R. TAKAHASHI

Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 289-433

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__289_0>

Bull. Soc. math. France,
91, 1963, p. 289 à 433.

SUR LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LORENTZ GÉNÉRALISÉS ;

PAR

Reiji TAKAHASHI (*).

A mon père.

INTRODUCTION.

La théorie des fonctions sphériques, telle qu'on l'entend aujourd'hui, est d'une importance capitale dans la théorie des représentations continues de certains groupes topologiques localement compacts. Si G est un tel groupe, ayant un sous-groupe compact K, les fonctions sphériques, lorsqu'elles existent, apparaissent comme « caractères » de certaines sous-algèbres $L^0(\chi)$ de l'algèbre de groupe $L^1(G)$, attachées à chaque caractère irréductible χ de K (elles sont dites alors de classe χ). Dans le cas particulier où l'algèbre $A = L^0(\chi)$ est *commutative*, les fonctions sphériques de classe χ sont donc essentiellement des homomorphismes de A dans $\mathbf{C}$, et elles satisfont à une équation fonctionnelle :

$$\text{(I)} \qquad \int_K \zeta(k^{-1}gkg')\,dk = \zeta(g)\,\zeta(g'), \qquad \text{pour} \quad g, g' \in G.$$

De plus, on sait qu'elles caractérisent certaines classes de représentations continues (dites de classe χ) de G, par des opérateurs continus dans un espace de Hilbert, qui sont presque toutes topologiquement irréductibles. L'algèbre A étant une algèbre préhilbertienne commutative, on a, d'après R. Godement, un analogue de la formule de Plancherel pour la transformation

$$A \ni f \to \zeta(f) = \int_G f(g)\,\zeta(g)\,dg,$$

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1962.

définie par les fonctions sphériques $\zeta(g)$ de classe χ et de type positif; de façon plus précise, il existe un espace localement compact Z formé par des fonctions sphériques $\zeta(g)$ de classe χ et de type positif, et une mesure positive m sur Z, de telle sorte que

(i) les fonctions $\hat{f}(\zeta) = \zeta(f)$ soient de carré intégrable sur Z, et

(ii) on ait la formule

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \int_Z |\hat{f}(\zeta)|^2 dm(\zeta).$$

La théorie esquissée ci-dessus s'applique notamment aux cas des groupes de Lie semi-simples, pour le caractère trivial d'un sous-groupe compact maximal K, c'est-à-dire dans le *cas de classe* 1. Gel'fand et Naimark ont traité le cas des groupes classiques complexes, et Harish-Chandra a obtenu ensuite des résultats complets à ce sujet pour les groupes semi-simples complexes classiques ou non dans [14], [15]. Le cas des groupes de Lie *réels* semi-simples reste partiellement ouvert, malgré les travaux impressionnants de cet auteur dans deux autres articles [17], [18]. Le but principal de la première partie du présent article (chap. I) est de résoudre complètement ces questions, pour la classe 1, dans le cas d'une certaine classe de groupes de Lie réels simples, à savoir les groupes orthogonaux $G_+(n)$ des formes quadratiques indéfinies $-x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$ $(n \geq 2)$, que nous appelons groupes de Lorentz généralisés (les cas où $n = 2,3$ sont traités par Bargmann [1], Godement [12], et Gel'fand-Naimark [9]). En effet, si K est le sous-groupe compact maximal des rotations autour de l'axe x_0, et si χ est un caractère irréductible de K, la sous-algèbre $L^0(\chi)$ de $L^1(G)$ formée par les fonctions $f(g)$ telles que

$$f(kgk^{-1}) = f(g) \qquad \text{pour } g \in G,\ k \in K \quad \text{et} \quad \chi \star f \star \chi = f,$$

est *commutative* (chap. I, § 2), ce qui permet de définir les fonctions sphériques comme caractères de ces algèbres commutatives, suivant le schéma général évoqué ci-dessus; pour χ général, on s'est borné à définir une certaine classe de fonctions sphériques, qui pourrait probablement contenir toutes ces fonctions. Dans le paragraphe 3, on étudie en détail le cas de classe 1; on construit effectivement les représentations associées à ces fonctions (*la série principale* de classe 1, théorème 3.1); elles sont paramétrées par un nombre complexe s, et l'on montre que ces représentations sont irréductibles, sauf si $s = 0, -1, -2, \ldots$. Le calcul explicite des fonctions sphériques se fait à l'aide des formules d'intégration établies au paragraphe 1, et l'on trouve, à des facteurs élémentaires près, des fonctions de Legendre de première espèce (théorème 3.2). On obtient ainsi des équations fonctionnelles pour ces fonctions classiques, en écrivant (I) explicitement. On montre ensuite, au paragraphe 4, que les fonctions sphériques de classe 1 paramétrées par $s = \frac{1}{2}(n - 1) + i\nu$, $\nu \geqq 0$, qui sont de type positif, constituent l'espace Z, et l'on détermine la mesure m sur Z, par une méthode due à GODEMENT dans le cas du groupe hyperbolique ($n = 2$). On trouve donc la formule d'inversion et l'analogue de la formule de Plancherel, pour les transformations intégrales définies à l'aide de certaines fonctions de Legendre. On montre, en passant, de façon élémentaire, que toute fonction sphérique de classe 1 est donnée par la formule intégrale introduite au paragraphe 2 (résultat dû à HARISH-CHANDRA pour les groupes semi-simples en général). Dans le paragraphe 5, on étudie s'il n'y a pas d'autres fonctions sphériques de classe 1 et de *type positif* que celles qui sont associées à la série principale; pour cela, on construit, au n° 1, une autre série de représentation unitaires irréductibles de classe 1 (la série *complémentaire*), ayant $\zeta_\sigma(g)$, $\frac{1}{2}(n - 1) < \sigma < n - 1$, comme fonctions sphériques associées, et l'on montre que ces deux séries énumèrent toutes les représentations unitaires irréductibles de classe 1 (corollaire du théorème 5.2). Ces résultats permettraient d'étendre au cas des groupes considérés les résultats d'EHRENPREIS-MAUTNER sur les fonctions biinvariantes [7]. Au paragraphe 6, on considère les représentations correspondant aux paramètres $s = 0, -1, -2, \ldots$. Elles sont réductibles, et possèdent une sous-représentation irréductible de dimension finie; les représentations quotient sont « infinitésimalement unitaires » et irréductibles. Dans le cas $n = 4$, cela permet de répondre à une question posée par J. DIXMIER concernant l'intégrabilité d'une certaine série de représentations ($\pi_{p,0}$ dans [6]).

Dans la seconde partie (chap II), on étudie en détail le cas du groupe de De Sitter $G = G_+(4)$, ou plutôt de son groupe de revêtement universel $\tilde{G} = \tilde{G}_+(4)$. Dans ce dernier groupe, l'existence d'un sous-groupe compact maximal K de la forme $K_1 \times K_2$, avec K_1, K_2 tous les deux isomorphes au groupe $\mathbf{SU}(2)$, permet de définir deux sous-algèbres A_1, A_2 commutatives de $L^1(G)$, sensiblement plus « grandes » que la sous-algèbre $L^0(1)$ des fonctions biinvariantes; en étudiant les caractères de ces algèbres préhilbertiennes commutatives et en cherchant l'analogue de la formule de Plancherel dans chacune d'elles, on récupère presque toutes les représentations unitaires irréductibles de $\tilde{G}$ (chap. II, § 4 et § 5; *voir* aussi la remarque 2.2).Remarquons, en passant, qu'on obtient une équation fonctionnelle d'un type nouveau pour les fonctions hypergéométriques ${}_2F_1(s + n, s - n + 1; 2; x)$ s, complexe, n demi-entier (i. e. $2n$ entier) [*voir* II, 4 (28)]. Il est à noter que la formule de Plancherel pour les sous-algèbres A_1, A_2 fait déjà intervenir toutes les représentations des deux séries principales, contrairement à ce qui se passe dans le cas de L^0 (1). La mesure de Plancherel pour $L^2(\tilde{G}_+(4))$ devrait donc être égale à la mesure obtenue pour A_1, A_2. Au paragraphe 2, on construit les représentations de la première série principale (dépendant d'un paramètre continu et d'un paramètre discret) et détermine l'irréductibilité ou non de ces représentations, même dans le cas où le critère de Bruhat ne s'applique pas (théorème 2.1). Dans le paragraphe 3, on donne une construction globale de la série *discrète* principale, dont l'existence a été montrée récemment par J. Dixmier [6]. Pour tout cela, on montre d'abord au paragraphe 1, que le groupe $\tilde{G}$ est isomorphe à un groupe formé par des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d des quaternions satisfaisant à certaines conditions, et l'on se sert de l'opération de $\tilde{G}$ sur le groupe des quaternions de norme 1, resp. sur la boule unité quaternionienne. Les représentations de la série discrète sont réalisées alors dans des espaces de solutions de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles de type elliptique. Il serait possible, d'après la forme de ces équations, que ces fonctions soient liées étroitement aux fonctions analytiques quaternioniennes au sens de R. Fueter.

Les principaux résultats du chapitre I ont fait l'objet de deux notes présentées au Congrès international d'Edimbourg et aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ([20]). Signalons aussi qu'une note de Vilenkin [22], dont nous avons pris connaissance après la première rédaction de ce travail, contient entre autres, des résultats analogues sur les fonctions sphériques de type positif et la formule de Plancherel.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. R. Godement, qui a bien voulu diriger mes recherches, et n'a jamais cessé de me donner de précieux conseils. Le présent travail tire son origine d'une question qu'il ma signalée, concernant la série discrète dans le groupe de De Sitter. Je remercie également M. J. Dixmier, qui a bien voulu s'intéresser à mon travail et me permettre de lire son article sur ce groupe, avant même sa publication; plus d'un point du second chapitre s'inspirent de son article. Je lui dois aussi de nombreuses améliorations de rédaction. Je suis heureux de remercier M. H. Cartan d'avoir bien voulu accepter de faire partie du jury et de me proposer un second sujet, et M. C. Chevalley, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse. Que M. S. Iyanaga, dont les encouragements constants m'ont été si précieux, veuille bien trouver ici l'expression de toute ma gratitude.

Notations. — On désigne par $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$,$\mathbf{K}$) le corps des nombres réels (resp. nombres complexes, quaternions). En ce qui concerne la théorie des représentations des groupes, on suit en général les notations et les conventions de [11]; en particulier, si G est un groupe localement compact unimodulaire, on désigne par $L(G)$ ou par L simplement l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact dans G; pour f dans L, on pose $\tilde{f}(g) = \overline{f(g^{-1})}$, $\check{f}(g) = f(g^{-1})$; si U_g est une représentation continue de G dans un espace de Banach, on désigne par U_f, pour f dans L, l'opérateur $\int_G f(g)\, U_g\, dg$; si G est un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, on interprète tout élément X de l'algèbre enveloppante universelle $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{g}$ à la fois comme une distribution sur G (de support $\{e\}$) et comme un opérateur différentiel invariant à droite sur G par $Xf = X \star f$. Pour les diverses fonctions spéciales on s'adapte aux notations de [19].

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Fonctions sphériques dans les groupes de Lorentz généralisés.

CHAPITRE II.

Représentations unitaires du groupe de De Sitter.

CHAPITRE I.

LES FONCTIONS SPHÉRIQUES DANS LES GROUPES DE LORENTZ GÉNÉRALISÉS.

§ 1. PRÉLIMINAIRES.

1. **Définition du groupe $\mathbf{G}_+(n)$.** — Soit n un entier $\geqq 2$, et soit $\mathbf{G}(n)$ le groupe orthogonal associé à la forme quadratique indéfinie

$$-x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

à savoir le groupe formé par les matrices $g \in \mathbf{GL}(n+1, \mathbf{R})$ telles que

$$(1) \qquad {}^t g . J . g = J,$$

avec

(2)
$$J = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix};$$

si l'on écrit

(3)
$$g = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & \dots & g_{0n} \\ g_{10} & g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n0} & g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix},$$

on a en particulier

$$-g_{00}^2 + g_{10}^2 + \dots + g_{n0}^2 = -1$$

ou

$$g_{00}^2 = 1 + g_{10}^2 + \dots + g_{n0}^2 \geqq 1,$$

donc

(4)
$$|g_{00}| \geqq 1.$$

D'autre part (1) entraîne que $(\det(g))^2 = 1$, d'où

(5)
$$\det(g) = \pm 1.$$

Soit $\mathbf{G}_+(n)$ l'ensemble des $g \in \mathbf{G}(n)$ tels que $g_{00} \geqq 1$ et $\det(g) = 1$; il est facile de voir que $\mathbf{G}_+(n)$ est un sous-groupe de $\mathbf{G}(n)$, et l'on sait (*voir* par exemple, Bœrner [2], chap. IX) que c'est la composante connexe de l'élément neutre e de $\mathbf{G}(n)$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(n)$ de $\mathbf{G}_+(n)$ est formée par les matrices X d'ordre $n+1$ telles que

$${}^tXJ + JX = 0;$$

une base de $\mathfrak{g}_0$ est donc donnée par les matrices

(6) Y_p $(p = 1, 2, \dots, n)$; X_{pq} $(p, q = 1, 2, \dots, n$ et $p < q)$,

où

$$Y_p = E_{0p} + E_{p0}, \qquad X_{pq} = E_{pq} - E_{qp},$$

E_{pq} désignant la matrice d'ordre $n+1$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui d'indice (p, q) $(p, q$ parcourant de 0 à $n)$.

Par rapport à cette base, la forme de Killing β s'écrit comme suit :

(7)
$$\beta(X, X) = (2n-2)\left(\sum_{1 \leqq p \leqq n} c_p^2 - \sum_{1 \leqq p < q \leqq n} c_{pq}^2\right),$$

si

$$X = \sum_{1 \leq p \leq n} c_p Y_p + \sum_{1 \leq p < q \leq n} c_{pq} X_{pq};$$

par suite, $(-1)^{\frac{1}{2}} Y_p$, $p = 1, \ldots, n$ et X_{pq}, p, $q = 1, \ldots, n$, $p < q$, forment une base d'une forme réelle compacte $\mathfrak{g}_k$ de la complexifiée $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_0$, et l'automorphisme involutif θ correspondant est donné par $\theta(Y_p) = -Y_p$, $\theta(X_{pq}) = X_{pq}$, et l'on a

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0,$$

où

$$\mathfrak{k}_0 = \sum_{1 \leq p < q \leq n} \mathbf{R} X_{pq}, \qquad \mathfrak{p}_0 = \sum_{1 \leq p \leq n} \mathbf{R} Y_p \quad (^1).$$

Pour calculer la décomposition de Cartan-Mostow-Iwasawa, on peut donc partir de la sous-algèbre abélienne maximale $\mathbf{R}Y_1$, et prendre comme $\mathfrak{h}_0$ la sous-algèbre $\mathbf{R}Y_1 + \mathbf{R}X_{23} + \ldots + \mathbf{R}X_{2l-2, 2l-1}$ (on pose $n = 2l$, ou $2l - 1$, suivant la parité de n). La complexifiée $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{h}_0$ est alors une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Posons

$$H_1 = Y_1, \qquad H_2 = (-1)^{\frac{1}{2}} X_{23}, \ldots, \qquad H_l = (-1)^{\frac{1}{2}} X_{2l-2, 2l-1},$$

et soient λ_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, les formes linéaires sur $\mathfrak{h}$ telles que $\lambda_i(H_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, l)$; l'ensemble P des racines positives (suivant l'ordre lexicographique par rapport à la base $(H_1, H_2, \ldots, H_l)$ est formé par

$$\lambda_i \quad (i = 1, \ldots, l); \qquad \lambda_i \pm \lambda_j \quad (i, j = 1, \ldots, l, i < j),$$
$$\text{(dans le cas où } n = 2l, l = 1, 2, \ldots),$$
$$\lambda_i \pm \lambda_j \qquad (i, j = 1, \ldots, l, i < j),$$
$$\text{(dans le cas où } n = 2l - 1, l = 2, 3, \ldots),$$

et l'ensemble P^+ des racines positives α telles que $\theta\alpha \neq \alpha$ (où $\theta\alpha$ est la racine définie par $(\theta\alpha)(H) = \alpha(\theta(H))$ pour $H \in \mathfrak{h}$) par

$$\lambda_1, \quad \lambda_1 \pm \lambda_j \quad (j = 2, 3, \ldots, l) \qquad (\text{cas} : n = 2l, l = 1, 2, \ldots),$$
$$\lambda_1 \pm \lambda_j \quad (j = 2, 3, \ldots, l) \qquad (\text{cas} : n = 2l - 1, l = 2, 3, \ldots),$$

puisque l'on a

$$\theta(\lambda_1) = -\lambda_1, \qquad \theta(\lambda_j) = \lambda_j \qquad \text{pour } j = 2, 3, \ldots, l.$$

---

(1) On suit les notations de Harish-Chandra [13], p. 187-188, en ce qui concerne les algèbres de Lie semi-simples en général.

Pour les racines $\alpha \in P^+$, on peut prendre comme élément radiciel X_α les matrices suivantes :

$$X_{\lambda_1} = X_n,\ X_{\lambda_1+\lambda_j} = \frac{1}{2}\left((-1)^{\frac{1}{2}} X_{2j-2} + X_{2j-1}\right) \qquad \text{pour} \quad 2 \leqq j \leqq l,$$

$$X_{\lambda_1-\lambda_j} = \frac{1}{2}\left((-1)^{\frac{1}{2}} X_{2j-2} - X_{2j-1}\right)$$

$$(\text{cas} : n = 2l,\ l = 1, 2, \ldots),$$

et

$$X_{\lambda_1+\lambda_j} = \frac{1}{2}\left((-1)^{\frac{1}{2}} X_{2j-2} + X_{2j-1}\right),$$

$$X_{\lambda_1-\lambda_j} = \frac{1}{2}\left((-1)^{\frac{1}{2}} X_{2j-2} - X_{2j-1}\right) \qquad \text{pour} \quad 2 \leqq j \leqq l,$$

$$(\text{cas} : n = 2l - 1,\ l = 2, 3, \ldots),$$

où l'on a posé

$$X_p = Y_p + X_{1p} \qquad (p = 2, 3, \ldots, n). \tag{8}$$

Par suite, ces dernières matrices (8) forment une base de la sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{n}_0$ (qui est même *abélienne* ici, comme on le voit aisément). La décomposition cherchée est donc de la forme suivante :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} + \mathfrak{n}_0,$$

avec

$$\mathfrak{k}_0 = \sum_{1 \leqq p < q \leqq n} \mathbf{R} X_{pq}, \qquad \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}_0} = \mathbf{R}\, Y_1 \qquad \mathfrak{n}_0 = \sum_{2 \leqq p \leqq n} \mathbf{R} X_p,$$

et, par conséquent, le groupe $\mathbf{G}_+(n)$ admet la décomposition

$$\mathbf{G}_+(n) = K A_+ N, \tag{9}$$

où K est le sous-groupe correspondant à $\mathfrak{k}_0$, à savoir le sous-groupe des rotations autour de l'axe x_0, A_+ le sous-groupe à un paramètre des matrices a_t, $t \in \mathbf{R}$, de la forme

$$a_t = \exp t Y_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 \\ & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

(I_{n-1} désigne la matrice unité d'ordre $n - 1$), et finalement N le sous-groupe abélien formé par les matrices $x = x(\xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbf{R}$, de la forme

$$(11) \qquad x(\xi_2, \ldots, \xi_n) = \exp(\xi_2 X_2 + \ldots + \xi_n X_n)$$
$$= \begin{pmatrix} 1+\frac{\Delta}{2} & -\frac{\Delta}{2} & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \frac{\Delta}{2} & 1-\frac{\Delta}{2} & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \xi_2 & -\xi_2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & -\xi_n & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

où

$$(12) \qquad \Delta = \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2.$$

On a

$$(13) \qquad x(\xi_2, \ldots, \xi_n)\, x(\xi'_2, \ldots, \xi'_n) = x(\xi_2 + \xi'_2, \ldots, \xi_n + \xi'_n),$$

pour $\xi_2, \ldots, \xi_n, \xi'_2, \ldots, \xi'_n \in \mathbf{R}$.

Tout élément g de $\mathbf{G}_+(n)$ s'écrit donc d'une seule façon sous la forme

$$(14) \qquad g = k a_t x, \qquad k \in K, \qquad a_t \in A_+, \qquad x \in N,$$

et l'application $(k, a_t, x) \to k a_t x$ de $K \times A_+ \times N$ sur $\mathbf{G}_+(n)$ est un homéomorphisme.

Remarquons aussi qu'on a

$$(15) \qquad \begin{cases} 2\rho = \sum_{\alpha \in P} \alpha = (2l-1)\lambda_1 + (2l-3)\lambda_2 + \ldots + \lambda_l \\ \qquad (\text{cas} : n = 2l,\ l = 1, 2, \ldots), \\ 2\rho = \sum_{\alpha \in P} \alpha = (2l-2)\lambda_1 + (2l-4)\lambda_2 + \ldots + \lambda_{l-1} \\ \qquad (\text{cas} : n = 2l-1,\ l = 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

et par suite

$$(16) \qquad (2\rho)(tY_1) = (n-1)t \qquad \text{pour} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dans ce chapitre, *on désignera souvent par G le groupe $\mathbf{G}_+(n)$*, sauf mention expresse du contraire bien entendu.

2. **Quelques formules d'intégration.** — Pour une mesure de Haar dg convenablement normalisée de $G = \mathbf{G}_+(n)$, on a la formule

$$(17) \qquad \int_G f(g)\, dg = \int_K \int_{\mathbf{R}} \int_N f(k a_t x)\, e^{(n-1)t}\, dk\, dt\, dx,$$

où dk est la mesure de Haar de K, de masse totale 1, et dt, $dx = d\zeta_2\, d\zeta_3 \ldots d\zeta_n$ sont des mesures euclidiennes dans $\mathbf{R}$, resp. $\mathbf{R}^{n-1}$ (*voir* Harish-Chandra [13]). On prendra la mesure de Haar de G toujours dans cette normalisation.

Soit maintenant M le centralisateur de A_+ dans K; il est immédiat de voir que M est formé par les rotations dans le sous-espace $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ laissant fixes x_0, x_1, c'est-à-dire par les matrices m de la forme suivante :

$$(18)\qquad m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & \hat{m} \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad \hat{m} \in SO(n-1);$$

on sait que M est en même temps le normalisateur de N dans K; en effet, on a

$$(19)\qquad m_1 . x(\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n) . m^{-1} = x(\zeta'_2, \zeta'_3, \ldots, \zeta'_n),$$

avec

$$\begin{pmatrix} \zeta'_2 \\ \zeta'_3 \\ \vdots \\ \zeta'_n \end{pmatrix} = \hat{m} \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}.$$

Posons d'autre part

$$(20)\qquad u_p = u_p(\theta_p) = \exp \theta_p X_{1p} \qquad \text{pour} \quad 2 \leqq p \leqq n,$$

avec $\theta_p \in \mathbf{R}$.

Lemme 1.1. — *Tout élément k de K se met sous la forme*

$$(21)\qquad k = m u_n u_{n-1} \ldots u_3 u_2, \qquad m \in M,$$

avec

$$-\pi < \theta_2 \leqq \pi, \qquad -\frac{1}{2}\pi \leqq \theta_3, \qquad \ldots, \qquad \theta_n \leqq \frac{1}{2}\pi;$$

si $(k_{11}, k_{12}) \neq (0, 0)$, *la représentation est unique, et l'on a*

$$-\frac{1}{2}\pi < \theta_3, \ \ldots, \ \theta_n < \frac{1}{2}\pi.$$

On a de plus la formule suivante :

$$(22)\int_K \varphi(k)\, dk = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}} \int_M \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cdots \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(m u_n \ldots u_2) \cos\theta_3 \cos^2\theta_4 \ldots \times \cos^{n-2}\theta_n\, dm\, d\theta_2\, d\theta_3 \ldots d\theta_n,$$

dm désignant la mesure de Haar normalisée de M.

DÉMONSTRATION. — Posons, pour simplifier les notations,

$$c_p = \cos\theta_p, \qquad s_p = \sin\theta_p \qquad \text{pour} \quad p = 2, 3, \ldots, n.$$

Étant donné un $k \in K$, on peut déterminer $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$ tels qu'on ait

$$(23) \qquad \begin{cases} k_{11} = c_n c_{n-1} \ldots c_4 c_3 c_2, \\ k_{12} = c_n c_{n-1} \ldots c_4 c_3 s_2, \\ k_{13} = c_n c_{n-1} \ldots c_4 s_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k_{1,n-1} = c_n s_{n-1}, \\ k_{1n} = s_n, \end{cases}$$

et

$$(24) \qquad -\pi < \theta_2 \leqq \pi, \qquad -\frac{1}{2}\pi \leqq \theta_3, \ldots, \theta_n \leqq \frac{1}{2}\pi;$$

de plus, les $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$ seront déterminés uniquement, si $(k_{11}, k_{12}) \neq (0,0)$ $\left(\text{ce qui équivaut à } |\theta_p| < \frac{1}{2}\pi, \text{ pour } 3 \leqq p \leqq n\right)$. En effet, on commence par déterminer uniquement un θ_n tel que $s_n = k_{1n}$, et $-\frac{1}{2}\pi \leqq \theta_{n-1} \leqq \frac{1}{2}\pi$; ensuite on choisit un θ_{n-1} tel que $c_n s_{n-1} = k_{1,n-1}$ et $-\frac{1}{2}\pi \leqq \theta_{n-1} \leqq \frac{1}{2}\pi$, et ainsi de suite; si pour un $p \leqq n$, on a $\theta_p = \pm\frac{1}{2}\pi$, les $\theta_{p-1}, \theta_{p-2}, \ldots, \theta_2$ peuvent être quelconques, mais autrement les θ_p, $p = 2, 3, \ldots, n$, sont ainsi déterminés de façon unique. Il est clair qu'alors on a $k.(u_n \ldots u_2)^{-1} = k.{}^t(u_n \ldots u_2)$ soit dans M, d'où la première partie de l'énoncé.

Pour démontrer la formule d'intégration, remarquons d'abord qu'il y a une fonction continue $\omega(m; \theta_2, \ldots, \theta_n)$ telle qu'on ait

$$(25) \quad \int_K \varphi(k)\, dk = \int_M \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cdots \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(mu_n \ldots u_2)\, \omega(m; \theta_2, \ldots, \theta_n)\, dm\, d\theta_2 \ldots d\theta_n;$$

comme on a $d(m_0 k) = dk$, $d(ku_2) = dk$ (la biinvariance de la mesure dk), on voit que la fonction ω ne dépend pas de m, ni de θ_2; pour $m' \in M$, $(u_n \ldots u_2)m'$ s'écrit sous la forme (21), soit

$$(26) \quad (u_n \ldots u_2)\, m' = m'' u'_n \ldots u'_2, \qquad \text{avec} \quad u'_p = u_p(\theta'_p), \qquad m'' \in M;$$

on a donc

$$(mu_n \ldots u_2)\, m' = (mm'')\, u'_n \ldots u'_2;$$

et, comme on a $d\,(km') = dk$, $d\,(mm'') = dm$ (car m'' ne dépend pas de m), il vient

$$\omega(\theta'_3, \ldots, \theta'_n)\, d\theta'_2 \ldots d\theta'_n = \omega(\theta_3, \ldots, \theta_n)\, d\theta_2 \ldots d\theta_n,$$

ou encore

$$(27) \qquad \omega(\theta'_3, \ldots, \theta'_n)/\omega(\theta_3, \ldots, \theta_n) = \left|\frac{\partial(\theta'_2, \ldots, \theta'_n)}{\partial(\theta'_2, \ldots, \theta'_n)}\right|;$$

or, la relation (26) donne

$$(28) \qquad \begin{cases} c'_2 \ldots c'_n = c_2 \ldots c_n, \\ s'_2 c'_3 \ldots c'_n = m_{22} s_2 c_3 \ldots c_n + m_{32} s_3 c_4 \ldots c_n + \ldots + m_{n2} s_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s'_n = m_{2n} s_2 c_3 \ldots c_n + m_{3n} s_3 c_4 \ldots c_n + \ldots + m_{nn} s_n \end{cases}$$

(où l'on a posé $c'_p = \cos\theta'_p$, $s'_p = \sin\theta'_p$; m_{pq} désigne le coefficient de la matrice m'), de là résulte qu'on a

$$\left|\frac{\partial(\theta'_2, \ldots, \theta'_n)}{\partial(\theta_2, \ldots, \theta_n)}\right| = \frac{\cos\theta'_3 \cos^2\theta'_4 \ldots \cos^{n-2}\theta'_n}{\cos\theta_3 \cos^2\theta_4 \ldots \cos^{n-2}\theta_n};$$

si l'on choisit m' tel que

$$m_{22} = \cos\varkappa_3 \ldots \cos\varkappa_n, \; m_{23} = \sin\varkappa_3 \cos\varkappa_4 \ldots \cos\varkappa_n, \; \ldots, \; m_{2n} = \sin\varkappa_n,$$

alors, en posant $(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n) = \left(\frac{1}{2}\pi, 0, \ldots, 0\right)$, on trouve $\theta'_p = \varkappa_p$, pour $2 \leqq p \leqq n$, et l'on a

$$\omega(\varkappa_3, \varkappa_4, \ldots, \varkappa_n) = \omega(0, 0, \ldots, 0) \cos\varkappa_3 \ldots \cos^{n-2}\varkappa_n;$$

la constante $C = \omega\,(0, \ldots, 0)$ est déterminée par la condition

$$C \int_M \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cdots \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos\theta_3 \ldots \cos^{n-2}\theta_n \, dm\, d\theta_2\, d\theta_3 \ldots d\theta_n = 1,$$

ce qui donne $C = \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right) \Big/ 2\pi^{\frac{1}{2}\pi}$ si $\int_M dm = 1$. C. Q. F. D.

LEMME 1.2. — *Soit* $n \geqq 3$. *Tout élément* k *de* K *peut s'écrire sous la forme*

$$(29) \qquad k = m u_0 m', \qquad \text{avec} \quad m, m' \in M, \qquad u_0 = u_2(\theta), \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi;$$

si $k = m_1 u_{0_1} m'_1$ *avec* m_1, $m'_1 \in M$, $0 \leqq \theta_1 \leqq \pi$, *on a alors* $\theta = \theta_1$, *et si de plus on a* $0 < \theta < \pi$ *(autrement dit* $k_{11} \neq \pm 1$*), il existe un* v *dans* V, *le centralisateur des* u_0 *dans* K *(le sous-groupe des rotations laissant fixes* x_0, x_1, x_2*) tel que*

$$(30) \qquad m_1 = mv, \qquad m'_1 = v^{-1} m';$$

on a de plus la formule d'intégration suivante :

$$(31)\qquad \int_K \varphi(k)\,dk = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_M\int_M\int_0^\pi \varphi(mu_\theta m')\sin^{n-2}\theta\,dm\,dm'\,d\theta.$$

DÉMONSTRATION. — Étant donné un $k \in K$, on peut déterminer de façon unique un θ tel que $k_{11} = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$; alors, on a

$$(k_{12}^2 + \ldots + k_{1n}^2)^{\frac{1}{2}} = (k_{21}^2 + \ldots + k_{n1}^2)^{\frac{1}{2}} = \sin\theta,$$

parce que $\sin\theta \geq 0$. Si $\theta = 0$, k est déjà dans M, et si $\theta = \pi$, on a $k = u_\pi m$ avec un $m \in M$; dans le cas où $0 < \theta < \pi$, on a $\sin\theta \neq 0$, donc on peut trouver m, m' dans M tel que

$$m_{p2} = -k_{p1}/\sin\theta \qquad \text{et} \qquad m'_{2p} = k_{1p}/\sin\theta \qquad \text{pour} \quad 2 \leq p \leq n;$$

on vérifie alors, à l'aide des relations d'orthogonalité, que

$$'mk'm' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & \ldots & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & . & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & & & \\ 0 & 0 & . & \ldots & . \end{pmatrix},$$

d'où $'mk'm' = u_\theta m''$ avec un m'' dans M, ou $k = m''u_\theta\,(m''m')$, ce qui démontre la première assertion et l'unicité de θ. Si

$$mu_\theta m' = m_1 u_\theta m'_1$$

et si $0 < \theta < \pi$,

$$(m^{-1}m_1)\,u_\theta = u_\theta(m'm_1'^{-1})$$

entraîne que

$$(m^{-1}m_1)_{22} = (m'm_1'^{-1})_{22} = 1,$$

d'où

$$m^{-1}m_1 = m'm'_1 = v$$

est de la forme indiquée.

Pour démontrer la formule d'intégration (31), on remarque tout d'abord, que tout élément k de K s'écrit sous la forme

$$(32)\qquad k = mu_\theta v_n \ldots v_3,$$

avec $m \in M$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $v_q = v_q(\varkappa_q) = \exp \varkappa_q X_{2q}$ pour $3 \leq q \leq n$, et $-\pi < \varkappa_3 \leq \pi$, $-\frac{1}{2}\pi \leq \varkappa_4, \ldots, \varkappa_n \leq \frac{1}{2}\pi$, et ceci d'ailleurs de façon unique pour presque tout k dans K. En effet, on peut écrire $m' \in M$

dans la décomposition (29) sous la forme $m' = vv_n \ldots v_3$, avec v dans V (lemme 1.1, appliqué au groupe M); on a alors

$$k = mu_\theta(vv_n \ldots v_3) = mvu_\theta v_n \ldots v_3,$$

d'où (32) en écrivant m au lieu de mv. Pour démontrer l'énoncé concernant l'unicité, supposons qu'on ait

$$k = mu_\theta v_n \ldots v_3 = m' u_{\theta'} v'_n \ldots v'_3, \tag{33}$$

avec $m' \in M$, $v'_q = v_q(\varkappa'_q)$, $\varkappa'_q$ satisfaisant aux mêmes inégalités que les $\varkappa_q$. En comparant les éléments de la seconde ligne des deux matrices dans la dernière égalité de (33), on obtient

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \cos\theta' \\
\sin\theta\, \cos\varkappa_3 \ldots \cos\varkappa_n &= \sin\theta' \cos\varkappa'_3 \ldots \cos\varkappa'_n, \\
\sin\theta \sin\varkappa_3 \cos\varkappa_4 \ldots \cos\varkappa_n &= \sin\theta' \sin\varkappa'_3 \cos\varkappa'_4 \ldots \cos\varkappa'_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\sin\theta \sin\varkappa_n &= \sin\theta' \sin\varkappa'_n;
\end{aligned}$$

si $0 < \theta < \pi$, $|\varkappa_q| < \frac{1}{2}\pi$, on a successivement

$$\theta = \theta', \; \varkappa_n = \varkappa'_n, \; \ldots, \; \varkappa_3 = \varkappa'_3,$$

et donc $m = m'$, ce qui démontre l'unicité de la décomposition (32) pour presque tout $k \in K$.

Considérons maintenant l'application $K \ni k \to \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ où l'on pose $x_p = k_{1p}$ pour $1 \leq p \leq n$; elle définit par passage au quotient l'identification de $M \backslash K$ à la sphère unité S^{n-1}, et (21) et (32) définissent deux systèmes de coordonnées locales valables presque partout sur S^{n-1}, à savoir

$$\mathbf{x} \leftrightarrow (\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n), \qquad \text{resp.} \quad (\theta, \varkappa_3, \ldots, \varkappa_n),$$

avec

$$-\pi < \theta_2 < \pi, \qquad -\frac{1}{2}\pi < \theta_3, \ldots, \theta_n < \frac{1}{2},$$

resp.

$$0 < \theta < \pi, \qquad -\pi < \varkappa_3 < \pi, \qquad -\frac{1}{2}\pi < \varkappa_4, \ldots, \varkappa_n < \frac{1}{2}\pi.$$

La formule (22) montre que la mesure

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}} \cos\theta_3 \ldots \cos^{n-2}\theta_n \, d\theta_2 \ldots d\theta_n$$

est la mesure invariante de masse totale 1 sur la sphère S^{n-1}, dans le premier système; or le jacobien du changement des variables

$$(\theta_2, \ldots, \theta_n) \to (\theta, \varkappa_3, \ldots, \varkappa_n)$$

est égal à

$$\frac{\sin^{n-2}\theta \cos\varkappa_4 \cos^2\varkappa_5 \ldots \cos^{n-3}\varkappa_n}{\cos\theta_3 \cos^2\theta_4 \ldots \cos^{n-2}\theta_n},$$

d'où il résulte que

$$\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \sin^{n-2}\theta \cos\varkappa_4 \ldots \cos^{n-3}\varkappa_n \, d\theta \, d\varkappa_3 \ldots d\varkappa_n$$

est la mesure invariante normée dans le second système de coordonnées, et que, par conséquent, on a

$$\int_K \varphi(k)\,dk = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \int_M \int_0^\pi \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cdots \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(m u_0 v_n \ldots v_3)$$
$$\times \sin^{n-2}\theta \cos\varkappa_4 \ldots \cos^{n-3}\varkappa_n \, dm \, d\theta \, d\varkappa_3 \ldots d\varkappa_n;$$

si l'on multiplie m par v dans V et intègre sur V par rapport à dv (la mesure de Haar normée de V), on ne change pas la valeur du second membre, à cause de l'invariance de dm; comme $u_0 v = v u_0$, on aura donc

$$\int_K \varphi(k)\,dk = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \int_M \int_0^\pi \sin^{n-2}\theta \, dm \, d\theta \int_V \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(m u_0 v v_n \ldots v_3)$$
$$\times \cos\varkappa_4 \ldots \cos^{n-3}\varkappa_n \, dv \, d\varkappa_3 \ldots d\varkappa_n,$$

ce qui donne bien (31), compte tenu du lemme 1.1 appliqué au groupe $M \simeq SO(n-1)$. C. Q. F. D.

