posons de même,

$$(26.3) \qquad \overline{L}\xi = -(\nabla_\alpha \xi \gamma^\alpha + \varepsilon\xi), \qquad \overline{L}'\xi = -(\nabla_\beta \xi \gamma^\beta - \varepsilon\xi).$$

Ces opérateurs vérifient

$$(26.4) \qquad \overline{L}\,\overline{L}'\xi = \overline{L}'\overline{L}\xi = (\Delta - \varepsilon^2)\xi,$$

où Δ est donné par (24.3) ou (24.4).

Un raisonnement identique à celui du paragraphe 21 nous montre que si l'intersection $S(\chi) \cap S(\xi)$ des supports de χ et ξ est compacte,

$$(26.5) \qquad \langle L\chi, \xi \rangle = \langle \chi, \overline{L}\xi \rangle$$

et

$$\langle L'\chi, \xi\rangle = \langle \chi, \overline{L}'\xi\rangle. \tag{26.6}$$

De plus relativement aux passages aux adjoints de Dirac, on a

$$\overline{L\chi} = \overline{L}\,\overline{\chi} \tag{26.7}$$

et

$$\overline{L'\chi} = \overline{L}'\overline{\chi}. \tag{26.8}$$

b. Sur ces opérateurs, nous établirons le lemme suivant qui nous sera utile dans la suite :

LEMME. — *Si ψ est un* 1*-spineur contravariant de V_4, on a*

$$L'\gamma_\alpha\psi = -\gamma_\alpha L\psi - 2\nabla_\alpha\psi. \tag{26.9}$$

Dans les mêmes conditions, les équations d'Einstein étant satisfaites, on a

$$L'\nabla_\alpha\psi = \nabla_\alpha L'\psi + \frac{\lambda}{2}\gamma_\alpha\psi. \tag{26.10}$$

En effet,

$$L'\gamma_\alpha\psi = \gamma^\beta\nabla_\beta(\gamma_\alpha\psi) + \varepsilon\gamma_\alpha\psi$$

soit, γ étant à dérivée covariante nulle,

$$L'\gamma_\alpha\psi = \gamma^\beta\gamma_\alpha\nabla_\beta\psi + \varepsilon\gamma_\alpha\psi.$$

Des relations (8.2), on déduit

$$L'\gamma_\alpha\psi = -\gamma_\alpha(\gamma^\beta\nabla_\beta\psi - \varepsilon\psi) - 2\nabla_\alpha\psi,$$

ce qui est la relation (26.9).

De même,

$$L'\nabla_\alpha\psi = \gamma^\beta\nabla_\beta\nabla_\alpha\psi + \varepsilon\nabla_\alpha\psi.$$

De l'identité de Ricci :

$$(\nabla_\beta\nabla_\alpha - \nabla_\alpha\nabla_\beta)\psi = \frac{1}{4}R_{\lambda\mu,\alpha\beta}\gamma^\lambda\gamma^\mu\psi,$$

on déduit

$$L'\nabla_\alpha\psi = \gamma^\beta\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi + \varepsilon\nabla_\alpha\psi + \frac{1}{4}R_{\lambda\mu,\alpha\beta}\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu\psi.$$

Soit, d'après l'identité (15.3) :

$$L'\nabla_\alpha\psi = \nabla_\alpha L'\psi + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}\gamma^\beta\psi.$$

Des équations d'Einstein, il résulte la relation (26.10).

c. Les résultats du paragraphe 22 — en particulier le théorème d'unicité — s'adaptent immédiatement au présent cas. Introduisons les bi-1-tenseurs-1-spineurs contravariants en x, covariants en x', définis par

$$S^{(3/2)\pm}(x, x') = L'_x G^{(3/2)\pm}(x, x') = \overline{L}'_{x'} G^{(3/2)\pm}(x, x'). \tag{26.11}$$

Pour chaque x' ils ont leurs supports respectivement dans $\mathcal{E}^+(x')$ ou $\mathcal{E}^-(x')$ et vérifient

$$L_x S^{(3/2)\pm}(x, x') = \Sigma^{(3/2)}(x, x'), \tag{26.12}$$

ce qui les caractérise. De plus, d'après (25.7) et (26.11) :

$$\overline{S}^{(3/2)\pm}(x, x') = S^{(3/2)\pm}(x', x). \tag{26.13}$$

A ces noyaux élémentaires correspond le propagateur

$$S^{(3/2)}(x, x') = S^{(3/2)-}(x, x') - S^{(3/2)+}(x, x')$$

qui est égal à

$$S^{(3/2)}(x, x') = L'_x G^{(3/2)}(x, x') = \overline{L}'_{x'} G^{(3/2)}(x, x'). \tag{26.14}$$

Notre propagateur vérifie les relations différentielles

$$L_x S^{(3/2)}(x, x') = 0 \tag{26.15}$$

et

$$\overline{L}_{x'} S^{(3/2)}(x, x') = 0. \tag{26.16}$$

En ce qui concerne l'adjoint de Dirac, on a

$$\overline{S}^{(3/2)}(x, x') = -S^{(3/2)}(x', x). \tag{26.17}$$

27. Les équations de la théorie de Rarita-Schwinger.

a. Sur la variété espace-temps munie d'une orientation temporelle et d'une métrique satisfaisant aux équations d'Einstein :

$$R_{\alpha\beta} = k\varepsilon^2 g_{\alpha\beta} \qquad (\lambda = k\varepsilon^2), \tag{27.1}$$

considérons le champ décrit par un vecteur-spineur contravariant χ satisfaisant aux équations de champ

$$L\chi_\beta = 0 \tag{27.2}$$

et

$$\gamma^\beta \chi_\beta = 0. \tag{27.3}$$

De (27.2) on déduit par produit à gauche par γ^β,

$$\gamma^\beta L\chi_\beta = \gamma^\beta\gamma^\alpha\nabla_\alpha\chi_\beta - \varepsilon\gamma^\beta\chi_\beta = -\gamma^\alpha\gamma^\beta\nabla_\alpha\chi_\beta - 2\nabla^\alpha\chi_\alpha - \varepsilon\gamma^\beta\chi_\beta = 0,$$

soit

$$\gamma^\beta L\chi_\beta = -\gamma^\alpha \nabla_\alpha(\gamma^\beta \chi_\beta) - \varepsilon\gamma^\beta\chi_\beta - 2\nabla^\alpha\chi_\alpha = 0.$$

On voit que les équations de champ (27.2), (27.3) entraînent

$$(27.4) \qquad \delta\chi = -\nabla^\alpha \chi_\alpha = 0.$$

D'après (26.7), l'adjoint de Dirac $\overline{\chi}$ de χ vérifie

$$(27.5) \qquad \overline{L}\,\overline{\chi}_\beta = 0,$$

ainsi que

$$(27.6) \qquad \overline{\chi}_\beta \gamma^\beta = 0,$$

qui entraînent

$$\delta\overline{\chi} = -\nabla^\alpha \overline{\chi}_\alpha = 0.$$

b. Proposons-nous de construire pour ce champ un anticommutateur $[\chi_\alpha(x), \overline{\chi}_{\lambda'}(x')]_+$, c'est-à-dire un bi-1-tenseur-1-spineur-distribution $X(x, x')$, à valeurs scalaires, qui pour chaque x' a son support dans $\mathcal{E}^+(x') \cup \mathcal{E}^-(x')$, vérifie

$$(27.7) \qquad \overline{X}(x', x) = X(x, x')$$

et satisfait en x les équations (27.2), (27.3) et en x' les équations (27.5), (27.6).

L'étude du champ correspondant en relativité restreinte nous conduit à rechercher un anticommutateur de la forme

$$(27.8) \qquad X_{\alpha\lambda'}(x, x') = \frac{\overline{h}}{i} L'_x \Big\{ G^{(3/2)}_{\alpha\lambda'}(x, x') + a\gamma_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'} + \frac{b}{\varepsilon}(\gamma_\alpha \nabla_{\lambda'} G^{(1/2)} + \nabla_\alpha G^{(1/2)}\gamma_{\lambda'}) + \frac{c}{\varepsilon^2}\nabla_\alpha \nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}(x, x') \Big\}$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$(27.9) \qquad G^{(1/2)}(x, x') = G^{(1/2\,;\,\lambda)}(x, x') = G^{(1/2\,;\,k\varepsilon^2)}(x, x')$$

et où a, b, c sont trois constantes.

Pour déterminer ces constantes, nous allons d'abord vérifier (27.7) et, à cet effet, évaluer les adjoints de Dirac des différents termes de X, en négligeant le facteur $\frac{\overline{h}}{i}$. Le premier terme s'écrit

$$L'_x G^{(3/2)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = S^{(3/2)}_{\alpha\lambda'}(x, x')$$

et d'après (26.17) il vérifie la relation

(27.10) $$\bar{S}^{(3/2)}_{\lambda'\alpha}(x', x) = -\bar{S}^{(3/2)}_{\alpha\lambda'}(x, x').$$

28. **Relation exprimant** (27.7).

a. Cherchons l'adjoint de Dirac du coefficient de a, soit

$$T^{(1)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = L'_x(\gamma_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'}).$$

D'après (26.9) on a

$$T^{(1)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = -\gamma_\alpha L_x G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'} - 2\nabla_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'},$$

soit

(28.1) $$T^{(1)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = -\gamma_\alpha S^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'} + 2\varepsilon\gamma_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'} - 2\nabla_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'}.$$

En passant aux adjoints de Dirac à l'aide d'un produit à gauche et à droite par β, il vient

$$\bar{T}^{(1)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = -\gamma_{\lambda'}\bar{S}^{(1/2)}(x, x')\gamma_\alpha + 2\varepsilon\gamma_{\lambda'}\bar{G}^{(1/2)}(x, x')\gamma_\alpha + 2\gamma_{\lambda'}\nabla_\alpha \bar{G}^{(1/2)}(x, x').$$

Il en résulte

(28.2) $$\bar{T}^{(1)}_{\lambda\alpha'}(x', x) = +\gamma_\alpha S^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'} - 2\varepsilon\gamma_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'} - 2\gamma_\alpha\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}(x, x').$$

b. Cherchons l'adjoint de Dirac du coefficient de $\frac{b}{\varepsilon}$ soit

$$T^{(2)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = L'_x\{\gamma_\alpha\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}(x, x') + \nabla_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'}\}.$$

D'après (26.9) et (26.10), on a

$$T^{(2)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = -\gamma_\alpha\nabla_{\lambda'}\{L_x G^{(1/2)}(x, x')\} - 2\nabla_\alpha\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}(x, x') + \nabla_\alpha S^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'} + \frac{k\varepsilon^2}{2}\gamma_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'},$$

soit

(28.3) $$T^{(2)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = -\gamma_\alpha\nabla_{\lambda'} S^{(1/2)}(x, x') + \nabla_\alpha S^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'} + \frac{k\varepsilon^2}{2}\gamma_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'} - 2\nabla_\alpha\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}(x, x') + 2\varepsilon\gamma_\alpha\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}(x, x').$$