LEMME 1.3. — *Tout élément g de G peut se mettre sous la forme*

(34) $$g = k a_t k', \quad \text{avec} \quad k, k' \in K \quad \text{et} \quad t \geqq 0;$$

si de plus, $g = k_1 a_{t_1} k'_1$ avec k_1, $k'_1 \in K$ et $t_1 \geqq 0$, alors $t_1 = t$, et si $t > 0$, il existe un $m \in M$ tel que $k_1 = km$, $k'_1 = m^{-1} k'$. Pour la mesure de Haar dans la normalisation précédente (17), on a la formule d'intégration suivante :

(35) $$\int_G f(g)\,dg = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_K \int_0^{+\infty} f(k a_t k') \operatorname{sh}^{n-1} t \, dk \, dk' \, dt.$$

DÉMONSTRATION. — Soit $g \in G$; il existe alors un unique $t \geqq 0$ tel que $g_{00} = \operatorname{ch} t$, car $g_{00} \geqq 1$; on a alors, en vertu de (1),

(36) $$(g_{10}^2 + \ldots + g_{n0}^2)^{\frac{1}{2}} = (g_{01}^2 + \ldots + g_{0n}^2)^{\frac{1}{2}} = (g_{00}^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{sh} t;$$

choisissant k, k' tels que

$$(37) \qquad \begin{cases} k_{p1} = g_{p0}/\operatorname{sh} t, & \text{pour} \quad 1 \leqq p \leqq n, \\ k'_{1q} = g_{0q}/\operatorname{sh} t, & \text{pour} \quad 1 \leqq q \leqq n \end{cases}$$

(on suppose $t \neq 0$, car sinon g serait lui-même dans K); alors on vérifie facilement, à l'aide des relations [forme explicite de (1)]

$$(38) \qquad -g_{p0}g_{q0} + g_{p1}g_{q1} + \ldots + g_{pn}g_{qn} = \begin{cases} 0 & (p \neq q), \\ -1 & (p = q = 1), \\ 1 & (p = q > 1), \end{cases}$$

qu'on a

$$k^{-1} g k'^{-1} = {}^t k g {}^t k' = a_t m,$$

avec $m \in M$, ce qui démontre l'existence de la décomposition (34) et l'unicité de t. Si $t \neq 0$, le centralisateur de a_t dans K est égal au centralisateur M de A_+ dans K, d'où l'unicité modulo M des k, k'. Pour montrer la formule d'intégration (35), on remarque d'abord que tout $g \in G$ s'écrit sous la forme $g = k a_t u_n \ldots u_2$ (on garde les notations du lemme 1.1), d'ailleurs de façon unique pour presque tout $g \in G$. En effet, soit $g = k a_t k'$, et soit $k' = m u_n \ldots u_2$ la décomposition de k' d'après le lemme 1.1; on a alors $g = (km) a_t u_n \ldots u_2$; il y a l'unicité si $t \neq 0$ et $(k'_{11}, k'_{12}) \neq (0, 0)$, ou encore si $g_{00} > 1$ et $(g_{01}, g_{02}) \neq (0, 0)$, d'après ce qui précède et le lemme 1.1. Par suite, on peut introduire sur l'espace homogène $K \backslash G$ deux systèmes de coordonnées valables presque partout, à savoir $(t, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ provenant de la décomposition (14) d'une part. et $(t', \theta_2, \ldots, \theta_n)$ provenant de la décomposition $g = k a_{t'} u_n \ldots u_2$ obtenue ci-dessus. La formule (17) montre que la mesure

$$e^{(n-1)t}\, dt\, d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

est l'expression de la mesure invariante μ sur $K \backslash G$ telle qu'on ait

$$\int_G f(g)\, dg = \int_{K \backslash G} d\mu(\bar{g}) \int_K f(kg)\, dk,$$

dans le premier système de coordonnées ($\bar{g}$ désigne la classe de g dans $K \backslash G$); on arrive à la formule (35) en calculant le jacobien du changement des variables $(t, \xi_2, \ldots, \xi_n) \to (t', \theta_2, \ldots, \theta_n)$.

Remarque 1.1. — Le lemme 1.3 est un cas particulier d'un théorème général démontré par Harish-Chandra pour les groupes de Lie semi-simples [16]. Mais on a donné une démonstration élémentaire du cas particulier de $\mathbf{G}_+(n)$, pour avoir une formule précise, non à un facteur constant près, dépendant de la normalisation des diverses mesures de Haar qui interviennent dans la formule.

REMARQUE 1.2. — L'algèbre A des fonctions biinvariantes $f(g)$, $f(kgk') = f(g)$ pour k, $k' \in K$, est bien *commutative*, pour les groupes $G = \mathbf{G}_+(n)$. En effet, si $f \in A$, on a $f(g^{-1}) = f(g)$ pour tout $g \in G$, parce que tout g s'écrit sous la forme ka_tk', avec k, k' dans K, et qu'il existe un k_0 dans K tel qu'on ait

$$a_t^{-1} = a_{-t} = k_0 a_t k_0^{-1} \quad (^2),$$

et l'on a

$$f(g^{-1}) = f(k'^{-1} a_{-t} k^{-1}) = f(a_{-t}) = f(k_0 a_t k_0^{-1}) = f(a_t) = f(g);$$

soient maintenant f_1, $f_2 \in A$; alors $f_1 \star f_2$, $f_2 \star f_1 \in A$, et

$$\begin{aligned} f_2 \star f_1(g) = f_2 \star f_1(g^{-1}) &= \int_G f_2(h) f_1(h^{-1} g^{-1})\, dh \\ &= \int_G f_1(gh) f_2(h^{-1})\, dh = f_1 \star f_2(g), \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Les fonctions $f \in A$ étant essentiellement des fonctions de t, d'ailleurs paires, on peut identifier l'algèbre commutative A à une algèbre commutative $\mathfrak{A}$ formée par les fonctions $\varphi(\operatorname{ch} t)$, en faisant correspondre à $f(g)$ la fonction $\varphi(\operatorname{ch} t)$ définie par

$$\varphi(\operatorname{ch} t) = f(a_t) = f(ka_tk') = f(g); \tag{39}$$

on peut expliciter la multiplication dans $\mathfrak{A}$ à l'aide des formules d'intégration (35) et (31) comme suit : si $\varphi(\operatorname{ch} t)$ correspond à $f_1 \star f_2$, et φ_i à f_i $(i = 1, 2)$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\operatorname{ch} t) &= f_1 \star f_2(a_t) = \int_G f_1(h) f_2(h^{-1} a_t)\, dh \\ &= \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \int_K \int_K \int_0^{+\infty} f_1(a_\tau) f_2(k'^{-1} a_{-\tau} k^{-1} a_t) \operatorname{sh}^{n-1}\tau\, dk\, dk'\, d\tau \\ &= \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_M \int_M \int_0^{\pi} \int_0^{+\infty} f_1(a_\tau) f_2(a_{-\tau}(mu_\theta m')\, a_t) \\ &\qquad \times \sin^{n-2}\theta \operatorname{sh}^{n-1}\tau\, dm\, dm'\, d\theta\, d\tau \\ &= \frac{2\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)} \int_0^{\pi} \int_0^{+\infty} f_1(a_\tau) f_2(a_{-\tau} u_\theta a_t) \operatorname{sh}^{n-1}\tau \sin^{n-2}\theta\, d\tau\, d\theta \end{aligned}$$

---

(2) Dans la notation du lemme 1.2, $k_0 = u_\pi$.

car

$$f_2(a_{-t}mu_0m'a_t) = f_2(ma_{-\tau}u_0a_tm') = f_2(a_{-\tau}u_0a_t),$$

et

$$\int_M dm = 1;$$

or, on a

$$a_{-\tau}u_0a_t = k_1a_{t'}k_2, \qquad \text{avec} \quad k_1,\ k_2 \in K,$$
$$\operatorname{ch} t' = (a_{-\tau}u_0a_t)_{00} = \operatorname{ch}\tau \operatorname{ch} t + \operatorname{sh}\tau \operatorname{sh} t \cos\theta,$$

d'où finalement,

$$(40) \quad \varphi(\operatorname{ch} t) = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)} \int_0^{\pi}\int_0^{+\infty} \varphi_1(\operatorname{ch}\tau)\,\varphi_2(\operatorname{ch}\tau\operatorname{ch} t + \operatorname{sh}\tau\operatorname{sh} t\cos\theta) \times \operatorname{sh}^{n-1}\tau \sin^{n-2}\theta\, d\theta\, d\tau.$$

§ 2. COMMUTATIVITÉ DES ALGÈBRES $L^0(\chi)$.

1. Les algèbres $L^0(\chi)$. — Désignons par $\hat{K}$ l'ensemble des caractères irréductibles χ de K, normalisés de façon qu'on ait

$$\chi \star \chi(k) = \int_K \chi(kl^{-1})\,\chi(l)\,dl = \chi(k);$$

pour chaque $\chi \in \hat{K}$, il existe donc une représentation unitaire irréductible π de dimension finie r de K, telle qu'on ait

$$\chi(k) = r.\operatorname{Tr}(\pi(k)) \qquad \text{pour} \quad k \in K.$$

Soit L l'algèbre formée par les fonctions continues à support compact définie dans G, avec la multiplication définie par le produit de composition. Le sous-ensemble $L^0(\chi)$ de L formé par les fonctions $f(g)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $$\chi \star f \star \chi = f,$$

(ii) $$f^0 = f, \qquad \text{où} \quad f^0(g) = \int_K f(kgk^{-1})\,dk,$$

est une *sous-algèbre* de L, et il est clair, d'après la normalisation de χ, que l'application

$$f \to \chi \star f^0 = f^0 \star \chi$$

est la projection de L sur $L^0(\chi)$. En particulier, si l'on désigne par χ_0 le caractère trivial, $L^0(\chi_0)$ n'est autre que l'algèbre commutative A du paragraphe 1. Notre but est de montrer que les algèbres $L^0(\chi)$ sont toutes commutatives pour $\chi \in \hat{K}$, ce qui signifie que toute fonction sphérique de type χ quelconque est de hauteur 1 au sens de Godement [11]. Introduisons pour cela la transformation suivante, pour les fonctions $f \in L^0(\chi)$:

$$F_f(t) = e^{(n-1)t/2} \int_K \int_N f(k a_t x) \pi(k^{-1})\, dk\, dx. \tag{1}$$

Il est clair que c'est une fonction continue, à support compact ([3]), et à valeurs dans l'espace des opérateurs linéaires dans E (l'espace hilbertien de dimension r, dans lequel est donnée la représentation π), définie sur $\mathbf{R}$. [Pour des raisons qui vont apparaître plus loin (*voir* § 4), on pourrait appeler F_f la transformée d'Abel de f.]

PROPOSITION 2.1. — *On a les propriétés suivantes pour la transformation $f \to F_f$:*

(i) pour $f_1, f_2 \in L^0(\chi)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$,

$$F_{\alpha f_1 + \beta f_2} = \alpha F_{f_1} + \beta F_{f_2};$$

(ii)
$$F_{f_1 \star f_2} = (F_{f_1}) \star (F_{f_2})$$

(au sens du produit de composition sur $\mathbf{R}$);

(iii) pour $f \in L^0(\chi)$, on a

$$F_{\tilde{f}}(t) = F_f((-t))^*,$$

où * désigne l'opérateur adjoint dans E;

(iv) on a

$$F_{f_1}(t) F_{f_2}(t_2) = F_{f_2}(t_2) F_{f_1}(t_1);$$

(v) si $F_f(t) \equiv 0$, alors $f(g) = 0$.

([3]) Si $g = k a_t x$, on a $g_{00} = \operatorname{ch} t + \frac{1}{2} e^t(\xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)$; donc si le support de f est un compact C, et si $c = \sup_{g \in C} g_{00}$, on aura $F_f(t) = 0$ pour t assez grand tel que $\operatorname{ch} t \geq c$.

DÉMONSTRATION. — (i) est trivial. (ii) résulte du calcul suivant :

$$F_{f_1 * f_2}(t) = e^{(n-t)t/2} \int_K \int_N \int_G f_1(ka_t x g^{-1}) f_2(g) \pi(k^{-1})\, dk\, dx\, dg$$

$$= e^{(n-1)t/2} \int_K \int_N \int_K \int_{\mathbf{R}} \int_N f_1(ka_t x(la_\tau y)^{-1}) f_2(la_\tau y) \pi(k^{-1})$$
$$\times\, e^{(n-1)\tau}\, dk\, dx\, dl\, d\tau\, dy$$

$[k \to lk,\ x \to xy$ et $f^0 = f]$

$$= e^{(n-1)t/2} \int_K \int_N \int_K \int_{\mathbf{R}} \int_N f_1(ka_t x a_{-\tau}) f_2(la_\tau y) \pi(k^{-1} l^{-1})$$
$$\times\, e^{(n-1)\tau}\, dk\, dx\, dl\, d\tau\, dy$$

$[x \to a_{-\tau} x a_\tau,\ d(a_{-\tau} x a_\tau) = e^{-(n-1)\tau}\, dx]$

$$= e^{(n-1)t/2} \int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_K \int_N f_1(ka_{t-\tau} x) \pi(k^{-1})\, dk\, dx \right.$$
$$\left. \times \int_K \int_N f_2(la_\tau y) \pi(l^{-1})\, dl\, dy \right\} d\tau$$

$$= \int_{\mathbf{R}} F_{f_1}(t-\tau) F_{f_2}(\tau)\, d\tau.$$

Montrons maintenant (iii) :

$$F_{\tilde{f}}(t) = e^{(n-1)t/2} \int_K \int_N \overline{f(x^{-1} a_{-t} k^{-1})}\, \pi(k^{-1})\, dk\, dx$$

$[x \to a_{-t} x^{-1} a_t,\ k \to k^{-1}]$

$$= e^{-(n-1)t/2} \int_K \int_N \overline{f(ka_{-t} x)}\, \pi(k)\, dk\, dx = (F_f(-t))^*,$$

puisque $\pi(k) = (\pi(k^{-1}))^*$.

Avant d'aborder la démonstration de (iv), (v), examinons la transformée $F_f(t)$ de plus près. On a, quel que soit $m \in M$,

$$F_t(t)\, e^{-(n-2)t/2} = \int_K \int_N f((mkm^{-1}) a_t x) \pi(mk^{-1} m^{-1})\, dk\, dx$$
$$= \int_K \int_N f(ka_t m^{-1} x m) \pi(mk^{-1} m^{-1})\, dk\, dx$$
$$= \int_K \int_N f(ka_t x) \pi(mk^{-1} m^{-1})\, dk\, dx,$$

puisque, d'après [1 (19)], $d(m^{-1} x m) = dx$, et $ma_t = a_t m$; il en résulte donc qu'on a

(2) $$F_f(t) = e^{(n-1)t/2} \int_K \int_N f(ka_t x) \left[\int_M \pi[(mk^{-1} m^{-1})\, dm] \right] dk\, dx.$$

D'autre part, on sait que la restriction à M de toute représentation unitaire irréductible de K se décompose en somme directe des représentations irréductibles *deux à deux non-équivalentes* (*voir*, par exemple, BŒRNER [2], chap. VII, § 12, *Verzweigungssatz* 12.1); on peut donc choisir une base orthonormée (e_p; $1 \leqq p \leqq r$) de E, de telle sorte que, si

$$\pi(k)\, e_p = \sum_{q=1}^{r} e_{qp}(k)\, e_q \qquad \text{pour} \quad k \in K, \tag{3}$$

l'on ait, pour $m \in M$,

$$(e_{pq}(m)) = \begin{bmatrix} f^1(m) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & f^j(m) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & f^{\mu}(m) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

où, pour $1 \leqq j \leqq \mu$, $m \to f^j(m)$ est une représentation irréductible de M, de dimension r_j, avec $r = r_1 + \ldots + r_\mu$. Désignons par I_j l'ensemble des entiers p tels que $r_1 + \ldots + r_{j-1} < p \leqq r_1 + \ldots + r_j$. Posons de plus

$$\eta^j(m) = r_j . \mathrm{Tr}(f^j(m)), \qquad m \in M.$$

On a alors la relation suivante :

$$\int_M e_{pq}(mkm^{-1})\, dm = \delta_{pq}\, \chi \star \eta^j(k) / \chi \star \eta^j(e), \tag{5}$$

pour $1 \leqq p$, $q \leqq r$, et $p \in I_j$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_M e_{pq}(mkm^{-1})\, dm &= \sum_{p', q'} \int_M e_{pp'}(m)\, e_{p'q'}(k)\, e_{q'q'}(m^{-1})\, dm \\ &= \sum e_{p'q'}(k) \int_M e_{pp'}(m)\, \overline{e_{qq'}(m)}\, dm ; \end{aligned}$$

or, d'après le choix de la base, il est clair que la dernière intégrale est nulle si p, p' ou, q, q' n'appartiennent pas au même intervalle, et d'après la relation d'orthogonalité des coefficients (car les représentations $f^j(m)$ sont deux à deux non-équivalentes) elle est aussi nulle si p, q ne sont pas dans le même intervalle; il vient donc

$$\int_M e_{pq}(mkm^{-1})\, dm = \delta_{pq} \sum_{p' \in I_j} e_{p'p'}(k) / r_j,$$

si $p \in I_j$. Compte tenu des relations

$$e_{pq} \star \eta^j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q \notin I_j \\ e_{pq} & \text{si} \quad q \in I_j \end{cases},$$

on a

$$\chi \star \eta^j = r \sum_{p \in I} e_{pp},$$

ce qui montre bien la relation (5).

Par conséquent, si l'on désigne par $F_f(t)_{pq}$ l'élément d'indices (p, q) de la matrice de $F_f(t)$ par rapport à la base choisie, on a

$$(6) \qquad \begin{cases} F_j(t)_{pq} = \delta_{pq}\, e^{(n-1)t/2} \displaystyle\int_K \int_N f(k a_t x) \frac{\overline{\chi \star \eta^j(k)}}{\chi \star \eta^j(e)}\, dk\, dx \\ \text{si} \quad p \in I_j. \end{cases}$$

Cette formule met en évidence la propriété (iv).

Introduisons maintenant, suivant HARISH-CHANDRA [13], une série de représentations U^s de G dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2(K)$, dépendant d'un paramètre complexe s. Soit, pour $g \in G$, $k \in K$,

$$(7) \qquad gk = k_g a_{t(g,k)} x, \qquad \text{avec} \quad k_g \in K, \quad x \in N, \quad t(g, k) \in \mathbf{R},$$

la décomposition de gk suivant [1 (14)]. On a alors les relations suivantes :

$$(8) \qquad k_{gg'} = (k_{g'})_g, \qquad (km)_g = k_g m \qquad \text{pour} \quad m \in M;$$

$$(9) \qquad t(gg', k) = t(g, k_{g'}) + t(g', k),$$

$$t(k, k') = 0 \quad \text{pour} \quad k, k' \in K, \qquad t(g, km) = t(g, k) \quad \text{pour} \quad m \in M.$$

Remarquons qu'on a donc

$$(10) \qquad \begin{cases} t(gk^{-1}, k) = t(g, e) = t & \text{si} \quad g = k' a_t x, \\ \qquad \text{avec} \quad k' \in K, \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in N. \end{cases}$$

Si l'on définit maintenant l'opérateur U_g^s dans $\mathfrak{H}$ par la formule

$$(11) \qquad (U_g^s \varphi)(k) = e^{-st(g^{-1}, k)} \varphi(k_{g^{-1}}) \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathfrak{H},$$

il est facile de voir, à l'aide des formules ci-dessus, que l'application $g \to U_g^s$ est une représentation fortement continue de G par des opérateurs linéaires bornés dans $\mathfrak{H}$; on sait de plus qu'elle est unitaire si $\mathrm{Re}(s) = \dfrac{n-1}{2}$ (*voir* [13], p. 239-243) [4].

---

[4] Si l'on désigne par U_k la représentation régulière à gauche de K dans $\mathfrak{H}$, on a $U_k^s = U_k$, pour $k \in K$, quel que soit le paramètre s. De plus, si J est la conjugaison dans $\mathfrak{H}$ définie par $J\varphi = \overline{\varphi}$, on a $JU_g^s = U_g^{\bar{s}} J$, et l'on en déduit aussitôt qu'on a

$$(U_g^s)^* = U_{g^{-1}}^{n-1-\bar{s}} \qquad \text{pour} \quad g \in G.$$

LEMME 2.1 (GODEMENT). — *Les représentations U^s, $s \in \mathbf{C}$, forment un système complet au sens de* GODEMENT [11], *c'est-à-dire, si l'on a, pour une fonction $f \in L$, $U_f^s = 0$ quel que soit $s \in \mathbf{C}$, alors $f \equiv 0$.*

DÉMONSTRATION. — Comme on sait que G possède un système complet de représentations irréductibles de dimension finie (*voir* le lemme 5 dans [11], p. 506), il suffit de montrer que toute représentation irréductible de dimension finie de G est contenue (comme composante discrète) dans une représentation U^s avec un $s \in \mathbf{C}$ convenable; or cela résulte de ce que les représentations U^s, $s \in \mathbf{C}$, sont essentiellement des représentations induites par les représentations de dimension 1 du sous-groupe résoluble connexe $T = A_+ N = N A_+$ d'après un autre lemme de GODEMENT (lemme 7, *loc. cit.*, p. 508). En effet, toute représentation α de dimension 1 de T est de la forme

$$\alpha(a_t x) = e^{-st},$$

avec un $s \in \mathbf{C}$, et si l'on désigne par $\mathfrak{H}^\alpha$ l'espace vectoriel des fonctions continues $\theta(g)$ sur G telles que

$$\theta(g . a_t x) = \theta(g)\, \alpha(a_t x) \qquad \text{pour tout} \quad a_t x \in T,$$

et par T^α la représentation de G dans $\mathfrak{H}^\alpha$ définie par la formule

$$(T_g^\alpha \theta)(h) = \theta(g^{-1} h),$$

il est immédiat de vérifier que la transformation

$$I : \quad \mathfrak{H}^\alpha \ni \theta \to \theta \mid K \in L(K)$$

définit un isomorphisme de $\mathfrak{H}^\alpha$ sur $L(K)$ et transforme la représentation T^α en U^s.

Pour démontrer maintenant (v), supposons qu'on a, pour une $f \in L^0(\chi)$, $F_f(t) \equiv 0$. Nous allons montrer que cela entraîne que $U_f^s = 0$ quel que soit $s \in C$, d'où résultera donc (v) grâce au lemme 4. Calculons pour cela $(U_f^s \varphi, \psi)$, où $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$; comme $U_f^s = U_{\chi \star f \star \chi}^s = U_\chi U_f^s U_\chi$, et $U_\chi^\star = U_\chi$, on a

$$(U_f^s \varphi, \psi) = (U_f^s U_\chi \varphi, U_\chi \psi) = (U_f^s \chi \star \varphi, \chi \star \psi);$$

on peut supposer que χ est le caractère de la représentation π définie par (3), et l'on a alors

$$(12) \qquad U_\chi \varphi = \chi \star \varphi = \sum c_{pq} e_{pq}, \qquad U_\chi \psi = \chi \star \psi = \sum d_{pq} e_{pq},$$

avec

$$c_{pq} = r \int_K e_{qp}(k)\, \varphi(k^{-1})\, dk, \qquad d_{pq} = r \int_K e_{qp}(k)\, \psi(k^{-1})\, dk.$$

On a, par conséquent,

$$(13)\qquad (U_f^s\varphi,\ \psi) = \sum_{p,q,p',q'} c_{pq}\,\bar{d}_{p'q'}\,(U_f^s e_{pq},\ e_{p'q'}).$$

Or, on a, d'autre part, pour Φ, $\Psi \in L(K)$,

$$\begin{aligned}(U_f^s\Phi,\ \Psi) &= \int_G\int_K f(g)\, e^{-st(g^{-1},k)}\,\Phi(k_g - 1)\,\overline{\Psi(k)}\,dg\,dk \qquad [g \to kg^{-1}]\\ &= \int_G\int_K f(kg^{-1})\, e^{-st(gk^{-1},k)}\,\Phi(e_g)\,\overline{\Psi(k)}\,dg\,dk\\ &= \int_K\int_K\int_{\mathbf{R}}\int_N f(kx^{-1}a_t^{-1}l^{-1})\,e^{-st}\,\Phi(l)\,\overline{\Psi(k)}\,e^{(n-1)t}\,dk\,dl\,dt\,dx\\ &= \int_K\int_K\int_{\mathbf{R}}\int_N f(ka_t x l^{-1})\,e^{st}\,\Phi(l)\,\overline{\Psi(k)}\,dk\,dl\,dt\,dx;\end{aligned}$$

comme $f^0 = f$, on peut écrire, par suite,

$$(14)\qquad (U_f^s\Phi,\ \Psi) = \int_K\int_{\mathbf{R}}\int_N f(ka_t x)\,e^{st}\,\tilde{\Psi}\star\Phi(k^{-1})\,dk\,dt\,dx.$$

Si l'on applique la formule (14) au cas où $\Phi = e_{pq}$, $\Psi = e_{p'q'}$, on a

$$\begin{aligned}(U_f^s e_{pq},\ e_{p'q'}) &= \int_K\int_{\mathbf{R}}\int_N f(ka_t x)\,e^{st}\,e_{q'p'}\star e_{pq}(k^{-1})\,dk\,dt\,dx\\ &= \frac{1}{r}\,\delta_{pp'}\int_K\int_{\mathbf{R}}\int_N f(ka_t x)\,e^{st}\,e_{q'q}(k^{-1})\,dk\,dt\,dx\\ &= \frac{1}{r}\,\delta_{pp'}\int_{\mathbf{R}} e^{\left(s-\frac{n-1}{2}\right)t}\,F_f(t)_{q'q}\,dt,\end{aligned}$$

d'après la définition même de $F_f(t)$; il en résulte donc que

$$(15)\qquad (U_f^s\varphi,\ \psi) = \frac{1}{r}\sum_{p,q=1}^{r} c_{pq}\,\bar{d}_{pq}\int_{\mathbf{R}} {}^{\left(s-\frac{n-1}{2}\right)t}\,F_f(t)_{qq}\,dt.$$

Si l'on a $F_f(t) \equiv 0$, on a donc $(U_f^s\varphi,\ \psi) = 0$ quels que soient φ ψ dans $L(K)$, d'où $U_f^s = 0$.

C. Q. F. D.

Corollaire — *Les algèbres $L^0(\chi)$ sont commutatives.*

Démonstration. — Soient en effet f_1, $f_2 \in L^0(\chi)$; en vertu des propriétés (ii) et (iv), on a

$$F_{f_1\star f_2} = (F_{f_1})\star(F_{f_2}) = (F_{f_2})\star(F_{f_1}) = F_{f_2\star f_1},$$

ce qui entraîne, grâce à (v), qu'on a $f_1\star f_2 = f_2\star f_1$;

C. Q. F. D.

2. **Homomorphismes de** $L^0(\chi)$ **sur C.** — D'après ce qu'on a vu au cours de la démonstration de (iv) au numéro précédent, il est clair que, si $\chi \in \hat{K}$, $\eta \in \hat{M}$ (on désigne ainsi l'ensemble des caractères irréductibles de M), et si $\chi \star \eta \neq 0$, l'application

$$(16)\qquad f \to \lambda_c(f) = \int_{\mathbf{R}} \left\{ e^{\frac{n-1}{2}t} \int_K \int_N f(ka_t x) \frac{\overline{\chi \star \eta(k)}}{\chi \star \eta(e)} \, dk\, dx \right\} e^{-ct}\, dt$$

est un homomorphisme de $L^0(\chi)$ sur $\mathbf{C}$; on est ainsi conduit à poser les définitions suivantes :

$$(17)\qquad \alpha_{\chi,\eta,s}(g) = \frac{\overline{\chi \star \eta(k)}}{\chi \star \eta(e)} e^{-st} \qquad \text{si} \quad g = ka_t x, \quad k \in K, \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in N;$$

$$(18)\qquad \zeta_{\chi,\eta,s}(g) = (\alpha_{\chi,\eta,s})^0(g) = \int_K \alpha_{\chi,\eta,s}(kgk^{-1})\, dk.$$

Il est clair qu'on a, puisque $f^0 = f$, et que

$$\int_G f^0(g)\, h(g)\, dg = \int_G f(g)\, h^0(g)\, dg,$$

$$\lambda_c(f) = \int_G f(g)\, \alpha_{\chi,\eta,c+\frac{n-1}{2}}(g)\, dg = \int_G f(g)\, \zeta_{\chi,\eta,c+\frac{n-1}{2}}(g)\, dg.$$

On conviendra donc d'écrire

$$(19)\qquad \lambda_c(f) = \zeta_{\chi,\eta,c+\frac{n-1}{2}}(f), \qquad \text{pour} \quad f \in L^0(\chi),$$

et l'on définira $\zeta_{\chi,\eta,s}(f)$ pour $f \in L$, en posant

$$\zeta_{\chi,\eta,s}(f) = \zeta_{\chi,\eta,s}(\chi \star f^0).$$

D'après la formule (15), il est clair que, si l'on suppose qu'on a $\eta = \eta_j$, pour un j tel que $1 \leqq j \leqq \mu$,

$$(20)\qquad \zeta_{\chi,\eta,s}(f) = r(U_f^{n-1-s} e_{pp}, e_{pp}) \qquad \text{avec} \quad p \in I_j,$$

ce qui met en évidence le fait que la fonction $\zeta_{\chi,\eta,s}(g)$ soit de *type positif* si $\mathrm{Re}(s) = \frac{n-1}{2}$; nous avons donc démontré la propriété (ii) de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. — *Les fonctions* $\zeta_{\chi,\eta,s}$ *possèdent les propriétés suivantes :*

(i) $\bar{\chi} \star \zeta_{\chi,\eta,s} \star \bar{\chi} = \zeta_{\chi,\eta,s}$; $\qquad \zeta^0_{\chi,\eta,s} = \zeta_{\chi,\eta,s}$;

(ii) *si* $\mathrm{Re}(s) = \frac{n-1}{2}$, $\zeta_{\chi,\eta,s}$ *est de type positif;*

(iii) $$\zeta_{\chi,\eta,s}(g) = \zeta_{\overline{\chi},\overline{\eta},n-1-s}(g^{-1});$$

(iv) *quels que soient g, $g' \in G$, on a*

$$\int_K \zeta_{\chi,\eta,s}(kgk^{-1}g')\,dk = \zeta_{\chi,\eta,s}(g)\,\zeta_{\chi,\eta,s}(g');$$

(v) *l'application :*

$$f \to \zeta_{\chi,\eta,s}(f) = \int_G f(g)\,\zeta_{\chi,\eta,s}(g)\,dg$$

est un homomorphisme de $L^0(\chi)$ dans $\mathbf{C}$.

DÉMONSTRATION. — Il est évident que $\alpha = \overline{\chi} \star \alpha$, d'où

$$\overline{\chi} \star \zeta = \overline{\chi} \star \alpha^0 = (\overline{\chi} \star \alpha)^0 = \alpha^0 = \zeta$$

(on a laissé tomber les « indices » pour simplifier), ce qui montre (i). Comme on sait que (iv) et (v) sont équivalentes (*voir*, par exemple, GODEMENT [11], p. 524), il ne reste qu'à démontrer (iii); or ceci résulte de l'expression suivante pour $\zeta_{\chi,\eta,s}$, qui est une conséquence immédiate de (20) :

(21) $$\zeta_{\chi,\eta,s}(g) = r(U_g^{n-1-s}\,e_{pp},\, e_p)$$

(on garde les notations précédentes); on a, en effet,

$$\zeta_{\overline{\chi},\overline{\eta},n-1-s}(g^{-1}) = r(U_{g^{-1}}^{\overline{s}}\,\overline{e_{pp}},\, \overline{e_{pp}}),$$

puisque les fonctions $\overline{e}_{pq}$, p, $q \in I_j$, jouent les mêmes rôles pour les caractères $\overline{\chi}$, $\overline{\eta}$, que les e_{pq}, p, $q \in I_j$, pour χ, η; de plus, on sait que

(22) $$(U_g^s)^* = U_{g^{-1}}^{n-1-\overline{s}} \qquad \text{pour} \quad g \in G, \quad s \in \mathbf{C};$$

par suite, on a

$$(U_{g^{-1}}^{s}\,\overline{e}_{pp},\, \overline{e}_{pp}) = \left(\overline{U_{g^{-1}}^{\overline{s}}\,e_{pp}},\, \overline{e_{pp}}\right) = \left(e_{pp},\, U_{g^{-1}}^{\overline{s}}\,e_{pp}\right) = (U_g^{n-1-s}\,e_{pp},\, e_{pp}),$$

ce qui entraîne (iii).

C. Q. F. D.

Il est fort probable que tout homomorphisme de $L^0(\chi)$ dans $\mathbf{C}$ suffisamment *régulier*, par exemple tout homomorphisme, qui est une distribution au sens de L. SCHWARTZ [i. e. il existe une distribution sur G dont la restriction sur $L^0(\chi) \cap D(G)$ coïncide avec l'homomorphisme en question], soit de la forme $\zeta_{\chi,\eta,s}$ pour η, s convenablement choisis. C'est le cas pour le caractère trivial $\chi(k) \equiv 1$ comme on va le voir par la suite, pour n quelconque, et pour les groupes $\mathbf{G}_+(2)$, $\mathbf{G}_+(3)$ quels que soient χ (5). De toute façon, il est clair, d'après ce qui précède, que les homomorphismes $f \to \zeta_{\chi, \eta, s}(f)$, avec $\chi \in \hat{K}$, $\eta \in \hat{M}$, $s \in \mathbf{C}$, forment un système complet dans ce sens que, si $\zeta_{\chi, \eta, s}(f) = 0$ quels que soient η, s pour une $f \in L^0(\chi)$, on a $f \equiv 0$.

Définition 2.1. — *Une distribution λ sur G est dite de classe χ, $\chi \in \hat{K}$, si l'on a, quelle que soit $f \in D(G)$,*

$$\lambda(f) = \lambda(\chi \star f \star \chi).$$

Une distribution de classe χ est dite sphérique si sa restriction à $L^0(\chi) \cap D(G)$ est un homomorphisme de cette sous-algèbre sur $\mathbf{C}$.

On peut montrer que toute distribution sphérique de classe χ est, en réalité, une fonction indéfiniment dérivable, ou même analytique réelle. En effet, la démonstration de Godement dans [12], qui traite le cas du caractère trivial, s'applique sans modification essentielle aux cas des caractères quelconques.

§ 3. FONCTIONS SPHÉRIQUES DE CLASSE 1.

1. Représentations unitaires irréductibles de la série principale de classe 1. Nous avons défini, au numéro **1** (§ **2**) une série de représentations U^s dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2(K)$; nous allons maintenant étudier ces représentations de plus près, pour arriver à la définition de la série principale de classe 1.

Soit $k \to V_k$ la représentation régulière à droite de K dans $\mathfrak{H}$; pour $\varphi \in \mathfrak{H}$, on a donc $(V_k \varphi)(l) = \varphi(lk)$. D'après les formules [2 (8)], [2 (9)], il est évident qu'on a

$$U_g^s V_m = V_m U_g^s \qquad \text{pour} \quad g \in G,\ m \in M, \tag{1}$$

quel que soit le paramètre s; par conséquent, pour toute fonction ψ intégrable sur M, l'opérateur

$$V_\psi = \int_M \psi(m^{-1})\, V_m\, dm$$

est permutable aux opérateurs U_g^s, $g \in G$; en particulier, si η est le caractère d'une représentation unitaire irréductible de dimension finie d de M, soit $m \to (f_{ij}(m))_{1 \leq i, j \leq d}$, alors les opérateurs suivants sont permutables avec U_g^s, $g \in G$:

$$Q^\eta = \int_M \overline{\eta(m)}\, V_m\, dm, \qquad Q_{ij}^\eta = d \int_M f_{ij}(m^{-1})\, V_m\, dm, \qquad 1 \leq i, j \leq d; \tag{2}$$

(5) Pour $\mathbf{G}_+(2)$, voir par exemple [21].

on voit facilement que les opérateurs Q^{γ}, Q^{γ}_{ii}, $1 \leq i \leq d$, sont des projecteurs dans $\mathfrak{H}$, et Q^{γ}_{ij} est un opérateur partiellement isométrique appliquant $Q^{\gamma}_{ii}\mathfrak{H}$ sur $Q^{\gamma}_{jj}\mathfrak{H}$. Si l'on pose

(3) $$\mathfrak{H}^{\gamma} = Q^{\gamma}\mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{H}^{\gamma}_{i} = Q^{\gamma}_{ii}\mathfrak{H},$$

il est clair qu'on a

(4) $$\mathfrak{H} = \bigoplus_{\gamma \in \hat{\Omega}} \mathfrak{H}^{\gamma}, \qquad \mathfrak{H}^{\gamma} = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathfrak{H}^{\gamma}_{i}.$$

PROPOSITION 3.1. — *Les sous-espaces fermés $\mathfrak{H}^{\gamma}_{i}$ sont invariants par les opérateurs U^{s}_{g}, $g \in G$, et si l'on désigne par $U^{s}(\gamma, i)$ la représentation de G dans $\mathfrak{H}^{\gamma}_{i}$ obtenue par restriction de U^{s} à $\mathfrak{H}^{\gamma}_{i}$, pour $1 \leq i \leq d$, ces d représentations sont deux à deux unitairement équivalentes. Toute représentation unitaire irréductible unitaire de K, soit $k \to (e_{pq}(k))_{1 \leq p, q \leq r}$, est contenue au plus une fois dans la représentation $k \to U^{s}_{k}(\gamma, i)$. Pour qu'elle y soit effectivement contenue, il faut et il suffit que la représentation $m \to (\overline{e_{pq}(m)})$ de M contienne la représentation $m \to (f_{ij}(m))$* [6].

DÉMONSTRATION. — Les projecteurs Q^{γ}, Q^{γ}_{ii} étant permutables aux opérateurs U^{s}_{g}, $g \in G$, il est clair que les sous-espaces $\mathfrak{H}^{\gamma}$, $\mathfrak{H}^{\gamma}_{i}$ sont invariants; il est aussi facile de voir que l'équivalence de $U^{s}(\gamma, i)$ et $U^{s}(\gamma, j)$ est donnée par l'opérateur Q^{γ}_{ij}.

Pour montrer la seconde et la dernière assertions, on peut supposer $i = 1$, et l'on écrira, pour simplifier, $U^{s}_{g}(\gamma, 1) = U^{s}_{g}$. Supposons donc qu'une représentation unitaire irréductible de K : $k \to (e_{pq}(k))$ soit contenue dans la représentation : $k \to U^{s}_{k} = U_{k}$; cela signifie qu'il existe un système $\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ de fonctions dans $\mathfrak{H}^{\gamma}_{1}$ telles qu'on ait

$$U_{k}\varphi_{p} = \sum_{q=1}^{r} e_{qp}(k)\varphi_{q},$$

pour $1 \leq p \leq r$, ou encore

$$\varphi_{p}(k^{-1}u) = \sum_{q=1}^{r} e_{qp}(k)\,\varphi_{q}(u) \qquad \text{pour} \quad k, u \in K, \quad 1 \leq p \leq r;$$

il vient donc, en remplaçant u par ku,

$$\varphi_{p}(u) = \sum_{q=1}^{r} e_{qp}(k)\,\varphi_{q}(ku), \qquad \text{quel que soit} \quad k, u \in K,$$

---

[6] La première partie est due à HARISH-CHANDRA [13]; pour la seconde partie, *voir* aussi DIXMIER [5].

d'où, en intégrant par rapport à k dans K,

$$\varphi_p(u) = \sum_{q=1}^{r} \int_K e_{qp}(k)\, \varphi_q(ku)\, dk = \sum_{q=1}^{r} \int_K e_{qp}(ku^{-1})\, \varphi_q(k)\, dk,$$

ce qui entraîne qu'on a

$$(5) \qquad \varphi_p(u) = \sum_{q'=1}^{r} c_{q'}\, \overline{e_{pq'}(u)}, \qquad \text{avec} \quad c_{q'} = \sum_{q=1}^{r} \int_K e_{qq'}(k)\, \varphi_q(k)\, dk;$$

or, comme les fonctions $\varphi_q(k)$ sont dans $\mathfrak{H}_1^\gamma$, on a

$$\varphi_q(k) = (Q_{11}^\gamma\, \varphi_q)(k) = d \int_M \varphi_q(km)\, f_{11}(m^{-1})\, dm,$$

d'où

$$\begin{aligned} c_{q'} &= d \sum_{q=1}^{r} \int_K \int_M e_{qq'}(k)\, \varphi_q(km)\, f_{11}(m^{-1})\, dk\, dm \\ &= d \sum_{q,q''=1}^{r} \int_K e_{qq''}(k)\, \varphi_q(k)\, dk \int_M e_{q''q'}(m^{-1})\, f_{11}(m^{-1})\, dm \\ &= d \sum_{q''=1}^{r} c_{q''} \int_M \overline{e_{q'q''}(m)\, f_{11}(m)}\, dm; \end{aligned}$$

si maintenant la représentation $m \to (\overline{e_{pq}(m)})$ ne contenait pas la la représentation $m \to (f_{ij}(m))$, on aurait $\int_M \overline{e_{pq}(m)\, f_{11}(m)}\, dm = 0$, d'après la relation d'orthogonalité, d'où $c_{q'}$ serait nul quel que soit q', et (5) entraînerait donc que $\varphi_p(k) = 0$; on voit donc que $m \to (\bar{e}_{pq}(m))$ doit nécessairement contenir $m \to (f_{ij}(m))$. Or, comme on a déjà remarqué (§ 2, n° 1), toute représentation unitaire irréductible de K ne contient une représentation unitaire irréductible donnée de M qu'*au plus une fois*; on pourra donc supposer que la matrice $(\bar{e}_{pq}(m))$ soit de la forme suivante :

$$(6) \qquad (\overline{e_{pq}}(m)) = \begin{pmatrix} f_{ij}(m) & 0 \\ 0 & f'(m) \end{pmatrix},$$

où, $m \to f'(m)$ est une représentation de M, qui ne contient aucune composante équivalente à $m \to (f_{ij}(m))$. Dans ces conditions il est clair qu'on a

$$c_{q'} = \delta_{q'1}\, c_1,$$

d'où

$$(5') \qquad \varphi_p(u) = \sum_{q'=1}^{r} c_{q'} \overline{e_{pq'}(u)} = c_1 \overline{e_{p1}(u)},$$

ce qui signifie qu'il n'y a essentiellement qu'un seul système, à savoir $(\overline{e_{11}(k)}, \ldots, \overline{e_{r1}(k)})$, qui se transforme suivant $k \to (e_{pq}(k))$.

C. Q. F. D.

DÉFINITION 3.1. — *Soit $g \to U_g$ une représentation continue d'un groupe topologique G dans un espace hilbertien $\mathfrak{H}$; on dit qu'un vecteur $\psi \in \mathfrak{H}$ est un vecteur totalisateur (ou un vecteur cyclique) pour la représentation U, si le plus petit sous-espace fermé contenant les vecteurs $U_g \psi$, $g \in G$, est $\mathfrak{H}$. Une représentation admettant un vecteur totalisateur est dite cyclique.*

Il est clair qu'une représentation irréductible est cyclique, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

PROPOSITION 3.2. — *Supposons que le paramètre s ne soit pas un entier $\leqq 0$. Pour tout caractère $\eta \in \hat{M}$, et pour tout i, $1 \leqq i \leqq d$, la représentation $U_g^s(\eta, i)$ est cyclique.*

DÉMONSTRATION. — On peut supposer $i = 1$, sans restreindre la généralité, d'après la proposition 3.1. En vertu du lemme 1.2, on obtient une fonction continue définie dans $K \cap \complement M$ (dans le complémentaire de M dans K, donc presque partout dans K) en posant

$$\psi(k) = f_{11}(mm') \qquad \text{si} \quad k = mu_\theta m', \quad m, m' \in M, \quad 0 < \theta < \pi;$$

il est évident que ψ est dans $\mathfrak{H}$, et même dans $\mathfrak{H}_1^\eta$. Nous allons montrer que ψ est un vecteur cyclique pour $U^s(\eta, 1)$ dans $\mathfrak{H}_1^\eta$. On aura besoin du lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Soient m, $m' \in M$, $0 \leqq \theta < \pi$, t réel; on a alors*

$$(7) \qquad (mu_\theta m')_{a_t} = mu_{\theta'} m',$$

avec

$$(8) \qquad \cos\theta' = \frac{\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t \cos\theta}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \sin\theta}, \qquad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \cos\theta},$$

et

$$(9) \qquad e^{t(a_t, mu_\theta m')} = e^{t(a_t, u_\theta)} = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \cos\theta.$$

DÉMONSTRATION. — Par définition (*voir* § 2, n° 1), on a

$$a_t(mu_\theta m') = (mu_\theta m')_{a_t} a_{t(a_t, mu_\theta m')} x, \qquad \text{avec} \quad x \in N;$$

M étant le centralisateur de A dans K, on a d'autre part,

$$a_t(mu_0m') = m(a_t u_0)m';$$

or les éléments a_t, u_0 sont dans le sous-groupe G_2 de G formé par les $g \in G$ de la forme

$$g = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & \\ & 0 & & I_{n-2} \end{pmatrix},$$

et le sous-groupe G_2 est isomorphe au groupe $G_+(2)$; par suite, en vertu de la décomposition [1 (14)] dans $G_+(2)$, on aura

$$(10) \qquad a_t u_0 = u_{0'} a_{t'} x', \qquad \text{avec} \quad u_{0'} = (u_0)_{a_t} \quad \text{et} \quad x' \text{ dans } G_2;$$

on a donc

$$a_t(mu_0m') = mu_{0'}a_{t'}x'm' = mu_{0'}m'a_{t'}m'^{-1}x'm',$$

d'où résultent (7) et la première égalité de (9).

Pour démontrer ce qui reste, il suffit d'expliciter (10), et comparer les coefficients des deux membres.

Revenons à la démonstration de la proposition 3.2. Soit $\mathfrak{H}'$ le plus petit sous-espace fermé invariant contenant ψ, et soit $\mathfrak{H}''$ son complémentaire orthogonal dans $\mathfrak{H}_1^\eta$; $\mathfrak{H}''$ est stable pour la représentation U_k^s de K, qui est unitaire pour tous s. Supposons $\mathfrak{H}'' \neq (0)$; il y aurait alors au moins une représentation unitaire irréductible de K, soit $k \to (e_{pq}(k))$, contenue dans la représentation $k \to U_k^s(\eta, 1)$ de K dans $\mathfrak{H}''$. Comme $\mathfrak{H}'' \subset \mathfrak{H}_1^\eta$, on pourrait supposer que la matrice $(\overline{e_{pq}}(m))$ ait la forme (6); alors les fonctions $\overline{e_{p1}}(k)$, $1 \leq p \leq r$ (r est la dimension de la représentation en question), seraient contenues dans $\mathfrak{H}''$, et l'on aurait par conséquent

$$(U_g^s\psi, \overline{e_{p1}}) = 0, \qquad \text{quel que soit} \quad g \in G;$$

en particulier, pour $g = a_t$, on aurait

$$\int_K e^{-st(a_{-t},k)}\psi(k_{a_{-t}})\, e_{p1}(k)\, dk = 0, \qquad \text{quel que soit } t;$$

les lemmes 1.2 et 3.1 nous permettent d'écrire ceci sous la forme suivante (compte tenu de la définition de ψ) :

$$\int_0^\pi \int_M \int_M (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta)^{-s} f_{11}(mm')\, e_{p1}(mu_\theta m') \sin^{n-2}\theta \, dm\, dm'\, d\theta = 0,$$

quel que soit t réel; vu la forme particulière de $(e_{pq}(m))$, et la relation d'orthogonalité dans M, les deux intégrales étendues sur M donnent $\sum_{j=1}^{d} e_{jj}(u_0)$, d'où

$$(11) \qquad \int_0^{\pi} (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta)^{-s} F(\theta)\, d\theta = 0,$$

quel que soit t réel, en posant

$$F(\theta) = \sum_{=1}^{d} e_{jj}(u_0) \sin^{n-2}\theta;$$

en vertu du lemme ci-dessous, la fonction $F(\theta)$, donc la fonction continue $\sum_{j=1}^{d} e_{jj}(u_0)$ serait identiquement nulle, ce qui entraînerait la contradiction : $0 = \sum_{j=1}^{d} e_{jj}(u_0) = d$.

C. Q. F. D.

Lemme 3.2. — *Soit $F(\theta)$ une fonction intégrable sur $0 \leqq \theta \leqq \pi$, et soit*

$$H(t) = \int_0^{\pi} (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta)^{-s} F(\theta)\, d\theta.$$

Si s n'est pas un entier $\leqq 0$, pour que $H(t)$ soit identiquement nulle, il faut et il suffit que $F(\theta)$ soit presque partout nulle.

Démonstration. — Par récurrence sur p, on montre que

$$\frac{d^p}{dt^p} (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta)^{-s} = \sum_{q=0}^{p} c_q^p(s) (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta)^{-s-q} (\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \cos\theta)^q$$

où les $c_q^p(s)$ désignent des constantes, avec

$$c_p^p(s) = (-1)^p s(s+1)\dots(s+p-1);$$

si s n'est pas un entier $\leqq 0$, $c_p^p(s) \neq 0$ pour tout p; donc, si $H(t) = 0$ identiquement, on déduira de $H^{(p)}(0) = 0$, que

$$\int_0^{\pi} F(\theta) \cos^p\theta\, d\theta = 0, \qquad \text{pour} \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

d'où $F(\theta)$ est nulle presque partout.

C. Q. F. D.

Dans le cas du caractère trivial $\eta_0 : \eta_0(m) = 1$, pour tout $m \in M$, on a $d = 1$, et la fonction ψ de la proposition précédente se réduit à la fonction constante 1, qu'on notera ψ_0; on en déduit l'irréductibilité des représentations $U^s(\eta_0)$ (on laisse tomber l'indice i, puisque $d = 1$) de G dans $\mathfrak{H}^{\eta_0}$, dans le cas unitaire, de la manière suivante. Soit A un opérateur dans $\mathfrak{H}^{\eta_0}$ qui permute à tous les U^s_g, $g \in G$, et montrons qu'il est scalaire. Posons $A\psi_0 = \varphi$; alors,

$$U_k\varphi = U_k A\psi_0 = A U_k \psi_0 = A\psi_0 = \varphi,$$

d'où φ est invariante par les translations à gauche par les éléments de K, i. e. φ est également une constante, soit $c\psi_0$; par suite, on a

$$A(U^g_s\psi_0) = U^s_g(A\psi_0) = U^s_g\varphi = cU^s_g\psi_0, \qquad \text{quel que soit} \quad g \in G;$$

comme les vecteurs $U^s_g\psi_0$, $g \in G$, sous-tendent $\mathfrak{H}^{\eta_0}$, on en conclut que $A = cI$.

C. Q. F. D.

Le sous-espace $\mathfrak{H}^{\eta_0}$ de $\mathfrak{H}$ est formé par les fonctions de carré sommable et invariantes à droite par les éléments de M; on peut donc l'interpréter comme l'espace hilbertien des fonctions de carré sommable dans l'espace homogène $K/M \approx S^{n-1}$, pour la mesure invariante normée μ; de plus la transformation $k \to k_g$ définie par $g \in G$, définit, par passage au quotient [*voir* 2 (8)], un homéomorphisme $g : kM \to k_gM$ de K/M sur lui-même; de même, la formule [2 (9)] montre que la fonction $t(g, k)$ ne dépend que de g et de la classe kM de k dans K/M. Si l'on identifie K/M à S^{n-1}, en faisant correspondre, à la classe kM, le point $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de S^{n-1}, défini par $x_p = k_{p1}$, $1 \leq p \leq n$, il est facile d'exprimer l'homéomorphisme g et la fonction $t(g, \mathbf{x}) = t(g, kM) = t(g, k)$, en explicitant les deux membres de la relation matricielle $gk = k_g a_{t(g,k)} x$; on a

$$\mathbf{x}' = g.\mathbf{x}, \tag{12}$$

$$\text{avec} \quad x'_p = \left(g_{p0} + \sum_{q=1}^{n} g_{pq}x_q\right) \Bigg/ \left(g_{00} + \sum_{q=1}^{n} g_{0q}x_q\right), \qquad 1 \leq p \leq n,$$

$$e^{t(g,\mathbf{x})} = g_{00} + \sum_{q=1}^{n} g_{0q}x_q. \tag{13}$$

On peut donc énoncer le résultat obtenu sous la forme suivante :

THÉORÈME 3.1. — *Soit μ la mesure invariante normée sur la sphère S^{n-1}, et soit $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien formé par les fonctions de carré sommable pour μ définies sur S^{n-1}. Pour $g \in G$, définissons l'opérateur U^s_g par la formule*

$$(U^s_g\varphi)(\mathbf{x}) = \alpha(g^{-1}, \mathbf{x})^{-s}\varphi(g^{-1}.\mathbf{x}), \qquad \textit{pour} \quad \varphi \in \mathfrak{H}, \tag{14}$$

ou $\alpha(g, \mathbf{x}) = e^{i(g,\mathbf{x})}$, *et* $g.\mathbf{x}$ *est défini par* (12). *Alors, si* $s \neq 0$, $-1, -2, \ldots$, U^s *est une représentation cyclique de* G. *En particulier, si* $\mathrm{Re}(s) = \frac{n-1}{2}$, U^s *est une représentation unitaire irréductible.*

On verra plus loin (§ 6) que U^s est en effet réductible pour $s = 0$, $-1, -2, \ldots$.

Les représentations unitaires irréductibles de $G_+(n)$ qu'on vient de construire forment une partie de la *série principale* au sens de GEL'FAND et NAIMARK (i. e. les représentations unitaires irréductibles « contenues » dans la représentation régulière); en effet, ce sont les représentations de classe 1, au sens de la définition suivante, appartenant à la série principale.

DÉFINITION 3.2 (GEL'FAND-NAIMARK). — *Soit* G *un groupe topologique et soit* K *un sous-groupe compact de* G. *Une représentation unitaire* T_g *de* G *dans un espace hilbertien* $\mathfrak{H}$ *est dite* de classe 1 (*Par rapport au sous-groupe* K), *s'il existe un vecteur cyclique* ψ *pour* T, *tel qu'on ait* $T_k\psi = \psi$, *quel que soit* $k \in K$.

REMARQUE. — Les représentations unitaires $\left(\text{le cas } \mathrm{Re}(s) = \frac{n-1}{2}\right)$ $U^s(\eta, i)$ définies dans $\mathfrak{H}_i^\eta$ étant essentiellement des représentations induites par certaines représentations de dimension finie du sous-groupe $\Gamma = MA_+N$ de G $\left(\text{en effet, c'est la représentation irréductible de } \Gamma \text{ définie par } ma_t x \to e^{-i\nu t} L(m), \text{ dans le cas où } s = \frac{n-1}{2} + i\nu,\ m \to L(m) \text{ étant une représentation de } M \text{ de caractère } \eta\right)$, le critère de BRUHAT [3] montre que les représentations $U^s(\eta, i)$ dans $\mathfrak{H}_i^\eta$ sont irréductibles, pour $s = \frac{n-1}{2} + i\nu$, à condition que $\nu \neq 0$. D'après la démonstration élémentaire ci-dessus du cas où η est le caractère trivial, on constate ici qu'il y a l'irréductibilité sans exception.

2. **Calcul des fonctions sphériques de classe 1.** — Dans le cas du caractère trivial $\chi_0 : \chi_0(k) = 1$, pour tout $k \in K$, le seul caractère $\eta \in \hat{M}$, tel que $\chi_0 \star \eta \neq 0$, est le caractère trivial η_0; il est clair donc qu'on a, d'après [2 (21)].

$$\zeta_{\chi_0, \eta_0, s}(g) = (U_g^{n-1-s}\psi_0, \psi_0), \qquad \text{pour} \quad g \in G,$$

en désignant par ψ_0 la fonction constante 1 sur K. Convenons d'écrire ζ_s au lieu de $\zeta_{\chi_0, \eta_0, s}$. On se propose de calculer explicitement cette fonction sphérique de classe 1. Remarquons d'abord qu'on a

$$\zeta_s(g) = \zeta_{n-1-s}(g) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G. \tag{15}$$

En effet, cela résulte de la formule (iii) de la proposition 2.2, compte tenu de ce qu'on a, pour toute fonction $f(g)$ invariante par K, $f(g^{-1}) = f(g)$ (*cf.* remarque 1.2).

On peut donc écrire

$$\zeta_s(g) = (U_g^s \psi_0, \psi_0), \qquad \text{pour} \quad g \in G, \tag{16}$$

et l'identité (15) montre que les représentations U^s et U^{n-1-s} de la série principale sont équivalentes.

Pour calculer $\zeta_s(g)$, il suffit bien entendu de considérer le cas où $g = a_t$, d'après le lemme 1.3. On a alors, d'après (16),

$$\begin{aligned}\zeta_s(a_t) = (U_{a_t}^s \psi_0, \psi_0) &= \int_K e^{-st(a_{-t},k)}\,dk \\ &= \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n-1)/2)} \int_M \int_M \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-2}\theta}{(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta)^s}\,dm\,dm'\,d\theta,\end{aligned}$$

d'après [§ 1 (31)] et [§ 3 (9)]; comme on a $\int_M dm = 1$, il vient

$$\zeta_s(a_t) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-2}\theta}{(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t\cos\theta)^s}\,d\theta. \tag{17}$$

(La formule [1 (31)] n'est démontrée que pour $n \geqq 3$, mais il est facile de voir que cette dernière formule reste valable même pour $n = 2$.)

THÉORÈME 3.2. — *On a les formules suivantes pour* $\zeta_s^n(g)$ (¹) :

$$\zeta_s^n(a_t) = \frac{2^{(n-2)/2}\,\Gamma(n/2)}{\operatorname{sh}^{(n-2)/2} t}\, \mathfrak{P}_{s-\frac{n}{2}}^{1-\frac{n}{2}}(\operatorname{ch} t), \tag{18}$$

$$\zeta_s^n(a_t) = (1 - \operatorname{th}^2 t)^{\frac{s}{2}}\, {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}; \frac{n}{2}; \operatorname{th}^2 t\right), \tag{19}$$

$$\begin{aligned}(20)_1 \quad \zeta_s^{2m}(a_t) = {} & \frac{2^{m-1}(m-1)!}{(s-1)(s-2)\ldots(s-m+1)(m-s)(m+1-s)\ldots(2m-2-s)} \\ & \times \left(\frac{-1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{m-1} P_{s-m+1}(\operatorname{ch} t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(20)_2 \quad \zeta_s^{2m+1}(a_t) = {} & \frac{1.3\ldots(2m-3)(2m-1)}{(s-1)(s-2)\ldots(s-m)(m+1-s)(m+2-s)\ldots(2m-1-s)} \\ & \times \left(\frac{-1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{m} \frac{\operatorname{ch}(m-s)t}{(s-m)^2}.\end{aligned}$$

(¹) On écrira $\zeta_s^n(g) = \zeta_s(g)$, pour préciser qu'il s'agit du groupe $\mathbf{G}_+(n)$. $P_\mu^\nu(.)$ désigne la fonction de Legendre de première espèce (*voir*, par exemple, MAGNUS-OBERHETTINGER [19], chap. IV).

En particulier, dans le cas unitaire : $s = \frac{n-1}{2} + i\nu$, *on a*

$$(21)_1 \quad \zeta^{2m}_{m-\frac{1}{2}+i\nu}(a_t) = \frac{2^{m-1}(m-1)!}{\left(\nu^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\nu^2 + \left(m - \frac{3}{2}\right)^2\right)} \times \left(\frac{-1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{m-1} P_{\frac{1}{2}+i\nu}(\operatorname{ch} t),$$

$$(21)_2 \quad \zeta^{2m+1}_{m+i\nu}(a_t) = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{\nu^2(\nu^2+1^2)\ldots(\nu^2+(m-1)^2)}\left(\frac{-1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^m \cos\nu t.$$

DÉMONSTRATION. — La représentation intégrale (17) de $\zeta_s(a_t)$ montre qu'on a (18) (*voir*, par exemple, MAGNUS-OBERHETTINGER [19], p. 88). Pour montrer (19), il suffit d'écrire

$$(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta)^{-s} = (1 - \operatorname{th}^2 t)^{s/2}(1 - \operatorname{th} t \cos\theta)^{-s}$$

et de développer en série (uniformément convergente pour θ, puisque $|\operatorname{th} t| < 1$, quel que soit t réel), et d'intégrer terme à terme. Enfin pour (20), on démontre d'abord, en intégrant par parties, qu'on a

$$\left(\frac{-1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)\zeta^n_s(a_t) = \frac{s(n-1-s)}{n}\zeta^{n+2}_{s+1}(a_t),$$

d'où, par récurrence sur p, il vient

$$\zeta^n_s(a_t) = \frac{(n-2)(n-4)\ldots(n-2p)}{(s-1)(s-2)\ldots(s-p)(n-2-s)(n-3-s)\ldots(n-p-1-s)} \times \left(\frac{-1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^p \zeta^{n-2p}_{s-p}(a_t);$$

d'autre part, on sait (ou l'on peut vérifier directement) qu'on a

$$\zeta^2_s(a_t) = P_s(\operatorname{ch} t), \qquad \zeta^3_s(a_t) = \frac{\operatorname{sh}(s-1)t}{(s-1)\operatorname{sh} t},$$

d'où résulte immédiatement (20).

COROLLAIRE. — *La fonction* $\zeta_s(a_t) = Z_s(\operatorname{ch} t)$ *satisfait à l'équation différentielle suivante :*

$$(22) \quad \operatorname{sh}^2 t\, Z''_s(\operatorname{ch} t) + n \operatorname{ch} t\, Z'_s(\operatorname{ch} t) - s(s-n+1)\, Z_s(\operatorname{ch} t) = 0.$$

REMARQUE. — On sait, d'après la théorie générale, que toutes les fonctions sphériques sont fonctions propres d'opérateurs différentiels définis par les éléments du centre de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}$ de l'algèbre de Lie du groupe $G_+(n)$; en particulier, elles sont fonctions propres de l'opérateur de Casimir

$$\Omega = \sum_{1 \leq p < q \leq n} X_{pq}^2 - \sum_{1 \leq q \leq n} Y_q^2;$$

or, pour une fonction $f(g)$ invariante par K, il est évident qu'on a

$$X_{pq} f = 0;$$

de plus, il est clair qu'une telle fonction ne dépend que de g_{00} (l'élément d'indice 0,0 de la matrice g!), ce qui permet d'écrire : $f(g) = \varphi(g_{00})$; on a alors

$$\begin{aligned}(Y_p f)(g) = (Y_p \star f)(g) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (f(\exp(-t Y_p).g) - f(g)) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\varphi(\operatorname{ch} t . g_{00} - \operatorname{sh} t . g_{p0}) - \varphi(g_{00})) \\ &= - g_{p0} \varphi'(g_{00}),\end{aligned}$$

puisque $(\exp(-t Y_p).g)_{00} = \operatorname{ch} t . g_{00} - \operatorname{sh} t . g_{p0}$; par suite, on a

$$\begin{aligned}(Y_p^2 f)(g) = (Y_p \star (Y_p \star f))(g) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (Y_p \star f(\exp(-t Y_p).g) - Y_p \star f(g)) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (-(-\operatorname{sh} t . g_{00} + \operatorname{ch} t . g_{p0}) \varphi'(\operatorname{ch} t . g_{00} - \operatorname{sh} t . g_{p0}) + g_{00} \varphi'(g_{00}) \\ &= g_{00} \varphi'(g_{00}) + g_{p0}^2 \varphi''(g_{00}),\end{aligned}$$

d'où

$$\Omega f(g) = - \sum_{1 \leq p \leq n} Y_p^2 f(g) = - n g_{00} \varphi'(g_{00}) - (g_{00}^2 - 1) \varphi''(g_{00}),$$

ou encore

$$(23) \qquad \Omega f(a_t) = \Omega \varphi(\operatorname{ch} t) = - \operatorname{sh}^2 t \, \varphi''(\operatorname{ch} t) - n \operatorname{ch} t \, \varphi'(\operatorname{ch} t).$$

La formule (22) montre donc qu'on a

$$\Omega \zeta_s = s(n - 1 - s) \zeta_s.$$

§ 4. FORMULE DE PLANCHEREL DANS $L^0(\chi_0)$.

1. Espace des fonctions invariantes. — Soit $\mathcal{D}$ de la sous-algèbre de $A = L^0(\chi_0)$ formée par les fonctions indéfiniment dérivables. Soit de plus $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ l'algèbre des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact sur la droite réelle $\mathbf{R}$, avec la multiplication définie par le produit de composition au sens ordinaire ; désignons par $\mathcal{D}_+(\mathbf{R})$ la sous-algèbre de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ formée par les fonctions *paires*.

LEMME 4.1. — *Pour toute fonction $f(t)$ de $\mathcal{D}_+(\mathbf{R})$, la fonction $f[x]$ définie dans $1 \leqq x < +\infty$, par la formule :*

$$f(t) = f[\operatorname{ch} t],$$

est indéfiniment dérivable (pour $x = 1$, il s'agit bien entendu de la dérivabilité à droite).

DÉMONSTRATION. — Soit

$$\mathcal{F}(\nu) = \int_0^\infty f(t) \cos \nu t \, dt$$

la transformée de Fourier de f. Montrons que $P(\nu^2)\mathcal{F}(\nu)$ est sommable pour $d\nu$ dans $0 \leqq \nu < +\infty$, quel que soit le polynome $P(.)$. En effet, si $f(t)$ est nulle, ainsi que ses dérivées, en dehors de $(-T, T)$, pour un T assez grand, on a

$$\nu^{2n}\mathcal{F}(\nu) = (-1)^n \int_0^T f^{(2n)}(t) \cos \nu t \, dt,$$

ce qui entraîne que $P(\nu^2)\mathcal{F}(\nu)$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, d'où notre assertion. Il nous suffit donc de montrer qu'on a pour tout entier $p \geqq 0$,

$$(1) \quad f^{(p+1)}[x] = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\nu^2(\nu^2+1)\dots(\nu^2+p^2)}{1.3\dots(2p+1)} \mathcal{F}(\nu)\, \zeta_{1+p+i\nu}^{2p+3}[x]\, d\nu,$$

$$(2) \qquad \frac{d}{dx}\zeta_{p+1+i\nu}^{2p+3}[x] = -\frac{(p+1)^2+\nu^2}{2p+3}\zeta_{p+2+i\nu}^{2p+5}[x],$$

pour $x \geqq 1$, où $\zeta_{1+p+i\nu}^{2p+3}[x] = \zeta_{1+p-i\nu}^{2p+3}(a_t)$ pour $x = \operatorname{ch} t$; en effet, comme c'est une fonction de type positif, on a

$$|\zeta_{1+p+i\nu}^{2p+3}[x]| \leqq \zeta_{1+p+i\nu}^{2p+3}(e) = 1,$$

ce qui montre que le second membre de (1) converge absolument et uniformément (par rapport à x), d'après ce qu'on a dit au début. Pour montrer (1) et (2), remarquons d'abord qu'on a

$$f'[x] = \frac{f'(t)}{\operatorname{sh} t} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{F}(\nu)\frac{\nu \sin \nu t}{\operatorname{sh} t} d\nu = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{F}(\nu)\,\nu^2\,\zeta_{1+i\nu}^3(a_t)\, d\nu$$

pour $x = \operatorname{ch} t$, d'après le théorème 3.2, à condition que $x > 1$, ou $t \neq 0$. Or, on a

$$f'[1+0] = \lim_{h \to 0,\, h>0} \frac{f[1+h]-f[1]}{h} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\operatorname{ch}\varepsilon - 1} = f''(0),$$

puisque $f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon^2 f''(0)/2 + o(\varepsilon^2)$, et

$$f''(0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \nu^2 \mathcal{F}(\nu)\, d\nu,$$

ce qui montre bien qu'on a, pour $x \geqq 1$,

$$f'[x] = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \nu^2 \mathcal{F}(\nu)\, \zeta_{1+i\nu}^3[x]\, d\nu;$$

d'autre part, on a

$$\zeta_{1+i\nu}^3[x] = x^{-1-i\nu} F\left(\frac{1+i\nu}{2}, \frac{2+i\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{x^2-1}{x^2}\right),$$

pour $x \geqq 1$, d'après [3 (19)], d'où résulte immédiatement par récurrence sur p notre assertion.

C. Q. F. D.

Considérons la transformée F_f définie au paragraphe 2, dans l'algèbre $A = L^0(\chi_0)$: comme la représentation π est ici triviale, on a

$$F_f(t) = e^{(n-1)t/2}\int_N f(a_t x)\, dx;$$

si $x = x(\xi_2, \ldots, \xi_n)$, on a

$$(a_t x)_{00} = \operatorname{ch} t + e^t(\xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)/2,$$

d'où

$$F_f(t) = e^{(n-1)t/2}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} f\left[\operatorname{ch} t + \frac{1}{2}e^t(\xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)\right] d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

ou

$$(3) \qquad F_f(t) = F_f[\operatorname{ch} t] = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f\left[\operatorname{ch} t + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)\right] d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Supposons maintenant que $f \in \mathcal{D}$. Alors les fonctions $f[x]$, $F_f[x]$ sont indéfiniment dérivables d'après le lemme 4.1, et l'on a la formule d'inversion suivante pour la transformation $f \to F_f$:

$$(4) \qquad f[x] = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{n-1}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} F_f^{(n-1)}\left[x + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)\right] d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

En effet, il suffit pour cela de montrer la formule dans le cas $n = 2$: on a

$$(5) \qquad f[x] = \frac{-1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} F'\left[x + \frac{1}{2}\xi^2\right] d\xi,$$

si l'on pose

$$(6) \qquad F[x] = \int_{\mathbf{R}} f\left[x + \frac{1}{2}\xi^2\right] d\xi.$$

Le cas général résulte, en répétant $(n-1)$ fois le procédé. La démonstration de (5) est facile : d'après (6), on a

$$F'[x] = \int_{\mathbf{R}} f'\left[x + \frac{1}{2}\xi^2\right] d\xi,$$

d'où

$$\frac{-1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} F'\left[x+\frac{1}{2}\eta^2\right]d\eta = \frac{-1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f'\left[x+\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)\right]d\xi\,d\eta$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f'\left[x+\frac{1}{2}r^2\right]r\,dr\,d\theta = f[x].$$

L'inversion de (6) n'est autre que la résolution d'une équation intégrale de type d'Abel, comme l'avait remarqué R. GODEMENT [12]. L'existence de la formule d'inversion (4) pour la transformation $F: f \to F_f$ montre que celle-ci est une *bijection* de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_+(\mathbf{R})$, en vertu du lemme 4.1. Par suite, si l'on munit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_+(\mathbf{R})$ des topologies au sens de L. SCHWARTZ, il est clair que F définit un isomorphisme (algébrique et topologique) de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_+(\mathbf{R})$.