En passant de même aux adjoints de Dirac, il vient

$$\bar{T}^{(2)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = \nabla_{\lambda'}\bar{S}^{(1/2)}(x, x')\gamma_\alpha - \gamma_{\lambda'}\nabla_\alpha\bar{S}^{(1/2)}(x, x') + \frac{k\varepsilon^2}{2}\gamma_{\lambda'}\bar{G}^{(1/2)}(x, x')\gamma_\alpha - 2\nabla_\alpha\nabla_{\lambda'}\bar{G}^{(1/2)}(x, x') - 2\varepsilon\nabla_{\lambda'}\bar{G}^{(1/2)}(x, x')\gamma_\alpha.$$

Il en résulte

$$(28.4)\quad \overline{T}^{(2)}_{\lambda'\alpha}(x', x) = -\nabla_\alpha S^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'} + \gamma_\alpha \nabla_{\lambda'} S^{(1/2)}(x, x') - \frac{k\varepsilon^2}{2}\gamma_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'} + 2\nabla_\alpha\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}(x, x') + 2\varepsilon\nabla_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'}.$$

c. Cherchons enfin l'adjoint de Dirac du coefficient de $\frac{c}{\varepsilon^2}$ soit

$$T^{(3)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = L'_x \nabla_\alpha \nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}(x, x').$$

D'après (26.10) il vient

$$(28.5)\quad T^{(3)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = \nabla_\alpha\nabla_{\lambda'} S^{(1/2)}(x, x') + \frac{k\varepsilon^2}{2}\gamma_\alpha\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}(x, x').$$

En passant aux adjoints de Dirac, on a

$$\overline{T}^{(3)}_{\alpha\lambda'}(x, x') = \nabla_\alpha\nabla_{\lambda'}\overline{S}^{(1/2)}(x, x') - \frac{k\varepsilon^2}{2}\nabla_{\lambda'}\overline{G}^{(1/2)}(x, x')\gamma_\alpha.$$

Il en résulte

$$(28.6)\quad \overline{T}^{(3)}_{\lambda'\alpha}(x', x) = -\nabla_\alpha\nabla_{\lambda'} S^{(1/2)}(x, x') + \frac{k\varepsilon^2}{2}\nabla_\alpha G^{(1/2)}(x, x')\gamma_{\lambda'}.$$

d. On voit immédiatement que (27.7) sera vérifiée si le coefficient de $\gamma_\alpha\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)} + \nabla_\alpha G^{(1/2)}\gamma_{\lambda'}$ dans $X(x, x') - \overline{X}(x', x)$ est nul. On obtient ainsi, pour traduire (27.7) la relation

$$(28.7)\quad -2a + 2b + \frac{k}{2}c = 0.$$

29. Détermination de l'anticommutateur.

a. Il nous faut maintenant étudier si, par un choix convenable de a, b, c, les équations de champ peuvent être satisfaites, compte tenu de (27.7); il nous faut vérifier d'une part (27.2) en x ou (27.5) en x', d'autre part (27.3) en x ou (27.6) en x'.

Il est immédiat de vérifier (27.2) par rapport à x. En effet,

$$L_x L'_x X_{\alpha\lambda'} = \frac{\overline{h}}{i}(\Delta_x - \varepsilon^2)\left\{ G^{(3/2)}_{\alpha\lambda'} + a\gamma_\alpha G^{(1/2)}\gamma_{\lambda'} + \frac{b}{\varepsilon}(\gamma_\alpha\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)} + \nabla_\alpha G^{(1/2)}\gamma_{\lambda'}) + \frac{c}{\varepsilon^2}\nabla_\alpha\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}\right\},$$

où $G^{(3/2)}$ et $G^{(1/2)}$ vérifient respectivement

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\, G^{(3/2)}(x, x') = 0$$

et

$$\{\Delta_x - (1 + k)\varepsilon^2\}\, G^{(1/2)}(x, x') = 0.$$

Des relations (24.9) et (24.11) il résulte que (27.2) est satisfaite quels que soient a, b, c.

b. Cherchons à satisfaire (27.6) par rapport à x'. La relation

$$X_{\alpha\lambda'}(x, x')\,\gamma^{\lambda'} = 0$$

peut s'écrire, compte tenu de (25.12) et (25.14) :

$$(29.1)\qquad L'_x\left\{\gamma_\alpha G^{(1/2)} - 4a\gamma_\alpha G^{(1/2)} + \frac{b}{\varepsilon}\gamma_\alpha \nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}\gamma^{\lambda'} - \frac{4b}{\varepsilon}\nabla_\alpha G^{(1/2)} + \frac{c}{\varepsilon^2}\nabla_\alpha\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}\gamma^{\lambda'}\right\} = 0.$$

De

$$S^{(1/2)}(x, x') = \overline{L}'_{x'} G^{(1/2)}(x, x') = -(\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}(x, x')\,\gamma^{\lambda'} - \varepsilon\, G^{(1/2)}(x, x')),$$

on tire

$$\nabla_{\lambda'} G^{(1/2)}\gamma^{\lambda'} = \varepsilon\, G^{(1/2)} - S^{(1/2)},$$

(29.1) peut alors s'écrire

$$(29.2)\qquad L'_x\left\{(1 - 4a + b)\gamma_\alpha G^{(1/2)} - \frac{4b - c}{\varepsilon}\nabla_\alpha G^{(1/2)} - \frac{b}{\varepsilon}\gamma_\alpha S^{(1/2)} - \frac{c}{\varepsilon^2}\nabla_\alpha S^{(1/2)}\right\} = 0.$$

Or, nous avons

$$L'_x\gamma_\alpha G^{(1/2)} = -\gamma_\alpha L_x G^{(1/2)} - 2\nabla_\alpha G^{(1/2)},$$

soit

$$(29.3)\qquad L'_x\gamma_\alpha G^{(1/2)} = -\gamma_\alpha S^{(1/2)} + 2\varepsilon\gamma_\alpha G^{(1/2)} - 2\nabla_\alpha G^{(1/2)}.$$

De même,

$$(29.4)\qquad L'_x\nabla_\alpha G^{(1/2)} = \nabla_\alpha S^{(1/2)} + \frac{k\varepsilon^2}{2}\gamma_\alpha G^{(1/2)}.$$

D'autre part,

$$L'_x\gamma_\alpha S^{(1/2)} = -\gamma_\alpha L_x S^{(1/2)} - 2\nabla_\alpha S^{(1/2)}.$$

Or

$$L_x S^{(1/2)} = (\Delta_x - \varepsilon^2)\, G^{(1/2)} = k\varepsilon^2\, G^{(1/2)}.$$

Il vient

$$(29.5)\qquad L'_x\gamma_\alpha S^{(1/2)} = -k\varepsilon^2\gamma_\alpha G^{(1/2)} - 2\nabla_\alpha S^{(1/2)}.$$

Enfin

$$L'_x\nabla_\alpha S^{(1/2)} = \nabla_\alpha L'_x S^{(1/2)} + \frac{k\varepsilon^2}{2}\gamma_\alpha S^{(1/2)} = \nabla_\alpha L_x S^{(1/2)} + 2\varepsilon\nabla_\alpha S^{(1/2)} + \frac{k\varepsilon^2}{2}\gamma_\alpha S^{(1/2)}.$$

Il en résulte

$$(29.6)\qquad L'_x\nabla_\alpha S^{(1/2)} = \frac{k\varepsilon^2}{2}\gamma_\alpha S^{(1/2)} + 2\varepsilon\nabla_\alpha S^{(1/2)} + k\varepsilon^2\nabla_\alpha G^{(1/2)}.$$

De ces calculs on déduit que l'équation (29.2) peut s'écrire

$$(29.7)\qquad -\left(1-4a+b+\frac{k}{2}c\right)\gamma_\alpha S^{(1/2)}-\frac{2b+c}{\varepsilon}\nabla_\alpha S^{(1/2)}$$
$$+\left\{2(1-4a+b)-\frac{k}{2}(4b-c)+kb\right\}\varepsilon\gamma_\alpha G^{(1/2)}$$
$$-2\left(1-4a+b+\frac{k}{2}c\right)\nabla_\alpha G^{(1/2)}=0.$$

Outre (28.7), les constantes a, b, c sont donc astreintes aux équations

$$(29.8)\qquad 1-4a+b+\frac{k}{2}c=0,$$

$$(29.9)\qquad 2b+c=0$$

et

$$2(1-4a+b)-\frac{k}{2}(4b-c)+kb=0.$$

Cette dernière équation est une conséquence triviale de (29.8) et (29.9). Nous devons donc déterminer a, b, c par les trois équations (28.7), (29.8), (29.9). On en déduit

$$2a-(2-k)\,b=0$$

et

$$4a-(1-k)\,b=1.$$

On obtient ainsi la solution unique

$$a=\frac{2-k}{2(3-k)},\qquad b=\frac{1}{3-k},\qquad c=-\frac{2}{3-k}.$$

L'anticommutateur

$$(29.10)\qquad [\chi_\alpha(x),\,\bar\chi_{\lambda'}(x')]_+$$
$$=\frac{\bar h}{i}L'_x\left\{G^{(3/2)}_{\alpha\lambda'}(x,x')+\frac{2-k}{2(3-k)}\gamma_\alpha G^{(1/2)}(x,x')\gamma_{\lambda'}\right.$$
$$+\frac{1}{(3-k)\varepsilon}(\gamma_\alpha\nabla_{\lambda'}G^{(1/2)}(x,x')$$
$$\left.+\nabla_\alpha G^{(1/2)}(x,x')\gamma_{\lambda'})-\frac{2}{(3-k)\varepsilon^2}\nabla_\alpha\nabla_{\lambda'}G^{(1/2)}(x,x')\right\}$$

est donc rigoureusement compatible avec les équations de la théorie de Rarita-Schwinger sur un espace d'Einstein. En relativité restreinte, il se réduit, comme on le vérifie aisément, à l'anticommutateur introduit dans la théorie de Rarita-Schwinger par Takahashi-Umezawa [16] et Visconti [17].

En ce qui concerne la conjugaison de charge, on établit comme au paragraphe 21 :

$$\overset{c}{S}{}^{(3/2)}(x, x') = S^{(3/2)}(x, x'). \tag{29.11}$$

De cette relation et de (20.14), (22.16), on déduit aisément par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 23 et en utilisant les identités (26.9) et (26.10) que *notre anticommutateur est bien invariant par conjugaison de charge.*

V. — Théorie de Petiau-Duffin-Kemmer (spin maximum 1).

30. **Laplacien d'un 2-spineur.** — Dans cette section, nous nous proposons de généraliser à un espace-temps V_4, muni d'une métrique hyperbolique arbitraire, la classique théorie de PETIAU-DUFFIN-KEMMER pour un champ de spin maximum 1. Un tel champ sera représenté par un 2-spineur ψ de type (1, 1).

a. Si φ est un autre 2-spineur de même type, nous désignons comme d'habitude par

$$(\psi, \varphi) = \psi^a_b \varphi^b_a \tag{30.1}$$

leur produit contracté. Si l'intersection des supports de ψ et φ est compacte, on a conformément aux notations du paragraphe 16 :

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_{V_4} (\psi, \varphi)\, \eta. \tag{30.2}$$

Les notions de 2-spineur-distribution et de dérivée covariante de ces spineurs-distributions résultent des considérations du paragraphe 16.

Posons

$$P\psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi, \qquad \bar{P}\psi = -\nabla_\alpha \psi \gamma^\alpha. \tag{30.3}$$

Il vient

$$(P\psi, \varphi) = \gamma^{\alpha a}_{\ \ r} \nabla_\alpha \psi^r_s \varphi^s_a = \nabla^\alpha (\varphi^s_a \gamma^{\ a}_{\alpha r} \psi^r_s) - \psi^r_s \nabla_\alpha \varphi^s_a \gamma^{\alpha a}_{\ \ r}. \tag{30.4}$$

Introduisons la forme linéaire $W(\psi, \varphi)$ définie par

$$W_\alpha(\psi, \varphi) = \varphi^s_a \gamma^{\ a}_{\alpha r} \psi^r_s.$$

La formule (30.4) peut s'écrire

$$(P\psi, \varphi) = -\delta W(\psi, \varphi) + (\psi, \bar{P}\varphi). \tag{30.5}$$

Si l'intersection des supports de ψ et φ est *compacte*, on en déduit par intégration sur V_4,

$$\langle P\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, \bar{P}\varphi\rangle, \tag{30.6}$$

P et $\bar{P}$ sont ainsi *adjoints* l'un de l'autre.

b. Évaluons l'opérateur du second ordre,

$$P^2\psi = \gamma^\alpha\gamma^\beta\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi.$$

Par symétrisation et antisymmétrisation, il vient

$$P^2\psi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\psi + \frac{1}{2}\gamma^\alpha\gamma^\beta(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\psi.$$

Or d'après l'identité de Ricci pour les spineurs,

$$(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\psi = -\frac{1}{4}R_{\lambda\mu,\alpha\beta}\gamma^\lambda\gamma^\mu\psi + \frac{1}{4}R_{\lambda\mu,\alpha\beta}\psi\gamma^\lambda\gamma^\mu.$$

Il en résulte

$$P^2\psi = -\nabla^\rho{}_\rho\nabla\psi - \frac{1}{8}R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu\psi + \frac{1}{8}R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi\gamma^\lambda\gamma^\mu.$$

Soit, d'après l'identité (15.6) :

$$P^2\psi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\psi + \frac{1}{4}R\psi + \frac{1}{8}R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi\gamma^\lambda\gamma^\mu.$$

Un calcul analogue conduit pour $\bar{P}^2\psi$ à la même expression. Nous sommes ainsi conduits à introduire pour *laplacien* Δ d'un 2-spineur l'opérateur hyperbolique $\Delta = P^2 = \bar{P}^2$. On a donc

$$\Delta\psi = \gamma^\alpha\gamma^\beta\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi = \nabla_\alpha\nabla_\beta\psi\gamma^\beta\gamma^\alpha \tag{30.7}$$

qui s'écrit aussi

$$\Delta\psi = -\nabla^\rho\nabla_\rho\psi + \frac{1}{4}R\psi + \frac{1}{8}R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi\gamma^\lambda\gamma^\mu. \tag{30.8}$$

Si ψ et φ sont deux 2-spineurs de type (1, 1) dont l'*intersection des supports est compacte*, on a, en vertu de (30.6) :

$$\langle P^2\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, \bar{P}^2\varphi\rangle,$$

soit

$$\langle \Delta\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, \Delta\varphi\rangle. \tag{30.9}$$

L'opérateur Δ est *autoadjoint*.

c. En accord avec les considérations des paragraphes 18 et 19, on a

$$\mathcal{C}(\gamma^\alpha\psi) = -(\mathcal{C}\psi)\gamma^\alpha, \qquad \mathcal{C}\nabla_\alpha\psi = \nabla_\alpha\mathcal{C}\psi.$$

Il en résulte

(30.10) $$\mathcal{A}P = \bar{P}\mathcal{A}.$$

De même,

$$\mathcal{C}(\gamma^\alpha\psi) = \gamma^\alpha\mathcal{C}\psi, \qquad \mathcal{C}\nabla_\alpha\psi = \nabla_\alpha\mathcal{C}\psi.$$

Il en résulte

(30.11) $$\mathcal{C}P = P\mathcal{C}.$$

De (30.10) on déduit

$$\mathcal{A}P^2 = \bar{P}^2\mathcal{A}.$$

Le laplacien $\Delta = P^2 = \bar{P}^2$ vérifie donc les relations

(30.12) $$\mathcal{A}\Delta = \Delta\mathcal{A}$$

et

(30.13) $$\mathcal{C}\Delta = \Delta\mathcal{C}.$$

31. Algèbre extérieure et 2-spineur.

a. L'algèbre extérieure des formes de V_4 et le module des 2-spineurs admettent, en tant que modules, un *isomorphisme* S défini de la manière suivante. A toute p-forme $\alpha^{(p)}$, faisons correspondre le 2-spineur

(31.1) $$S\alpha^{(p)} = \frac{1}{p!}\gamma^{\rho_p}\dots\gamma^{\rho_p}\alpha^{(p)}_{\rho_1\dots\rho_p}.$$

Si α est une forme *non homogène* de V_4,

(31.2) $$\alpha = \sum_{p=0}\alpha^{(p)}$$

et $S\alpha$ se définit par linéarité.

Inversement, en le rapportant à la base définie par les produits de matrices γ distinctes, tout 2-spineur ψ de type (1, 1) peut s'écrire d'une manière et d'une seule

(31.3) $$\psi = \sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}\gamma^{\rho_1}\dots\gamma^{\rho_p}\alpha^{(p)}_{\rho_1\dots\rho_p} = \sum_{p=0}^{4} S\alpha^{(p)},$$

où les $\alpha^{(p)}$ sont des p-formes. Ainsi il existe une forme α et une seule telle que

(31.4) $$\psi = S\alpha.$$

b. A l'aide de Γ, on peut faire correspondre à α le 2-spineur *covariant* $\Gamma S\alpha$. Étudions, pour la forme $\alpha^{(p)}$ la symétrie du 2-spineur covariant $\Gamma S\alpha^{(p)}$. A cet effet, il suffit d'étudier la symétrie des 2-spineurs de base

$$\chi^{\rho_1\ldots\rho_p} = \Gamma\gamma^{\rho_1}\cdots\gamma^{\rho_p},$$

où les indices $\rho_1, \ldots, \rho_p$ sont distincts. On a

$$(31.5) \qquad \chi_{ab}^{\rho_1\ldots\rho_p} = \gamma_{ar_1}^{\rho_1}\gamma^{\rho_2 r_1}{}_{r_2}\ldots\gamma^{\rho_p r_{p-1}}{}_b$$

soit en inversant l'ordre des matrices γ et compte tenu de (12.20) :

$$\chi_{ab}^{\rho_1\ldots\rho} = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}\gamma_{r_1 a}^{\rho_p}\gamma^{\rho_{p-1}r_1}{}_{r_2}\ldots\gamma^{\rho_1 r_{p-1}}{}_b.$$

D'après (12.8) on a, en élevant et abaissant les indices de sommation à l'aide de Γ,

$$\chi_{ab}^{\rho_1\ldots\rho_p} = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}+p-1}\gamma^{\rho_1}{}_{r_{p-1}b}\gamma^{\rho_2 r_{p-1}}{}_{r_{p-2}}\ldots\gamma^{\rho_p r_1}{}_a.$$

En comparant avec (31.5) il vient

$$(31.6) \qquad \chi_{ab}^{\rho_1\ldots\rho_p} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}+1}\chi_{ba}^{\rho_1\ldots\rho_p}.$$

De (31.6) il résulte que *pour* $p = 1, 2$, *le 2-spineur covariant* $\Gamma S\alpha^{(p)}$ *est symétrique, tandis qu'il est symétrique pour* $p = 3, 4$.

32. Relations entre opérateurs différentiels.

a. Évaluons pour la p-forme $\alpha^{(p)}$,

$$PS\alpha^{(p)} = \frac{1}{p!}\gamma^\alpha\gamma^{\rho_1}\ldots\gamma^{\rho_p}\nabla_\alpha\alpha^{(p)}_{\rho_1\ldots\rho_p}.$$

Les indices $\rho_1, \ldots, \rho_p$ sont tous différents. Distinguons les termes où l'indice α ne prend aucune des valeurs de la permutation $(\rho_1, \ldots, \rho_p)$ et ceux où il prend l'une de ces valeurs

$$(32.1) \qquad PS\alpha^{(p)} = \frac{1}{p!}\sum_{\alpha\neq\rho_1,\ldots,\rho_p}\gamma^\alpha\gamma^{\rho_1}\ldots\gamma^{\rho_p}\nabla_\alpha\alpha^{(p)}_{\rho_1\ldots\rho_p} - \frac{1}{(p-1)!}\gamma^{\rho_2}\ldots\gamma^{\rho_p}\nabla_\alpha\alpha^{(p)\alpha}{}_{\rho_2\ldots\rho_p}.$$

Les indices $\alpha, \rho_1, \ldots, \rho_p$ étant supposés distincts, on a, en introduisant le tenseur d'antisymétrisation de Kronecker :

$$(32.2) \qquad \gamma^\alpha\gamma^{\rho_1}\ldots\gamma^{\rho_p} = \frac{1}{(p+1)!}\varepsilon^{\alpha\rho_1\ldots\rho_p}_{\lambda_0\ldots\lambda_p}\gamma^{\lambda_0}\ldots\gamma^{\lambda_p}.$$

En substituant cette expression dans le premier terme du second membre de (32.1), il vient

$$PS\alpha^{(p)} = \frac{1}{(p+1)!}\gamma^{\lambda_0}\dots\gamma^{\lambda_p}(d\alpha^{(p)})_{\lambda_0\dots\lambda_p}$$
$$-\frac{1}{(p-1)!}\gamma^{\rho_2}\dots\gamma^{\rho_p}\nabla_\alpha\alpha^{(p)\alpha}{}_{\rho_2\dots\rho_p}$$

soit

$$PS\alpha^{(p)} = S\,d\alpha^{(p)} + S\,\delta\alpha^{(p)}.$$

Par linéarité, on obtient ainsi la formule

(32.3) $$PS\alpha = S(d\alpha + \delta\alpha).$$

b. Nous désignons par v l'opérateur sur les formes qui, à

$$\alpha = \sum_{p=0}^{4}\alpha^{(p)}$$

fait correspondre

$$v\alpha = \sum_{p=0}^{4}(-1)^p\alpha^{(p)}.$$

Il est clair que

(32.4) $$dv = -vd, \qquad \delta v = -v\,\delta.$$

Cela posé, évaluons pour la p-forme $\alpha^{(p)}$,

$$\overline{P}S\alpha^{(p)} = -\frac{1}{p!}\gamma^{\rho_1}\dots\gamma^{\rho_p}\gamma^\alpha\nabla_\alpha\alpha^{(p)}_{\rho_1\dots\rho_p}.$$