THÉORÈME 4.1 (HARISH-CHANDRA). — *Toute fonction sphérique de classe 1 de G par rapport au sous-groupe K est de la forme $\zeta_s(g)$ avec un paramètre complexe s convenable.*

DÉMONSTRATION. — Soit ζ une telle fonction et soit α la composée de F^{-1}, l'inverse de la transformation $f \to F_f$, et de l'homomorphisme $f \to \int_G f(g)\,\zeta(g)\,dg$. Ce sera donc un homomorphisme continu de $\mathcal{D}_+(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{C}$. On a donc, si $F_1, F_2 \in \mathcal{D}_+(\mathbf{R})$,

$$\alpha(F_1)\,\alpha(F_2) = \alpha\left(\int_{\mathbf{R}} F_1(t)\,F_2(r-t)\,dt\right) = \alpha\left(\int_{\mathbf{R}} F_1(t)\,\varepsilon_t \star F_2\,dt\right),$$

où $F \to \varepsilon_t \star F$, avec $(\varepsilon_t \star F)(r) = F(r-t)$, est continue dans $\mathcal{D}_+(\mathbf{R})$; par suite, on a

$$\alpha(F_1)\,\alpha(F_2) = \int_{\mathbf{R}} F_1(t)\,\alpha(\varepsilon_t \star F_2)\,dt,$$

et la fonction $t \to \alpha(\varepsilon_t \star F_2)$ est continue; si l'on choisit une F_2 telle que $\alpha(F_2) \neq 0$, on aura donc

$$\alpha(F_1) = \int_{\mathbf{R}} F_1(t)\,a(t)\,dt, \qquad \text{avec} \quad a(t) = \alpha(\varepsilon_t \star F_2)/\alpha(F_2).$$

Si l'on écrit de nouveau, pour F_1, F_2 quelconques dans $\mathcal{D}_+(\mathbf{R})$, la relation $\alpha(F_1 \star F_2) = \alpha(F_1)\,\alpha(F_2)$, on a

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} F_1(t)\,F_2(r)\,a(t+r)\,dt\,dr = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} F_1(t)\,F_2(r)\,a(t)\,a(r)\,dt\,dr;$$

pour toute fonction F dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, la fonction $\frac{1}{2}(F(t)+F(-t))$ est dans $\mathcal{D}_+(\mathbf{R})$; donc on a, quelles que soient F_1, F_2 dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$,

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} F_1(t)\,F_2(r)\,(a(t+r)+a(-t+r)+a(t-r)+a(-t-r))\,dt\,dr$$
$$=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} F_1(t)\,F_2(r)\,(a(t)+a(-t))\,(a(r)+a(-r))\,dt\,dr,$$

d'où l'on a l'équation fonctionnelle suivante pour la fonction continue $a(t)$:

$$\begin{aligned} &a(t+r)+a(-t+r)+a(t-r)+a(-t-r)\\ &\quad=(a(t)+a(-t))\,(a(r)+a(-r)); \end{aligned}$$

on en conclut qu'il existe une constante c telle qu'on ait

$$\frac{1}{2}(a(t)+a(-t))=\frac{1}{2}(e^{ct}+e^{-ct});$$

finalement, pour toute fonction f dans $\mathcal{D}$, on a donc

$$\begin{aligned} \alpha(F_f)=\int_G f(g)\,\zeta(g)\,dg &=\int_{\mathbf{R}} F_f(t)\,a(t)\,dt=\int_{\mathbf{R}} F_f(t)\,\frac{1}{2}(a(t)+a(-t))\,dt\\ &=\int_{\mathbf{R}} F_f(t)\,\frac{1}{2}(e^{ct}+e^{-ct})\,dt=\int_{\mathbf{R}} F_f(t)\,e^{ct}\,dt\\ &=\int_{\mathbf{R}} e^{\left(c+\frac{1}{2}(n-1)\right)t}\int_N f(a_t x)\,dx\,dt\\ &=\lambda_{-c}(f) \qquad \text{(dans la notation du paragraphe 2)}\\ &=\zeta_{\chi_0,\eta_0,-c+\frac{1}{2}(n-1)}(f), \end{aligned}$$

d'après les formules [2 (16)], [2 (19)], d'où résulte qu'on a

$$\zeta(g)=\zeta_{\chi_0,\eta_0,s}(g)=\zeta_s(g), \qquad \text{avec} \quad s=-c+\frac{1}{2}(n-1).$$

2. **Transformée sphérique de classe 1.** — Nous allons maintenant démontrer qu'il existe sur la demi-droite $0\leqq\nu<+\infty$, une mesure positive $dm(\nu)$ telle qu'on ait, pour les fonctions $f(g)$ dans A,

$$\int_G |f(g)|^2\,dg=\int_0^\infty |\hat{f}(\nu)|^2\,dm(\nu), \tag{7}$$

où $\hat{f}(\nu)$ désigne la *transformée sphérique* (de classe 1) :

$$\hat{f}(\nu)=\int_G f(g)\,\zeta_{\frac{1}{2}(n-1)+i\nu}(g)\,dg. \tag{8}$$

Comme on a

$$\int_G |f(g)|^2\, dg = \tilde{f} \star f(e), \qquad |\hat{f}(\nu)|^2 = (\tilde{f} \star f)\hat{}\,(\nu),$$

puisque $f \to \hat{f}(\nu)$ est un homomorphisme unitaire, il suffit de montrer l'existence d'une mesure positive telle qu'on ait

$$(7') \qquad f(e) = \int_0^\infty \hat{f}(\nu)\, dm(\nu), \qquad \text{pour} \quad f \in A.$$

Pour le calcul de la mesure, on peut évidemment se restreindre aux fonctions de $\mathcal{D}$. D'après [2 (16)], [2 (19)], on a

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} F_f(t)\, e^{-i\nu t}\, dt = 2\int_0^\infty F_f(t) \cos \nu t\, dt;$$

par conséquent, on a

$$(9) \qquad F_f(t) = F_f[\operatorname{ch} t] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\nu) \cos \nu t\, d\nu,$$

par l'inversion de la transformée de Fourier. D'autre part, la formule (4) donne, en particulier,

$$f(e) = f[1] = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{n-1} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} F_f^{(n-1)}\left[1 + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)\right] d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty F_f^{(n-1)}\left[1 + \frac{r^2}{2}\right] r^{n-2}\, dr$$

$$\left(\text{changement de variable : } r = 2 \operatorname{sh} \frac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty F_f^{(n-1)}[\operatorname{ch} t] \operatorname{sh}^{n-2}\frac{t}{2} \operatorname{ch}\frac{t}{2}\, dt.$$

Or, d'après (9) ci-dessus, on a

$$(-1)^{n-1} F_f^{(n-1)}[\operatorname{ch} t] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\nu) \left\{\left(\frac{-1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \cos \nu t\right\} d\nu,$$

d'où vient finalement

$$(10) \qquad f(e) = \int_0^\infty \hat{f}(\nu)\, \omega_n(\nu)\, d\nu,$$

avec

$$\omega_n(\nu) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty \left\{\left(\frac{-1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\cos\nu t\right\}\operatorname{sh}^{n-2}\frac{t}{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\,dt. \tag{11}$$

Lemme 4.2. — *Pour* $p = 1, 2, \ldots,$ *on a*

$$\left(\frac{-1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^p \cos\nu t = \frac{(p-1)!}{\pi}\nu\operatorname{sh}\pi\nu\int_0^\infty \frac{\cos\nu x}{(\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} x)^p}dx. \tag{12}$$

Démonstration. — Par le calcul de résidu, on a

$$\int_0^\infty \frac{\cos\nu x}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} x}dx = \frac{\pi\sin\nu t}{\operatorname{sh}\pi\nu\operatorname{sh} t} = \frac{\pi}{\nu\operatorname{sh}\pi\nu}\left(\frac{-1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)\cos\nu t,$$

d'où résulte (12) par dérivation successive.

Si l'on porte (12) avec $p = n-1$, dans (11), et échange l'ordre d'intégration, il vient

$$\omega_n(\nu) = \frac{\Gamma(n-1)\,\nu\operatorname{sh}\pi\nu}{\pi^{\frac{1}{2}(n+3)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty \cos\nu x\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{n-2}\frac{1}{2}t\operatorname{ch}\frac{1}{2}t}{(\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} x)^{n-1}}dt\,dx;$$

on peut évaluer l'intégrale intérieure, en posant $u = \operatorname{ch}\frac{1}{2}x\operatorname{sh}\frac{1}{2}t$ (pour x fixé), ce qui donne

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \Big/ 2^{n-1}\Gamma(n-1)\operatorname{ch}^{n-1}\frac{1}{2}x;$$

par suite, on a (*cf.* [19], p. 8)

$$\begin{aligned}\omega_n(\nu) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\nu\operatorname{sh}\pi\nu}{2^{n-1}\pi^{\frac{1}{2}(n+3)}}\int_0^\infty \frac{\cos\nu x}{\operatorname{ch}^{n-1}\frac{1}{2}x}dx \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+i\nu\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}-i\nu\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}(n+3)}\Gamma(n-1)}\nu\operatorname{sh}\pi\nu\end{aligned}$$

ou encore

$$\omega_n(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+i\nu\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}-i\nu\right)}{2^{n-1}\pi^{1+\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\nu\operatorname{sh}\pi\nu. \tag{13}$$

Compte tenu des formules

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\nu\right)=\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\nu}, \qquad \Gamma(i\nu)\Gamma(-i\nu)=\frac{\pi}{\nu\operatorname{sh}\pi\nu},$$

on obtient finalement le résultat suivant :

THÉORÈME 4.2. — *La mesure positive intervenant dans la formule de Plancherel pour les fonctions invariantes est de la forme* $\omega_n(\nu)\,d\nu$, $d\nu$ *étant la mesure de Lebesgue sur la demi-droite* $0 \leqq \nu < +\infty$, *et*

$$(13)_1 \quad \omega_{2m}(\nu)=\left(\nu^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\nu^2+\left(\frac{2m-3}{2}\right)^2\right)\frac{\nu\operatorname{th}\pi\nu}{2^{2m-1}\pi^m(m-1)!},$$

$$(13)_2 \quad \omega_{2m+1}(\nu)=\frac{\nu^2(\nu^2+1^2)\cdots(\nu^2+(m-1)^2)m!}{(2m)!\,\pi^{m+1}} \qquad \textit{pour} \quad m \geqq 1.$$

Remarquons qu'on déduit de

$$f(e)=\int_0^\infty \hat{f}(\nu)\,\omega_n(\nu)\,d\nu$$

la formule d'inversion de la transformation sphérique comme suit : pour $f(g)$ dans A, considérons la fonction f_1 également dans A définie par la formule suivante :

$$f_1(h)=\int_K f(guh)\,du.$$

Calculons sa transformée sphérique :

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(\nu)&=\int_G f_1(h)\,\zeta_s(h)\,dh=\int_G f(gh)\,\zeta_s(h)\,dh \qquad \left(s=\frac{n-1}{2}+i\nu\right)\\ &=\int_G f(h)\,\zeta_s(g^{-1}h)\,dh=\int_G f(h)\,\zeta_s(g^{-1}kh)\,dh\\ &=\int_G f(h)\int_K \zeta_s(g^{-1}kh)\,dk\,dh=\int_G f(h)\,\zeta_s(g^{-1})\,\zeta_s(h)\,dh;\end{aligned}$$

comme $\zeta_s(g^{-1})=\overline{\zeta_s(g)}$ pour $s=\frac{n-1}{2}+i\nu$, on a

$$\hat{f}_1(\nu)=\hat{f}(\nu)\,\overline{\zeta_s(g)};$$

d'autre part, on a évidemment $f_1(e)=f(g)$, d'où la formule d'inversion :

$$(14) \qquad f(g)=\int_0^\infty \hat{f}(\nu)\,\overline{\zeta_{\frac{1}{2}(n-1)+i\nu}(g)}\,\omega_n(\nu)\,d\nu.$$

§ 5. POSITIVITÉ DES FONCTIONS SPHÉRIQUES.

1. « **Série complémentaire** » **de représentations unitaires irréductibles.** — Nous avons construit (théorème **3**.1) une série de représentations unitaires irréductibles du groupe $G_+(n)$, dans l'espace hilbertien $L^2(S^{n-1})$, l'opérateur U_g^s, pour $g \in G = G_+(n)$, étant défini par la formule

$$(1) \qquad (U_g^s \varphi)(\mathbf{x}) = \alpha(g^{-1}, \mathbf{x})^{-s}\varphi(g^{-1}.\mathbf{x}) \qquad \text{pour} \quad \varphi \in L^2(S^{n-1}),$$

avec $s = \frac{1}{2}(n-1) + i\nu$. Dans les cas $n = 2$, 3, on sait, d'après les travaux de Bergmann [1], et de Gel'fand-Naimark [9], que, pour certaines valeurs réelles de paramètre s, il existe une fonction $\Phi_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ définie sur $S^{n-1} \times S^{n-1}$ telle que

$$(2) \qquad \langle \varphi, \psi \rangle_s = \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \varphi(\mathbf{x})\overline{\psi(\mathbf{y})}\,\Phi_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mu(\mathbf{x})\,d\mu(\mathbf{y})$$

définit un produit scalaire dans l'espace vectoriel $L(S^{n-1})$ des fonctions continues sur S^{n-1}, et que, dans l'espace hilbertien complété de $L(S^{n-1})$ par rapport à ce produit scalaire, la formule (1) définit encore une représentation *unitaire* irréductible de $G_+(n)$ (la « série complémentaire »). Nous allons démontrer ici l'existence d'une série analogue dans le cas général de $G_+(n)$.

Si l'on remonte de l'espace homogène $S^{n-1} \approx K/M$ au groupe K, cela revient à montrer qu'il existe, pour certaines valeurs de s, une fonction $\Phi_s(u, v)$ définie sur $K \times K$, invariante à droite par les éléments de M :

$$(3) \qquad \Phi_s(um, vm') = \Phi_s(u, v) \qquad \text{pour} \quad m, m' \in M,$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

pour φ, ψ dans $L(K)$, l'intégrale

$$(4) \qquad \langle \varphi, \psi \rangle_s = \int_K \int_K \varphi(u)\overline{\psi(v)}\,\Phi_s(u, v)\,du\,dv$$

définit un produit scalaire dans $L(K)$;

pour tout $g \in G$, l'opérateur U_g^s défini par (1) est unitaire, c'est-à-dire

$$(5) \qquad \langle U_g^s \varphi, U_g^s \psi \rangle_s = \langle \varphi, \psi \rangle_s.$$

En particulier, la fonction $\Phi_s(u, v)$ doit être intégrable sur $K \times K$, puisque la fonction constante 1 est dans $L(K)$.

Supposons donc qu'il existe une fonction intégrable $\Phi_s(u, v)$ satisfaisant aux conditions ci-dessus. Tout d'abord, la condition (5) pour les éléments $k \in K$, signifie qu'on a

$$\begin{aligned}&\iint \varphi(u)\overline{\psi(v)}\,\Phi_s(u, v)\,du\,dv\\&=\iint \varphi(k^{-1}u)\overline{\psi(k^{-1}v)}\,\Phi_s(u, v)\,du\,dv=\iint \varphi(u)\overline{\varphi(v)}\,\Phi_s(ku, kv)\,du\,dv\\&=\iint \varphi(u)\overline{\psi(v)}\int \Phi_s(ku, kv)\,dk\,du\,dv=\iint \varphi(u)\overline{\psi(v)}\int \Phi_s(kv^{-1}u, k)\,dk\,du\,dv,\end{aligned}$$

ce qui signifie qu'il existe une fonction intégrable $F_s(u)$ sur K telle que

$$\langle \varphi, \psi\rangle_s=\int_K\int_K \varphi(u)\overline{\psi(v)}\,F_s(v^{-1}u)\,du\,dv, \tag{6}$$

et, à cause de (3), telle que

$$F_s(mkm')=F_s(k) \qquad \text{pour} \quad m, m'\in M. \tag{7}$$

Écrivons maintenant la condition (5) pour $g=a_t$:

$$\begin{aligned}&\iint \varphi(u)\overline{\psi(v)}\,F_s(v^{-1}u)\,du\,dv\\&=\iint e^{-st(a_{-t},u)}\,\varphi(u_{a_{-t}})\,e^{-\bar{s}t(a_{-t},v)}\,\overline{\psi(v_{a_{-t}})}\,F_s(v^{-1}u)\,du\,dv \qquad (v\to v_{a_t})\\&=\iint e^{-st(a_{-t},u)}\,\varphi(u_{a_{-t}})\,e^{(\bar{s}-n+1)t(a_t,v)}\,\overline{\psi(v)}\,F_s((v_{a_t})^{-1}u)\,du\,dv,\end{aligned}$$

quelles que soient les fonctions continues φ, ψ; on a donc

$$\int \varphi(u)\,F_s(v^{-1}u)\,du=\int e^{-st(a_{-t},u)}\,\varphi(u_{a_{-t}})\,e^{(\bar{s}-n+1)t(a_t,v)}\,F_s((v_{a_t})^{-1}u)\,du,$$

puisque les deux membres sont des fonctions continues de v; en particulier, on a, pour $v=e$,

$$\begin{aligned}\int \varphi(u)\,F_s(u)\,du&=\int e^{-st(a_{-t},u)+(\bar{s}-n+1)t}\,\varphi(u_{a_{-t}})\,F_s(u)\,du \qquad (u\to u_{a_t})\\&=\int e^{(s-n+1)t(a_t,u)+(\bar{s}-n+1)t}\,\varphi(u)\,F_s(u_{a_t})\,du,\end{aligned}$$

ou encore, en vertu du lemme 1.2, et à cause de (7),

$$\begin{aligned}&\int_M\int_M\int_0^\pi \varphi(mu_\theta m')\,F_s(u_\theta)\sin^{n-2}\theta\,dm\,dm'\,d\theta\\&=\int_M\int_M\int_0^\pi e^{(s-n+1)t(a_t,mu_\theta m')+(\bar{s}-n+1)t}\\&\qquad\times\varphi(mu_\theta m')\,F_s((mu_\theta m')_{a_t})\sin^{n-2}\theta\,dm\,dm'\,d\theta,\end{aligned}$$

quelle que soit la fonction continue φ sur K; or on sait que

$$t(a_t, mu_0 m') = t(a_t, u_0) \qquad \text{et} \qquad (mu_0 m')_{a_t} = m(u_0)_{a_t} m',$$

pour m, $m' \in M$ (*voir* lemme 3.1), d'où résulte qu'on a

$$F_s(u_0) = e^{(s-n+1)\,t(a_t, u_0) + (\bar{s}-n+1)\,t} F_s((u_0)_{a_t}), \tag{8}$$

presque partout dans l'intervalle I : $0 \leqq \theta \leqq \pi$. Pour chaque t réel, il existe donc un sous-ensemble $N(t)$ de mesure nulle de I telle qu'on ait (8) pour tout $\theta \in I - N(t)$; soit $(t_p;\ p = 1, 2, \ldots)$ un sous-ensemble dénombrable partout dense de $\mathbf{R}$, et soit $N = \bigcup_{p=1}^{\infty} N(t_p)$; alors N est de même de mesure nulle, et l'on a (8) pour tout $\theta \in I - N$, et $t = t_p$, $p = 1, 2, \ldots$; il existe donc au moins un $\theta_0 \in I - N$, $0 < \theta_0 < \pi$, tel que $F_s(u_{\theta_0})$ soit fini, et qu'on ait

$$F_s(u_{\theta_0}) = e^{(s-n+1)\,t(a_{t_p}, u_{\theta_0}) + (\bar{s}-n+1)\,t_p} F_s((u_{\theta_0})_{a_{t_p}}), \tag{9}$$

pour $p = 1, 2, \ldots$. D'après le lemme 3.1, on sait que, si $u_{\theta'} = (u_\theta)_{a_t}$, on a

$$\cos\theta' = \frac{\operatorname{ch} t \cos\theta + \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \cos\theta}, \qquad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \cos\theta},$$

et

$$e^{t(a_t, u_\theta)} = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \cos\theta\,;$$

par conséquent, il est facile de voir que si l'on a

$$\operatorname{tg}(\varkappa/2) = e^{-t}\operatorname{tg}(\theta/2),$$

$\cos\theta' = \cos\varkappa \sin\theta' = \sin\varkappa$ et $\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \cos\theta = \sin\theta/\sin\varkappa$; si l'on pose donc

$$\varkappa_p = 2 \operatorname{Arctg}(e^{-t_p}\operatorname{tg}(\theta_0/2)) \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

on a

$$F_s(u_{\theta_0}) = \left(\frac{\sin\theta_0}{\sin\varkappa_p}\right)^{s-n+1} \left(\frac{\operatorname{tg}(\theta_0/2)}{\operatorname{tg}(\varkappa_p/2)}\right)^{\bar{s}-n+1} F_s(u_{\varkappa_p}) \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

ou encore

$$\begin{aligned} F_s(u_{\varkappa_p}) &= C(\sin\varkappa_p)^{s-n+1}(\operatorname{tg}\varkappa_p/2))^{\bar{s}-n+1} \\ &= C(1 + \cos\varkappa_p)^{\frac{1}{2}(s-\bar{s})}(1 - \cos\varkappa_p)^{\frac{1}{2}(s+\bar{s})-n+1}, \end{aligned}$$

pour $p = 1, 2, \ldots$; comme l'application $\varkappa = 2\operatorname{Arctg}(e^{-t}\operatorname{tg}(\theta_0/2))$ est un homéomorphisme de $-\infty < t < +\infty$ sur $0 < \varkappa < \pi$, la suite $(\varkappa_p)_{p \geqq 1}$

forme un sous-ensemble partout dense de I, d'où résulte qu'on a, si $s = \sigma + i\nu$,

(11) $F_s(u_\varkappa) = C(1+\cos\varkappa)^{i\nu}(1-\cos\varkappa)^{\sigma-n+1}$ presque partout sur I,

où C est une constante non nulle. On peut donc désormais supposer que la fonction $F_s(k)$ est définie par la formule

$$F_s(mu_\theta m') = F_s(u_\theta) = C(1+\cos\theta)^{i\nu}(1-\cos\theta)^{\sigma-n+1},$$

pour $0 < \theta < \pi$, si $s = \sigma + i\nu$.

Si l'on fait intervenir maintenant la condition (4), on a

$$\iint \varphi(u)\overline{\varphi(v)}F_s(v^{-1}u)\,du\,dv = \int F_s(u)\,\tilde{\varphi}\star\varphi(u)\,du \geqq 0,$$

pour tout φ dans $L(K)$, ce qui signifie que $F_s(u)$ est de type positif; par suite, on a $F_s(u^{-1}) = \overline{F_s(u)}$, ou d'après la forme de F_s,

$$C(1+\cos\theta)^{i\nu}(1-\cos\theta)^{\sigma-n+1} = \overline{C}(1+\cos\theta)^{-i\nu}(1-\cos\theta)^{\sigma-n+1},$$

ce qui entraîne qu'on a

$$\nu = 0 \qquad \text{et} \qquad C = \overline{C};$$

on a donc

(12) $F_s(u_\theta) = F_\sigma(u_\theta) = C(1-\cos\theta)^{\sigma-n+1}$, $s = \sigma$ réel, C réel.

La constante réelle C doit être positive, car pour une fonction réelle positive continue φ, l'expression

$$\langle \varphi, \varphi \rangle_\sigma = \int_K F_\sigma(k)\,\tilde{\varphi}\star\varphi(k)\,dk = C\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\pi \frac{\tilde{\varphi}\star\varphi(u_\theta)\sin^{n-2}\theta}{(1-\cos\theta)^{n-1-\sigma}}\,d\theta$$

est de même signe que C.

Pour que l'intégrale (6) existe pour φ, ψ quelconques dans $L(K)$, il faut et il suffit qu'elle existe pour $\varphi = \psi = \psi_0$, où $\psi_0(k) = 1$ pour tout $k \in K$, ce qui signifie que l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{n-2}\theta\,d\theta}{(1-\cos\theta)^{n-1-\sigma}}$$

converge; cela exige donc que $\sigma > \frac{1}{2}(n-1)$, et alors l'intégrale est égale à

$$\frac{2^{\sigma-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)\Gamma\left(\sigma-\frac{1}{2}(n-1)\right)}{\Gamma(\sigma)}.$$

Posons

$$(13) \qquad C_\sigma = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\sigma)}{2^{\sigma-1}\Gamma(n/2)\Gamma\left(\sigma - \frac{1}{2}(n-1)\right)},$$

et prenons $C = C_\sigma$, pour normaliser :

$$(14) \qquad \langle \psi_0, \psi_0 \rangle_\sigma = 1.$$

Avant d'aller plus loin, vérifions que notre fonction F_σ :

$$(12) \quad F_\sigma(mu_\theta m') = F_\sigma(u_\theta) = C_\sigma(1-\cos\theta)^{\sigma-n+1} \qquad \text{pour} \quad m, m' \in M,$$

avec C_σ définie par (13), et σ réel et $> \frac{1}{2}(n-1)$, satisfait à la condition (5). Pour cela remarquons qu'on a

$$F_\sigma(v^{-1}u) = C_\sigma(1 - u_{11}v_{11} - u_{21}v_{21} - \ldots - u_{n1}v_{n1})^{\sigma-n+1},$$

où u_{pq}, v_{pq} désignent les coefficients des matrices u, v; en effet, si $k = mu_\theta m'$, avec $m, m' \in M$, alors $k_{11} = \cos\theta$, et pour $u, v \in K$, on a

$$(v^{-1}u)_{11} = u_{11}v_{11} + \ldots + u_{n1}v_{n1},$$

d'où notre assertion. Il suffit évidemment de vérifier (5), dans le cas où $g = a_t$, et alors cela revient à vérifier l'équation fonctionnelle suivante pour F_σ :

$$(15) \qquad F_\sigma((v_{a_t})^{-1}u_{a_t}) = e^{(n-1-s)\,t(a_t,u)+(n-1-\bar{s})\,t(a_t,v)}F_\sigma(v^{-1}u),$$

pour tout couple (u, v) avec $u \neq v$; or, si l'on a

$$u = m_1 u_\theta m_2, \qquad v = m_3 u_{\varkappa'} m_4, \qquad \text{avec} \quad m_1, \ldots, m_4 \in M,$$

alors, d'après le lemme 3.1,

$$u_{a_t} = m_1 u_{\theta'} m_2, \qquad v_{a_t} = m_3 u_{\varkappa'} m_4,$$

avec

$$e^{t(a_t,u)} = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t\cos\theta, \qquad e^{t(a_t,v)} = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t\cos\varkappa,$$

$$\cos\theta' = \frac{\operatorname{ch} t\cos\theta + \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t\cos\theta}, \qquad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t\cos\theta},$$

$$\cos\varkappa' = \frac{\operatorname{ch} t\cos\varkappa + \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t\cos\varkappa}, \qquad \sin\varkappa' = \frac{\sin\varkappa}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t\cos\varkappa};$$

par suite, si l'on pose $m = m_3^{-1}m_1$, on a

$$F_\sigma(v^{-1}u) = F_\sigma(u_{-\varkappa}mu_\theta) = C_\sigma(1 - (\cos\theta\cos\varkappa + \sin\theta\sin\varkappa\, m_{22}))^{\sigma-n+1}$$

et

$$F_\sigma((v_{a_t})^{-1}u_{a_t}) = F_\sigma(u_{-\varkappa'}mu_{\theta'})$$
$$= C_\sigma\left[1 - \frac{(\operatorname{ch}t\cos\theta + \operatorname{sh}t)(\operatorname{ch}t\cos\varkappa + \operatorname{sh}t) + m_{22}\sin\theta\sin\varkappa}{(\operatorname{ch}t + \operatorname{sh}t\cos\theta)(\operatorname{ch}t + \operatorname{sh}t\cos\varkappa)}\right]^{\sigma-n+1},$$

d'où résulte immédiatement (15).

Il nous reste maintenant à savoir si la fonction F_σ satisfait à la condition (4), c'est-à-dire si (6) définit bien une forme hermitienne *positive*. Nous allons montrer qu'il en est ainsi si et seulement si $\sigma \leqq n-1$.

Considérons pour cela l'algèbre $A(K)$ des fonctions continues sur K, invariantes à gauche et à droite par les éléments de M, le produit de deux fonctions φ, ψ étant défini par le produit de composition

$$\varphi \star \psi(k) = \int_K \varphi(kl^{-1})\,\psi(l)\,dl.$$

C'est une algèbre *commutative*; en effet, pour toute fonction φ de $A(K)$, on a

$$\varphi(k^{-1}) = \varphi(k),$$

puisque, si $k = mu_\theta m'$,

$$k^{-1} = m'^{-1}u_{-\theta}m^{-1} = (m'^{-1}m_0)\,u_\theta\,(m_0^{-1}m^{-1}),$$

avec $m_0 = \exp(\pi X_{23})$; la commutativité s'en suit, comme au cas de l'algèbre $A(G)$ (*voir* § 1, remarque 2). Soit X l'ensemble des caractères unitaires α de $A(K)$, i. e. des homomorphismes α de $A(K)$ dans $\mathbf{C}$, tels que

$$\alpha(\tilde{\varphi}) = \overline{\alpha(\varphi)}, \qquad |\alpha(\varphi)| \leqq \int_K |\varphi(k)|\,dk.$$

A tout $\alpha \in X$, il existe une fonction $\alpha(k)$ continue et de type positif telle qu'on ait

$$(16) \qquad \alpha(\varphi) = \int_K \varphi(k)\,\alpha(k)\,dk \qquad \text{pour} \quad \varphi \in A(K).$$

D'après la théorie spectrale des algèbres unitaires commutatives, il existe sur l'espace localement compact X (discret et dénombrable dans ce cas) une mesure positive m (donc une mesure discrète) telle que la fonction $\hat{\varphi}(\alpha) = \alpha(\varphi)$ sur X soit intégrable pour m, et qu'on ait la formule d'inversion

$$(17) \qquad \varphi(k) = \int_X \hat{\varphi}(\alpha)\,\alpha(k)\,dm(\alpha) = \sum_{\alpha \in X} c_\alpha\,\hat{\varphi}(\alpha)\,\alpha(k),$$

pour tout $\varphi \in A\ (K)$. On a

$$c_\alpha = m(\{\alpha\}) = \left(\int_K |\alpha(k)|^2 dk\right)^{-1},$$

parce que les différentes fonctions $\alpha(k)$ sont deux à deux orthogonales.

Ces fonctions $\alpha(k)$ de type positif sont de plus *élémentaires*. De façon plus précise, il existe, pour chaque $\alpha \in X$, une représentation unitaire irréductible (de dimension finie) de K, soit $k \to T_k^\alpha$ dans un espace hilbertien E^α (de dimension finie) telle que :

i il existe un $e^\alpha \in E^\alpha$ de norme 1, tel que $T_m^\alpha e^\alpha = e^\alpha$, pour tout $m \in M$ (la représentation T^α est donc de classe 1 par rapport à M);

ii si $T_m^\alpha x = x$, pour un $x \in E^\alpha$, quel que soit $m \in M$, alors x est proportionnel à e^α;

iii on a

$$\alpha(k) = (T_k^\alpha e^\alpha, e^\alpha) \qquad \text{pour tout} \quad k \in K.$$

Autrement dit, il y a une correspondance biunivoque entre X et un ensemble R des représentations unitaires irréductibles de K, contenant exactement une fois la représentation triviale de M, et les fonctions $\alpha(k)$ ne sont autres que les fonctions sphériques *zonales* associées à ces représentations [toute représentation de R peut être réalisée dans l'espace $L^2(K/M)$; il existe un système de fonctions continues $\varphi_1(k), \ldots, \varphi_r(k)$ dans $L(K/M)$ qui se transforme suivant T^α pour $\varphi(u) \to \varphi(k^{-1}u)$; la fonction zonale est l'unique (à un facteur constant près) fonction qui est invariante par les T_m^α, $m \in M$]. Or, ces fonction zonales ont été déterminées par E. Cartan [4] : elles sont paramétrées par $p = 0, 1, 2, \ldots$ et l'on a

$$(18) \quad \alpha_p(k) = \alpha_p(u_0) = P_p(\cos\theta) \qquad \text{si} \quad k = mu_0m', \qquad \text{avec} \quad m, m' \in M,$$

où $P_p(t)$ est la solution (polynome en t) de l'équation différentielle

$$(19) \qquad (1-t^2)P''_p(t) - (n-1)tP'_p(t) + p(n-2+p)P_p(t) = 0,$$

satisfaisant à $P_p(1) = 1$. Par conséquent, on a

$$(20)_1 \qquad P_p(t) = \frac{p!}{(n-2)_p} C_p^{\frac{1}{2}(n-2)}(t) \qquad \text{pour} \quad n \geqq 3,$$

et

$$(20)_2 \qquad P_p(\cos\theta) = \cos p\theta \qquad \text{pour} \quad n = 2,$$

où pour un nombre réel $a \geqq 0$ et pour un entier $p \geqq 0$, on pose

$$a_p = \Gamma(a+p)/\Gamma(a),$$

et C_μ^ν désigne les fonctions de Gegenbauer (*voir*, par exemple, Magnus-Oberhettinger [19], p. 97).

Remarquons, en passant, que si l'on désigne par χ_p le caractère de la représentation T^{α_p}, on a

$$\int_K \alpha_p(lkl^{-1})\,dl = \overline{\chi_p(k)}/\chi_p(e).$$

Par suite, on a, pour $\varphi \in A(K)$, le développement suivant :

$$\varphi(k) = \sum_{p \geq 0} c_p\,\alpha_p(\varphi)\,\alpha_p(k), \tag{21}$$

avec

$$\begin{aligned} 1/c_p &= \int_K |\alpha_p(k)|^2\,dk \\ &= \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\left(\frac{p!}{(n-2)_p}\right)^2 \int_0^\pi \left(C_p^{\frac{1}{2}(n-2)}(\cos\theta)\right)^2 \sin^{n-2}\theta\,d\theta \end{aligned}$$

ou

$$(22)_1 \qquad c_p = \frac{(n-2)_p(n-2+2p)}{(n-2)p!} \qquad [p = 0, 1, 2, \ldots (n \geq 3)],$$

$$(22)_2 \qquad c_0 = 1, \qquad c_p = \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad p = 1, 2, \ldots (n = 2),$$

puisqu'on connaît la valeur de l'intégrale à cause de la relation d'orthogonalité des fonctions de Gegenbauer (*loc. cit.*, p. 98).

Soit maintenant φ une fonction continue sur K telle que $\varphi(km) = \varphi(k)$ pour tout $m \in M$; alors la fonction $\tilde{\varphi} \star \varphi$ est dans $A(K)$ et donc on a, d'après (21),

$$\tilde{\varphi} \star \varphi(k) = \sum_{p \geq 0} c_p\,\alpha_p(\tilde{\varphi} \star \varphi)\,\alpha_p(k), \tag{23}$$

ce qui entraîne qu'on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi \rangle_\sigma &= \sum_{p \geq 0} c_p\,\alpha_p(\tilde{\varphi} \star \varphi) \int_K \alpha_p(k)\,F_\sigma(k)\,dk \\ &= C_\sigma \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_{p \geq 0} c_p\,\alpha_p(\tilde{\varphi} \star \varphi) \frac{p!}{(n-2)_p} \int_0^\pi \frac{C_p^{\frac{1}{2}(n-2)}(\cos\theta)\sin^{n-2}\theta}{(1-\cos\theta)^{n-1-\sigma}}\,d\theta. \end{aligned}$$

On peut évaluer ces intégrales à l'aide d'une formule connue (*voir* [19], p. 100, tout en haut de la page), et l'on obtient finalement, en tenant compte de la normalisation de la constante C_σ par (13),

$$\langle \varphi, \varphi \rangle_\sigma = \sum_{p \geq 0} \frac{(n-1-\sigma)_p}{\sigma_p} c_p\,\alpha_p(\tilde{\varphi} \star \varphi). \tag{24}$$

Comme $\alpha_p(k)$ est de type positif, $\alpha_p(\tilde{\varphi}\star\varphi) \geqq 0$, pour tout $p \geqq 0$; on voit ainsi, d'après (24), que la condition (4) est remplie, si et seulement si $\frac{n-1}{2} < \sigma < n-1$. D'ailleurs, si $\langle \varphi, \varphi \rangle_\sigma = 0$ pour une fonction φ, on a $\alpha_p(\tilde{\varphi}\star\varphi) = 0$ pour tout p, d'où $\tilde{\varphi}\star\varphi(k) \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$. Par suite, la forme hermitienne en question est non-dégénérée. Pour $\sigma = n-1$, on a

$$\langle \varphi, \varphi \rangle_{n-1} = c_0\, \alpha_0(\tilde{\varphi}\star\varphi) = \left| \int_K \varphi(k)\, dk \right|^2,$$

donc la forme est non-négative, et elle définit la représentation triviale de G.

Remarquons qu'on a, d'autre part,

$$(25) \qquad (\varphi, \varphi) = \int_K |\varphi(k)|^2\, dk = \tilde{\varphi}\star\varphi(e) = \sum_{p \geqq 0} c_p\, \alpha_p(\tilde{\varphi}\star\varphi).$$

Comme on a

$$\frac{(n-1-\sigma)_p}{\sigma_p} \leqq 1,$$

si $\frac{n-1}{2} < \sigma \leqq n-1$, il vient

$$(26) \qquad \langle \varphi, \varphi \rangle_\sigma \leqq (\varphi, \varphi) \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in L(K/M).$$

Soit maintenant $\mathcal{H}^\sigma$ l'espace hilbertien formé par les (classes des) fonctions mesurables φ invariantes à droite par M telles que $\langle \varphi, \varphi \rangle_\sigma < +\infty$, le produit scalaire étant défini par

$$(27) \qquad \langle \varphi, \psi \rangle_\sigma = C_\sigma \int_K \int_K \frac{\varphi(u)\, \overline{\psi(v)}\, du\, dv}{(1-(u_{11}v_{11}+\ldots+u_{n1}v_{n1})^{n-1-\sigma}},$$

et considérons la représentation de G dans $\mathcal{H}^\sigma$ définie par la formule (1), avec $s = \sigma$. On sait qu'elle est unitaire; montrons qu'elle est irréductible. Soit $\mathcal{H}''$ le sous-espace vectoriel engendré par les $U_g^\sigma \psi_0$ (ψ_0 est la fonction constante 1), et soit $\mathcal{H}'$ son adhérence dans $\mathcal{H}^\sigma$. On démontre par le même raisonnement que dans le cas de la série principale, que la représentation de G sur $\mathcal{H}'$ obtenue par restriction de U^σ à $\mathcal{H}'$ est irréductible. Or on sait que $\mathcal{H}''$ est partout dense dans $L^2(K/M)$ (proposition 3.2), donc en particulier, $\mathcal{H}''$ est partout dense dans $L(K/M)$ pour la norme (φ, φ), *a fortiori* pour la norme $\langle \varphi, \varphi \rangle_\sigma$, à cause de (26). Par suite, $\mathcal{H}'$ contient $L(K/M)$. Or ce dernier est partout dense dans $\mathcal{H}^\sigma$, d'où $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^\sigma$, ce qui démontre l'irréductibilité de U^σ dans $\mathcal{H}^\sigma$.