En distinguant les termes où l'indice α ne prend aucune des valeurs de la permutation $(\rho_1, \dots, \rho_p)$ et ceux où il prend l'une de ces valeurs, il vient

$$\overline{P}S\alpha^{(p)} = -\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{\alpha\neq\rho_1,\dots,\rho_p}\gamma^\alpha\gamma^{\rho_1}\dots\gamma^{\rho_p}\nabla_\alpha\alpha^{(p)}_{\rho_1\dots\rho_p}$$
$$-\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\gamma^{\rho_2}\dots\gamma^{\rho_p}\nabla_\alpha\alpha^{(p)\alpha}{}_{\rho_2\dots\rho_p}$$

soit, par un raisonnement identique au précédent

$$\overline{P}S\alpha^{(p)} = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\gamma^{\lambda_0}\dots\gamma^{\lambda_p}(d\alpha^{(p)})_{\lambda_0\dots\lambda_p} - \frac{(-1)^p}{(p-1)!}\gamma^{\rho_2}\dots\gamma^{\rho_p}\nabla_\alpha\alpha^{(p)\alpha}{}_{\rho_2\dots\rho_p}.$$

A l'aide de v, nous pouvons écrire

$$\overline{P}S\alpha^{(p)} = Svd\alpha^{(p)} - Sv\,\delta\alpha^{(p)}.$$

Par linéarité, on obtient ainsi la formule

$$\overline{P}S\alpha = Sv(d\alpha - \delta\alpha). \tag{32.5}$$

c. De (32.3) on déduit

$$P^2 S\alpha = PS(d\alpha + \delta\alpha),$$

soit

$$P^2 S\alpha = S(d^2\alpha + d\delta\alpha + \delta d\alpha + \delta^2\alpha).$$

Comme $d^2 = \delta^2 = 0$, nous obtenons

$$P^2 S\alpha = S(d\delta + \delta d)\,\alpha, \tag{32.6}$$

soit la formule

$$\Delta S\alpha = S\,\Delta\alpha, \tag{32.7}$$

où $\Delta\alpha$ est le laplacien au sens de G. de Rham de la forme α.

De (32.5) on déduit de même,

$$\overline{P}^2 S\alpha = \overline{P}Sv(d\alpha - \delta\alpha),$$

soit

$$\overline{P}^2 S\alpha = S(v\,dv\,d\alpha - v\,dv\,\delta\alpha - v\,\delta v\,d\alpha + v\,\delta v\,\delta\alpha).$$

On retrouve bien, compte tenu de (32.4),

$$\overline{P}^2 S\alpha = S(d\delta\alpha + \delta d\alpha) = P^2 S\alpha = \Delta S\alpha.$$

Évaluons à l'aide de (32.3) et (32.5) :

$$P\overline{P}S\alpha = PSv(d\alpha - \delta\alpha),$$

soit

$$P\overline{P}S\alpha = S(dv\,d\alpha - dv\,\delta\alpha + \delta v\,d\alpha - \delta v\,\delta\alpha).$$

De (32.4) il résulte

$$P\overline{P}S\alpha = Sv(d\delta\alpha - \delta d\alpha). \tag{32.8}$$

On établit de même que

$$\overline{P}PS\alpha = Sv(d\delta\alpha - \delta d\alpha) = P\overline{P}S\alpha. \tag{32.9}$$

d. Dans la présente théorie, nous sommes amenés à introduire les opérateurs différentiels du premier ordre sur les 2-spineurs de type (1, 1),

$$M = \frac{1}{2}(P + \overline{P}), \qquad N = \frac{1}{2}(P - \overline{P}). \tag{32.10}$$

De (32.3) et (32.5) il résulte

$$(32.11)\qquad MS = \frac{1}{2} S \left\{ (1+v)\, d + (1-v)\, \delta \right\}$$
$$NS = \frac{1}{2} S \left\{ (1-v)\, d + (1+v)\, \delta \right\}.$$

D'après (30.10) et (30.11) les opérateurs M et N vérifient

$$(32.12)\qquad \mathcal{A} M = M \mathcal{A}, \qquad \mathcal{A} N = -N \mathcal{A}$$

et

$$(32.13)\qquad \mathcal{C} M = M \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} N = N \mathcal{C}.$$

Évaluons le carré M^2. Il vient

$$4M^2 = P^2 + \bar{P}^2 + \bar{P}P + \bar{P}P,$$

soit

$$(32.14)\qquad 2M^2 = P^2 + P\bar{P}.$$

On obtient ainsi

$$(32.15)\qquad M^2 S = \frac{1}{2} S \left\{ (1+v)\, d\delta + (1-v)\, \delta d \right\},$$
$$N^2 S = \frac{1}{2} S \left\{ (1-v)\, d\delta + (1+v)\, \delta d \right\},$$

avec

$$(32.16)\qquad \Delta = M^2 + N^2.$$

Enfin

$$4NM = P^2 - \bar{P}^2 - \bar{P}P + P\bar{P}.$$

Il vient ainsi

$$(32.17)\qquad NM = MN = 0.$$

On a d'après (32.16) :

$$M^3 = M(\Delta - N^2) = (\Delta - N^2)\, M.$$

On déduit ainsi de (32.17) les relations importantes

$$(32.18)\qquad M^3 = M\,\Delta = \Delta M$$

et

$$(32.19)\qquad N^3 = N\,\Delta = \Delta N.$$

33. Le bi-2-spineur de Dirac.

a. Nous désignons par $\Sigma\,(x, x')$ le bi-2-spineur de Dirac, de type (1, 1) en x et x', défini par

$$(33.1)\qquad \langle \Sigma(x, x'), \varphi(x') \rangle = \varphi(x),$$

où φ est de type (1, 1). Si $s\,(x, x')$ désigne un des bi-1-spineurs introduits au paragraphe 17, Σ admet pour composantes

$$(33.2)\qquad \Sigma^{ar'}_{bs'}((x, x') = s^{a}_{s'} s^{r'}_{b}\, \delta(x, x') = \delta^{a}_{s''} \delta^{r''}_{b}\, \delta(x, x').$$

L'adjoint de Dirac du bispineur Σ est donné par

$$\overline{\Sigma}(x, x') = \mathcal{A}_x \mathcal{A}_{x'}\, \Sigma(x, x').$$

Il admet pour composantes

$$\overline{\Sigma}^{ar'}_{bs'}(x, x') = \beta^{a}_{b}\beta^{r'}_{t'}\, \delta^{l}_{u'}\, \delta^{t'}_{m}\, \beta^{u'}_{s'}\, \beta^{m}_{b}\, \delta(x, x'),$$

soit en substituant à Σ ses composantes

$$\overline{\Sigma}^{ar'}_{bs'}(x, x') = \beta^{a}_{l}\beta^{r'}_{t'}\, \delta^{l}_{u'}\, \delta^{t'}_{m} \beta^{u'}_{s'}\, \beta^{m}_{b}\, \delta(x, x'),$$

compte tenu de $\beta^2 = e$, on obtient

$$\overline{\Sigma}^{ar'}_{bs'}(x, x') = s^{a}_{s'} s^{r'}_{b}\, \delta(x, x').$$

Nous avons ainsi la formule

$$(33.3)\qquad \overline{\Sigma}(x, x') = \Sigma(x, x').$$

Le conjugué de charge du bispineur Σ est donné par

$$\overset{c}{\Sigma}(x, x') = \mathcal{C}_x \mathcal{C}_{x'}\, \Sigma(x, x')$$

et admet pour composantes

$$\overset{c}{\Sigma}{}^{ar'}_{bs'}(x, x') = \alpha^{a}_{l}\, \alpha^{r'}_{t'}\, \Sigma^{lt'}_{mu'}(x, x')\, \alpha^{u'}_{s'}\, \alpha^{a}_{b}.$$

En substituant à Σ ses composantes, il vient

$$\overset{c}{\Sigma}{}^{ar'}_{bs'}(x, x') = \alpha^{a}_{l}\, \alpha^{r'}_{t'}\, \delta^{l}_{u'}\, \delta^{t'}_{m}\, \alpha^{u'}_{s'}\, \alpha^{a}_{b}\, \delta(x, x'),$$

compte tenu de $\alpha^2 = e$, on obtient

$$(33.4)\qquad \overset{c}{\Sigma}(x, x') = \Sigma(x, x').$$

b. Il est possible d'exprimer Σ à l'aide des bi-p-formes de Dirac $\hat{D}^{(p)}$ (§ 2) et de l'isomorphisme S. A cet effet, nous établirons une formule auxiliaire concernant, pour r', s' fixés, la matrice en a, b,

$$4\,\delta^{a}_{s'}\, \delta^{r'}_{b}.$$

En rapportant cette matrice à la base constituée par des produits de matrices γ distinctes, il vient

$$(33.5) \qquad 4\delta^a_{s'}\delta^{r'}_b = \delta^a_b\mu^{r'}_{s'} + \frac{1}{1\,!}\gamma^{\alpha a}{}_b\mu_{\alpha s'}^{r'} + \frac{1}{2\,!}(\gamma^\alpha\gamma^\beta)^a_b\mu_{\alpha\beta s'}^{r'}$$

$$+ \frac{1}{3\,!}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma)^a_h\mu_{\alpha\beta\gamma s'}^{r'} + \frac{1}{4\,!}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta)^a_b\mu_{\alpha\beta\gamma\delta s'}^{r'},$$

où les μ sont antisymétriques par rapport à leurs indices tensoriels. Nous nous proposons d'évaluer ces coefficients. En prenant la trace par rapport à a, b (notée Tr) des deux membres de (33.5), il vient

$$4\delta^{r'}_{s''} = 4\mu^{r'}_{s'},$$

soit

$$(33.6) \qquad \mu^{r'}_{s'} = \delta^{r'}_{s'}.$$

Multiplions à gauche les deux membres de (33.5) par γ_λ et prenons ensuite la trace; on obtient

$$4\gamma_{\lambda s'}^{r'} = \mathrm{Tr}(\gamma_\lambda\gamma^\lambda)\,\mu_{\lambda s'}^{r'} = -4\mu_{\lambda s'}^{r'},$$

où le second membre est sans sommation, soit

$$(33.7) \qquad \mu_{\lambda s'}^{r'} = -\gamma_{\lambda s'}^{r'}.$$

Multiplions à gauche les deux membres de (33.5) par $\gamma_\lambda\gamma_\mu$ $(\lambda \neq \mu)$ et prenons la trace. Il vient (sans sommation)

$$4(\gamma_\lambda\gamma_\mu)^{r'}_{s'} = \mathrm{Tr}(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\mu)\,\mu_{\lambda\mu s'}^{r'} = -4\mu_{\lambda\mu s'}^{r'},$$

soit

$$(33.8) \qquad \mu_{\lambda\mu s'}^{r'} = -(\gamma_\lambda\gamma_\mu)^{r'}_{s'}.$$

Pour les termes d'ordre 3, on a, par le même procédé,

$$4(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu)^{r'}_{s'} = \mathrm{Tr}(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\mu_{\lambda\mu\nu s'}^{r'},$$

où λ, μ, ν sont différents, soit

$$(33.9) \qquad \mu_{\lambda\mu\nu s'}^{r'} = -(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu)^{r'}_{s'}.$$

Enfin pour les termes d'ordre 4,

$$4(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho)^{r'}_{s'} = \mathrm{Tr}(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\rho)\,\mu_{\lambda\mu\nu\rho s'}^{r'} = 4\mu_{\lambda\mu\nu\rho s'}^{r'},$$

où λ, μ, ν, ρ sont différents, soit

$$(33.10) \qquad \mu_{\lambda\mu\nu\rho s'}^{r'} = (\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho)^{r'}_{s''}.$$

On a ainsi la formule auxiliaire cherchée

$$(33.11)\qquad 4\delta^{a}_{s'}\,\delta^{r'}_{b} = \delta^{a}_{b}\,\delta^{r'}_{s'} - \frac{1}{1!}\sum_{\alpha}\gamma^{\alpha a}{}_{b}\,\gamma_{\alpha s'}{}^{r'} - \frac{1}{2!}\sum_{\alpha\neq\beta}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta})^{a}_{b}(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta})^{r'}_{s'}$$
$$+\frac{1}{3!}\sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma})^{a}_{b}(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\gamma})^{r'}_{s'}$$
$$+\frac{1}{4!}\sum_{\alpha\neq\ldots\neq\delta}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta})^{a}_{b}(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\gamma}\gamma_{\delta})^{r'}_{s'}.$$

Nous sommes ainsi amenés à considérer

$$S_x S_{x'}\hat{D}^{(p)}(x, x') = \frac{1}{(p!)^2}(\gamma^{\rho_1}\ldots\gamma^{\rho_p})_x(\gamma^{\sigma'_1}\ldots\gamma^{\sigma'_p})_{x'}\hat{D}^{(p)}_{\rho_1\ldots\rho_p\sigma'_1\ldots\sigma'_p}(x, x').$$

En introduisant les composantes de $\hat{D}^p$, il vient

$$S_x S_{x'}\hat{D}^{(p)}(x, x') = \frac{1}{p!}\sum_{\rho_1\neq\ldots\neq\rho_p}(\gamma^{\rho_1}\ldots\gamma^{\rho_p})_x(\gamma_{\rho_1}\ldots\gamma_{\rho_p})_{x'}\,\delta(x, x').$$

En multipliant les deux membres de (33.11) par $\delta(x, x')$ on obtient l'expression désirée

$$(33.12)\qquad 4\Sigma(x, x') = S_x S_{x'}\sum_{p=0}(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\hat{D}^{(p)}(x, x').$$

34. **Noyaux élémentaires et propagateurs pour l'opérateur de Klein-Gordon.** — Ω désigne toujours l'ouvert introduit aux paragraphes 4 et 20.

a. Relativement à l'opérateur de Klein-Gordon $(\Delta - \varepsilon^2)$ (ε = Cte) sur les 2-spineurs de type (1, 1) on déduit du même raisonnement que dans le cas tensoriel le résultat suivant : *il existe dans $\Omega\times\Omega$ deux noyaux élémentaires $B^{\pm}(x, x')$ de l'opérateur $(\Delta - \varepsilon^2)$, c'est-à-dire deux bi-2-tenseurs-distributions, de type (1, 1) en x et x', satisfaisant*

$$(34.1)\qquad (\Delta_x - \varepsilon^2)\,B^{\pm}(x, x') = \Sigma(x, x')$$

et qui, pour chaque x', ont leurs supports respectivement dans $\mathcal{E}^{+}(x')$ ou $\mathcal{E}^{-}(x')$.

Le théorème général d'unicité est bien entendu toujours valable.

Soit χ un 2-spineur de type (1, 1) à support compact. D'après un raisonnement identique à celui du paragraphe 20, toute solution à support compact vers le futur, de l'équation

$$(34.2)\qquad (\Delta - \varepsilon^2)\,\psi = \chi$$

s'écrit nécessairement

$$\psi(x) = \langle B^+(x', x), \chi(x') \rangle.$$

D'autre part le 2-spineur

$$\psi(x) = \langle B^-(x, x'), \chi(x') \rangle$$

répond manifestement à la question. On voit ainsi que le caractère autoadjoint de Δ entraîne

(34.3) $$B^\pm(x', x) = B^\mp(x, x')$$

et les noyaux élémentaires satisfont aussi

(34.4) $$(\Delta_{x'} - \varepsilon^2) B^\pm(x, x') = \Sigma(x, x').$$

b. D'après (30.12) et (30.13), l'adjonction de Dirac et la conjugaison de charge commutent avec l'opérateur Δ. Transformons l'équation (34.1) par adjonction de Dirac. Il vient

$$(\Delta_x - \varepsilon^2) \mathcal{A}_x B^\pm(x, x') = \mathcal{A}_x \Sigma(x, x'),$$

soit par produit par $\mathcal{A}_{x'}$,

$$(\Delta_x - \varepsilon^2) \mathcal{A}_{x'} \mathcal{A}_{x'} B^\pm(x, x') = \mathcal{A}_{x'} \mathcal{A}_x \Sigma(x, x').$$

Il en résulte d'après (33.3) :

$$(\Delta_x - \varepsilon^2) \overline{B}^\pm(x, x') = \Sigma(x, x').$$

Du théorème d'unicité, on déduit

(34.5) $$\overline{B}^\pm(x, x') = B^\pm(x, x').$$

Transformons de même (34.1) par conjugaison de charge. Un raisonnement identique donne

$$(\Delta_x - \varepsilon^2) \overset{c}{B}{}^\pm(x, x') = \Sigma(x, x')$$

et par suite :

(34.6) $$\overset{c}{B}{}^\pm(x, x') = B^\pm(x, x').$$

c. Le *propagateur* $B(x, x')$ relatif à l'opérateur $(\Delta - \varepsilon^2)$ sur les 2-spineurs est défini par la différence

$$B(x, x') = B^-(x, x') - B^+(x, x')$$

des noyaux élémentaires. L'opérateur $(\Delta - \varepsilon^2)$ étant autoadjoint, ce propagateur est *antisymétrique* par rapport au couple (x, x'),

(34.7) $$B(x', x) = -B(x, x').$$

Comme le montre (34.3). Pour chaque x', il a son support dans $\mathcal{E}^+(x') \cup \mathcal{E}^-(x')$ et il vérifie l'équation

$$(34.8) \qquad (\Delta_x - \varepsilon^2) B(x, x') = 0,$$

ainsi que

$$(34.9) \qquad (\Delta_{x'} - \varepsilon^2) B(x, x') = 0.$$

D'après (34.5) son adjoint de Dirac $\overline{B}$ satisfait

$$(34.10) \qquad \overline{B}(x, x') = B(x, x')$$

et son conjugué de charge

$$(34.11) \qquad \overset{c}{B}(x, x') = B(x, x')$$

d'après (34.6).

d. La formule (33.12) permet d'exprimer les noyaux élémentaires $B^{\pm}$ et le propagateur B relatifs aux 2-spineurs en fonction des noyaux élémentaires $G^{(p)\pm}$ et des propagateurs $G^{(p)}$ relatifs aux p-formes tensorielles.

D'après (32.7), on a en effet,

$$(\Delta_x - \varepsilon^2) S_x S_{x'} G^{(p)\pm} = S_x S_{x'} (\Delta_x - \varepsilon^2) G^{(p)\pm} = S_x S_{x'} \hat{D}(x, x').$$

De la forme (33.12) on déduit

$$(\Delta_x - \varepsilon^2) \left\{ S_{x'} S_x \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} G^{(p)\pm}(x, x') \right\} = 4 \Sigma(x, x').$$

Ainsi

$$(\Delta_x - \varepsilon^2) \left\{ 4 B^{\pm}(x, x') - S_x S_{x'} \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} G^{(p)\pm}(x, x') \right\} = 0.$$

Du théorème d'unicité, il résulte

$$(34.12) \qquad 4 B^{\pm}(x, x') = S_x S_{x'} \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} G^{(p)\pm}(x, x').$$

Par différence, on a pour les propagateurs la relation

$$(34.13) \qquad 4 B(x, x') = S_x S_{x'} \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} G^{(p)}(x, x').$$

35. Les équations de la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer.

a. Sur la variété espace-temps V_4 munie d'une *métrique hyperbolique arbitraire* et d'une orientation temporelle et admettant des champs de spineurs, considérons le champ décrit par un 2-spineur ψ de type (1, 1) astreint à l'équation du champ

$$(M - \varepsilon)\psi = 0 \qquad (\varepsilon = \mathrm{Cte} \neq 0), \tag{35.1}$$

ε étant différent de zéro, on déduit de (35.1) par produit par N, en vertu de (32.17) :

$$N\psi = 0 \tag{35.2}$$

qui est ainsi une conséquence de l'équation de champ. Les équations (35.1) et (35.2) écrites sous la forme

$$(P + \overline{P})\psi = 2\varepsilon\psi$$

et

$$(P - \overline{P})\psi = 0$$

forment un système équivalent au système

$$(P - \varepsilon)\psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi - \varepsilon\psi = 0 \tag{35.3}$$

et

$$(\overline{P} - \varepsilon)\psi = -\nabla_\alpha \psi\gamma^\alpha - \varepsilon\psi = 0, \tag{35.4}$$

en accord avec la *méthode de fusion* de Louis DE BROGLIE ([21]).

En multipliant les deux membres de (35.3) par $(P + \varepsilon)$, on voit que de l'équation de champ (35.1) il résulte que ψ satisfait l'équation de Klein-Gordon :

$$(\Delta - \varepsilon^2)\psi = 0. \tag{35.5}$$

En multipliant par $\mathcal{A}$ les deux membres de (35.1), on a d'après (32.12) :

$$(M - \varepsilon)\mathcal{A}\psi = 0.$$

Il résulte ainsi de l'équation de champ (35.1) que $\overline{\psi}$ vérifie

$$(M - \varepsilon)\overline{\psi} = 0. \tag{35.6}$$

En transformant de même (35.1) par conjugaison de charge, il vient d'après (32.13) :

$$(M - \varepsilon)\mathcal{C}\psi = 0. \tag{35.7}$$

([21]) Louis DE BROGLIE utilise généralement une représentation du champ conduisant à l'équation de champ $(N - \varepsilon)\psi = 0$.

b. Dans la présente théorie, on représente souvent ψ en terme de matrice : 1×16 et l'on introduit pour représenter l'opérateur M, des matrices 16×16 notées β^α telles que

$$\beta^\alpha \psi = \frac{1}{2}(\gamma^\alpha \psi - \psi \gamma^\alpha) \tag{35.8}$$

avec abus de notation pour ψ.