La représentation U^σ est encore de classe 1 (par rapport au sous-groupe K), et sa fonction sphérique associée est égale à

$$\langle U_g^\sigma \psi_0, \psi_0 \rangle_\sigma = C_\sigma \int_K \int_K e^{-\sigma t(g^{-1}, u)} F_\sigma(v^{-1} u)\, du\, dv$$
$$= \int_K e^{-\sigma t(g^{-1}, u)}\, du\, C_\sigma \int_K F_\sigma(v)\, dv = \zeta_\sigma(g),$$

puisque

$$C_\sigma \int_K F_\sigma(v)\, dv = \langle \psi_0, \psi_0 \rangle_\sigma = 1.$$

En revenant sur la sphère $S^{n-1} \approx K/M$, on peut donc énoncer :

Théorème 5.1. — *Soit σ un nombre réel tel que $\frac{1}{2}(n-1) < \sigma < n-1$. Soit $\mathcal{H}^\sigma$ le sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions mesurables sur S^{n-1}, formé par les fonctions $\varphi(\mathbf{x})$ telles que*

$$\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \frac{\varphi(\mathbf{x})\overline{\varphi(\mathbf{y})}}{(1-(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{n-1-\sigma}}\, d\mu(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{y}) < +\infty,$$

où

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \qquad \textit{pour} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{n-1}.$$

Alors la formule

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\sigma = C_\sigma \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \frac{\varphi(\mathbf{x})\overline{\psi(\mathbf{y})}}{(1-(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{n-1-\sigma}}\, d\mu(\mathbf{x})\, d\mu(\mathbf{y}) \tag{28}$$

pour φ, ψ dans $\mathcal{H}^\sigma$, définit une structure d'espace hilbertien dans $\mathcal{H}^\sigma$. Si l'on définit, pour $g \in G$,

$$(U_g^\sigma \varphi)(\mathbf{x}) = \alpha(g^{-1}, \mathbf{x})^{-\sigma} \varphi(g^{-1}.\mathbf{x}) \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{H}^\sigma, \tag{29}$$

$\alpha(g, \mathbf{x}) = e^{t(g, \mathbf{x})}$ étant défini par la formule [3 (13)], *alors $g \to U_g^\sigma$ est une représentation unitaire irréductible de classe 1 du groupe $G_+(n)$, et sa fonction sphérique associée est égale à $\zeta_\sigma(g)$.*

Corollaire. — *Les fonctions sphériques $\zeta_\sigma(g)$ sont de type positif si $0 \leqq \sigma \leqq n-1$.*

Démonstration. — Pour $\frac{1}{2}(n-1) < \sigma < n-1$, cela résulte du théorème ci-dessus; pour $\sigma = n-1$, $\zeta_\sigma(g) = 1$ est trivialement de type positif; enfin, pour $\sigma = \frac{1}{2}(n-1)$, $\zeta_\sigma(g)$ est associée à la série principale. Pour $0 \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}(n-1)$, il suffit d'utiliser l'équation fonctionnelle [3 (15)].

2. Positivité des fonctions sphériques. — D'après le théorème 4.1, toute fonction sphérique de classe 1 du groupe $G_+(n)$ (par rapport au sous-groupe K) est de la forme $\zeta_s(g)$, avec un paramètre complexe s convenable, et elle est de type positif si ou bien $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}(n-1)$ (la série principale), ou bien $\mathrm{Im}(s) = 0$ et $0 \leqq s \leqq n-1$ (la série complémentaire). Nous allons voir maintenant qu'il n'y en a pas d'autre de type positif.

Proposition 5.1.

(i) *Si* $0 \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq n-1$, *on a*

$$|\zeta_s(g)| \leqq 1, \qquad \textit{quel que soit} \quad g \in G; \tag{30}$$

(ii) *Si* $\mathrm{Re}(s) < 0$, *on a*

$$|\zeta_s(a_t)| \sim \frac{2^{n-2}\Gamma(n/2)}{\pi^{\frac{1}{2}}} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} - s\right)}{\Gamma(n-1-s)} \right| e^{-\mathrm{Re}(s)t} \qquad \textit{pour} \quad t \to +\infty; \tag{31}$$

(iii) *Si* $\mathrm{Re}(s) > n-1$, *on a*

$$|\zeta_s(a_t)| \sim \frac{2^{n-2}\Gamma(n/2)}{\pi^{\frac{1}{2}}} \left| \frac{\Gamma\left(s - \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \right| e^{-\mathrm{Re}(n-1-s)t} \quad \textit{pour} \quad t \to +\infty. \tag{32}$$

Démonstration. — On a, d'une façon générale,

$$|\zeta_s(g)| \leqq \zeta_\sigma(g), \qquad \text{pour tout} \quad g \in G,$$

si $\mathrm{Re}(s) = \sigma$; si $0 \leqq \sigma \leqq n-1$, $\zeta_\sigma(g)$ est de type positif, donc $\zeta_\sigma(g) \leqq \zeta_\sigma(e) = 1$, ce qui démontre (i). Comme (iii) résulte de (ii) à l'aide de l'équation fonctionnelle, il suffit de montrer seulement (ii); d'après la formule [3 (19)], on a

$$\zeta_s(a_t) = \mathrm{ch}^{-s} t\, {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}; \frac{n}{2}; \mathrm{th}^2 t\right),$$

et, comme on a $\mathrm{Re}\left(\frac{n}{2} - \frac{s}{2} - \frac{s+1}{2}\right) > 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}; \frac{n}{2}; \mathrm{th}^2 t\right) = {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}; \frac{n}{2}; 1\right)$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2} - s\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(n-1-s)} 2^{n-2-s}$$

et, par suite, lorsque $t \to +\infty$,

$$|\zeta_s(a_t)| \sim \frac{2^{n-2}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)-s\right)}{\Gamma(n-1-s)}\right| e^{-\mathrm{Re}(s)t},$$

Supposons que $\zeta_s(g)$ soit de type positif. La proposition précédente montre qu'alors on a $0 \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq n-1$, car sinon ζ_s ne serait pas bornée. De plus, on doit avoir

$$\zeta_s(g^{-1}) = \overline{\zeta_s(g)} = \zeta_{\bar{s}}(g) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G;$$

en particulier, pour $g = a_t$, on a $Z_s(\mathrm{ch}\,t) = Z_{\bar{s}}(\mathrm{ch}\,t)$, et l'équation différentielle [3 (22)] entraîne que

$$s(s-n+1) = \bar{s}(\bar{s}-n+1),$$

ce qui signifie bien que s est soit de la forme $\frac{n-1}{2} + i\nu$, soit réel. On a ainsi démontré le théorème suivant :

Théorème 5.2. — *Les seules fonctions sphériques de classe* 1 *et de type positif sont les* $\zeta_s(g)$ *avec soit* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}(n-1)$, *soit* $\mathrm{Im}(s) = 0$ *et* $0 \leqq s \leqq n-1$.

Corollaire. — *Toute représentation unitaire irréductible de classe* 1 *du groupe* $G_+(n)$, *par rapport au sous-groupe* K, *est équivalente à une représentation de la série principale* $U^{\frac{1}{2}(n-1)+i\nu}$, $\nu \geqq 0$, *ou à une représentation de la série complémentaire* U^{σ}, *avec* $\frac{1}{2}(n-1) < \sigma \leqq n-1$. *Les représentations de ces deux séries sont deux à deux inéquivalentes.*

Démonstration. — La première assertion est une conséquence immédiate du théorème précédent, vu la correspondance biunivoque entre les fonctions sphérique de type positif et de classe 1, et les classes de représentations unitaires irréductibles de classe 1. Pour la seconde, il suffit de remarquer que les fonctions $\zeta_s(g)$, avec

$$(33) \quad s = \frac{n-1}{2} + i\nu, \quad \nu \geqq 0 \qquad \text{ou} \qquad s \text{ réel et } \quad \frac{n-1}{2} < s \leqq n-1,$$

sont deux à deux distinctes, ce qui est évident, puisque l'application $s \to s(s-n+1)$ de l'ensemble des s définis par (33) sur les nombres réels $\leqq 0$ est biunivoque (on rappellera que $-s(s-n+1)$ est la valeur propre de la fonction propre $\zeta_s(g)$ de l'opérateur de Casimir Ω.)

§ 6. UNE SÉRIE DE REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES.

Nous allons construire ici, généralisant ce que Harish-Chandra a fait dans le cas $n = 2$, une série (dépendant d'un paramètre entier) de représentations irréductibles du groupe $\mathbf{G}_+(n)$, pour $n \geqq 3$. Contrairement à ce qui se passe dans le cas $n = 2$, ces représentations ne sont pas de carré intégrable.

1. Construction des représentations. — Considérons la représentation U^{-m} de $G = \mathbf{G}_+(n)$ dans $\mathcal{H} = L^2(S^{n-1}, \mu)$ définie par la formule [3 (14)], avec $s = -m$, m un entier non-négatif. Nous allons montrer qu'il existe un sous-espace $\mathcal{K}^m$ de dimension finie de $\mathcal{H}$, stable pour U^{-m}, tel que les représentations de G dans $\mathcal{K}^m$, resp. $\mathcal{H}/\mathcal{K}^m$ (espace hilbertien quotient) définies de façon canonique par U^{-m}, sont irréductibles.

Remarquons tout d'abord que $U_k^{-m} = U_k$ est un opérateur de translation à gauche par k^{-1} :

$$(1) \qquad [U_k^{-m} f](\mathbf{x}) = f(k^{-1}.\mathbf{x}) \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{H}.$$

Soit $\mathcal{H}^p$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ formé par les fonctions sphériques d'ordre p au sens classique (ce sont des fonctions définies sur S^{n-1} par restriction des polynomes homogènes harmoniques de degré p). Il est clair que $\mathcal{H}^p$ est stable pour les U_k, $k \in K$, et l'on sait que la représentation de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}^p$ ainsi obtenue est *irréductible* (pour $n \geqq 3$); c'est là en effet la représentation de classe 1 de K par rapport au sous-groupe M, correspondant à la fonction zonale $\alpha_p(k)$ mentionnée dans le paragraphe 5. [Pour $n = 2$, c'est une somme directe de deux représentations irréductibles.] Désignons par $\mathfrak{D}^p$ la classe de cette représentation (classe suivant l'équivalence unitaire bien entendu); pour $p \neq q$, on a donc $\mathfrak{D}^p \neq \mathfrak{D}^q$. Il est clair que, dans la notation de Harish-Chandra [13], $\mathcal{H}^p$ est le sous-espace $\mathcal{H}_{\mathfrak{D}^p}$ des vecteurs de $\mathcal{H}$ qui se transforment suivant $\mathfrak{D}^p$. On a $\dim(\mathcal{H}_{\mathfrak{D}^p}) < +\infty$, et, par suite, on a $W_{\mathfrak{D}^p} = \mathcal{H}^p$, si l'on désigne par W le sous-espace des « well-behaved » vecteurs de $\mathcal{H}$ pour U^{-m} (voir *loc. cit.*, théorème 4, lemme 3.1, et aussi la démonstration du lemme 3.4); on remarquera, d'ailleurs, que la représentation U^{-m} est permise (« permissible ») car le centre de G se réduit à l'élément unité). Une base orthogonale de $\mathcal{H}^p$ peut être donnée de la manière suivante (*voir*, par exemple, Magnus-Oberhettinger [19], chap. IV, § 8) : désignons par I_p^n l'ensemble des suites P de $n-1$ entiers

$$P = (p, p_1, \ldots, p_{n-2})$$

telles que

$$p \geqq p_1 \geqq \ldots \geqq p_{n-3} \geqq |p_{n-2}|$$

(donc p, p_1, ..., p_{n-3} sont $\geqq 0$); introduisons, d'autre part, les coordonnées polaires dans S^{n-1} :

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = \cos\theta_1, \\ x_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{n-1} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-2} \cos\varkappa, \\ x_n = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-2} \sin\varkappa, \end{cases}$$

avec $0 \leqq \theta_i \leqq \pi$, pour $1 \leqq i \leqq n-2$, et $0 \leqq \varkappa < 2\pi$.

On définit alors, pour chaque $P \in I_p^n$, une fonction sur S^{n-1} comme suit :

$$(3) \quad Y_P^n(\mathbf{x}) = Y^n_{p, p_1, \dots, p_{n-2}}(\mathbf{x}) = P^{(n-2)}_{p, p_1}(\cos\theta_1) P^{(n-3)}_{p_1, p_2}(\cos\theta_2) \dots P^{(1)}_{p_{n-3}, |p_{n-2}|}(\cos\theta_{n-2}) e^{ip_{n-2}\varkappa},$$

où les fonctions $P^{(r)}_{p,q}(t)$ sont définies à leur tour par

$$(4) \qquad P^{(r)}_{p,0}(t) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(r)}{\Gamma(p+r)} C_p^{r/2}(t),$$

et

$$(5) \qquad P^{(r)}_{p,q}(t) = (1-t^2)^{q/2} \frac{d^q}{dt^q} P^{(r)}_{p,0}(t) = 2^q (p/2)_q \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(r)}{\Gamma(p+r)} (1-t^2)^{\frac{1}{2}q} C_{p-q}^{\frac{1}{2}r+q}(t),$$

à l'aide des fonctions de Gegenbauer $C_\mu^\nu(t)$. L'ensemble de ces $\dfrac{(n+p-3)!}{(n-2)!\,p!}(2p+n-2)$ fonctions $\{Y_P^n(\mathbf{x})$ forment une base orthogonale de $\mathcal{H}^p$; la relation d'orthogonalité des fonctions de Gegenbauer :

$$(6) \qquad \int_0^\pi \sin^{2r}\theta \, C_p^r(\cos\theta) \, C_q^r(\cos\theta) \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{\Gamma(2r+p)\pi}{2^{2r-1}(r+p)p!\,(\Gamma(r))^2} & \text{si } p = q, \end{cases}$$

permet de vérifier l'orthogonalité de ces fonctions et de calculer leurs normes : on a

$$(7) \qquad \| Y_P^n \|^2 = \int_{S^{n-1}} | Y_P^n(\mathbf{x}) |^2 \, d\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{S_n(1)} \int \dots \int | Y^n_{p, p_1, \dots, p_{n-2}}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varkappa) |^2 \times \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \dots \sin\theta_{n-2} \, d\theta_1 \, d\theta_2 \dots d\theta_{n-2} \, d\varkappa = C(n) D(n; p, p_1) E(n; p_1, \dots, p_{n-2}),$$

où $S_n(1)$ désigne l'aire de la sphère S^{n-1} de $\mathbf{R}^n$, et

$$(8) \qquad C(n) = \pi^{-n/2}\, 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\}^2,$$

$$(9) \qquad D(n;\, p,\, p_1) = \frac{(p-p_1+1)(p-p_1+2)\cdots(p+p_1+n-3)}{((p+1)(p+2)\cdots(p+n-3))^2\left(p+\dfrac{n-2}{2}\right)}$$

$$(10) \qquad E(n;\, p_1, \ldots, p_{n-2})$$
$$= \frac{(p_{n-3}+|p_{n-2}|)!}{\left(p_{n-3}+\dfrac{1}{2}\right)(p_{n-3}-|p_{n-2}|)!}$$
$$\times \prod_{j=1}^{n-4}\left[\left(\frac{p_j!}{(p_j+(n-3-j))!}\right)^2 \frac{\Gamma(p_j+p_{j+1}+n-2-j)}{\left(p+\dfrac{n-2-j}{2}\right)(p_j-p_{j+1})!}\right];$$

on conviendra que, dans le cas $n=3$, on remplace p_1 par $|p_1|$ dans (9), et que $E(3;\, p_1) = 1$ quel que soit p_1.

Proposition 6.1. — *Soit $\mathcal{H}^m$ la somme directe des sous-espaces $\mathcal{H}^p$, pour $0 \leqq p \leqq m$; alors $\mathcal{H}^m$ est stable pour la représentation U^{-m} de G.*

Démonstration. — Comme tout élément g de G s'écrit sous la forme ka_tk' avec k, k' dans K, et que chaque $\mathcal{H}^p$ est stable pour les U_k^{-m}, $k \in K$, il nous suffit de montrer qu'on a

$$U_{a_t}^{-m}(\mathcal{H}^m) \subset \mathcal{H}^m \qquad \text{quel que soit } t \text{ réel.}$$

Or, si $\mathbf{x}' = a_t.\mathbf{x}$, et si $(\theta'_1, \ldots, \theta'_{n-2}, \varkappa')$ désigne les coordonnées polaires de $\mathbf{x}'$, il est facile de voir qu'on a

$$(11) \qquad \begin{cases} \cos\theta'_1 = \dfrac{\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t \cos\theta_1}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \cos\theta_1}, \\[2ex] \sin\theta'_1 = \dfrac{\sin\theta_1}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \cos\theta_1}, \\[2ex] \theta'_j = \theta_j \quad (2 \leqq j \leqq n-2), \qquad \varkappa' = \varkappa. \end{cases}$$

Par suite, on a, pour $P = (p,\, p_1,\, \ldots,\, p_{n-2})$,

$$(12) \qquad (U_{a_t}^{-m} Y_P^n)(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varkappa)$$
$$= (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta_1)^m P_{p,p_1}^{(n-2)}\left(\frac{-\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t\cos\theta_1}{\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta_1}\right) P_{p_1,p_2}^{(n-3)}(\cos\theta_2)\cdots$$

[on remarquera que $\alpha(a_t, \mathbf{x}) = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \cos\theta_1$, d'après la définition [3 (13)]]. Pour montrer que $U_{a_t}^{-m}\, Y_P^n$ est encore dans $\mathcal{H}^m$, pour $P \in I_p^n$,

$0 \leqq p \leqq m$, il suffit, en vertu des relations d'orthogonalité, de montrer qu'on a

$$J = (U_{a_t}^{-m} Y_P^n, Y_Q^n) = 0,$$

quelle que soit la suite $Q \in I_q^n$, avec $q \geqq m+1$. D'après la forme (12) de la fonction $U_{a_t}^{-m} Y_P^n$, il est clair que $J = 0$, si

$$(p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}) \neq (q_1, q_2, \ldots, q_{n-2}), \qquad \text{où} \quad Q = (q, q_1, \ldots, q_{n-2});$$

on peut donc considérer le cas où $p_j = q_j$ pour $1 \leqq j \leqq n-2$. On a alors

$$J = \text{Cte} \int_0^\pi (\text{ch}\,t - \text{sh}\,t \cos)^m \left(\frac{\sin\theta_1}{\text{ch}\,t - \text{sh}\,t \cos\theta_1} \right)^{p_1}$$
$$\times C_{p-p_1}^{\frac{1}{2}(n-2)+p_1} \left(\frac{-\text{sh}\,t + \text{ch}\,t \cos\theta_1}{\text{ch}\,t - \text{sh}\,t \cos\theta_1} \right)$$
$$\times \sin^{p_1}\theta_1 \, C_{q-p_1}^{\frac{1}{2}(n-2)+p_1} (\cos\theta_1) \sin^{n-2}\theta_1 \, d\theta_1$$

ou encore, en faisant $u = \cos\theta_1$,

$$J = \text{Cte} \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{p_1 + \frac{1}{2}(n-3)} (\text{ch}\,t - \text{sh}\,t\,u)^{m-p_1}$$
$$\times C_{p-p_1}^{\frac{1}{2}(n-2)+p_1} \left(\frac{-\text{sh}\,t + u\,\text{ch}\,t}{\text{ch}\,t - u\,\text{sh}\,t} \right) C_{q-p_1}^{\frac{1}{2}(n-2)+p_1} (u)\, du;$$

or la fonction

$$F(u) = (\text{ch}\,t - \text{sh}\,t\,u)^{m-p_1} C_{p-p_1}^{\frac{1}{2}(n-2)+p_1} \left(\frac{-\text{sh}\,t + u\,\text{ch}\,t}{\text{ch}\,t - u\,\text{sh}\,t} \right)$$

est un polynome de degré au plus $m - p_1$; par suite, la formule

$$(12\ bis) \qquad \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\frac{1}{2}(\nu-1)} F(u)\, C_\mu^{\frac{1}{2}\nu}(u)\, du$$
$$= \frac{\nu_\mu}{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)_\mu 2^\mu \mu!} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\mu + \frac{1}{2}(\nu-1)} \frac{d^\mu F}{du^\mu}\, du$$

pour μ entier, ν réel (*voir* Magnus-Oberhettinger [19], p. 100) entraîne que $J = 0$.

Proposition 6.2. — *Le seul sous-espace stable non trivial de $\mathcal{H}$ pour la représentation U^{-m} est le sous-espace $\mathcal{H}^m$.*

Avant de commencer la démonstration de cette proposition, il nous faudra le lemme suivant :

Lemme 6.1. — *Si l'on désigne encore par U^{-m} la représentation de $\mathfrak{U}$, l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ de G, associée à U^{-m} (repré-*

sentation définie dans le sous-espace $\mathcal{H}_0 = \sum W_{\mathfrak{D}} = \sum_{p \geq 0} \mathcal{H}^p$; *voir* HARISH-CHANDRA [13]), *on a la formule suivante :*

$$(13) \quad U_Y^{-m} Y^n_{p, p_1, \ldots, p_{n-2}} = \frac{(p-m)(p+n-2)(p-p_1+1)}{(2p+n-2)(p+1)} Y^n_{p+1, p_1, \ldots, p_{n-2}} - \frac{p(p+m+n-2)(p+p_1+n-3)}{(2p+n-2)(p+n-3)} Y^n_{p-1, p_1, \ldots, p_{n-2}}$$

pour l'élément $Y = Y_1 = E_{01} + E_{10}$ *de* $\mathfrak{g}_0$; *on conviendra que le dernier terme soit nul si* $p = p_1$.

DÉMONSTRATION. — Pour tout $F \in \mathcal{H}_0$, on a, d'après la définition

$$U_Y^{-m} F = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (U_{a_t}^{-m} F - F),$$

puisqu'on a $a_t = \exp(tY)$; par suite, on, a en vertu des formules (3) et (12),

$$\begin{aligned} U_Y^{-m} Y^n_p (\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varkappa) &= 2^{p_1} \left(\frac{n-2}{2}\right)_{p_1} \frac{p!\,(n-3)!}{(p+n-3)!} L(\theta_1) \\ &\quad \times \sin^{p_1}\theta_1 P^{(n-2)}_{p_1, p_2}(\cos\theta_2) \ldots P^{(1)}_{p_{n-3}, |p_{n-2}|}(\cos\theta_{n-2})\, e^{ip_{n-2}\varkappa}, \end{aligned}$$

avec

$$L = L(\theta_1) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta_1)^{m-p_1} C^{r+p_1}_{p-p_1}\left(\frac{-\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t \cos\theta_1}{\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta_1} \right) - C^{r+p_1}_{p-p_1}(\cos\theta_1) \right],$$

où l'on a posé, pour simplifier, $r = \frac{n-2}{2}$. Supposons d'abord qu'on a $p > p_1$; alors, il vient

$$(14) \quad L = -(m-p_1)\cos\theta_1\, C^{r+p_1}_{p-p_1}(\cos\theta_1) + (C^{r+p_1}_{p-p_1})'(\cos\theta_1)(-\sin^2\theta_1);$$

or, on sait que

$$\frac{d}{dx} C^{\nu}_{\mu}(x) = 2\nu\, C^{\nu+1}_{\mu-1}(x),$$

d'où

$$L = (p_1 - m)\, x\, C^{r+p_1}_{p-p_1}(x) - 2(r+p_1)(1-x^2)\, C^{r+p_1+1}_{p-p_1-1}(x),$$

en posant : $x = \cos\theta_1$; à l'aide d'une formule de récurrence (*voir* [19], p. 98) :

$$\mu C^{\nu}_{\mu}(x) = (\mu - 1 + 2\nu)\, x\, C^{\nu}_{\mu-1}(x) - 2\nu(1-x^2)\, C^{\nu+1}_{\mu-2}(x),$$

on peut transformer le dernier terme (prendre $\mu = p - p_1 + 1$, $\nu = r + p_1$), et il vient

$$L = -(m+p+n-2)x C_{p-p_1}^{r+p_1}(x) + (p-p_1+1)\, C_{p+1-p_1}^{r+p_1}(x);$$

de nouveau, par une autre formule de récurrence (*loc. cit.*) :

$$(\mu+2)C_{\mu+2}^{\nu}(x) = 2(\mu+\nu+1)x C_{\mu+1}^{\nu}(x) - (2\nu+\mu)C_{\mu}^{\nu}(x),$$

on arrive au résultat suivant :

$$L = \frac{(p-m)(p-p_1+1)}{2(p+r)} C_{(p+1)-p_1}^{r+p_1}(\cos\theta_1)$$
$$- \frac{(p+m+n-2)(p+n+p_1-3)}{2(p+r)} C_{(p-1)-p_1}^{r+p_1}(\cos\theta_1);$$

la formule (13) résulte de là tout de suite, en tenant compte de la définition des fonctions Y_P^n. Dans le cas où l'on a $p = p_1$, il est clair que (14) se réduit à

$$L = (p-m)\cos\theta_1 = \frac{(p-m)}{2(r+p)} C_1^{r+p}(\cos\theta_1),$$

puisque $C_1^{\nu}(x) = 2\nu x$, d'où résulte immédiatement notre assertion.

Démonstration de la proposition 6.2. — Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace stable et non-trivial de $\mathcal{H}$ pour la représentation U^{-m}. Remarquons tout d'abord que, pour tout entier non-négatif p, on a ou bien $\mathcal{H}^p \subset \mathfrak{M}$, ou bien $\mathcal{H}^p \subset \mathfrak{M}^{\perp}$ (le complémentaire orthogonal de $\mathfrak{M}$ dans $\mathcal{H}$), puisque la représentation $k \to U_k^{-m}$ de K est complètement réductible et admet les sous-espaces $\mathcal{H}^p$ comme sous-espaces irréductibles. Soient p, q deux entiers tels qu'on ait $\mathcal{H}^p \subset \mathfrak{M}$ et $\mathcal{H}^q \subset \mathfrak{M}^{\perp}$; comme $\mathfrak{M}$ est stable pour la représentation U^{-m} de G, on a alors

$$(U_{a_t}^{-m} Y_P^n, Y_Q^n) = 0, \qquad \text{quel que soit } t \text{ réel},$$

pour $P \in I_p^n$, et $Q \in I_q^n$; en particulier, on aura donc

$$(U_Y^{-m} Y_{p,0,\ldots,0}^n, Y_{q,0,\ldots,0}^n) = 0,$$

ou encore, en vertu de la formule (13),

$$\text{(15)}\qquad \frac{(p-m)(p+n-2)}{2p+n-2}(Y_{p+1,0,\ldots,0}^n, Y_{q,0,\ldots,0}^n)$$
$$= \frac{p(p+m+n-2)}{2p+n-2}(Y_{p-1,0,\ldots,0}^n, Y_{q,0,\ldots,0}^n).$$

Supposons maintenant que $\dim \mathcal{M} < +\infty$; alors $p = \sup(r; \mathcal{H}^r \subset \mathcal{M})$ est fini, et si l'on pose $q = p + 1$, on aura $\mathcal{H}^q \subset \mathcal{M}^\perp$, et d'après la formule (15), il en résultera qu'on a

$$\frac{(p-m)(p+n-2)}{2p+n-2}(\mathrm{Y}^n_{p-1,0,\ldots,0}, \mathrm{Y}^n_{q,0,\ldots,0}) = 0,$$

puisque le produit scalaire du second membre de (15) est alors nul; ceci n'est possible que si $p = m$, donc $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}^m$ dans ce cas; si, de plus, on avait $\mathcal{M} \neq \mathcal{K}^m$, il y aurait un entier q avec $m > q \geqq 0$ tel que $\mathcal{H}^q \subset \mathcal{M}^\perp$ et $\mathcal{H}^{q+1} \subset \mathcal{M}$, ce qui entraînerait, en prenant $p = q + 1$ dans (15), la contradiction $p(p+m+n-2)/(2p+n-2) = 0$; on voit ainsi qu'on a $\mathcal{M} = \mathcal{K}^m$ dans ce cas. Considérons ensuite le cas où $\dim \mathcal{M}$ soit infinie; comme on a supposé $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$, il y aurait alors un entier q tel que $\mathcal{H}^q \subset \mathcal{M}^\perp$ et $\mathcal{H}^{q+1} \subset \mathcal{M}$; on aurait par suite la même contradiction que ci-dessus, en prenant $p = q + 1$ dans (15), ce qui exclut donc cette éventualité.

COROLLAIRE 1. — *La restriction de la représentation U^{-m} de G au sous-espace stable $\mathcal{K}^m$ est irréductible.*

COROLLAIRE 2. — *La représentation $\tilde{U}^{-m}$ de G dans l'espace hilbertien quotient $\mathcal{H}/\mathcal{K}^m$ déduite de U^{-m} par passage au quotient, est irréductible. Pour $P \in I^n_p$, $p > m$, notons $\tilde{Y}^n_P$ l'image de Y^n_P par l'application canonique φ_m de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}/\mathcal{K}^m$; les $\tilde{Y}^n_P$, $P \in I^n_p$, $p > m$, forment alors une base orthogonale de $\mathcal{H}/\mathcal{K}^m$, et l'on a la formule suivante :*

$$(16)\quad (\tilde{U}^{-m})_Y \tilde{Y}^n_P = \frac{(p-m)(p+n-2)(p-p_1+1)}{(2p+n-2)(p+1)} \tilde{Y}^n_{P_+} - \varepsilon(P)\frac{p(p+m+n-2)(p+p_1+n-3)}{(2p+n-2)(p+n-3)} \tilde{Y}^n_{P_-},$$

avec

$$P_+ = (p+1, p_1, \ldots, p_{n-2}), \qquad P_- = (p-1, p_1, \ldots, p_{n-2}),$$

pour $P = (p, p_1, \ldots, p_{n-2})$, *et* $\varepsilon(P) = 0$ *si* $p = m+1$, *ou* $p = p_1$, $\varepsilon(P) = 1$ *dans les autres cas.*

Il est clair que, si l'on désigne par $\tilde{\mathcal{H}}^p$ l'image de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}/\mathcal{K}^m$ par φ_m, et si $\tilde{W}$ est le sous-espace des vecteurs analytiques de $\mathcal{H}/\mathcal{K}^m$ pour $\tilde{U}^{-m}$, l'on a

$$(\tilde{W})_{\mathfrak{D}^p} = \tilde{\mathcal{H}}^p \qquad \text{pour} \quad p > m,$$

et donc que

$$(17)\qquad (\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0 = \sum_{p>m} \tilde{W}_{\mathfrak{D}^p} = \sum_{p>m} \tilde{\mathcal{H}}^p.$$

Notre but est maintenant de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 6.3. — *La représentation irréductible $\tilde{U}^{-m}$ de G dans $\mathcal{H}/\mathcal{K}^m$ est infinitésimalement unitaire (au sens de Harish-Chandra), c'est-à-dire : on peut définir un produit scalaire nouveau dans $(\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$, soit $\langle \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 \rangle$ pour $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$ dans $(\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$, de telle manière qu'on ait*

$$\langle \tilde{U}_X^{-m} \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 \rangle + \langle \tilde{Y}_1, \tilde{U}_X^{-m} \tilde{Y}_2 \rangle = 0, \tag{18}$$

quels que soient $X \in \mathfrak{g}_0$, $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2 \in (\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$.

DÉMONSTRATION. — Définissons pour $p > m$, les nombres positifs $a(p)$ par les relations de récurrence suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(m+1) = a, & \text{avec } a \text{ une constante positive;} \\ a(p+1) = \dfrac{p+m+n-1}{p-m} a(p), & \text{pour } \quad p \geqq m+1. \end{array} \right. \tag{19}$$

D'après la remarque qui précède l'énoncé de la proposition, tout vecteur $\tilde{F}$ de $(\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$ est de la forme suivante :

$$\tilde{F} = \sum_{p>m} \sum_{P \in I_p^n} c_P \tilde{Y}_P^n, \tag{20}$$

où les coefficients c_P sont nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. Pour

$$\tilde{F}_i = \sum_{p>m} \sum_{P \in I_p^n} c_P^{(i)} \tilde{Y}_P^n, \qquad (i = 1, 2),$$

définissons le produit scalaire $\langle \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 \rangle$ par la formule suivante :

$$\langle \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 \rangle = \sum_{p>m} a(p) \sum_{P \in I_p^n} c_P^{(1)} \overline{c_P^{(2)}} \, \| Y_P^n \|^2; \tag{21}$$

il est clair que cette définition fait de $(\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$ un espace préhilbertien, et qu'on a (18) pour tout $X \in \mathfrak{k}_0$ (sous-algèbre de $\mathfrak{g}_0$ correspondant à K), car U_k^{-m} est unitaire pour $k \in K$. Calculons le premier membre de (18) pour $X = Y = E_{10} + E_{01}$ et pour $Y_1 = Y_P^n$ et $Y_2 = Y_Q^n$; on constate qu'il est nul si $(p_1, \ldots, p_{n-2}) \neq (q_1, \ldots, q_{n-2})$, d'après la formule (16) et la définition même du produit scalaire (21); on peut donc supposer que $p_j = q_j$ pour $1 \leqq j \leqq n-2$, et de plus que $q \geqq p$, car l'expression est symétrique en p, q. Si $q \geqq p+2$ ou $q = p$, on trouve également nul, parce que $\tilde{U}_Y^{-m} \tilde{Y}_P^n$ est une combinaison linéaire de $\tilde{Y}_{P+}^n$ et $\tilde{Y}_{P-}^n$ et

$q \neq p+1$, $p-1$; il reste donc à examiner le cas $q = p+1$: on a alors $P_+ = Q$, $P = Q_-$, et, d'après (16), (21), il vient

$$\begin{aligned} S &= \langle \tilde{U}_Y^{-m} \tilde{Y}_P^n, \tilde{Y}_Q \rangle + \langle \tilde{Y}_P^n, \tilde{U}_Y^{-m} \tilde{Y}_Q^n \rangle \\ &= \frac{(p-m)(p+n-2)(p-p_1+1)}{(2p+n-2)(p+1)} a(p+1) \| Y_{P+}^n \|^2 \\ &\quad - \frac{(p+1)(p+m+n-1)(p+p_1+n-2)}{(2p+n)(p+n-2)} a(p) \| Y_P^n \|^2, \end{aligned}$$

puisque

$$\langle \tilde{Y}_{P-}^n, \tilde{Y}_Q^n \rangle = \langle \tilde{Y}_P^n, \tilde{Y}_{Q+}^n \rangle = 0,$$

et $\varepsilon(Q) = 1$, car $q = p+1 > m+1$, $q = p+1 \geqq p_1+1 > p_1$; on a donc d'après (7),

$$\begin{aligned} S &= C(n) E(n; p_1, \ldots, p_{n-2}) \\ &\quad \times \left[\frac{(p-m)(p+n-2)(p-p_1+1)}{(2p+n-2)(p+1)} a(p+1) D(n; p+1, p_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(p+1)(p+m+n-1)(p+p_1+n-2)}{(2p+n)(p+n-2)} a(p) D(n; p, p_1) \right] \end{aligned}$$

qui est bien nul, d'après les définitions de $D(n; p, p_1)$, $D(n; p+1, p_1)$ et $a(p+1)$, $a(p)$. On a ainsi montré (18) pour $X \in \mathfrak{k}_0$, et $Y = Y_1$; or, il est facile de voir que les $X \in g_0$ pour lesquels on a (18), quels que soient $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$ dans $(\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$, forment une sous-algèbre; comme les éléments $X \in \mathfrak{k}_0$ et $Y = Y_1$ engendrent $\mathfrak{g}_0$, on a bien (18) pour tout X dans $\mathfrak{g}_0$.

C. Q. F. D.

2. **Non-intégrabilité des représentations.** — La représentation $\tilde{U}^{-m}$ de G dans $\mathcal{H}/\mathcal{K}^m$, définie pour tout entier $m \geqq 0$, est infinitésimalement unitaire, comme on l'a vu au numéro précédent; il existe donc sur l'espace hilbertien $\mathcal{V}^m$, le complété de l'espace préhilbertien $(\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0 \approx \sum_{p>m} \mathcal{H}^p$ muni du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ défini par (19), (21), une représentation unitaire irréductible que nous désignerons par T^m, ayant $\tilde{U}^{-m}$ comme la représentation infinitésimale associée de $\mathfrak{U}$. Rappelons brièvement comment on définit cette représentation (*voir* Harish-Chandra [13], théorème 9 et sa démonstration p. 233-239). Pour un $X \in \mathfrak{U}$, et un entier $r > 0$, on désigne par $\exp_r X$ l'élément $1 + X + X^2/2 + \ldots + X^r/r!$ de $\mathfrak{U}$; on montre qu'il existe un voisinage ouvert convexe et symétrique U de O dans $\mathfrak{g}_0$ (pour la topologie évidente de $\mathfrak{g}_0$ en tant qu'espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$), tel que, si

$\Phi \in (\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$, la suite $\tilde{U}^{-m}_{\exp_r X}\,\Phi$ converge faiblement vers $A(X)\Phi$ [définition de $A(X)$ sur $(\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$], pour tout $X \in U$, et que l'opérateur $A(X)$ peut se prolonger en un opérateur unitaire défini dans $\mathcal{V}^m$, qu'on note encore $A(X)$; pour un $g \in G$, on écrit $g = (\exp X_1) \ldots (\exp X_j)$, avec $X_1, \ldots, X_j \in U$, et alors on pose : $T^m_g = A(X_1) \ldots A(X_j)$; on montre que cela ne dépend pas du choix des X_i, $1 \leqq i \leqq j$, et que $g \to T^m_g$ définit bien une représentation unitaire irréductible, dont la représentation infinitésimale associée (de $\mathfrak{U}$) coïncide avec $\tilde{U}^{-m}$. On a d'ailleurs, pour $\Phi \in (\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$, $\Psi \in \mathcal{V}^m$ et $X, Y \in U$,

$$(22) \qquad \langle A(X)A(Y)\Phi, \Psi\rangle = \lim_{p\to\infty}\left\{\lim_{q\to\infty}\langle \tilde{U}^{-m}_{\exp_p X}\,\tilde{U}^{-m}_{\exp_q Y}\Phi, \Psi\rangle\right\};$$

il en résulte facilement que, pour tout $X \in \mathfrak{g}_0$, $\Phi \in (\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$ et $\Psi \in \mathcal{V}^m$, on a

$$(23) \qquad \langle T^m_{\exp X}\Phi, \Psi\rangle = \lim_{r\to\infty}\langle \tilde{U}^{-m}_{\exp_r X}\Phi, \Psi\rangle = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\langle(\tilde{U}^{-m}_X)^r\Phi, \Psi\rangle.$$

En particulier, on a pour $P \in I^n_p$, $Q \in I^n_q$, $p, q > m$, la formule suivante

$$(24) \qquad \langle T^m_{a_t}\tilde{Y}^n_P, \tilde{Y}^n_Q\rangle = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\langle(\tilde{U}^{-m}_Y)^r\tilde{Y}^n_P, \tilde{Y}^n_Q\rangle.$$

LEMME 6.2. — *Si $P, Q \in I^n_p$, avec $p > m$, alors on a*

$$(25) \qquad \langle T^m_{a_t}\tilde{Y}^n_P, \tilde{Y}^n_Q\rangle = \delta_{PQ}\,a(p)(U^{-m}_{a_t}Y^n_P, Y^n_P),$$

ou $\delta_{PQ} = 1$ si $P = Q$, et $= 0$ si $P \neq Q$, et $a(p)$ est défini par (19).