On a ainsi

$$M\psi = \beta^\alpha \nabla_\alpha \psi. \tag{35.9}$$

De (35.8) on déduit

$$\beta^\beta \beta^\gamma \psi = \frac{1}{4}(\gamma^\beta \gamma^\gamma \psi - \gamma^\beta \psi \gamma^\gamma - \gamma^\gamma \psi \gamma^\beta + \psi \gamma^\gamma \gamma^\beta)$$

et par suite :

$$\begin{aligned}\beta^\alpha \beta^\beta \beta^\gamma \psi = \frac{1}{8}(&\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \psi - \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi \gamma^\gamma - \gamma^\alpha \gamma^\gamma \psi \gamma^\beta + \gamma^\alpha \psi \gamma^\gamma \gamma^\beta \\ &- \gamma^\beta \gamma^\gamma \psi \gamma^\alpha + \gamma^\beta \psi \gamma^\gamma \gamma^\alpha + \gamma^\gamma \psi \gamma^\beta \gamma^\alpha - \psi \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha).\end{aligned} \tag{35.10}$$

Par échange de γ et α, il vient

$$\begin{aligned}\beta^\gamma \beta^\beta \beta^\alpha \psi = \frac{1}{8}(&\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha \psi - \gamma^\gamma \gamma^\beta \psi \gamma^\alpha - \gamma^\gamma \gamma^\alpha \psi \gamma^\beta + \gamma^\gamma \psi \gamma^\alpha \gamma^\beta \\ &- \gamma^\beta \gamma^\alpha \psi \gamma^\gamma + \gamma^\beta \psi \gamma^\alpha \gamma^\gamma + \gamma^\alpha \psi \gamma^\beta \gamma^\gamma - \psi \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma).\end{aligned} \tag{35.11}$$

Par addition de (35.10) et (35.11), on a

$$\begin{aligned}&(\beta^\alpha \beta^\beta \beta^\gamma + \beta^\gamma \beta^\beta \beta^\alpha)\psi \\ &= \frac{1}{8}\{(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma + \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha)\psi \\ &\qquad - \psi(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma + \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha) - 2g^{\alpha\beta}(\gamma^\gamma \psi - \psi \gamma^\gamma) \\ &\qquad\qquad - 2g^{\beta\gamma}(\gamma^\alpha \psi - \psi \gamma^\alpha) - 2g^{\gamma\alpha}(\gamma^\beta \psi - \psi \gamma^\beta)\}.\end{aligned} \tag{35.12}$$

Or

$$\begin{aligned}\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma + \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha &= \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma - \gamma^\gamma \gamma^\alpha \gamma^\beta - 2g^{\alpha\beta}\gamma^\gamma \\ &= \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma + \gamma^\alpha \gamma^\gamma \gamma^\beta - 2g^{\alpha\beta}\gamma^\gamma + 2g^{\gamma\alpha}\gamma^\beta.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma + \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha = -2g^{\alpha\beta}\gamma^\gamma - 2g^{\beta\gamma}\gamma^\alpha + 2g^{\gamma\alpha}\gamma^\beta.$$

En reportant dans (35.12), il vient

$$(\beta^\alpha \beta^\beta \beta^\gamma + \beta^\gamma \beta^\beta \beta^\alpha)\psi = -g^{\alpha\beta}\beta^\gamma \psi - g^{\beta\gamma}\beta^\alpha \psi.$$

On voit ainsi que les matrices β^α satisfont aux relations classiques

$$\beta^\alpha \beta^\beta \beta^\gamma + \beta^\gamma \beta^\beta \beta^\alpha = -(g^{\alpha\beta}\beta^\gamma + g^{\beta\gamma}\beta^\alpha). \tag{35.13}$$

On pourrait en déduire — mais au prix de lourds calculs — la relation (32.18). Nous n'utiliserons pas ces notations dans la suite, mais resteront fidèles aux notations intrinsèques en termes d'opérateurs.

36. **Un lemme.** — En vue de former le commutateur du champ considéré, nous nous proposons d'établir le lemme suivant :

LEMME. — *Pour le propagateur $B(x, x')$ de l'opérateur Klein-Gordon, on a la relation*

(36.1) $$M_x B(x, x') = -M_{x'} B(x', x) = M_{x'} B(x, x').$$

En effet, de (32.11) et de la formule (34.13), on déduit

$$4M_x B(x, x') = \frac{1}{2} S_x S_{x'} \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \times \{ (1 + v_x) d_x G^{(p)}(x, x') + (1 - v_x) \delta_x G^{(p)}(x, x') \}.$$

En explicitant la somme figurant au second membre, il vient

$$4M_x B(x, x') = S_x S_{x'} \{ -d_x G^{(1)}(x, x') - \delta_x G^{(2)}(x, x') + d_x G^{(3)}(x, x') + \delta_x G^{(4)}(x, x') \},$$

soit d'après la relation (6.3) :

(36.2) $$4M_x B(x, x') = S_x S_{x'} \{ -(d_x + d_{x'}) G^{(1)}(x, x') + (d_x + d_{x'}) G^{(3)}(x, x') \}.$$

En échangeant les variables x et x' on obtient

(36.3) $$4M_{x'} B(x', x) = S_x S_{x'} \{ -(d_x + d_{x'}) G^{(1)}(x', x) + (d_x + d_{x'}) G^{(3)}(x', x) \}.$$

De l'antisymétrie des $G^{(p)}(x, x')$ par rapport à x et x', il résulte ainsi

$$M_x B(x, x') = -M_{x'} B(x', x),$$

ce qui établit le lemme.

37. **Commutateur du champ de Petiau-Duffin-Kemmer.**

a. Proposons-nous de construire, pour le champ étudié, un commutateur $[\psi(x), \overline{\psi}(x')]$. Relativement à l'adjonction de Dirac, on doit avoir

$$\overline{[\psi(x), \overline{\psi}(x')]} = [\overline{\psi}(x), \psi(x')] = -[\psi(x'), \overline{\psi}(x)].$$

Le commutateur cherché est donc un bi-2-spineur-distribution $X(x, x')$ à valeurs scalaires, qui, pour chaque x', a son support dans $\mathcal{E}^+(x') \cup \mathcal{E}^-(x')$, vérifie

(37.1) $$\overline{X}(x, x') = -X(x', x)$$

et satisfait en x l'équation (35.1), en x' l'équation (35.6).

L'étude du champ de Petiau sur l'espace-temps de Minkowski a conduit Takahashi et Umezawa ([16)] à construire un commutateur qui se généralise de manière naturelle sur un espace-temps courbe selon

$$X(x, x') = \frac{k}{i}\left(M_x + \frac{1}{\varepsilon} M_x^2\right) B(x, x'), \tag{37.2}$$

où B est le propagateur étudié relatif à l'opérateur de Klein-Gordon. Le coefficient k sera choisi par la suite.

b. La condition de support est manifestement remplie. Montrons que (37.2) vérifie la condition d'adjonction (37.1); $\mathcal{A}$ commutant avec M, il vient

$$\overline{X}(x, x') = \mathcal{A}_x \mathcal{A}_{x'} X(x, x') = \frac{k}{i}\left(M_x + \frac{1}{\varepsilon} M_x^2\right) \mathcal{A}_x \mathcal{A}_{x'} B(x, x'),$$

soit d'après (34.10) :

$$\overline{X}(x, x') = \frac{k}{i}\left(M_x + \frac{1}{\varepsilon} M_x^2\right) \overline{B}(x, x') = \frac{k}{i}\left(M_x + \frac{1}{\varepsilon} M_x^2\right) B(x, x').$$

Du lemme du paragraphe 36, il résulte

$$M_x B(x, x') = - M_{x'} B(x', x)$$

et

$$M_x^2 B(x, x') = M_x M_{x'} B(x, x') = M_{x'} M_x B(x, x') = - M_{x'}^2 B(x', x).$$

Ainsi

$$\overline{X}(x, x') = - \frac{k}{i}\left(M_{x'} + \frac{1}{\varepsilon} M_{x'}^2\right) B(x', x) = - X(x', x),$$

ce qui établit (37.1).

c. (37.2) vérifie (37.1) :

$$(M_x - \varepsilon) X(x, x') = \frac{k}{\varepsilon i}(M_x^3 - \varepsilon^2 M_x) B(x, x').$$

De (32.18) il résulte

$$(M_x - \varepsilon) X(x, x') = \frac{k}{\varepsilon i} M_x (\Delta_x - \varepsilon^2) B(x, x') = 0.$$

De même (37.2) vérifie l'équation du champ en x'. On a en effet, d'après le lemme,

$$X(x, x') = \frac{k}{i}\left(M_{x'} + \frac{1}{\varepsilon} M_{x'}^2\right) B(x, x')$$

et par suite :

$$(M_{x'} - \varepsilon) X(x, x') = \frac{k}{\varepsilon i} M_{x'} (\Delta_{x'} - \varepsilon^2) B(x, x') = 0.$$

d. Pour un 2-spineur de type (1, 1), on a

$$\mathcal{C}\mathcal{A}\psi = \alpha\beta\overset{T}{\psi}\beta\alpha = \beta\alpha\overset{T}{\psi}\alpha\beta = \mathcal{A}\mathcal{C}\psi.$$

Il en résulte

$$(37.3) \qquad [\mathcal{C}_x\psi(x), \overline{\mathcal{C}_{x'}\psi(x')}] = [\mathcal{C}_x\psi(x), \mathcal{C}_{x'}\overline{\psi}(x')] = [\psi(x), \overline{\psi}(x')]^c.$$

Transformons (37.2) par conjugaison de charge. Il vient, $\mathcal{C}$ et M commutant,

$$\overset{c}{X}(x, x') = \mathcal{C}_x\mathcal{C}_{x'}X(x, x') = \frac{k}{i}\left(M_x + \frac{1}{\varepsilon}M_x^2\right)\mathcal{C}_x\mathcal{C}_{x'}B(x, x')$$

soit d'après (34.11) :

$$(37.4) \qquad \begin{aligned}\overset{c}{X}(x, x') &= \frac{k}{i}\left(M_x + \frac{1}{\varepsilon}M_x^2\right)\overset{c}{B}(x, x') \\ &= \frac{k}{i}\left(M_x + \frac{1}{\varepsilon}M_x^2\right)B(x, x') = X(x, x').\end{aligned}$$

Ainsi la formule

$$(37.5) \qquad [\psi(x), \overline{\psi}(x')] = \frac{k}{i}\left(M_x + \frac{1}{\varepsilon}M_x^2\right)B(x, x')$$

donne par conjugaison de charge d'après (37.3) et (37.4) :

$$[\mathcal{C}_x\psi(x), \overline{\mathcal{C}_{x'}\psi(x')}] = \frac{k}{i}(M_x + \frac{1}{\varepsilon}M_x^2)B(x, x').$$

Cette formule nous fournit donc un commutateur rigoureusement compatible avec l'équation de champ (35.1), invariant par conjugaison de charge et se réduisant dans le cas de l'espace-temps de Minkowski au commutateur de Takahashi et Umezawa.

38. **Expression des équations de champ en termes tensoriels.** — Au lieu d'être représenté par le spineur ψ, le champ étudié peut être représenté par la forme α telle que

$$\psi = S\alpha = S\sum_{p=0}^{4}\alpha^{(p)}.$$

D'après (32.11) l'équation de champ

$$(38.1) \qquad M\psi = \varepsilon\psi$$

peut être alors mise sous la forme

$$(38.2) \qquad \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{4}\{(1-(-1)^p)\,d\alpha^{(p)} + (1+(-1)^p)\,\delta\alpha^{(p)}\} = \varepsilon\sum_{p=0}^{4}\alpha^{(p)}.$$

En identifiant dans (38.2) les termes de même degré, il vient

(38.3) $$\alpha^{(0)} = 0,$$

(38.4) $$\delta\alpha^{(2)} = \varepsilon\alpha^{(1)},$$

(38.5) $$d\alpha^{(1)} = \varepsilon\alpha^{(2)},$$

(38.6) $$\delta\alpha^{(4)} = \varepsilon\alpha^{(3)},$$

(38.7) $$d\alpha^{(3)} = \varepsilon\alpha^{(4)}.$$

De (38.4) et (38.5) il résulte

(38.8) $$\delta d\alpha^{(1)} = \varepsilon^2\alpha^{(1)}$$

qui a la forme (7.1). De (38.6) et (38.7) il résulte de même,

(38.9) $$d\delta\alpha^{(4)} = \varepsilon^2\alpha^{(4)}.$$

Les équations (38.8) et (38.9) correspondent respectivement à une particule de spin 1 et à une particule de spin 0.

L'équation (38.1) entraîne

$$N\psi = 0$$

qui s'écrit d'après (32.11) :

$$\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{4}\{(1+(-1)^p)\,d\alpha^{(p)} + (1-(-1)^p)\,\delta\alpha^{(p)}\} = 0,$$

soit

(38.10) $$d\alpha^{(0)} = 0, \qquad \delta\alpha^{(1)} = 0, \qquad d\alpha^{(2)} = 0, \qquad \delta\alpha^{(3)} = 0, \qquad d\alpha^{(4)} = 0$$

qui sont bien des conséquences triviales du système (38.3), ..., (38.7).

39. **Expression du commutateur en termes tensoriels.**

a. Nous nous proposons d'expliciter le commutateur (37.5) en termes tensoriels. A cet effet nous commencerons par expliciter le premier membre. De

$$\psi(x) = \sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}\gamma^{\rho_1}\dots\gamma^{\rho_p}\alpha^{(p)}_{\rho_1\dots\rho_p},$$

on déduit

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}\tilde{\gamma}^{\rho_p}\dots\tilde{\gamma}^{\rho_1}\alpha^{(p)*}_{\rho_1\dots\rho_p}.$$

Par suite :

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}\beta\tilde{\gamma}^{\rho_p}\dots\tilde{\gamma}^{\rho_1}\beta\alpha^{(p)*}_{\rho_1\dots\rho_p}$$

soit, d'après la formule (11.10) et compte tenu de $\beta^2 = e$,

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{p=0}^{4} \frac{(-1)^p}{p!} \gamma^{\rho_p} \dots \gamma^{\rho_1} \alpha^{(p)\star}_{\rho_1 \dots \rho_p}.$$

En modifiant l'ordre des indices, compte tenu de l'antisymétrie, on a

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{1}{p!} \gamma^{\rho_1} \dots \gamma^{\rho_p} \alpha^{(p)\star}_{\rho_1 \dots \rho_p}.$$

Ainsi l'adjoint de Dirac de

$$\psi = S \sum_{q=0}^{4} \alpha^{(q)} \tag{39.1}$$

n'est autre que

$$\overline{\psi} = S \sum_{r=0}^{4} (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \alpha^{(r)\star} \tag{39.2}$$

et

$$[\psi(x), \overline{\psi}(x')] = S_x S_{x'} \sum_{q,r} (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} [\alpha^{(q)}(x), \alpha^{(r)\star}(x')]. \tag{39.3}$$

b. Pour le second membre,

$$X(x, x') = \frac{k}{i}\left(M_x + \frac{1}{\varepsilon} M_x^2\right) B(x, x'),$$

on a d'après (32.11), (32.15) et la formule (34.13) :

$$\begin{aligned} 8X(x, x') = {} & \frac{k}{i} S_x S_{x'} \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \\ & \times \{ (1 - (-1)^p) d_x G^{(p)} + (1 + (-1)^p) \delta_x G^{(p)} \} \\ & + \frac{k}{\varepsilon i} S_x S_{x'} \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \\ & \times \{ (1 + (-1)^p) d_x \delta_x G^{(p)} + (1 - (-1)^p) \delta_x d_x G^{(p)} \}. \end{aligned}$$

D'après (37.5) on a donc

$$[\alpha^{(q)}(x), \alpha^{(r)\star}(x')] = 0 \tag{39.4}$$

pour $q \neq r - 1, r, r + 1$.

Pour $q = r$ il vient

$$[\alpha^{(r)}(x), \alpha^{(r)\star}(x')] = \frac{k}{8\varepsilon i} \{ (1 + (-1)^r) d_x \delta_x G^{(r)} + (1 - (-1)^r) \delta_x d_x G^{(r)} \},$$

formule qui peut s'écrire

$$(39.5)\quad [\alpha^{(r)}(x), \alpha^{(r)*}(x')] = \frac{k\varepsilon}{4i}\left\{\frac{1-(-1)^r}{2}G^{(r)} + \frac{(-1)^r}{\varepsilon^2}d_x\,\delta_x\,G^{(r)}\right\}.$$

Pour $q = (r+1)$, on a

$$(39.6)\quad [\alpha^{(r+1)}(x), \alpha^{(r)*}(x')] = \frac{k}{4i}\,\frac{1-(-1)^r}{2}\,d_x\,G^{(r)}.$$

Pour $q = (r-1)$, il vient enfin

$$(39.7)\quad [\alpha^{(r-1)}(x), \alpha^{(r)*}(x')] = \frac{k}{4i}\,\frac{1+(-1)^r}{2}\,\delta_x\,G^{(r)}$$

qui, compte tenu de (6.3), ne diffère pas de la formule (39.6).

Pour $r = 1$, (39.5) donne

$$[\alpha^{(1)}(x), \alpha^{(1)*}(x')] = \frac{k\varepsilon}{4i}\left(G^{(1)} - \frac{1}{\varepsilon^2}d_x\,d_{x'}\,G^{(0)}\right).$$

En comparant avec (7.4), on est amené à prendre

$$\frac{k\varepsilon}{4i} = -\frac{\bar{h}}{i},$$

c'est-à-dire

$$(39.8)\quad k = -\frac{4\bar{h}}{\varepsilon}.$$

La relation (39.5) peut s'écrire pour $r = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$(39.9)\quad [\alpha^{(0)}(x), \alpha^{(0)*}(x')] = 0,$$

$$(39.10)\quad [\alpha^{(1)}(x), \alpha^{(1)*}(x')] = -\frac{\bar{h}}{i}\left(G^{(1)} - \frac{1}{\varepsilon^2}d_x\,d_{x'}\,G^{(0)}\right),$$

$$(39.11)\quad [\alpha^{(2)}(x), \alpha^{(2)*}(x')] = -\frac{\bar{h}}{i\varepsilon^2}d_x\,d_{x'}\,G^{(1)},$$

$$(39.12)\quad [\alpha^{(3)}(x), \alpha^{(3)*}(x')] = -\frac{\bar{h}}{i}\left(G^{(3)} - \frac{1}{\varepsilon^2}d_x\,d_{x'}\,G^{(2)}\right),$$

$$(39.13)\quad [\alpha^{(4)}(x), \alpha^{(4)*}(x')] = -\frac{\bar{h}}{i\varepsilon^2}d_x\,\delta_x\,G^{(4)} = -\frac{\bar{h}}{i}G^{(4)}.$$

Quant à (39.6) elle peut s'écrire

$$(39.14)\quad [\alpha^{(1)}(x), \alpha^{(0)*}(x')] = 0,$$

$$(39.15)\quad [\alpha^{(2)}(x), \alpha^{(1)*}(x')] = -\frac{\bar{h}}{i\varepsilon}d_x\,G^{(1)} = -\frac{\bar{h}}{i\varepsilon}\delta_{x'}\,G^{(2)},$$

(39.16) $$[\alpha^{(3)}(x), \alpha^{(3)*}(x')] = 0,$$

(39.17) $$[\alpha^{(4)}(x), \alpha^{(3)*}(x')] = -\frac{\bar{h}}{i\varepsilon} d_x G^{(3)} = -\frac{\bar{h}}{i\varepsilon} \delta_{x'} G^{(4)}.$$

Il est clair que ces commutateurs sont rigoureusement compatibles avec les équations du paragraphe 38.

40. Autre représentation du champ.

a. Désignons par λ la matrice définie, pour des repères *directs*, par

$$\lambda = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Cette matrice anticommute avec toute matrice γ^α,

(40.1) $$\lambda\gamma^\alpha + \gamma^\alpha\lambda = 0$$

et est telle que

(40.2) $$\lambda^2 = -e.$$

On vérifie immédiatement qu'on a

(40.3) $$\lambda\gamma_{\rho_1}\ldots\gamma_{\rho_p} = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(4-p)!}\eta_{\rho_1\ldots\rho_p\sigma_1\ldots\sigma_{4-p}}\gamma^{\sigma_1}\ldots\gamma^{\sigma_{4-p}}$$

et par suite :

(40.4) $$\gamma_{\rho_1}\ldots\gamma_{\rho_p}\lambda = \frac{(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}}{(4-p)!}\eta_{\rho_1\ldots\rho_p\sigma_1\ldots\sigma_{4-p}}\gamma^{\sigma_1}\ldots\gamma^{\sigma_{4-p}}.$$

b. A tout tenseur-2-spineur ψ de type (1, 1), nous pouvons faire correspondre le tenseur-spineur de même type

$$\mathcal{B}\psi = \lambda\psi$$

ainsi que le tenseur-spineur

$$\bar{\mathcal{B}}\psi = \psi\lambda,$$

$\mathcal{B}$ et $\bar{\mathcal{B}}$ définissent deux automorphismes du module des tenseurs-spineurs envisagés. Évaluons *pour un 2-spineur* ψ de type (1, 1) :

$$\nabla_\alpha\mathcal{B}\psi = \partial_\alpha(\lambda\psi) - \frac{1}{4}C^\lambda_{\mu\alpha}\gamma_\lambda\gamma^\mu\lambda\psi + \frac{1}{4}C^\lambda_{\mu\alpha}\lambda\psi\gamma_\lambda\gamma^\mu,$$

soit

$$\nabla_\alpha\mathcal{B}\psi = \lambda\,\partial_\alpha\psi - \frac{1}{4}C^\lambda_{\mu\alpha}\lambda\gamma_\lambda\gamma^\mu\psi + \frac{1}{4}C^\lambda_{\mu\alpha}\lambda\psi\gamma_\lambda\gamma^\mu.$$

On obtient

$$\nabla_\alpha \mathcal{B} = \mathcal{B} \nabla_\alpha \tag{40.5}$$

et de même,

$$\nabla_\alpha \overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}} \nabla_\alpha. \tag{40.6}$$

On en déduit

$$\mathcal{B} P \psi = \lambda \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = -\gamma^\alpha \lambda \nabla_\alpha \psi = -\gamma^\alpha \nabla_\alpha (\mathcal{B}\psi) = -P\mathcal{B}\psi$$

et

$$\overline{\mathcal{B}} P \psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi \lambda = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \overline{\mathcal{B}} \psi = P \overline{\mathcal{B}} \psi.$$

Ainsi

$$\mathcal{B} P = -P\mathcal{B}, \qquad \overline{\mathcal{B}} P = P \overline{\mathcal{B}}. \tag{40.7}$$