DÉMONSTRATION. — D'après la formule (24) qu'on vient d'établir et compte tenu du fait que Y^n_P, Y^n_Q sont des vecteurs analytiques dans $\mathcal{H}$ pour U^{-m}, il suffit de montrer qu'on a, pour tout entier $r \geqq 0$,

$$\langle(\tilde{U}^{-m}_Y)^r\tilde{Y}^n_P, \tilde{Y}^n_Q\rangle = \delta_{PQ}\,a(p)\,((U^{-m}_Y)^r Y^n_P, Y^n_P);$$

or le coefficient de $\tilde{Y}^n_Q$ dans $(\tilde{U}^{-m}_P)^r\,\tilde{Y}^n_P$ [qu'on calcule à l'aide de (16)] est le même que celui de Y^n_Q dans $(U^{-m}_Y)\,Y^n_P$, [qu'on calcule à l'aide de (13)], puisque le facteur $(p - m)$ annule les contributions provenant des Y^n_R avec $R \in I^n_r$, $r \leqq m$; on a donc

$$\langle(\tilde{U}^{-m}_Y)^r\tilde{Y}^n_P, \tilde{Y}^n_Q\rangle = a(p)((U^{-m}_Y)^r Y^n_P, Y^n_Q),$$

d'après la définition du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$; de plus, si $P, Q \in I^n_p$,

$$P = Q \iff (p_1, \ldots, p_{n-2}) = (q_1, \ldots, q_{n-2}),$$

d'où si $P \neq Q$, on a

$$((U_{\bar{Y}}^{m})^r Y_P^n, Y_Q^n) = 0,$$

puisque les opérateurs $(U_{\bar{Y}}^{m})^r$ appliquent le vecteur Y_P^n dans un sous-espace sous-tendu par les Y_R^n avec $R = (j, p_1, \ldots, p_{n-2})$, $j \geqq p_1$.

C. Q. F. D.

Montrons maintenant qu'on a, pour tout $P \in I_p^n$, avec $p > m$,

$$(26) \quad \int_K \int_K |\langle T_{k_1 a_t k_2}^m \tilde{Y}_P^n, \tilde{Y}_P^n \rangle|^2 \, dk_1 \, dk_2 = \frac{a(p)^2}{(d_p^n)^2} \sum_{Q \in I_p^n} |(U_{\bar{a}_t}^{-m} Y_Q^n, Y_Q^n)|^2,$$

où d_p^n désigne la dimension de $\mathcal{H}^p$.

En effet, les fonctions $\xi_P = Y_P^n / \| Y_P^n \|$, $P \in I_p^n$, forment une base orthonormée de $\mathcal{H}^p$, et l'on a donc

$$U_k \xi_P = \sum_{Q \in I_p^n} c_{QP}(k) \, \xi_Q,$$

avec $(c_{PQ}(k))$ une matrice orthogonale; il est clair que si l'on pose $\tilde{\xi}_P = \varphi_m(\xi_P)$, on a

$$T_k^m \tilde{\xi}_P = \sum_{Q \in I_p^n} c_{QP}(k) \tilde{\xi}_Q,$$

puisque les représentations T^m et $\tilde{U}^{-m}$ coïncident sur $(\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$, lorsqu'on les restreint au sous-groupe K. On a donc

$$|\langle T_{k_1 a_t k_2}^m \tilde{Y}_P^n, \tilde{Y}_P^n \rangle|^2 / \| Y_P^n \|^2 = |\langle T_{a_t}^m T_{k_2}^m \tilde{\xi}_P, T_{k_1^{-1}}^m \tilde{\xi}_P \rangle|^2$$
$$= \sum_{Q, Q', R, R' \in I} c_{QP}(k_2) \overline{c_{Q'P}(k_2)} c_{PR}(k_1) \overline{c_{PR'}(k_1)} \langle T_{a_t}^m \tilde{\xi}_Q, \tilde{\xi}_R \rangle \overline{\langle T_{a_t}^m \tilde{\xi}_{Q'}, \tilde{\xi}_{R'} \rangle},$$

d'où, en intégrant par rapport à k_1, k_2, on obtient

$$\int_K \int_K |\langle T_{k_1 a_t k_2}^m \tilde{Y}_P^n, \tilde{Y}_P^n \rangle|^2 \, dk_1 \, dk_2 = \| Y_P^n \|^2 \sum_{Q, R} \frac{1}{(d_p^n)^2} |\langle T_{a_t}^m \tilde{\xi}_Q, \tilde{\xi}_R \rangle|^2,$$

en vertu des relations d'orthogonalité; la formule (26) résulte de là immédiatement, à cause du lemme 6.2.

D'après la formule [1 (35)], on a

$$\int_G |f(g)|^2 \, dg = \mathrm{Cte} \int_K \int_K \int_0^{+\infty} |f(k_1 a_t k_2)|^2 \, \mathrm{sh}^{n-1} t \, dk_1 \, dk_2 \, dt,$$

pour $f(g) = \langle T_g^m \tilde{Y}_P^n, \tilde{Y}_P^n \rangle$; par suite, la recherche de l'intégrabilité de $|f(g)|^2$ revient à étudier le comportement à l'infini des fonctions

$|(U_{a_t}^{-m} Y_P^n, Y_P^n)|^2 \operatorname{sh}^{n-1} t$, pour $P \in I_p^n$. On a, d'après les formules (3), (4), (5) et (12),

$$(U_{a_t}^{-m} Y_P^n, Y_P^n) = C \int_0^\pi (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos \theta_1)^{m-p_1}$$
$$\times C_{p-p_1}^{r+p_1}\left(\frac{-\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t \cos \theta_1}{\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos \theta_1}\right) C_{p-p_1}^{r+p_1}(\cos \theta_1) \sin^{n-2+2p_1}\theta_1 \, d\theta_1$$

$\left(\text{où } C \text{ est une constante } > 0, \text{ et l'on pose } r = \frac{1}{2}(n-2)\right)$

$$= C \int_{-1}^{+1} (\operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t)^{m-p_1}$$
$$\times C_{p-p_1}^{r+p_1}\left(\frac{-\operatorname{sh} t + u \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t}\right) C_{p-p_1}^{r+p_1}(u)(1-u^2)^{r+p_1-\frac{1}{2}} du$$
$$= C' \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{r+p_1-\frac{1}{2}+(p-p_1)} \frac{d^{p-p_1}}{du^{p-p_1}} F(u)\, du,$$

avec une constante $C' > 0$,

$$F(u) = (\operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t)^{m-p_1} C_{p-p_1}^{r+p_1}\left(\frac{-\operatorname{sh} t + u \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t}\right), \tag{27}$$

en vertu de la formule (12 *bis*).

Considérons maintenant le cas où l'on a $p = m + 1$. Il est clair que $Q(u) = (\operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t)\, F(u)$ est alors un polynome (en u) de degré $\leqq m + 1 - p_1$; d'autre part, on a

$$C_{m+1-p_1}^{r+p_1}(X) = \sum_{q=0}^{m+1-p_1} b_q X^q, \qquad \text{avec } b_{m+1-p_1} \neq 0;$$

comme on peut écrire

$$Q(u) = (\operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t) Q_1(u) + Q(\coth t),$$

avec un polynome $Q_1(u)$ de degré $< m + 1 - p_1$, on a [8]

$$F(u) = Q_1(u) + \frac{Q(\coth t)}{\operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t},$$

d'où

$$\frac{d^{m+1-p_1}}{du^{m+1-p_1}} F(u) = \frac{(m+1-p_1)!\, \operatorname{sh}^{m+1-p_1} t}{(\operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t)^{m+2-p_1}} Q(\coth t);$$

or, comme on peut écrire, d'autre part,

$$Q(u) = (\operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t)^{m+1-p_1} C_{m+1-p_1}^{r+p_1}\left(\frac{-\operatorname{sh} t + u \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t)}\right)$$
$$= b_{m+1-p_1}(-\operatorname{sh} t + u \operatorname{ch} t)^{m+1-p_1} + Q_2(u)(\operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t),$$

---

[8] Si $p_1 = p = m + 1$, on convient que le polynome $Q_1(u)$ est nul.

avec un polynome $Q_2(u)$, on a

$$Q(\coth t) = b_{m+1-p_1}/\mathrm{sh}^{m+1-p_1} t,$$

d'où résulte donc finalement qu'on a

$$\frac{d^{m+1-p_1}}{du^{m+1-p_1}} F(u) = \frac{(m+1-p_1)!\, b_{m+1-p_1}}{(\mathrm{ch}\, t - u\, \mathrm{sh}\, t)^{m+1-p_1}}.$$

Par conséquent, si $P \in I^n_{m+1}$, on a

$$(U^{-m}_{a_t} Y^n_P, Y^n_P) = C'' \int_{-1}^{+1} \frac{(1-u^2)^{m+\frac{1}{2}(n-1)}\, du}{(\mathrm{ch}\, t - u\, \mathrm{sh}\, t)^{m+2-p_1}}$$

avec une constante $C'' > 0$, ou encore

$$(U^{-m}_{a_t} Y^n_P, Y^n_P) = C'' \frac{1}{\mathrm{ch}^{m+2-p_1} t}\, {}_2F_1\left(\frac{m+2-p_1}{2}, \frac{m+3-p_1}{2}; m+\frac{n}{2}+1; \mathrm{th}^2 t\right).$$

Or, comme on a

$$\left(m+\frac{n}{2}+1\right) - \left(\frac{m+2-p_1}{2} + \frac{m+3-p_1}{2}\right) = \frac{n}{2} + p_1 - \frac{3}{2} > 0 \quad \text{si } n > 3,$$

la fonction hypergéométrique tend vers une valeur finie [à savoir $\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-3}{2}+p_1\right)/\Gamma\left(\frac{m+n+p_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n+1+p_1}{2}\right)$, *cf.* [19], p. 11], d'où pour $n > 3$,

$$|(U^{-m}_{a_t} Y^n_P, Y^n_P)| \sim \mathrm{Cte}\,(e^{-(m+2-p_1)t}) \qquad \text{lorsque} \quad t \to +\infty,$$

et, par suite, si $P = (m+1, m+1, p_2, \ldots, p_{n-2}) \in I^n_{m+1}$, avec $n > 3$,

$$|(U^{-m}_{a_t} Y^n_P, Y^n_P)|^2\, \mathrm{sh}^{n-1} t \sim \mathrm{Cte}\,(e^{(n-3)t}) \qquad \text{lorsque} \quad t \to +\infty,$$

ce qui montre bien que $|(U^{-m}_{a_t} Y^n_P, Y^n_P)|$ n'est pas de carré intégrable pour la mesure $\mathrm{sh}^{n-1} t\, dt$ sur la semi-droite $0 \leqq t < +\infty$. La représentation unitaire irréductible T^m, pour $m \geqq 0$, ne peut donc pas être de carré intégrable, si $n > 3$. Pour $n = 3$, on sait qu'il n'existe pas de représentations unitaires irréductibles de carré intégrable, puisque $G_+(3)$ est localement isomorphe au groupe $SL(2, C)$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 6.1. — *La représentation unitaire irréductible T^m de $\mathbf{G}_+(n)$, définie dans l'espace hilbertien $\mathcal{V}^m$, le complété de l'espace préhilbertien $(\mathcal{H}/\mathcal{K}^m)_0$ muni du produit scalaire (21), n'est pas de carré intégrable, pour tout $m \geqq 0$, et $n \geqq 3$.*

REMARQUE 1. — Dans le cas $n = 4$, c'est-à-dire le cas du groupe de DE SITTER, la représentation T^m n'est autre que la représentation $\pi_{m+1,0}$ dans la classification de DIXMIER [6], pour $m \geqq 0$ (on n'a qu'à vérifier que l'ensemble d'indices Γ pour T^m est bien de la forme indiquée dans la figure 5, p. 25, *loc. cit.*).

REMARQUE 2. — Dans le cas : $n = 3$, c'est-à-dire dans le cas du groupe de Lorentz, on peut montrer que, pour $p \geqq 0$, la représentation T^p dans $\mathcal{V}^p$ est unitairement équivalente à la représentation $U^1(\eta_{p+1})$ de la « série principale ». En effet, soit η_p le caractère de M, qui est ici isomorphe à $SO(2)$, défini par : $\eta_p(m_\varkappa) = e^{ip\varkappa}$; la représentation $U^s(\eta_{p+1})$ est la restriction de la représentation U^s, définie dans $\mathfrak{H} = L^2(K)$ par la forme [3 (14)], au sous-espace $\mathfrak{H}^{\eta_{p+1}}$ de $\mathfrak{H}$, formé par les $\varphi \in \mathfrak{H}$ tels qu'on ait $\varphi \bigstar \eta_{p+1} = \varphi$, ou encore tels que $\varphi(km_\varkappa) = \varphi(k) e^{i(p+1)\varkappa}$, pour simplifier les notations, convenons d'écrire $\mathfrak{H}^p$ au lieu de $\mathfrak{H}^{\eta_p}$, et $U^{s,p}$ au lieu de $U^s(\eta_p)$; par suite $\mathcal{H} = \mathfrak{H}^0$, et U^{-p} dans $\mathcal{H}$ n'est autre que $U^{-p,0}$ dans $\mathfrak{H}^0$. Pour montrer l'équivalence en question, il suffit de montrer qu'on a

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}^p}(T^p_f) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}^{p+1}}(U^{1,p+1}_f),$$

pour f à support compact et indéfiniment dérivable, en vertu de la théorie des caractères (HARISH-CHANDRA [14]). Or, il est clair qu'on a $\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}^p}(T^p_f) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}/\mathcal{K}_p}(\tilde{U}^{-p}_f)$ (les deux représentations sont infinitésimalement équivalentes !), et que

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}/\mathcal{K}^p}(\tilde{U}^{-p}_f) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(U^{-p}_f) - \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}^p}(U^{-p}_f);$$

il suffit donc de montrer qu'on a

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}^{p+1}}(U^{1,p+1}_f) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}_0}(U^{-p,0}_f) - \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}^p}(U^{-p}_f). \tag{28}$$

Pour démontrer la formule (28), on peut supposer que

$$f = f^0 = \check{f}, \tag{29}$$

car on sait que

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}^p}(U^{s,p}_f) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}^p}(U^{s,p}_{\check{f}}) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}^p}(U^{s,p}_{f^0}).$$

D'autre part, on a, d'après HARISH-CHANDRA [15],

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}^p}(U^{s,p}_f) = \frac{1}{2\pi}\int_K \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{\mathbf{R}} \int_N f(km_\varkappa a_t x k^{-1}) e^{st}\, \overline{\eta_p(m_\varkappa)}\, dk\, d\varkappa\, dt\, dx\,;$$

or, comme on a $f = \check{f}$, la fonction

$$F(\varkappa, t) = e^t \int_N f(km_\varkappa a_t x k^{-1})\, dx$$

satisfait à

$$F(-\varkappa, -t) = F(\varkappa, t),$$

d'où

$$(30) \qquad \mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}^p}(U_f^{s,p}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{\mathbf{R}}\int_N f(m_\varkappa a_t x)\, e^t \cos((s-1)t - p\varkappa)\, d\varkappa\, dt\, dx.$$

D'autre part la trace de la représentation irréductible U^{-p} de dimension finie dans $\mathcal{K}^p$ est connue, et l'on a

$$(31) \qquad \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}^p}(U_g^{-p}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}^p}(U_{m_\varkappa a_t}^{-p}) = \frac{\mathrm{ch}(p+1)t - \cos(p+1)\varkappa}{\mathrm{ch}\, t - \cos\varkappa},$$

si g est conjugué à $m_\varkappa\, a_t$; or dans $G = G_+$ (3) il n'y a qu'un seul type de sous-groupe de Cartan, et si l'on désigne par G_1 l'ensemble des éléments réguliers de G, l'ensemble $G - G_1$ est de mesure nulle; une formule d'intégration démontrée par Harish-Chandra dans [15], donne donc ici la formule suivante :

$$\int_G F(g)\, dg = \frac{1}{2\pi}\int_K\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbf{R}}\int_N F(km_\varkappa a_t xk^{-1})\, e^t(\mathrm{ch}\, t - \cos\varkappa)\, dk\, d\varkappa\, dt\, dx$$

(l'ordre w du groupe W est ici égal à 2, et l'on vérifie qu'on a l'égalité ci-dessus, dans les normalisations des mesures dg, dk, ..., en regardant de près la démonstration de Harish-Chandra); par suite, il vient

$$(32) \quad \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}^p}(U_f^{-p}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{\mathbf{R}}\int_N f(m_\varkappa a_t x)\, e^t(\mathrm{ch}(p+1)\, t - \cos(p+1)\, \varkappa)\, d\varkappa\, dt\, dx;$$

il est maintenant immédiat de vérifier qu'on a (28), à l'aide des formules (30) et (32).

C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

Les représentations unitaires du groupe de De Sitter.

§ 1. GROUPE DE REVÊTEMENT UNIVERSEL DU GROUPE DE DE SITTER.

1. Notations et définitions. — On désigne par $\mathbf{K}$ le corps des quaternions $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$; $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$ et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. On notera $\bar{x}$ le quaternion conjugué de x, i. e. $\bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k$, si x est de la forme ci-dessus; on définit de plus :

$$(1) \qquad \hat{x} = -k\bar{x}k = x_1 + x_2 i + x_3 j - x_4 k.$$

On désigne par $|x|$ la norme, soit $(x\bar{x})^{\frac{1}{2}}$, d'un quaternion x.

Soient **U**, **B**, **Z**, **P** resp. les ensembles des $x \in \mathbf{K}$ tels que $|x| = 1$, $|x| < 1$, $x_4 = 0$, $x_4 > 0$ (où $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$). Remarquons enfin que, si l'on fait correspondre la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 i & x_3 + x_4 i \\ -x_3 + x_4 i & x_1 - x_2 i \end{pmatrix}$$

au quaternion $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, on obtient un isomorphisme qu'on notera I) de **K** (comme algèbre sur **R**) dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ (algèbre sur **R**). Si l'on désigne par $A \to \tilde{A}$ l'isomorphisme de $\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ qui fait correspondre à une matrice $A = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$, la matrice $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \bar{z} & -\bar{w} \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$, il est clair que l'image de **K** par I dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ est le sous-ensemble des A tels que $A = \tilde{A}$.

Soit maintenant $\mathbf{M}_2(\mathbf{K})$ l'algèbre sur **R** des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec a, b, c, d dans **K**, et soit $\mathbf{GL}(2, \mathbf{K})$ le sous-ensemble des matrices inversibles à droite, à savoir des matrices g telles qu'il existe une g' avec $gg' = 1$ (la matrice unité). Montrons que $\mathbf{GL}(2, \mathbf{K})$ est un groupe pour la structure multiplicative de $\mathbf{M}_2(\mathbf{K})$ ([9]). L'application

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I(a) & I(b) \\ I(c) & I(d) \end{pmatrix}$$

définit un isomorphisme de $\mathbf{M}_2(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{M}_4(\mathbf{C})$, et une matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{M}_4(\mathbf{C})$ est l'image d'une matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbf{K})$, si et seulement si l'on a $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}$. Si $g \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{K})$, et $gg' = 1$, et si l'on désigne par $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ les images de g, g' dans $\mathbf{M}_4(\mathbf{C})$, on a $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = I_4$; par suite, on a $\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = I_4$, d'où $g'g = 1$, ce qui montre bien que g est aussi inversible à gauche, et l'inverse à droite et l'inverse à gauche sont identiques; notre assertion résulte de là.

Soit G l'ensemble des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_2(\mathbf{K})$ telles qu'on ait

$$\bar{a}b = \bar{c}d, \qquad |a|^2 - |c|^2 = 1, \qquad |d|^2 - |b|^2 = 1. \tag{2}$$

Comme ces conditions expriment qu'on a

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

([9]) Cela est vrai pour tous les corps gauches.

G est un sous-ensemble de $\mathbf{GL}(2, \mathbf{K})$; de plus, comme on a

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on voit que (2) est équivalent à :

$$(2') \qquad a\bar{c} = b\bar{d}, \qquad |a|^2-|b|^2=1, \qquad |d|^2-|c|^2=1.$$

D'autre part, cette condition (2) exprime aussi que la transformation

$$x' = ax + by, \qquad y' = cx + dy,$$

des variables quaternioniennes x, y, x', y', conserve la forme $\bar{x}x - \bar{y}y$; il est donc clair que G est un sous-groupe de $\mathbf{GL}(2, \mathbf{K})$. On montrera que G est isomorphe au groupe de revêtement universel du groupe de De Sitter $\mathbf{G}_+$ (4). Avant de le faire, on définira une autre représentation de ce dernier groupe, dont on aura besoin ultérieurement.

Prenons la matrice

$$(3) \qquad C=\begin{pmatrix} -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

C est inversible et l'on a

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} k/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

soit $\mathfrak{G}$ l'image de G par l'automorphisme intérieur $g \to CgC^{-1}$ du groupe $GL(2, \mathbf{K})$. Si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est l'image de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il est clair qu'on a

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha = k(-a+b+c-d)k/2, & \beta = k(-a-b+c+d)/2, \\ \gamma = (a-b+c-d)k/2, & \delta = (a+b+c+d)/2; \end{cases}$$

inversement, de $C^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on tire

$$(5) \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2}(-k\alpha k + k\beta - \gamma k + \delta), & b = \frac{1}{2}(k\alpha k + k\beta + \gamma k + \delta), \\ c = \frac{1}{2}(k\alpha k - k\beta - \gamma k + \delta), & d = \frac{1}{2}(-k\alpha k - k\beta + \gamma k + \delta). \end{cases}$$

Montrons que $\mathfrak{G}$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}(2, \mathbf{K})$ formé par les matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telles qu'on ait

$$(6) \qquad \hat{\alpha}\gamma = \hat{\gamma}\alpha, \qquad \hat{\beta}\delta = \hat{\delta}\beta, \qquad \hat{\alpha}\delta - \hat{\gamma}\beta = 1.$$

En effet, si l'on introduit les variables

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

où $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$, on voit que la condition

$$\bar{x}' x' - \bar{y}' y' = \bar{x} x - \bar{y} y$$

se traduit par la condition

$$\hat{\xi}' \eta' - \hat{\eta}' \xi' = \hat{\xi} \eta - \hat{\eta} \xi,$$

et il est évident que cette dernière condition est équivalente à la condition (6). Remarquons que (6) signifie aussi qu'on a

$$\begin{pmatrix} \hat{\delta} & -\hat{\beta} \\ -\hat{\gamma} & \hat{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\delta} & -\hat{\beta} \\ -\hat{\gamma} & \hat{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$(7) \qquad \alpha\hat{\beta} = \beta\hat{\alpha}, \qquad \gamma\hat{\delta} = \delta\hat{\gamma}, \qquad \alpha\hat{\delta} - \beta\hat{\gamma} = 1.$$

2. **Divers sous-groupes de** G; **décomposition de** G. — Soit K le sous-groupe de G formé par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, avec u, $v \in \mathbf{U}$; si l'on désigne par K_1, resp. K_2, le sous-groupe de K des matrices $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, $u, v \in \mathbf{U}$, il est clair que K est le produit direct de K_1 et K_2. Soit A_+ le sous-groupe formé par les matrices a_t de la forme :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2} t & \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2} t & \operatorname{ch} \frac{1}{2} t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

et soit enfin N le sous-groupe des matrices x de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 - x & x \\ -x & 1 + x \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad x = \frac{1}{2} (\xi_2 i + \xi_3 j + \xi_4 k), \qquad \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \mathbf{R};$$

on vérifie facilement que ce sont des sous-groupes de G. Si l'on désigne par M le centralisateur de A_+ dans K, on voit tout de suite, que M est formé par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbf{U}$, et que M est en même temps le normalisateur de N dans K, et l'on a

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-x' & x' \\ -x' & 1+x' \end{pmatrix},$$

avec

$$x' = ux\bar{u}.$$

Par suite, $T = MA_+N$ est un sous-groupe de G, qui contient N comme un sous-groupe distingué.

LEMME 1.1. — *Tout $g \in G$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme ka_tx, où $k \in K$ (10), $a_t \in A_+$, $x \in N$; de façon plus précise, on a*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2} t & \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2} t & \operatorname{ch} \frac{1}{2} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix},$$

avec

$$(9) \qquad u = (a+b)/|a+b|, \qquad v = (c+d)/|c+d|,$$

$$(10) \qquad e^{\frac{1}{2}t} = |a+b| = |c+d|,$$

$$(11) \qquad x = \frac{1}{2}(\bar{a}b - \bar{b}a)/|a+b|^2 = \frac{1}{2}(\bar{c}d - \bar{d}c)/|c+d|^2.$$

DÉMONSTRATION. — Comme on a

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2} t & \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2} t & \operatorname{ch} \frac{1}{2} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u\left(\operatorname{ch} \frac{1}{2} t - e^{\frac{1}{2}t} x\right) & u\left(\operatorname{sh} \frac{1}{2} t + e^{\frac{1}{2}t} x\right) \\ v\left(\operatorname{sh} \frac{1}{2} t - e^{\frac{1}{2}t} x\right) & v\left(\operatorname{ch} \frac{1}{2} t + e^{\frac{1}{2}t} x\right) \end{pmatrix},$$

il suffit de montrer que le système d'équations

$$a = u\left(\operatorname{ch} \frac{1}{2} t - e^{\frac{1}{2}t} x\right), \qquad b = u\left(\operatorname{sh} \frac{1}{2} t + e^{\frac{1}{2}t} x\right),$$
$$c = v\left(\operatorname{sh} \frac{1}{2} t - e^{\frac{1}{2}t} x\right), \qquad c = v\left(\operatorname{ch} \frac{1}{2} t + e^{\frac{1}{2}t} x\right),$$

(10) On utilise la lettre k pour désigner d'une part un élément du groupe K, et d'autre part le dernier élément de la base canonique (l, i, j, k) du corps $\mathbf{K}$, la signification étant chaque fois assez claire d'après le contexte.

admet une solution et une seule, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. On voit aisément, à l'aide des conditions (2), (2′), que (9), (10), (11) donnent la solution unique cherchée.

LEMME 1.2. — *Tout $g \in G$ se met sous la forme $ka_t k'$, avec k, $k' \in K$, et $t \geqq 0$; si $g \in G - K$, on a $t > 0$, et il y a unicité modulo M, c'est-à-dire si $g = k_1 a_{t'} k'_1$, avec k_1, $k'_1 \in K$, on a $t' = t$, et il existe un $m \in M$ tel que $k_1 = km$, $k'_1 = m^{-1}k'$.*

DÉMONSTRATION. — Si $b = 0$, on a aussi $c = 0$, puisque $|b| = |c|$; donc $g \in K$, et l'assertion est triviale. Supposons donc que $b \neq 0$; on peut alors choisir, puisque $|a| = |d| > 1$, $|b| = |c| > 0$, et $|a|^2 - |b|^2 = 1$, un $t > 0$ tel que

$$\operatorname{ch} \frac{1}{2} t = |a| = |d|, \qquad \operatorname{sh} \frac{1}{2} t = |b| = |c|.$$

On vérifie alors qu'on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c\bar{a}/|ca| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2} t & \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2} t & \operatorname{ch} \frac{1}{2} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/|a| & 0 \\ 0 & b/|b| \end{pmatrix}.$$

L'énoncé concernant l'unicité modulo M est évidente, vu que M est le centralisateur de A_+ dans K.

REMARQUE 1.1. — En choisissant $m \in M$ convenablement, on peut s'arranger de manière que $g = ka_t k'$ avec l'un des k, k' dans K_1 ou K_2; par exemple, tout $g \in G - K$ se met, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$(12) \qquad g = k_1 k_2 a_t k'_2, \qquad k_1 \in K_1, \qquad k_2, k'_2 \in K_2, \qquad \text{et} \qquad t > 0.$$

3. **Homomorphisme de G sur $G_+(4)$.** — Montrons maintenant qu'il existe un homomorphisme φ de G sur $\mathbf{G}_+(4)$ dont le noyau est le centre de G formé par les deux matrices $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Considérons pour cela la matrice

$$(13) \qquad X = \begin{pmatrix} x_0 & x \\ \bar{x} & x_0 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k,$$
$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \mathbf{R};$$

si $g \in G$, la matrice

$$X' = gX{}^t\bar{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x \\ \bar{x} & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

est encore de la forme (13), i. e. on a ${}^t\overline{X}' = X'$, donc on peut écrire

$$X' = \begin{pmatrix} x'_0 & x' \\ \bar{x}' & x'_0 \end{pmatrix}, \qquad x' = x'_1 + x'_2 i + x'_3 j + x'_4 k, \qquad x'_0,\ x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ x'_4 \in \mathbf{R},$$

et l'on a

$$(14) \qquad \begin{cases} x'_0 = (|a|^2 + |b|^2)\,x_0 + ax\bar{b} + b\bar{x}\bar{a}, \\ x' = (a\bar{c} + b\bar{d})\,x_0 + b\bar{x}\bar{c} + ax\bar{d}; \end{cases}$$

on a de plus

$$(15) \qquad x_0'^2 - |x'|^2 = x_0^2 - |x|^2;$$

en effet, on a alors

$$\begin{pmatrix} x'_0 & x' \\ \bar{x}' & x'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x \\ \bar{x} & x_0 \end{pmatrix},$$

puisque $\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}^{-1}$; pour montrer (15), il suffit de remarquer que les conditions (2) sont équivalentes à la condition suivante : si

$$x'' = xa + yc, \qquad y'' = xb + yd,$$

on a

$$x''\bar{x}'' - y''\bar{y}'' = x\bar{x} - y\bar{y};$$

or, c'est justement ce qu'exprime la condition (2') équivalente à (2) (remplacer x, y par x_0, x!).

Par conséquent, à tout $g \in G$, il y a une transformation linéaire g' des variables réelles $x_0, x_1, \ldots, x_4$ conservant la forme

$$-x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_4^2,$$

c'est-à-dire un élément du groupe $\mathbf{G}(4)$, et il est clair que l'application $g \to g'$ est un homomorphisme de G dans $\mathbf{G}(4)$, qu'on notera φ. Comme $g'_{00} = |a|^2 + |b|^2 = 2|b|^2 + 1$, g' est dans $\mathbf{G}_+(4)$, si le déterminant est égal à $+1$; or tout $g \in G$ s'écrit, d'après le lemme 1.2, sous la forme :

$$g = ka_tk', \qquad \text{avec } k = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad k' = \begin{pmatrix} u' & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix},$$
$$t \in \mathbf{R}, \qquad u, v, u', v' \in \mathbf{U};$$

il suffit donc de vérifier que le déterminant est égal à 1 dans le cas où $g = k$, k dans K, ou $g = a_t$. Pour $k \in K$, on peut considérer les deux cas

$k \in K_1$, et $k \in K_2$ séparément; soit

$$u = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k, \qquad v = b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k;$$

(14) se réduit dans ce cas à

$$x'_0 = x_0, \qquad x' = ux \quad \text{resp. } x' = x\bar{v},$$

ou encore

$$\begin{cases} x'_1 = a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 - a_4 x_4, \\ x'_2 = a_2 x_1 + a_1 x_2 - a_4 x_3 + a_3 x_4, \\ x'_3 = a_3 x_1 + a_4 x_2 + a_1 x_3 - a_2 x_4, \\ x'_4 = a_4 x_1 - a_3 x_2 + a_2 x_3 + a_1 x_4, \end{cases} \quad \text{resp.} \begin{cases} x'_1 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 \\ x'_2 = -b_2 x_1 + b_1 x_2 - b_4 x_3 + b_3 x_4, \\ x'_3 = -b_3 x_1 + b_4 x_2 + b_1 x_3 - b_2 x_4, \\ x'_4 = -b_4 x_1 - b_3 x_2 + b_2 x_3 + b_1 x_4, \end{cases}$$

et l'on voit que le déterminant correspondant est égal à

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 = |u|^4 = 1, \qquad \text{resp.} \quad (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)^2 = |v|^4 = 1,$$

Dans le cas où $g = a_t$, la transformation correspondante est de la forme

$$x'_0 = (\operatorname{ch} t)\, x_0 + (\operatorname{sh} t)\, x_1, \qquad x' = (\operatorname{sh} t)\, x_0 + \left(\operatorname{ch} \frac{1}{2} t\right)^2 x + \left(\operatorname{sh} \frac{1}{2} t\right)^2 \bar{x},$$

ou encore

$$x'_0 = (\operatorname{ch} t)\, x_0 + (\operatorname{sh} t)\, x_1, \qquad x'_1 = (\operatorname{sh} t)\, x_0 + (\operatorname{ch} t)\, x_1, \qquad x'_p = x_p \quad (2 \leqq p \leqq 4),$$

ce qui montre bien que le déterminant est égal à 1. Nous avons donc démontré que l'application φ définie ci-dessus est un homomorphisme de G dans le groupe $\mathbf{G}_+(4)$. Or on sait que $\mathbf{G}_+(4) = K_4 A_+ K_4$ ([11]), et comme K s'envoie sur K_4 [cela résulte de la formule (17) ci-dessous], l'homomorphisme φ est surjectif. Il est aisé de voir que le noyau de φ est égal au centre $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ de G. En effet, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s'envoie en l'élément unité de $G_+(4)$, on a, d'après (14),

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \qquad ax\bar{b} + b\bar{x}\bar{a} = 0, \; a\bar{c} + b\bar{d} = 0, \qquad x = b\bar{x}\bar{c} + ax\bar{d};$$

comme $|a|^2 \geqq 1$, il vient $b = 0$, d'où $c = 0$, $|a| = |d| = 1$, à cause de (2). La dernière relation s'écrit alors sous la forme $\bar{a}x = x\bar{d}$ (pour x quelconque) d'où $a = d = \pm 1$.

([11]) On note K_4 le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}_+(4)$, défini au chapitre 1; par abus de notation, on désignera par A_+, N les sous-groupes correspondants des groupes G et $\mathbf{G}_+(4)$.

REMARQUE 1.2. — Si l'on explicite les relations (14), on voit que la matrice correspondant à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est de la forme suivante :

(14 *bis*) :

$$\begin{pmatrix} a\bar a + b\bar b & 2\,\mathrm{Re}(a\bar b) & 2\,\mathrm{Re}(ai\bar b) & 2\,\mathrm{Re}(aj\bar b) & 2\,\mathrm{Re}(ak\bar b) \\ 2\,\mathrm{Re}(a\bar c) & \mathrm{Re}(a\bar d + b\bar c) & \mathrm{Re}(ai\bar d + ci\bar b) & \mathrm{Re}(aj\bar d + cj\bar b) & \mathrm{Re}(ak\bar d + ck\bar b) \\ 2\,\mathrm{Re}(c\bar a i) & \mathrm{Re}(d\bar a i + c\bar b i) & \mathrm{Re}(ci\bar b i - iai\bar d) & \mathrm{Re}(cj\bar b i - iaj\bar d) & \mathrm{Re}(ck\bar b i - iak\bar d) \\ 2\,\mathrm{Re}(c\bar a j) & \mathrm{Re}(d\bar a j + c\bar b j) & \mathrm{Re}(ci\bar b j - jai\bar d) & \mathrm{Re}(cj\bar b j - jaj\bar d) & \mathrm{Re}(ck\bar b j - jak\bar d) \\ 2\,\mathrm{Re}(c\bar a k) & \mathrm{Re}(d\bar a k + c\bar b k) & \mathrm{Re}(ci\bar b k - kai\bar d) & \mathrm{Re}(cj\bar b k - kaj\bar d) & \mathrm{Re}(ck\bar b k - kak\bar d) \end{pmatrix}.$$

On vérifie donc que, si $g = \begin{pmatrix} 1 - x & x \\ -x & 1 + x \end{pmatrix}$, avec $x = \frac{1}{2}(\xi_2 i + \xi_3 j + \xi_4 k)$, son image dans $\mathbf{G}_+(4)$ est l'élément $x(\xi_2, \xi_3, \xi_4)$ défini par [I, 1 (11).]