On a de même,

$$\mathcal{B} \overline{P} = \overline{P} \mathcal{B}, \qquad \overline{\mathcal{B}} \overline{P} = -\overline{P}\,\overline{\mathcal{B}}. \tag{40.8}$$

On en déduit

$$\mathcal{B} M = \frac{1}{2} \mathcal{B} (P + \overline{P}) = -\frac{1}{2} (P - \overline{P}) \mathcal{B} = -N\mathcal{B}.$$

On obtient ainsi

$$\mathcal{B} M = -N\mathcal{B}, \qquad \mathcal{B} N = -M\mathcal{B}. \tag{40.9}$$

De même,

$$\overline{\mathcal{B}} M = N \overline{\mathcal{B}}, \qquad \overline{\mathcal{B}} N = M \overline{\mathcal{B}}. \tag{40.10}$$

c. Transformons $\mathcal{B}\psi$ par adjonction de Dirac. Il vient

$$\mathcal{A}\mathcal{B}\psi = \beta\tilde{\psi}\,\tilde{\lambda}\beta = \beta\tilde{\psi}\beta\lambda = \overline{\mathcal{B}}\mathcal{A}\psi.$$

Ainsi

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}\mathcal{A}, \qquad \mathcal{A}\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}\mathcal{A}. \tag{40.11}$$

En ce qui concerne la conjugaison de charge, on a d'après (12.7) :

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\psi = \alpha\lambda^\star\psi^\star\alpha = \lambda\alpha\psi^\star\alpha = \mathcal{B}\mathcal{C}\psi.$$

Ainsi

$$\mathcal{C}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}\mathcal{C}. \tag{40.12}$$

d. Proposons-nous d'établir le lemme suivant :

LEMME. — *Si $B(x, x')$ est le propagateur relatif à l'opérateur de Klein-Gordon, on a*

$$\mathcal{B}_x \overline{\mathcal{B}}_{x'} B(x, x') = -B(x, x'). \tag{40.13}$$

En effet les noyaux élémentaires $B^\pm(x, x')$ de $(\Delta - \varepsilon^2)$ satisfont

$$(\Delta_x - \varepsilon^2) B^\pm(x, x') = \Sigma(x, x'). \tag{40.14}$$

De (40.7) il résulte que $\mathcal{B}_x$ commute avec $\Delta_x = P_x^2$. Par suite le produit par $\mathcal{B}_x \mathcal{B}_{x'}$ du premier membre de (40.14) s'écrit

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\, \mathcal{B}_x \overline{\mathcal{B}}_{x'} B^{\pm}(x, x').$$

En ce qui concerne le second membre, on a d'après (40.2) :

$$\begin{aligned}[\mathcal{B}_x \overline{\mathcal{B}}_{x'} \Sigma(x, x')]^{ar'}_{bs'} &= \lambda^a_u\, \delta^u_{r'}\, \delta^{r'}_b\, \lambda^{r'}_s\, \delta(x, x') \\ &= \lambda^a_u \lambda^a_{s'}\, \delta^{r'}_b\, \delta(x, x') = -\delta^a_{s'}\, \delta^{r'}_b\, \delta(x, x').\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathcal{B}_x \overline{\mathcal{B}}_{x'} \Sigma(x, x') = -\Sigma(x, x').$$

De

$$(\Delta_x - \varepsilon^2)\, \mathcal{B}_x \overline{\mathcal{B}}_{x'} B^{\pm}(x, x') = -\Sigma(x, x')$$

et du théorème d'unicité, on déduit

(40.15) $$\mathcal{B}_x \overline{\mathcal{B}}_{x'} B^{\pm}(x, x') = -B^{\pm}(x, x').$$

Par différence, on obtient (40.13), ce qui démontre le lemme :

e. Effectuons le produit par $\mathcal{B}$ de l'équation de champ (35.1) soit

$$\mathcal{B}(M - \varepsilon)\, \psi = 0.$$

Il vient d'après (40.9) :

(40.16) $$(N + \varepsilon)\, \mathcal{B}\psi = 0.$$

Représentons le champ envisagé non par ψ, mais par $\mathcal{B}\psi$. On est conduit à adopter (40.16) pour équation de champ.

Évaluons le commutateur correspondant. D'après (40.11) :

$$[\mathcal{B}_x \psi(x),\, \mathfrak{A}_{x'} \mathcal{B}_{x'} \psi(x')] = [\mathcal{B}_x \psi(x),\, \overline{\mathcal{B}}_{x'} \overline{\psi}(x')].$$

Le produit par $\mathcal{B}_x \overline{\mathcal{B}}_{x'}$ des deux membres de (37.1) donne, d'après (40.9),

$$[\mathcal{B}_x \psi(x),\, \overline{\mathcal{B}_{x'} \psi(x')}] = -\frac{k}{i}\left(N_x - \frac{1}{\varepsilon} N_x^2\right) \mathcal{B}_x \overline{\mathcal{B}}_{x'} B(x, x')$$

soit, d'après le lemme précédent

(40.17) $$[\mathcal{B}_x \psi(x),\, \overline{\mathcal{B}_{x'} \psi(x')}] = \frac{k}{i}\left(N_x - \frac{1}{\varepsilon} N_x^2\right) B(x, x').$$

Nous avons ainsi obtenu la forme du commutateur dans la nouvelle représentation du champ.

41. Représentation tensorielle correspondante.

a. De (40.3) et (40.4) on déduit aisément la forme de la représentation tensorielle de $\mathcal{B}\psi$ et de $\overline{\mathcal{B}}\psi$. De

$$\psi = \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} \gamma_{\rho_1} \cdots \gamma_{\rho_p}\, \alpha^{(p)\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p},$$

on déduit

$$\mathcal{B}\psi = \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} \lambda \gamma_{\rho_1} \ldots \gamma_{\rho_p} \alpha^{(p)\rho_1\ldots\rho_p}$$

$$= \sum_{p=0}^{4} \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{p!(4-p)!} \eta_{\rho_1\ldots\rho_p\sigma_1\ldots\sigma_{4-p}} \alpha^{(p)\rho_1\ldots\rho_p} \gamma^{\sigma_1} \ldots \gamma^{\sigma_{4-p}}$$

soit

$$\mathcal{B}\psi = \sum_{p=0}^{4} \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(4-p)!} \gamma^{\sigma_1} \ldots \gamma^{\sigma_{4-p}} (\star\, \alpha^{(p)})_{\sigma_1\ldots\sigma_{4-p}}.$$

Si

(40.1) $$\psi = S \sum_{p=0}^{4} \alpha^{(p)},$$

on obtient ainsi

(41.2) $$\mathcal{B}\psi = S \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} (\star\, \alpha^{(p)})$$

et de même,

(41.3) $$\overline{\mathcal{B}}\psi = S \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} (\star\, \alpha^{(p)}).$$

Ainsi l'introduction de $\mathcal{B}$ ou $\overline{\mathcal{B}}$ correspond au signe près à l'introduction de l'opérateur $\star$.

b. Des formules (41.2) et (41.3) on déduit aisément le lemme du paragraphe 40. De

$$4B(x, x') = S_x S_{x'} \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} G^{(p)}(x, x'),$$

il résulte d'après ces formules

$$4\mathcal{B}_x \overline{\mathcal{B}}_{x'} B(x, x') = S_x S_{x'} \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \star_x \star_{x'} G^{(p)}(x, x'),$$

soit d'après (6.4) :

$$4\mathcal{B}_x \overline{\mathcal{B}}_{x'} B(x, x') = - S_x S_{x'} \sum_{p=0}^{4} (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} G^{(4-p)}(x, x').$$

En posant $4 - p = q$, il vient

$$4\mathcal{B}_x\overline{\mathcal{B}}_{x'}B(x, x') = - S_x S_{x'} \sum_{q=0}^{4} (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} G^{(q)}(x, x'),$$

ce qui donne la formule (40.13).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bogoljubov (N. N.) et Širkov D. V.). — *Introduction à la théorie quantique des champs.* — Paris, Dunod, 1960 (Travaux et Recherches mathématiques, 5).

[2] Bruhat (Yvonne). — Propagateurs et solutions d'équations homogènes hyperboliques, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 251, 1960, p. 29-31.

[3] de Broglie (Louis). — *Théorie générale des particules à spin*, 2e édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1954.

[4] Duffin (R. J.). — On the characteristic matrices of covariant systems, *Phys. Rev.*, t. 54, 1938, p. 1114.

[5] Haefliger (André). — Sur l'extension du groupe structural d'un espace fibré, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 243, 1956, p. 558-560.

[6] Kastler (Daniel). — *Introduction à l'électrodynamique quantique.* — Paris, Dunod, 1961 (Travaux et Recherches mathématiques, 6).

[7] Kemmer (N.). — The particle aspect of meson theory, *Proc. Royal Soc.*, Series A, t. 173, 1939, p. 91-116.

[8] Leray (Jean). — *Hyperbolic differential equations.* — Princeton, Princeton University Press, 1952 (multigraphié).

[9] Lichnerowicz (André). — *Propagateurs et commutateurs en relativité générale.* — Paris, Presses universitaires de France, 1961 (Institut des hautes Études scientifiques, Publications mathématiques, 10).

[10] Lichnerowicz (André). — Propagateurs antisymétriques en relativité générale, Quantification du champ électromagnétique dans le vide, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 249, 1959, p. 1329-1331; Sur la quantification du champ de gravitation pour un espace-temps à courbure constante, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 249, 1959, p. 2287-2289; Sur la quantification du champ de gravitation, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 250, 1960, p. 3122-3124.

[11] Lichnerowicz (André). — Anticommutateur du champ spinoriel en relativité générale, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 252, 1961, p. 3742-3744; Sur la quantification du champ correspondant au spin 3/2 sur un espace d'Einstein, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 253, 1961, p. 940-942; Théorie de Petiau-Duffin-Kemmer en relativité générale, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 253, 1961, p. 983-985.

[12] Lichnerowicz (André). — Les spineurs en relativité générale, *Seminario di Matematica*, Bari, 1962.

[13] Lichnerowicz (André). — Laplacien et spineurs, *Att. Accad. naz. dei Lincei, Rendiconti*, t. 33, fasc. 5, 1962.

[14] Petiau (Gérard). — Contribution à l'étude des équations d'ondes corpusculaires, *Acad. royale Belg., Cl. Sc. math., Mémoires*, 2e série, t. 16, no 2, 118 pages (Thèse Sc. math., Paris, 1936).

[15] RARITA (W.) and SCHWINGER (J.). — On a theory of particles with half-integral spin, *Phys. Rev.*, t. 60, 1941, p. 61.

[16] TAKAHASHI (Y.) and UMEZAWA (H.). — The general theory of the interaction representation, I., *Progress theor. Phys.*, t. 9, 1953, p. 14-32.

[17] VISCONTI fA.). — *Théorie quantique des champs*, Tome 1. — Paris, Gauthier-Villars, 1961 (Traité de Physique théorique et de Physique mathématique, 14).

(Manuscrit reçu le 22 mai 1963.)

André LICHNEROWICZ,
Professeur au Collège de France,
6, avenue Paul-Appell,
Paris (14e).