Définissons les sous-groupes à un paramètre $k_{pq}(\theta)$, pour $1 \leqq p < q \leqq 4$, comme suit :

$$(16)\quad \begin{cases} k_{12}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{1}{2}\theta} \end{pmatrix}, & k_{34}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{1}{2}\theta} \end{pmatrix}, \\ k_{13}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-j\frac{1}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{1}{2}\theta} \end{pmatrix}, & k_{24}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{j\frac{1}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{1}{2}\theta} \end{pmatrix}, \\ k_{14}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-k\frac{1}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{k\frac{1}{2}\theta} \end{pmatrix}, & k_{23}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-k\frac{1}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{-k\frac{1}{2}\theta} \end{pmatrix}; \end{cases}$$

(on conviendra d'écrire, dans le corps $\mathbf{K}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$, $e^{k\theta} = \cos\theta + k\sin\theta$, pour θ réel).

On vérifie alors, d'après (14 *bis*), que l'homomorphisme φ transforme $k_{pq}(\theta)$ en $\exp(\theta X_{pq})$ dans $\mathbf{G}_+(4)$:

$$(17)\qquad \varphi(k_{pq}(\theta)) = \exp(\theta X_{pq}), \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq p < q \leqq 4.$$

En d'autres termes, cela signifie que la transformation

$$x \to k_{pq}(\theta)\,x = ux\bar v, \qquad \text{où} \quad k_{pq}(\theta) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix},$$

définit la transformation orthogonale des variables (x_1, x_2, x_3, x_4) ayant la matrice $\exp(\theta X_{pq})$. Cette remarque sera utile dans le paragraphe 3.

Définissons de même les sous-groupes à un paramètre $a_p(t)$, pour $1 \leqq p \leqq 4$, comme suit :

$$
(18) \quad \left\{
\begin{aligned}
a_1(t) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{1}{2}t & \operatorname{sh}\frac{1}{2}t \\ \operatorname{sh}\frac{1}{2}t & \operatorname{ch}\frac{1}{2}t \end{pmatrix}, \\
a_2(t) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{1}{2}t & i(\operatorname{sh}\frac{1}{2}t) \\ -i(\operatorname{sh}\frac{1}{2}t) & \operatorname{ch}\frac{1}{2}t \end{pmatrix}, \\
a_3(t) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{1}{2}t & j(\operatorname{sh}\frac{1}{2}t) \\ -j(\operatorname{sh}\frac{1}{2}t) & \operatorname{ch}\frac{1}{2}t \end{pmatrix}, \\
a_4(t) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{1}{2}t & k(\operatorname{sh}\frac{1}{2}t) \\ -k(\operatorname{sh}\frac{1}{2}t) & \operatorname{ch}\frac{1}{2}t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

On voit alors, d'après (14 *bis*), que φ transforme $a_p(t)$ en $\exp(tY_p)$:

$$
(19) \qquad \varphi(a_p(t)) = \exp(tY_p), \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq p \leqq 4.
$$

PROPOSITION 1.1. — *Le groupe G est simplement connexe, et isomorphe au groupe de revêtement universel du groupe de De Sitter* $\mathbf{G}_+(4)$.

DÉMONSTRATION. — En effet, le lemme 1.1 montre que l'espace topologique de G est le produit direct des espaces de K, A_+, N, et ces derniers sont tous simplement connexes (K est homéomorphe à $S^3 \times S^3$, A_+ à $\mathbf{R}$, N à $\mathbf{R}^3$). Comme on vient de voir que G est localement isomorphe à $\mathbf{G}_+(4)$, on a la proposition.

4. **Quelques formules d'intégration dans** G. — Le lemme 1.1 et la formule [I, 1 (17)] montrent que

$$
(20) \qquad dg = e^{3t}\, d\mu(u)\, d\mu(v)\, dt\, d\xi_2\, d\xi_3\, d\xi_4,
$$

est une mesure de Haar de G (que nous fixons une fois pour toutes), où $g = ka_t x$, $k = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, $u, v \in \mathbf{U}$, $t \in \mathbf{R}$, $x \in N$, $x = \frac{1}{2}(\xi_2 i + \xi_3 j + \xi_4 k)$, et $d\mu(u)$, $d\mu(v)$ désignent l'élément de la mesure invariante normée du groupe compact $\mathbf{U}$; dt, $d\xi_2$, $d\xi_3$, $d\xi_4$ désignent les mesures euclidiennes.

Pour $g \in G$, $k \in K$, soit

$$
(21) \qquad gk = k_g a_{t(g,k)}\, x, \qquad \text{avec} \quad k_g \in K, \quad t(g, k) \in \mathbf{R}, \quad x \in N,
$$

la décomposition de gk d'après le lemme 1.1. Il est facile de voir qu'on a

$$(22) \qquad k_g = \begin{pmatrix} u' & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} u' = (au + bv)/\,|\,au + bv\,|, \\ v' = (cu + dv)/\,|\,cu + dv\,|, \end{cases}$$

$$(23) \qquad e^{t(g,\,k)} = |\,au + bv\,|^2 = |\,cu + dv\,|^2,$$

si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$; par suite, pour la mesure de Haar $dk = d\mu(u)\, d\mu(v)$ de K, on a la formule suivante :

$$(24) \qquad dk_g = e^{-3t(g,\,k)}\, dk,$$

d'après (20).

LEMME 1.3. — *On a la formule d'intégration suivante :*

$$(25) \qquad \int_G f(g)\, dg = 2\pi^2 \int_K \int_K \int_0^{+\infty} f(ka_t k')\, \mathrm{sh}^3 t\, dk\, dk'\, dt,$$

où dk, dk' désignent l'élément de la mesure de Haar normée de K, c'est-à-dire $dk = d\mu(u)\, d\mu(v)$, dans les paramètres $k = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, u, $v \in \mathbf{U}$.

DÉMONSTRATION. — D'après [I, 1 (35)], on a la formule d'intégration suivante dans $G_+(4)$:

$$\int_{K_4} \int_{\mathbf{R}} \int_N F(ha_t x)\, e^{3t}\, dh\, dt\, dx = 2\pi^2 \int_{K_4} \int_{K_4} \int_0^{+\infty} F(ha_t h')\, \mathrm{sh}^3 t\, dh\, dh'\, dt$$

(on désigne par les mêmes lettres a_t, x les images dans $\mathbf{G}_+(4)$ des éléments a_t, x de G, puisque le noyau de φ est contenu dans K); par suite, il existe une constante $c > 0$ telle qu'on ait

$$\int_K \int_{\mathbf{R}} \int_N f(ka_t x)\, e^{3t}\, dk\, dt\, dx = c \int_K \int_K \int_0^{+\infty} f(ka_t k')\, \mathrm{sh}^3 t\, dk\, dk'\, dt;$$

or, si F est une fonction continue sur $\mathbf{G}_+(4)$, invariante à gauche et à droite par K_4, la fonction $f = F \circ \varphi$ est aussi invariante à gauche et à droite par K, et l'on a $F(a_t x) = f(a_t x)$, $F(a_t) = f(a_t)$; on a donc

$$c \int_0^{+\infty} F(a_t)\, \mathrm{sh}^3 t\, dt = \int_{\mathbf{R}} \int_N F(a_t x)\, e^{3t}\, dt\, dx$$
$$= \int_{\mathbf{R}} \int_N f(a_t x)\, e^{3t}\, dt\, dx = 2\pi^2 \int_0^{+\infty} f(a_t)\, \mathrm{sh}^3 t\, dt,$$

d'où $c = 2\pi^2$.

5. **Quelques espaces homogènes de** G. — Montrons que l'espace homogène G/T où G opère à gauche s'identifie à l'espace $\mathbf{U}$ où G opère de la façon suivante :

$$(26)\quad g.u = (au+b)(cu+d)^{-1} \qquad \text{pour} \quad u \in \mathbf{U}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G.$$

Tout d'abord, on a d'une manière générale, pour $q \in \mathbf{K}$,

$$\begin{aligned} 1 - |g.q|^2 &= ((cq+d)(\bar{q}\bar{c}+\bar{d}) - (aq+b)(\bar{q}\bar{a}+\bar{b}))/|cq+d|^2 \\ &= (1-|q|^2)/|cq+d|^2; \end{aligned}$$

en effet, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans G, on a

$$(27)\qquad aq\bar{b} + b\bar{q}\bar{a} = cq\bar{d} + d\bar{q}\bar{c},$$

quel que soit $q \in \mathbf{K}$, puisque, si l'on pose $x' = aq+b$, $y' = cq+d$, on a $x'\bar{x}' - y'\bar{y}' = q\bar{q} - 1$, d'après (2), ce qui entraîne (27). On a donc

$$q \in \mathbf{U} \iff g.q \in \mathbf{U}; \qquad \text{et} \qquad q \in \mathbf{B} \iff g.q \in \mathbf{B}.$$

Il est clair qu'on a

$$(gg').q = g.(g'.q), \qquad \text{si} \quad g,\ g' \in G.$$

Ainsi G opère sur $\mathbf{U}$ resp. $\mathbf{B}$, suivant (26).

Pour montrer l'isomorphisme de G/T et $\mathbf{U}$, considérons l'application $\pi : G \to \mathbf{U}$, définie par la formule suivante :

$$(28)\qquad \pi(g) = g.1 = (a+b)(c+d)^{-1}, \qquad \text{si} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

d'après ce qui précède, π applique G dans $\mathbf{U}$; comme $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'envoie en $u \in \mathbf{U}$, π est surjective; d'autre part, on a

$$\pi(gg') = g.\pi(g'), \qquad \text{pour} \quad g,\ g' \in G.$$

Montrons que T est le stabilisateur de $1 \in \mathbf{U}$; en effet, si $g.1 = 1$, on a $|a+b| = |c+d|$; mais alors, d'après le lemme 1.1, on a $g = ka_t x$, avec $k = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, $u = (a+b)/|a+b| = (c+d)/|c+d| = v$, d'où $k \in M$, et $g \in MA_+N = T$. Inversement, il est clair que $T = MA_+N$ est contenu dans le stabilisateur de $1 \in \mathbf{U}$. Les espaces homogènes G/T et $\mathbf{U}$ sont donc isomorphes.

D'après la décomposition d'Iwasawa (lemme 1), il est clair que les espaces homogènes G/T et K/M sont isomorphes; compte tenu de (23), (24), on en déduit la formule suivante :

$$(29)\quad d\mu(g.u) = |cu+d|^{-6}\, d\mu(u), \qquad \text{pour} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbf{U}.$$

Montrons maintenant que l'espace homogène G/K où G opère à gauche est isomorphe à l'espace $\mathbf{B}$ où G opère à gauche suivant (26). On a déjà vu que cela définit bien une opération de G (à gauche) sur $\mathbf{B}$. K est alors le stabilisateur de $0 \in \mathbf{B}$; en effet, on a

$$\begin{aligned} g.0 = 0 \iff b\,d^{-1} = 0 \iff b = 0, \quad d \in \mathbf{U} \\ \iff b = c = 0, \quad a, d \in \mathbf{U} \iff g \in K. \end{aligned}$$

Par suite, l'application

$$\theta : \; g \to \theta(g) = b\,d^{-1}, \qquad \text{pour} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

définit, par passage au quotient par K, un isomorphisme de G/K sur $\mathbf{B}$.

Pour déterminer une mesure invariante sur $\mathbf{B}$ (il en existe, car K est compact!), introduisons une section de G au-dessus de $\mathbf{B}$, pour la projection θ, définie comme suit :

$$(30)\; s(q) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{1}{2}t & q\operatorname{ch}\frac{1}{2}t \\ \bar{q}\operatorname{ch}\frac{1}{2}t & \operatorname{ch}\frac{1}{2}t \end{pmatrix}, \qquad \text{si} \quad q \in \mathbf{B}, \quad |q| = \operatorname{th}\frac{1}{2}t, \quad t \geqq 0;$$

on vérifie facilement que $s(q) \in G$, et que $\theta(s(q)) = q$, pour $q \in \mathbf{B}$. Tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s'écrit *d'une manière et d'une seule* sous la forme $g = s(q)k$, avec $q = \theta(g) \in \mathbf{B}$, $k \in K$. En effet, il suffit de prendre $t \geqq 0$ tel que $\operatorname{ch}\frac{1}{2}t = |a| = |d|$, et $k = \begin{pmatrix} a/|a| & 0 \\ 0 & d/|d| \end{pmatrix}$, et de remarquer que $q = \theta(g) = b\,d^{-1}$, donc $\bar{q} = (\bar{d})^{-1}\bar{b} = d\bar{b}/|d|^2 = c\bar{a}/|a|^2 = ca^{-1}$.

Si $g \in G$, $q \in \mathbf{B}$, les deux éléments $g\,s(q)$ et $s(g.q)$ ont la même image, savoir $g.q$, dans $\mathbf{B}$; il existe donc un élément $k = k(g, q)$ de K tel qu'on ait

$$(31) \qquad g\,s(q) = s(g.q)\,k(g,q).$$

Il est facile d'expliciter $k(g, q)$; si $k(g, q) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$; $u, v \in \mathbf{U}$, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{1}{2}t & q\operatorname{ch}\frac{1}{2}t \\ \bar{q}\operatorname{ch}\frac{1}{2}t & \operatorname{ch}\frac{1}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{1}{2}t' & q'\operatorname{ch}\frac{1}{2}t' \\ \bar{q}'\operatorname{ch}\frac{1}{2}t' & \operatorname{ch}\frac{1}{2}t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix},$$

si l'on pose

$$q' = g.q, \qquad |g.q| = \operatorname{th}\frac{1}{2}t',$$

il vient

$$u \operatorname{ch} \frac{1}{2} t' = (a + b\bar{q}) \operatorname{ch} \frac{1}{2} t, \qquad v \operatorname{ch} \frac{1}{2} t' = (cq + d) \operatorname{ch} \frac{1}{2} t;$$

comme on a $\operatorname{ch} \frac{1}{2} t' / \operatorname{ch} \frac{1}{2} t = |cq + d| = |a + b\bar{q}|$, il en résulte que

$$(31') \quad \left\{ \begin{aligned} & k(g,q) = \begin{pmatrix} (a + b\bar{q})/|cq + d| & 0 \\ 0 & (cq + d)/|cq + d| \end{pmatrix}, \\ & \qquad \text{si } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Lemme 1.4. — *Si l'on désigne par $d\mu(q)$ la mesure euclidienne dans* $\mathbf{B}$, $(1 - |q|^2)^{-4} d\mu(q)$ *est une mesure invariante dans* $\mathbf{B}$, *et l'on a la formule d'intégration suivante :*

$$(32) \qquad \int_G f(g)\, dg = 2^4 \int_{\mathbf{B}} \int_K f(s(q)\, k)\, (1 - |q|^2)^{-4}\, d\mu(q)\, dk.$$

Démonstration. — D'après la théorie des espaces homogènes, il existe une mesure invariante (à gauche, pour les opératons de G) $d\mu(\bar{g})$ sur G/K (on désigne par $\bar{g}$ les classes gK, $g \in G$) telle qu'on ait

$$\int_G f(g)\, dg = \int_{G/K} d\mu(\bar{g}) \int_K f(gk)\, dk;$$

d'autre part, il résulte de (20) qu'on a

$$\int_G f(g)\, dg = \int_{\mathbf{R}} \int_N \int_K f(a_t x k)\, dt\, dx\, dk;$$

en comparant ces deux formules, on voit que

$$d\mu(\bar{g}) = dt\, dx, \qquad \text{si} \quad g = a_t x k, \quad k \in K, \quad x \in N, \quad t \in \mathbf{R}.$$

On peut considérer (t, ξ_2, ξ_3, ξ_4) et (x_1, x_2, x_3, x_4) comme deux systèmes de paramètres sur $\mathbf{B}$, où

$$x = \frac{1}{2}(\xi_2 i + \xi_3 j + \xi_4 k) \qquad \text{et} \qquad \theta(g) = q = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k;$$

par suite, la mesure invariante $d\mu(\bar{g})$ s'exprime dans le deuxième système sous la forme :

$$d\mu(\bar{g}) = \frac{D(t, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}\, d\mu(q).$$

Or on a

$$q = \bar{g} = \theta(a_t x k) = \left(\operatorname{sh} \frac{1}{2} t + e^{\frac{1}{2} t} x\right) \left(\operatorname{ch} \frac{1}{2} t + e^{\frac{1}{2} t} x\right)^{-1},$$

d'où, en posant

$$\Delta = \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2,$$

il vient

$$q = \left[\operatorname{sh} t + \frac{1}{2} e^t \Delta + \xi_2 i + \xi_3 j + \xi_4 k\right] \Big/ \left[\operatorname{ch} t + 1 + \frac{1}{2} e^t \Delta\right]$$

(compte tenu de la relation $\bar{x} = -x$), ou encore

$$x_1 = \frac{\operatorname{sh} t + e^t \frac{1}{2}\Delta}{\operatorname{ch} t + 1 + e^t \frac{1}{2}\Delta}, \qquad x_p = \frac{\xi_p}{\operatorname{ch} t + 1 + e^t \frac{1}{2}\Delta} \qquad (p = 2, 3, 4).$$

Il en résulte que

$$1 - |q|^2 = 2/(\operatorname{ch} t + 1 + e^t \Delta/2),$$

et que

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(t, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} = (\operatorname{ch} t + 1 + e^t \Delta/2)^{-4},$$

et par suite, on a

$$d\mu(\bar{g}) = 2^4 (1 - |q|^2)^{-4} \, d\mu(q), \qquad \text{si} \quad \bar{g} = q. \tag{33}$$

6. **Divers sous-groupes de $\mathfrak{G}$; décomposition de $\mathfrak{G}$.** — D'après la définition, le groupe $\mathfrak{G}$ est l'image de G par l'automorphisme intérieur $w : g \to CgC^{-1}$ du groupe $\mathbf{GL}(2, \mathbf{K})$, où C désigne la matrice (3).

Soient $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}_+$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}$ les images des sous-groupes K, A_+, N, M, T de G respectivement. Il est facile de voir que ces sous-groupes sont caractérisés de la façon suivante :

$\mathfrak{K}$ est formé par les matrices de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} & -\hat{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad \alpha\hat{\beta} = \beta\hat{\alpha}; \tag{34}$$

$\mathfrak{A}_+$ est formé par les matrices de la forme suivante :

$$a_t = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad t \in \mathbf{R}; \tag{35}$$

$\mathfrak{N}$ est formé par les matrices de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad x \in \mathbf{Z} \, (\text{i. e. } x = \hat{x}); \tag{36}$$

$\mathfrak{M}$ est formé par les matrices de la forme suivante :

$$(37)\qquad \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad u \in \mathbf{U};$$

$\mathfrak{T}$ est formé par les matrices de la forme suivante :

$$(38)\qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \hat{\alpha}\gamma = \hat{\gamma}\alpha, \quad \hat{\alpha}\delta = 1.$$

On a évidemment, en transportant par w, les décompositions : $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}\mathfrak{A}_+\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}\mathfrak{A}_+\mathfrak{K}$, et les formules d'intégration correspondantes dans $\mathfrak{G}$. Mais nous aurons à nous servir dans ce cas de la décomposition suivante :

LEMME 1.5. — *Les matrices de la forme* $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *avec* $z \in \mathbf{Z}$, *i. e.* $z = \hat{z}$, *forment un sous-groupe de* $\mathfrak{G}$, *noté* $\mathfrak{Z}$, *et, pour qu'un élément* $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *de* $\mathfrak{G}$ *puisse s'écrire sous la forme*

$$(39)\qquad g = zma_t x, \qquad \text{avec} \quad z \in \mathfrak{Z}, \quad m \in \mathfrak{M}, \quad a_t \in \mathfrak{A}_+, \quad x \in \mathfrak{N},$$

il faut et il suffit que $\delta \neq 0$, *et alors la décomposition est unique* ([12]).

DÉMONSTRATION. — Comme on a, si $z \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathfrak{M}$, $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathfrak{N}$,

$$zma_t x = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}\hat{u} + e^{\frac{1}{2}t} zux & e^{\frac{1}{2}t} zu \\ e^{\frac{1}{2}t} ux & e^{\frac{1}{2}t} u \end{pmatrix},$$

il suffit de montrer que le système d'équations :

$$(40)\qquad \begin{cases} \alpha = e^{-\frac{1}{2}t}\hat{u} + e^{\frac{1}{2}t} zux, & \beta = e^{\frac{1}{2}t} zu, \\ \gamma = e^{\frac{1}{2}t} ux, & \delta = e^{\frac{1}{2}t} u, \end{cases}$$

admet une solution unique, si et seulement si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}$ et $\delta \neq 0$. il est clair que la condition est nécessaire; inversement, si $\delta \neq 0$, prenons t, u, z, x tels que

$$t = 2 \log |\delta|, \qquad u = \delta / |\delta|, \qquad z = \beta\delta^{-1}, \qquad x = \delta^{-1}\gamma.$$

([12]) On note z la matrice $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbf{Z}$.

On a ainsi visiblement une solution unique du système (40); il reste donc à vérifier que z, $x \in \mathbf{Z}$. Or, on a, d'après (6), (7),

$$\widehat{\beta\delta} = \hat{\delta}\beta, \qquad \gamma\hat{\delta}, = \widehat{\delta\gamma},$$

d'où

$$\bar{\beta}k\delta = \bar{\delta}k\beta, \qquad \delta\bar{\beta}k\delta = \delta\bar{\delta}k\beta = k\beta.\delta\bar{\delta} = k\beta.\bar{\delta}\delta,$$

donc $\delta\bar{\beta}k = k\beta\bar{\delta}$, ou $(\beta\bar{\delta})^{\wedge} = \beta\bar{\delta}$, c'est-à-dire $\beta\bar{\delta} \in \mathbf{Z}$; on montre de même que $\delta\gamma \in \mathbf{Z}$.

7. **L'espace homogène** $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$. — Le lemme **5** nous permet de plonger $\mathbf{Z}$ dans l'espace homogène $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$, en identifiant la classe $g\mathfrak{T}$ et $z \in \mathbf{Z}$, si $g = zma_t x$; or les éléments de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{G}$ forment une seule classe suivant $\mathfrak{T}$, à savoir $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{T}$, dans $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$; l'espace homogène compact $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ peut donc être considéré comme une compactification de l'espace $\mathbf{Z}$, la classe $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{T}$ constituant le « point à l'infini » z_∞. Il est évident que $\mathfrak{G}$ opère sur Z de la manière suivante :

$$(41) \qquad g.z = (\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta)^{-1} \qquad \text{si} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}, \quad z \in \mathfrak{Z}.$$

L'isomorphisme w de G sur $\mathfrak{G}$, transformant T en $\mathfrak{T}$, définit par passage au quotient, un isomorphisme W de G/T sur $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$, d'où un isomorphisme de $\mathbf{U}$ sur $\mathbf{Z} \cup \{z_\infty\}$, que nous noterons encore W, et

$$(42) \qquad W(g.u) = w(g).W(u) \qquad \text{pour} \quad g \in G, \quad u \in \mathbf{U};$$

il est aisé de trouver l'expression de $W(u)$:

$$(43) \qquad z = W(u) = k(1-u)(1+u)^{-1} \qquad \text{pour} \quad u \in \mathbf{U},$$

$u = -1$ correspondant au « point à l'infini » z_∞.

Définition 1.1. — On pose, pour $g \in G$, $u \in \mathbf{U}$,

$$\left.\begin{aligned} &(44) \qquad \omega_G(g, u) = |cu + d|^2 \\ &(45) \qquad u_G(g, u) = (cu + d)/|cu + d| \end{aligned}\right\} \text{si} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

et, de même, pour $g' \in \mathfrak{G}$, et $z \in \mathbf{Z}$,

$$\left.\begin{aligned} &46) \qquad \omega_{\mathfrak{G}}(g', z) = |\gamma z + \delta|^2 \\ &(47) \qquad u_{\mathfrak{G}}(g', z) = (\gamma z + \delta)/|\gamma z + \delta| \end{aligned}\right\} \text{si} \quad g' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

Ces fonctions sont évidemment des « multiplicateurs » : on a

$$(48)\qquad \omega_G(gg', u) = \omega_G(g, g'.u)\,\omega_G(g', u) \qquad \text{pour} \quad g, g' \in G,$$

et des formules analogues pour $u_G(g, u)$, $\omega_{\mathfrak{G}}(g', z)$ et $u_{\mathfrak{G}}(g', z)$.

Lemme 1.6. — *On a les formules suivantes :*

$$(49)\qquad \omega_{\mathfrak{G}}(w(g), W(u)) = \omega_G(g, u)\,|1 + g.u|^2.\,|1+u|^{-2},$$

$$(50)\qquad \left\{ \begin{array}{l} u_{\mathfrak{G}}(w(g), W(u)) = \dfrac{1+g.u}{|1+g.u|}\, u_G(g, u) \left(\dfrac{1+u}{|1+u|}\right)^{-1} \\ \qquad\qquad\qquad \textit{pour} \quad g \in G, \quad u \in \mathbf{U}. \end{array}\right.$$

Démonstration. — D'après (4), on a pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} &\omega_{\mathfrak{G}}(w(g), W(u)) \\ &\quad = |(a-b+c-d)\,kk\,(1-u)\,(1+u)^{-1} + (a+b+c+d)|^2/4 \\ &\quad = |(au+b)+(cu+d)|^2.\,|1+u|^{-2} = |1+g.u|^2\omega_G(g, u)\,|1+u|^{-2}; \end{aligned}$$

on démontre de même (50).

Montrons maintenant qu'on a la formule suivante pour la mesure euclidienne $dz = dz_1\,dz_2\,dz_3$ (on pose : $z = z_1 + z_2 i + z_3 j$, $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{R}$) :

$$(51)\qquad d(g.z) = \omega_{\mathfrak{G}}(g, z)^{-3}\,dz \qquad \text{pour} \quad g \in \mathfrak{G}.$$

En effet, introduisons les paramètres (ρ, σ, τ) dans $\mathbf{U}$ définis de la manière suivante :

$$(52)\qquad u = e^{i\sigma}\cos\rho + e^{i\tau}(\sin\rho)\,j,$$

avec

$$(53)\qquad 0 \leqq \rho \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqq \sigma, \tau \leqq 2\pi;$$

la mesure invariante normée $d\mu(u)$ dans $\mathbf{U}$ est alors de la forme

$$(54)\qquad d\mu(u) = (2\pi^2)^{-1}\sin\rho\cos\rho\,d\rho\,d\sigma\,d\tau.$$

D'autre part, si l'on explicite (43), on trouve que

$$(55)\qquad z_1 = \frac{\sin\rho\sin\tau}{1+\cos\rho\cos\sigma}, \qquad z_2 = \frac{\sin\rho\cos\tau}{1+\cos\rho\cos\sigma}, \qquad z_3 = \frac{-\cos\rho\sin\sigma}{1+\cos\rho\cos\sigma},$$

d'où

$$dz = dz_1\,dz_2\,dz_3 = \left|\frac{D(z_1, z_2, z_3)}{D(\rho, \sigma, \tau)}\right| d\rho\,d\sigma\,d\tau = \frac{\sin\rho\cos\sigma}{1+\cos\rho\cos\sigma}\,d\rho\,d\sigma\,d\tau.$$

Comme on a

$$(56)\qquad |1+u|^2 = 2(1+\cos\rho\cos\sigma),$$

il vient finalement que

$$dz = \frac{16\pi^2}{|1+u|^6}\, d\mu(u) \qquad \text{si} \quad z = W(u), \quad u \in \mathbf{U}, \tag{57}$$

et la formule (51) résulte de là, en tenant compte de la formule (29) pour la mesure $d\mu(u)$ dans $\mathbf{U}$.

8. **L'espace homogène $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$.** — Nous allons montrer maintenant que l'espace homogène $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$, isomorphe à l'espace homogène G/K, donc à l'espace $\mathbf{B}$, s'identifie au demi-espace « supérieur » $\mathbf{P}$, l'ensemble des $x \in \mathbf{K}$, tels que $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, avec $x_4 > 0$. En effet, définissons une application η de $\mathfrak{G}$ dans $\mathbf{P}$ par la formule suivante :

$$\eta(g) = (\alpha k + \beta)(\gamma k + \delta)^{-1} \qquad \text{si} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \tag{58}$$

$x = \eta(g)$ est bien dans $\mathbf{P}$, puisque

$$\begin{aligned} x - \hat{x} &= x + k\bar{x}k \\ &= \frac{(\alpha k + \beta)\overline{(\gamma k + \delta)} + k(\gamma k + \delta)\overline{(\alpha k + \beta)}\, k}{|\gamma k + \delta|^2} \\ &= \frac{(\alpha\gamma + k\gamma\bar{\alpha}k + \beta\bar{\delta} + k\delta\bar{\beta}k + \alpha k\bar{\delta} - k\delta k\bar{\alpha}k - \beta k\bar{\gamma} + k\gamma k\bar{\beta}k)}{|\gamma k + \delta|^2} \\ &= 2k|\gamma k + \delta|^{-2}, \end{aligned}$$

à cause des relations (6) et (7), qui entraînent que

$$\alpha\bar{\gamma} + k\gamma\bar{\alpha}k = 0, \qquad \beta\bar{\delta} + k\delta\bar{\beta}k = 0, \qquad \alpha k\bar{\delta} - \beta k\bar{\gamma} = k;$$

on a donc

$$x_4 = |\gamma k + \delta|^{-2} > 0,$$

d'où $x \in \mathbf{P}$.

Montrons qu'on a

$$\eta(g) = k \iff g \in \mathfrak{K}.$$

En effet, si

$$g = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} & -\hat{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathfrak{K},$$

on a

$$\begin{aligned} \eta(g) &= (\hat{\alpha}k - \hat{\beta})(\beta k + \alpha)^{-1} \\ &= (-k\alpha kk + k\beta k)(\beta k + \alpha)^{-1} \\ &= k(\alpha + \beta k)(\beta k + \alpha)^{-1} = k; \end{aligned}$$

inversement, supposons qu'on ait, pour un

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}, \qquad \eta(g) = k;$$

on a alors

$$(\alpha k + \beta) = k(\gamma k + \delta);$$

si $w^{-1}(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on aura donc

$$\begin{aligned} &k(\ \ a - b - c + d - a - b + c + d)/2 \\ &= k(-a + b - c + d + a + b + c + d)/2, \end{aligned}$$

ou

$$-kb + kd = kb + kd,$$

ce qui donne $b = 0$; on en déduit que $c = 0$, et $g \in w(K) = \mathfrak{K}$.

Comme on a de plus, pour $g, g' \in \mathfrak{G}$,

$$\eta(gg') = (\alpha\eta(g') + \beta)(\gamma\eta(g') + \delta)^{-1} \qquad \text{si} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

on voit que η définit, par passage au quotient, un isomorphisme de $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ sur $\mathbf{P}$, $\mathfrak{G}$ opérant sur $\mathbf{P}$ par la formule

$$(59) \qquad g.x = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)^{-1} \qquad \text{si} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\eta(\mathfrak{G}) = \mathbf{P}$, puisque $\eta(a_t z) = e^{-t}(z + k)$, si $z \in \mathbf{Z}$, et que tout $x \in \mathbf{P}$ se met sous la forme $e^{-t}(z + k)$, avec $t \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{Z}$.

On vérifie facilement qu'on a un isomorphisme :

$$(60) \qquad x = \overline{w}(q) = k(1 - q)(1 + q)^{-1}$$

de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{P}$, obtenu en identifiant G/K à $\mathbf{B}$ et $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ à $\mathbf{P}$. Calculons l'image dans $\mathbf{P}$ de la mesure invariante $2^4(1 - |q|^2)^{-4} d\mu(q)$ de $\mathbf{B}$. Si l'on pose

$$(61) \qquad \begin{cases} q = \xi_1 + \xi_2 i + \xi_3 j + \xi_4 k & \text{pour} \quad q \in \mathbf{B} \\ x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k & \text{pour} \quad x \in \mathbf{P}, \end{cases}$$

alors on a, d'après (60),

$$\frac{1}{2}(x + \hat{x}) = k(\bar{q} - q)\,|1 + q|^{-2} = 2(\xi_4 + \xi_3 i - \xi_2 j)\,|1 + q|^{-2},$$

$$\frac{1}{2}(x - \hat{x}) = (1 - |q|^2)k\,|1 + q|^{-2},$$

d'où

$$(62) \qquad \begin{cases} x_1 = 2\xi_4/(1 + 2\xi_1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2), \\ x_2 = 2\xi_3/(1 + 2\xi_1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2), \\ x_3 = -2\xi_2/(1 + 2\xi_1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2), \\ x_4 = (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2)/(1 + 2\xi_1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2), \end{cases}$$

et par suite on a

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} = 16(1 + 2\xi_1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)^{-4},$$

d'où

(63) $$16(1 - |q|^2)^{-4}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3\, d\xi_4 = x_4^{-4}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4,$$

ce qui donne l'image cherchée dans **P**.

9. **Représentations unitaires irréductibles de** K. — Commençons par des rappels sur les représentations unitaires irréductibles du groupe compact **U**; comme **U** est isomorphe au groupe **SU** (2), les représentations unitaires irréductibles de **U** sont paramétrées par un demi-entier $n \geqq 0$ (on convient d'appeler demi-entier un nombre réel n tel que $2n$ soit entier); de façon plus précise, si l'on pose, pour

$$u = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in \mathbf{U},$$

(64) $$I(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad a = x_1 + x_2 i, \quad b = x_3 + x_4 i,$$

on a un isomorphisme de **U** sur **SU** (2), et, en particulier, pour $t \in \mathbf{R}$,

(65) $$\begin{cases} I(e^{it}) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = \exp tA, \\ I(e^{jt}) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \exp tB, \\ I(e^{kt}) = \begin{pmatrix} \cos t & i(\sin t) \\ i(\sin t) & \cos t \end{pmatrix} = \exp tC, \end{cases}$$

où A, B, C désignent les trois matrices suivantes :

(66) $$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

qui forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de **SU** (2). Il existe donc, pour chaque demi-entier $n \geqq 0$, une représentation unitaire irréductible σ^n de **SU** (2) dans un espace hilbertien V^n de dimension $2n + 1$, ayant une base orthonormale (v_p^n), $p = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$, telle qu'on ait

(67) $$\begin{cases} \sigma^n(A)\, v_p^n = -2ip\, v_p^n, \\ \sigma^n(B)\, v_p^n = -i\alpha_{p+1}^n\, v_{p+1}^n - i\alpha_p^n\, v_{p-1}^n, \\ \sigma^n(C)\, v_p^n = -\alpha_{p+1}^n\, v_{p+1}^n + \alpha_p^n\, v_{p-1}^n, \end{cases}$$

où

(68) $$\alpha_p^n = [(n+p)(n-p+1)]^{\frac{1}{2}}$$

pour $p = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$ (donc $n-p$ entier !) (*voir*, par exemple, Naimark [9 *bis*], p. 48). On désignera par ρ^n la représentation $\sigma^n \circ I$ de $\mathbf{U}$ dans V^n. Remarquons que la valeur propre de l'opérateur de Casimir $\sigma^n(A^2+B^2+C^2)$ est ici égale à $-4n(n+1)$.

Le sous-groupe compact maximal K du groupe G est le produit direct de K_1, K_2, qui sont tous deux isomorphes à $\mathbf{U}$; par suite, une représentation unitaire irréductible de K est équivalente à la représentation $\rho^{n,n'}_K$ définie dans $V^n \otimes V^{n'}$, avec n, n' deux demi-entiers $\geqq 0$, par la formule suivante :

$$\rho^{n,n'}_K(k) = \rho^n(u) \otimes \rho^{n'}(v) \qquad \text{pour} \quad k = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}. \tag{69}$$

On notera $\rho^n_{K_1}$ (resp. $\rho^n_{K_2}$) la représentation de K_1 (resp. K_2) dans V^n, définie par

$$\rho^n_{K_1}(k_1) = \rho^n(u) \quad [\text{resp. } \rho^n_{K_2}(k_2) = \rho^n(v)],$$

pour

$$k_1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left[\text{resp. } k_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}\right], \qquad \text{avec} \quad u, v \in \mathbf{U}.$$

Remarquons que la représentation $\rho^{n,n'}_K$ de K définit, par passage au quotient, une représentation univalente ou bivalente du groupe K_4 suivant que $n+n'$ soit entier ou non.

§ 2. PREMIÈRE SÉRIE PRINCIPALE.

1. Définition des représentations de la première série principale. — Nous allons définir une série de représentations unitaires irréductibles $U^{n,\nu}$, dépendant de deux paramètres (n, ν), n demi-entier $\geqq 0$, ν réel, du groupe de revêtement universel $\tilde{\mathbf{G}}_+(4)$ du groupe de De Sitter $\mathbf{G}_+(4)$. Comme $\tilde{\mathbf{G}}_+(4)$ est isomorphe aux groupes G, $\mathfrak{G}$, cela revient à définir les représentations du groupe G, ou du groupe $\mathfrak{G}$. Il est commode d'avoir ces deux réalisations, l'une comme représentations de G dans l'espace $L^2_{V}(U)$, l'autre comme celles de $\mathfrak{G}$ dans l'espace $L^2_{V}(\mathbf{Z})$; en effet, $\mathbf{U}$ étant compact, les fonctions constantes sont dans $L^2_{V}(\mathbf{U})$, ce qui facilite le calcul des fonctions sphériques, et d'autre part, le sous-groupe $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{G}$ opère sur $\mathbf{Z}$ par translation, ce qui nous permet de montrer l'irréductibilité de ces représentations sans faire appel aux résultats de Bruhat sur les représentations induites.

Construction sur $L^2_{V}(\mathbf{U})$. — Rappelons d'abord que les représentations unitaires irréductibles du groupe $\mathbf{U}$, isomorphe au groupe $\mathbf{SU}(2)$, sont paramétrées par un demi-entier $n \geqq 0$, la représentation de « numéro » n, soit ρ^n, s'effectuant dans un espace hilbertien V^n de dimension $2n+1$, et l'on sait que $\mathrm{Tr}[\rho^n(u)] = C^1_{2n}\left(\frac{u+\bar{u}}{2}\right)$, pour $u \in \mathbf{U}$, où C^1_{2n} désigne la fonction de Gegenbauer de degré $2n$. Si $\mathrm{Re}(u) = \cos\theta$, on a donc $\mathrm{Tr}[\rho^n(u)] = \sin(2n+1)\theta/\sin\theta$.

Soit H l'espace hilbertien $L^2_{V^n}(\mathbf{U})$ des (classes des) fonctions $f(u)$ de carré intégrable, définies sur $\mathbf{U}$ et à valeurs dans V^n, muni du produit scalaire :

$$(1) \qquad (f_1, f_2) = \int_{\mathbf{U}} (f_1(u), f_2(u))_{V^n}\, d\mu(u) \qquad \text{pour} \quad f_1, f_2 \in H,$$

où $(\ ,\ )_{V^n}$ désigne le produit scalaire dans V^n (dans ce qui suit on écrira $(\ ,\ )$ pour simplifier).

Définissons, pour $g \in G$, l'opérateur $U^{n,s}_g$ par la formule suivante :

$$(2) \qquad (U^{n,s}_g f)(u) = \omega_G(g^{-1}, u)^{-s}\rho^n(u_G(g^{-1}, u)^{-1}) f(g^{-1}.u)$$

pour $f \in H$. Il est facile de vérifier qu'on a $U^{n,s}_{gg'} = U^{n,s}_g U^{n,s}_{g'}$, pour g, g' dans G, puisque $\omega_G(g, u)$ et $u_G(g, u)$ sont des « multiplicateurs ». Si l'on désigne par I l'opérateur identité dans V^n, on a

$$\|\omega_G(g, u)^{-s}\rho^n(u_G(g, u)^{-1}) - I\| \to 0, \qquad \text{quand} \quad g \to e \text{ dans } G,$$

uniformément par rapport à $u \in \mathbf{U}$, ce qui entraîne que l'application $g \to U^{n,s}_g$ est une représentation (fortement) continue de G par des opérateurs linéaires continus dans H. En vertu de la formule [II, 1 (25)], il est aisé de voir que, si $\mathrm{Re}(s) = \frac{3}{2}$, la représentation $U^{n,s}$ est *unitaire*.

REMARQUE 2.1. — Dans le cas où $s = \frac{3}{2} + i\nu$, ν réel, la représentation $U^{n,s}$ n'est autre que la représentation de G induite par la représentation unitaire irréductible de dimension finie $\rho^{n,s}$ du sous-groupe $T = MA_+N$ définie par $\rho^{n,s}(ma_t x) = \rho^n(u)e^{-i\nu t}$, pour $m = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbf{U}$, et $x \in N$, au sens de BRUHAT [3]; en effet, cette représentation induite, soit $L^{\rho^{n,s}}$, est définie dans l'espace hilbertien H' des fonctions $F(g)$ sur G, à valeurs dans V^n, telles que

(i) $F(g.ma_t x) = \beta(ma_t x)\rho^{n,s}(ma_t x)^{-1}F(g)$ pour tout $ma_t x \in MA_+N$,

(ii) $\int_{G/T} \|\beta(g)^{-\frac{1}{2}}F(g)\|^2 d\mu(\dot{g}) < +\infty$,

[la fonction $\beta(g)^{-\frac{1}{2}}F(g)$ ne dépend que de $\dot{g}$, l'image canonique de g dans G/T], où la fonction β est définie par la formule

$$\beta(g) = e^{3t}, \qquad \text{si} \quad g = ka_t x, \quad k \in K, \quad x \in N.$$

L'opérateur $L_g^{\rho^{n,s}}$ est défini par la formule suivante :

$$(L_g^{\rho^{n,s}} F)(g') = F(g^{-1} g').$$

Or on a une section de G au-dessus de $\mathbf{U}$, par rapport à la projection π : $G \to \mathbf{U}$ [*voir* II, 1 (28) pour la définition]; en effet, soit

$$s(u) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad u \in \mathbf{U}; \tag{3}$$

il est évident qu'on a $\pi(s(u)) = u$; comme on a

$$\pi(gs(u)) = \pi(s(g.u)) = g.u,$$

il existe un $m(g, u) \in M$ et un nombre réel $t(g, u)$ et un $x \in N$, déterminés de façon unique, tels qu'on ait

$$g\, s(u) = s(g.u)\, m(g, u)\, a_{t(g, u)}\, x. \tag{4}$$

Comme N est un sous-groupe invariant dans $T = MA_+N$, on a

$$m(gg', u) = m(g, g'.u)\, m(g', u), \qquad t(gg', u) = t(g, g'.u) + t(g', u). \tag{5}$$

En explicitant ces relations, on trouve immédiatement que

$$m(g, u) = \begin{pmatrix} u' & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}, \text{ avec } \quad u' = u_G(g, u), \tag{6}$$

$$e^{t(g, u)} = \omega_G(g, u). \tag{7}$$

Maintenant, tout $g \in G$ s'écrit sous la forme $s(u)\, m a_t x$, avec $u = \pi(g)$, $m \in M$, $x \in N$, et ceci de façon unique; par conséquent, étant donnée une $f \in H$, on peut définir une fonction $F(g)$ sur G par la formule

$$F(g) = e^{3t/2}\, \rho^{n,s}(m a_t x)^{-1} f(u) \qquad \text{si} \quad g = s(u)\, m a_t x. \tag{8}$$

On vérifie aussitôt que (8) définit une isométrie de H sur H', transformant la représentation $U^{n,s}$ en $L^{\rho^{n,s}}$. On pourrait donc conclure l'irréductibilité de $U^{n,s}$ en utilisant le critère de Bruhat ([3], théorème 7.2) Cependant, comme le groupe de Weyl restreint $W = \hat{M}/M$, où $\hat{M}$ est le normalisateur de A_+ dans K, opère trivialement sur les classes de représentations de M, ce critère ne s'applique pas au cas où $\nu = 0$. Par suite, ce ne sera pas tout à fait dépourvu d'intérêt de donner une démonstration directe de l'irréductibilité de $U^{n,s}$ *sauf* pour le cas où $2n \equiv 1 \pmod 2$, $\nu = 0$; dans ce dernier cas, la représentation $U^{n,s}$ est en effet réductible, comme on le verra plus loin, et elle est somme directe de deux représentations unitaires irréductibles (*voir* § 3 et § 4).

2. **Construction dans l'espace Z et l'irréductibilité.** — Comme on l'a signalé au début de ce paragraphe, il est commode d'avoir une autre réalisation de la représentation $U^{n,s}$ dans un espace de fonctions sur **Z**. Soit $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien des fonctions $\varphi(z)$ définies dans **Z** à valeurs dans V^n, et de carré intégrable pour la mesure dz, muni du produit scalaire suivant :

$$(9) \qquad (\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\mathbf{Z}} (\varphi_1(z), \varphi_2(z))\, dz \qquad \text{pour} \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{H};$$

pour $g \in \mathfrak{G}$, posons

$$(10) \qquad (V_g^{n,s}\varphi)(z) = \omega_{\mathfrak{G}}(g^{-1}, z)^{-s} \rho^n(u_{\mathfrak{G}}(g^{-1}, z)^{-1})\, \varphi(g^{-1}.z)$$

pour $\varphi \in \mathfrak{H}$. On démontre, comme pour $U^{n,s}$, que l'application $g \to V_g^{n,s}$ est une représentation continue de $\mathfrak{G}$, *unitaire* si $\mathrm{Re}(s) = \frac{3}{2}$. Définissons une transformation J_s de $\mathfrak{H}$ dans H par la formule suivante :

$$(11) \qquad (J_s\varphi)(u) = 4\pi\, |1 + u|^{-2s} \rho^n((1 + u)^{-1}\, |(1 + u|)\, \varphi(W(u))$$

pour $\varphi \in \mathfrak{H}$. On a alors, *si* $\mathrm{Re}(s) = \frac{3}{2}$,

$$\| J_s\varphi \|^2 = 16\pi^2 \int_{\mathbf{U}} (\varphi(W(u)), \varphi(W(u)))\, |1 + u|^{-6}\, d\mu(u)$$
$$= \int_{\mathbf{Z}} (\varphi(z), \varphi(z))\, dz = \| \varphi \|^2,$$

en vertu de la formule [II, 1 (57)], ce qui montre que $J_s\varphi \in H$, si $\varphi \in \mathfrak{H}$; comme J_s admet la transformation inverse :

$$(12) \qquad (J_s^{-1}f)(z) = \frac{1}{4\pi} 2^{2s}\, |z + k|^{-2s} \rho^n((z + k)^{-1} k\, |z + k|)\, f(W^{-1}(u))$$

pour $f \in H$, on a bien une isométrie de $\mathfrak{H}$ sur H. A l'aide du lemme 1.6, on montre aisément qu'on a

$$(13) \qquad U_g^{n,s} J_s = J_s V_{w(g)}^{n,s} \qquad \text{pour} \quad g \in G,$$

ce qui montre bien l'équivalence unitaire des représentations unitaires $U^{n,s}$ et $V^{n,s} \circ w$ du groupe G, si $\mathrm{Re}(s) = \frac{3}{2}$. On montre donc l'irréductibilité de $V^{n,s}$ dans ce qui suit.

Soit $\mathfrak{G}'$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ formé par les matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{G}$; on a donc $\alpha\hat{\beta} = \beta\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}\delta = \hat{\delta}\beta$, $\hat{\alpha}\delta = \hat{\delta}\alpha = 1$. On va montrer que si A

est un opérateur dans $\mathfrak{H}$ qui commute à tous les opérateurs $V_g^{n,s}$, avec $g \in \mathfrak{G}'$, alors A est scalaire. Remarquons qu'on a

$$(14) \quad V_m^{n,s}\varphi(z) = \rho^n(u)\,\varphi(\hat{u}zu) \qquad \text{pour} \quad m = \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \in M, \quad u \in \mathbf{U},$$

$$(15) \qquad V_g^{n,s}\varphi(z) = |d|^{2s}\rho^n(d/|d|)\,\varphi((dz - b)d),$$

pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, *a, b, d complexes* et $ad = 1$.

Soit $z = x_1 + x_2 i + x_3 j$, x_1, x_2, x_3 réels, et introduisons la transformation de Fourier :

$$(16) \qquad (F\varphi)(\xi_1 + \xi_2 i;\, x_3) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1 + x_2 i + x_3 j)\, e^{i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)}\, dx_1\, dx_2.$$

L'opérateur $A' = FAF^{-1}$ commute donc aux opérateurs $V'_g = FV_gF^{-1}$, $g \in \mathfrak{G}'$. Désignons par $\mathfrak{G}''$ (resp. $\mathfrak{G}''_C$) le sous-groupe de $\mathfrak{G}'$ formé par les matrices $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ avec δ dans $\mathbf{C}$ (resp. α, β, δ dans $\mathbf{C}$) [on identifie $\mathbf{C}$ au sous-corps $\mathbf{R}(i)$ de $\mathbf{H}$]. Désignons de plus par $\mathbf{G}''_R$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}''$ formé par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & bj \\ 0 & d \end{pmatrix}$, avec a, b, d dans $\mathbf{R}$. Il est facile de voir qu'on a $\mathfrak{G}'' = \mathfrak{G}''_C . \mathfrak{G}''_R$. Pour les éléments de $\mathfrak{G}''$, on peut donc expliciter V'_g de la manière suivante (on pose $w = \xi_1 + \xi_2 i$) :

$$(17) \qquad (V'_g\psi)(w;\, x_3) = |\delta|^{2s-4}\rho^n(\delta/|\delta|)\, e^{i\mathrm{Re}\,(\beta\delta^{-1}\overline{w})}\,\psi(\overline{\delta}^{-2}w;\, |\delta|^2 x_3)$$

pour $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{G}''_C$, et

$$(18) \qquad (V'_g\psi)(w;\, x_3) = |d|^{2s-4}\rho^n(d/|d|)\,\psi(d^{-2}w;\, (dx_3 - b)d),$$

pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{G}''_R$; or, $d/|d| = \mathrm{sgn}(d)$, et, comme

$$\rho^n(-1) = (-1)^{2j} I \quad \text{si } n \equiv j \bmod 1, \qquad \text{avec} \quad j = 0, \frac{1}{2},$$

on peut écrire (18) sous la forme suivante :

$$(19) \qquad (V'_g\psi)(w;\, x_3) = |d|^{-2}(W_g^{j,\nu}\psi)(d^{-2}w;\, x_3),$$

où $g \to W_g^{j,\nu}$ est la représentation de $\mathfrak{G}''_R$ dans $L^2_{V^n}(\mathbf{R})$, concernant la variable x_3, définie par la formule suivante :

$$(20) \quad (W_g^{j,\nu}f)(x_3) = |d|^{1+2i\nu}\,\mathrm{sgn}(d)^{2j} f((dx_3 - b)d) \qquad \text{pour} \quad g = \begin{pmatrix} a & bj \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

La formule (17) montre que les opérateurs V'_g correspondant aux éléments $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, β dans **C**, sont des opérateurs de multiplication par les fonctions $\exp[i \operatorname{Re}(\beta \bar{w})]$, ce qui entraîne que l'opérateur A', qui commute avec eux, est de la forme suivante :

$$(A'\psi)(w; x_3) = A(w)\psi(w; x_3), \tag{21}$$

où $A(w)$ est une fonction, définie dans **C**, essentiellement bornée et à valeurs dans l'espace des opérateurs linéaires continus de $L^2_{V^n}(\mathbf{R})$, concernant la variable x_3. Si l'on écrit maintenant la relation de commutation : $A'V'_g = V'_g A'$ pour les éléments $g = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq 0$, on obtient la relation suivante :

$$\rho^n(\lambda/|\lambda|)A(\bar{\lambda}^{-2}w) = A(w)\rho^n(\lambda/|\lambda|);$$

si l'on prend $\lambda = |w|^{\frac{1}{2}}$, on a donc $A(w/|w|) = A(w)$, puisque $\rho^n(1) = I$; la fonction $A(w)$ ne dépend donc que de $w/|w|$. Écrivons alors la relation $A'V'_g = V'_g A'$ pour g dans $\mathfrak{G}''_R$:

$$|d|^{-2}(A(w/|w|)W_g^{j,\nu}\psi)(d^{-2}w; x_3) = d^{-2}(W_g^{j,\nu}A(d^{-2}w/|d^{-2}w|)\psi)(d^{-2}w; x_3)$$

ou encore

$$W_g^{j,\nu}A(w/|w|) = A(w/|w|)W_g^{j,\nu}, \qquad \text{quel que soit} \quad g \in \mathfrak{G}''_R. \tag{22}$$

Choisissons une base (v_p) dans V^n; alors toute fonction $f(x_3)$ dans $L^2_{V^n}(\mathbf{R})$ se met sous la forme

$$f(x_3) = \sum_p f_p(x_3)v_p, \qquad \text{avec} \quad f_p(x_3) \in L^2(\mathbf{R}),$$

et l'opérateur $A(w/|w|)$ sous la forme

$$(A(w/|w|)f)(x_3) = \sum_{p,q}(A_{pq}(w/|w|)f_q)(x_3)v_p,$$

avec $A_{pq}(w/|w|)$ des opérateurs linéaires continus dans $L^2(\mathbf{R})$, concernant la variable x_3. Or, les opérateurs $W_g^{j,\nu}$, $g \in \mathfrak{G}''_R$, sont « diagonaux »

$$(W_g^{j,\nu}f)(x_3) = \sum_p (W_g^{j,\nu}f_p)(x_3)v_p,$$

où l'on désigne par $W^{j,\nu}$ la représentation de $\mathfrak{G}''_R$ dans $L^2(\mathbf{R})$, définie par la même formule que (20) (en prenant les fonctions à valeurs complexes); par suite, la relation (22) signifie qu'on a

$$A_{pq}(w/|w|)W_g^{j,\nu} = W_g^{j,\nu}A_{pq}(w/|w|) \qquad \text{pour} \quad g \in \mathfrak{G}''_R,$$
$$-n \leq p, \quad q \leq +n.$$

Or, le groupe $\mathfrak{G}''_R$ est isomorphe au sous-groupe triangulaire supérieur T de $SL\,(2,\,\mathbf{R})$, le groupe formé par les matrices unimodulaires réelles de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, et, modulo cet isomorphisme, la représentation $W^{j,\nu}$ n'est autre que la restriction de la représentation $V^{j,\nu}$ de la série principale continue de $SL\,(2,\,\mathbf{R})$, et l'on sait que les représentations de cette série, avec $j=0$ et ν réel, ou $j=\frac{1}{2}$ et $\nu\neq 0$, sont encore irréductibles comme représentations du sous-groupe T (*voir*, par exemple, la démonstration du lemme 6 dans [20]; la modification à apporter, pour remplacer le groupe entier par T, est triviale). Ceci entraîne donc que les opérateurs $A_{pq}\,(w/|\,w\,|)$ sont scalaires, soit $a_{pq}\,(w/|\,w\,|)$. On a ainsi démontré que, pour $\psi\in L^2_{V^n}\,(\mathbf{C};\,\mathbf{R})=F\,\mathfrak{H}$,

$$(A'\,\psi)\,(w;x_3)=A\,(w)\,\psi\,(w;x_3), \tag{23}$$

où $A\,(w)$ est une fonction essentiellement bornée, définie dans $\mathbf{C}$, à valeurs dans l'espace des opérateurs linéaires de V^n, fonction qui ne dépend d'alleurs que de $\mathrm{w}/|\,\mathrm{w}\,|$.

Effectuons maintenant une transformation de Fourier par rapport à la variable x_3 :

$$(F'\,\psi)\,(w;\,\xi_3)=(2\,\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \psi\,(w;\,x_3)\,e^{ix_3\xi_3}\,dx_3;$$

F' définit une isométrie de l'espace $L^2_{V^n}\,(\mathbf{C};\,\mathbf{R})$ sur l'espace $L^2_{V^n}\,(\mathbf{Z})$; si l'on introduit la variable

$$\zeta=\xi_1+\xi_2\,i+\xi_3\,j=w+\xi_3\,j,$$

on peut écrire, pour $\varphi\in\mathfrak{H}$,

$$\hat{\varphi}\,(\zeta)=(F'\,F\,\varphi)\,(\zeta)=(2\,\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_Z \varphi\,(z)\,e^{i\mathrm{Re}(z\bar{\xi})}\,dz,$$

et si l'on pose

$$A''=F'\,A'\,(F')^{-1}=(F'\,F)\,A\,(F'\,F)^{-1},$$

et

$$V''_g=F'\,V'_g\,(F')^{-1}=(F'F)\,V^{n,s}_g(F'\,F)^{-1},$$

la formule (23) entraîne qu'on a, pour $\hat{\varphi}\in\mathfrak{H}$,

$$(A''\,\hat{\varphi})\,(\zeta)=A\,(\xi_1+\xi_2\,i)\,\hat{\varphi}\,(\zeta),\qquad \zeta=\xi_1+\xi_2\,i+\xi_3\,j, \tag{24}$$

avec une fonction $A\,(\xi_1+\xi_2\,i)$ à valeurs dans l'espace des opérateurs dans V^n. On voit facilement, d'après (14), que, si $m=\begin{pmatrix} \bar{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, avec $u\in\mathbf{U}$, on a

$$(V''_m\,\hat{\varphi})\,(\zeta)=\rho^n(u)\,\hat{\varphi}\,(\hat{u}\,\zeta\,u);$$

si l'on écrit la relation de commutation $V''_m A'' = A'' V''_m$, il vient

$$A(\xi_1 + \xi_2 i)\rho^n(u) = \rho^n(u) A(\xi'_1 + \xi'_2 i), \tag{25}$$

où

$$\xi'_1 + \xi'_2 i + \xi'_3 j = \hat{u}(\xi_1 + \xi_2 i + \xi_3 j) u.$$

Prenons $u = u_0 = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$, qui est bien dans $\mathbf{U}$; alors, il est immédiat de voir que

$$\hat{u}_0(\xi_1 + \xi_2 i + \xi_3 j) u_0 = -\xi_3 + \xi_1 i - \xi_2 j;$$

on obtient donc, de (25) :

$$A(\xi_1 + \xi_2 i) = \rho^n(u_0) A(-\xi_3 + \xi_1 i)\rho^n(\bar{u}_0),$$

ce qui signifie que $A(\xi_1 + \xi_2 i)$ ne dépend pas de ξ_2. De même, en utilisant u_0^2, on voit qu'elle ne dépend pas non plus de ξ_1, c'est-à-dire que $A(\xi_1 + \xi_2 i) = B$, où B est un opérateur linéaire dans V^n; or, la relation (25) s'écrit maintenant $B\rho^n(u) = \rho^n(u)B$, pour tout $u \in \mathbf{U}$, ce qui entraîne, à cause de l'irréductibilité de ρ^n, que $B = aI$, $a \in \mathbf{C}$, d'où résulte que l'opérateur A'' est scalaire. C. Q. F. D.

THÉORÈME 2.1. — *Soit n un demi-entier ≥ 0, $s = \frac{3}{2} + i\nu$, ν réel. La représentation unitaire $U^{n,s}$ de G, définie dans $H = L^2_{\rho^n}(\mathbf{U})$, par la formule* (2), *est irréductible, sauf dans le cas où $n \equiv \frac{1}{2}$ (mod 1) et $\nu = 0$. Pour que les représentations $U^{n,s}$ et $U^{n',s'}$, avec $\operatorname{Re}(s') = \frac{3}{2}$, soient unitairement équivalentes, il faut et il suffit qu'on ait $n = n'$ et $\operatorname{Im}(s) = \pm \operatorname{Im}(s')$.*

La démonstration de la seconde partie de l'énoncé sera donnée au paragraphe 4.

DÉFINITION 2.1. — *Les représentations unitaires $U^{n,s}$, n demi-entier $\operatorname{Re}(s) = \frac{3}{2}$, constituent, par définition, la première série principale du groupe G.*

3. Décomposition suivant les représentations du sous groupe compact maximal K. — Définissons les fonctions f_v, F_v, pour $v \in V^n$, comme suit :

$$f_v(u) = v \quad \text{pour} \quad u \in \mathbf{U}, \tag{26}$$

$$F_v(u) = \rho^n(\bar{u}) v \quad \text{pour} \quad u \in \mathbf{U}; \tag{27}$$

il est évident que f_ν, F_ν sont dans H, et l'on a, si $k = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$, $u_1, u_2 \in \mathbf{U}$,

$$U_k^{n,s} f_\nu = f_{\rho^n(u_2)\nu}, \qquad U_k^{n,s} F_\nu = F_{\rho^n(u_1)\nu}; \tag{28}$$

par suite, les fonctions f_ν (resp. F_ν), $v \in V^n$, forment un sous-espace fermé $H^{0,n}$ (resp. $H^{n,0}$), stable par les $U_k^{n,s}$, $k \in K$, et la représentation de K induite par $U^{n,s}$ n'est autre que $\rho_K^{0,n}$ (resp. $\rho_K^{n,0}$). Comme on sait que toute représentation unitaire irréductible de K est contenue dans $U^{n,s}$ au plus une fois (*cf.* § 2, chap. I), le sous-espace $H^{0,n}$ (resp. $H^{n,s}$ est caractérisé par la propriété d'être transformé suivant $\rho_K^{0,n}$ (resp. $\rho_K^{n,0}$).

Plus généralement, l'espace $H = L^2_{V^n}(\mathbf{U})$ est isomorphe au produit tensoriel $L_2(\mathbf{U}) \otimes V^n$ de deux espaces hilbertiens $L^2(\mathbf{U})$, V^n, et la représentation $U_k^{n,s}$ de K dans H est équivalente à la représentation $\rho \otimes \rho_K^{0,n}$, où ρ désigne la représentation « régulière » de K dans $\mathbf{U}$, savoir

$$[\rho(k)f](u) = f(\bar{u}_1 u u_2) \qquad \text{pour} \quad k = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}.$$

On sait que la représentation ρ est la somme hilbertienne des représentations $\rho_K^{p,p}$, p demi-entier (c'est la théorie des fonctions sphériques classiques, dans le cas de dimension 3); par conséquent, $U_k^{n,s}$ est équivalente à $\bigoplus_p (\rho_K^{p,p} \otimes \rho_K^{0,n})$. La formule de Clebsch-Gordan (*voir*, par exemple, [21]) montre que $\rho_K^{p,p} \otimes \rho_K^{0,n} \simeq \bigoplus_q \rho_K^{p,q}$, somme étendue sur l'ensemble des q tels que $p + n \geqq q \geqq |p - n|$, $p + n \equiv q \pmod 1$; il en résulte que la représentation $U_k^{n,s}$ est équivalente à $\bigoplus_{(p,q) \in D_n} \rho_K^{p,q}$, où D_n désigne l'ensemble formé par les couples (p, q) des demi-entiers $\geqq 0$ tels que $p + q \geqq n \geqq |p - q|$, et $p + q \equiv n \pmod 1$, considéré par Dixmier [6]. On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.1. — *Soit D_n l'ensemble défini ci-dessus. Pour chaque $(p, q) \in D_n$, il existe un sous-espace fermé $H^{p,q}$ de H et un seul tel que la restriction de $U^{n,s}$ à K le laisse stable et y induit une représentation équivalente à $\rho_K^{p,q}$. De plus, H est la somme hilbertienne de ces sous-espaces $H^{p,q}$, avec $(p, q) \in D_n$.*

Corollaire. — *Si $n \neq n'$, les représentations $U^{n,s}$ et $U^{n',s'}$ ne sont pas unitairement équivalentes.*

Remarque 2.2. — La représentation $U^{n,s}$ construite ci-dessus est équivalente à la représentation $\nu_{n,\sigma}$, avec $\sigma = s(3 - s) - 2 = \nu^2 + \frac{1}{4}$, dans la notation de Dixmier [6], dans les cas suivants :

(i) $\qquad n \equiv 0 \pmod 1, \qquad s = \frac{3}{2} + i\nu, \qquad \nu \geqq 0,$

(ii) $\qquad n \equiv \frac{1}{2} \pmod 1, \qquad s = \frac{3}{2} + i\nu, \qquad \nu > 0.$

La série complémentaire construite au paragraphe 5 du chapitre I, pour les groupes $G_+(n)$, $n \geqq 2$, donne ici, pour $G_+(4)$, les représentations $\nu_{0,\sigma}$, avec $\frac{1}{4} > \sigma > -2$. Il reste donc encore à construire globalement les représentations $\nu_{n,\sigma}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et $\frac{1}{4} > \sigma > 0$; on y parviendra en généralisant le procédé du paragraphe 5 du chapitre I, pour $U^{n,s}$ avec n entier $\geqq 1$ et s réel et $\frac{3}{2} < s < 2$ (et non $s < 3$, contrairement au cas de classe 1, $n = 0$). En effet, il est relativement facile de trouver un noyau $W^{n,s}(u, v)$, fonction mesurable définie sur $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$ et à valeurs dans l'espace des opérateurs linéaires de V^n, de manière que

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbf{U}} \int_{\mathbf{U}} (W^{n,s}(u, v) f_1(u), f_2(v))\, d\mu(u)\, d\mu(v) \tag{29}$$

définisse une forme sesquilinéaire dans $L_{V^n}(\mathbf{U})$, l'espace des fonctions continues à valeurs dans V^n, et qu'on ait

$$\langle U_g^{n,s} f_1, U_g^{n,s} f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \qquad \text{pour tout} \quad g \in G;$$

pour que l'intégrale (29) converge, il faut qu'on ait $\frac{3}{2} < s < 2$; cependant, nous n'avons pu montrer que, dans ce cas, (29) soit une forme *définie positive*.

Remarque 2.3. — Dans la remarque 2.1, on a utilisé la section de G au-dessus de $\mathbf{U}$, définie par (3); il est facile de voir qu'on peut aussi prendre la section

$$s'(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix} \qquad \text{pour} \quad u \in \mathbf{U}, \tag{30}$$

et alors on obtiendra la représentation ${}'U^{n,s}$ définie par la formule suivante :

$$\begin{aligned} &({}'U_g^{n,s} f)(u) \\ &\quad = |a + b\bar{u}|^{-2s} \rho^n((a + b\bar{u})^{-1} |a + b\bar{u}|) f((au + b)(cu + d)^{-1}), \end{aligned} \tag{31}$$

pour $f \in H$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il va de soi que cette représentation est unitairement équivalente à la représentation $U^{n,s}$.

§ 3. SECONDE SÉRIE PRINCIPALE (OU SÉRIE PRINCIPALE DISCRÈTE).

1. **Préliminaires.** — Soit ρ une représentation unitaire irréductible du sous-groupe compact maximal K de G, dans un espace hilbertien V de dimension finie. Soit p un demi-entier $\geqq 1$, et soit $H^{\rho,p}$ l'espace

hilbertien des (classes des) fonctions $f(q)$ définies dans $\mathbf{B}$, à valeurs dans V, et de carré intégrable pour la mesure $(1 - |q|^2)^{-4+2(p+1)} d\mu(q)$, muni du produit scalaire :

$$(1) \qquad (f_1, f_2)_{\rho,p} = c \int_{\mathbf{B}} (f_1(q), f_2(q))_V (1 - |q|^2)^{2p-2} d\mu(q),$$

avec c une constante positive, que nous préciserons plus tard, $(\ ,\ )_V$ désignant le produit scalaire dans V. Comme on a

$$\int_{\mathbf{B}} (1 - |q|^2)^{2p-2} d\mu(q) = \pi^2/2p(2p-1),$$

les fonctions bornées sont dans $H^{\rho,p}$ (car $p \geqq 1$), donc $H^{\rho,p}$ n'est pas trivial.

Définissons, pour $g \in G$, l'opérateur $T_g^{\rho,p}$ par la formule

$$(2) \qquad (T_g^{\rho,p} f)(q) = |cq + d|^{-2p-2} \rho(k(g^{-1}, q)^{-1}) f((aq+d)(cq+d)^{-1}),$$

pour $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $f \in H^{\rho,p}$, où $k(g, q)$ désigne le multiplicateur défini au n° 5, § 1 [*cf.* (31), (31')]. Il est facile de vérifier que c'est un opérateur *unitaire* [pour le produit scalaire ci-dessus (1)], et que l'application : $g \to T_g^{\rho,p}$ définit une représentation unitaire continue de G dans $H^{\rho,p}$. Notre but est de trouver une sous-représentation irréductible de $T^{\rho,p}$. Dans ce qui suit, on notera T_g au lieu de $T_g^{\rho,p}$, (f_1, f_2) au lieu de $(f_1, f_2)_{\rho,p}$.

Soit d'autre part $L_V^2(G)$ l'espace hilbertien des fonctions $F(g)$ de carré intégrable, et à valeurs dans V, muni du produit scalaire :

$$(F, F') = \int_G (F(g), F'(g))_V \, dg;$$

on a une représentation évidente de G dans cet espace, à savoir la représentation régulière à gauche :

$$(U_g F)(h) = F(g^{-1}h) \qquad \text{pour} \quad F \in L_V^2(G).$$

Soit $L_{V,\rho}^2(G)$ le sous-espace des fonctions F telles que

$$(3) \qquad F(gk) = \rho(k)^{-1} F(g) \qquad \text{pour tout} \quad k \in K \quad \text{et} \quad g \in G;$$

il est évident que $L_{V,\rho}^2(G)$ est stable pour les U_g, $g \in G$; notons encore U la représentation de G, obtenue par restriction. Montrons que les représentations unitaires $\{T, H^{\rho,p}\}$ et $\{U, L_{V,\rho}^2(G)\}$ sont unitairement équivalentes. En effet, pour $f \in H^{\rho,p}$, posons

$$(4) \quad F = J^{\rho,p} f, \qquad \text{où} \quad F(g) = F(s(q)k) = c^{\frac{1}{2}} 2^{-2} (1 - |q|^2)^{p+1} \rho(k)^{-1} f(q),$$

[cela définit bien une fonction F sur G, puisque tout $g \in G$ se met d'une façon et d'une seule, sous la forme $g = s(q)k$, $q \in \mathbf{B}$, $k \in K$, d'après le n° 5, §1]; il est trivial de voir que cette fonction F est dans $L^2_{V,\rho}(G)$, et l'on a, d'après le lemme 1.4,

$$(F, F) = 2^4 \int_{\mathbf{B}} \int_K (F(s(q)k), F(s(q)k))_V (1 - |q|^2)^{-4} \, d\mu(q)\, dk$$
$$= c \int_{\mathbf{B}} (f(q), f(q))_V (1 - |q|^2)^{2(p+1)-4} \, d\mu(q) = (f, f),$$

ce qui montre bien que $J^{\rho,p}$ est une isométrie de $H^{\rho,p}$ dans $L^2_{V,\rho}(G)$; elle est surjective, puisque toute fonction $F \in L^2_{V,\rho}(G)$ est l'image par $J^{\rho,p}$ de la fonction $f(q) = c^{-\frac{1}{2}} 2^2 (1 - |q|^2)^{-p-1} F(s(q))$ dans $H^{\rho,p}$. Montrons qu'on a

$$J^{\rho,p} \circ T_g \circ (J^{\rho,p})^{-1} = U_g \qquad \text{pour} \qquad g \in G; \tag{5}$$

posons pour cela $F' = J^{\rho,p}(T_g f)$; on a alors, si $h = s(q)k$,

$$F'(h) = 4^{-1} c^{\frac{1}{2}} (1 - |q|^2)^{p+1} \rho(k)^{-1} (T_g f)(q)$$
$$= 4^{-1} c^{\frac{1}{2}} (1 - |q|^2)^{p+1} \rho(k)^{-1} |cq + d|^{-2p-2} \rho(k(g^{-1}, q)^{-1}) f(g^{-1} . q),$$

si $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; or on a

$$1 - |g^{-1} . q|^2 = (1 - |q|^2) |cq + d|^{-2}, \tag{6}$$

d'où

$$F'(h) = 4^{-1} c^{\frac{1}{2}} (1 - |g^{-1} . q|^2)^{p+1} \rho(k(g^{-1}, q)k)^{-1} f(g^{-1} . q)$$
$$= (J^{\rho,p} f)(s(g^{-1} . q) k(g^{-1}, q) k)$$
$$= F(g^{-1} s(q) k) = F(g^{-1} h) = (U_g F)(h),$$

ce qui démontre (5).

Soit maintenant $H_0^{\rho,p}$ (resp. D) le sous-espace des fonctions indéfiniment dérivables dans $H^{\rho,p}$ (resp. $L^2_{V,\rho}(G)$). Il est clair que $J^{\rho,p}$ induit une isométrie de $H_0^{\rho,p}$ sur D. Sur $H_0^{\rho,p}$ ou D, on peut considérer les opérateurs T_X ou U_X, correspondant aux éléments X de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}$ de l'algèbre de Lie de G (considérée comme opérateurs différentiels invariants à droite). En particulier, si Ω désigne l'opérateur de Casimir de G,

$$T_\Omega = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 4} (T_{X_{\alpha\beta}})^2 - \sum_{1 \leq \alpha \leq 4} (T_{Y_\alpha})^2, \tag{7}$$

$$U_\Omega = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 4} (U_{X_{\alpha\beta}})^2 - \sum_{1 \leq \alpha \leq 4} (U_{Y_\alpha})^2, \tag{7'}$$

sont bien définis sur $H_0^{\rho,p}$, resp. sur D [on a identifié les algèbres de Lie de G et de $\mathbf{G}_+$ (4), à l'aide de l'isomorphisme local φ], et l'on a

$$(8) \qquad T_\Omega = (J^{\rho,p})^{-1} \circ U_\Omega \circ J^{\rho,p}.$$

Nous pouvons maintenant expliciter l'opérateur T_Ω sur $H_0^{\rho,p}$ à l'aide de cette formule, c'est-à-dire en calculant U_Ω dans D, et en revenant ensuite à $H_0^{\rho,p}$ à l'aide de $J^{\rho,p}$. Comme T_Ω commute à tous les T_g, $g \in G$, on obtiendra un sous-espace invariant irréductible dans $H_0^{\rho,p}$, en prenant des vecteurs propres correspondant aux valeurs propres du spectre discontinu.

2. **Calcul des opérateurs $K_{\text{X}_{\alpha\beta}}$ et K_{Y_α}.** — Introduisons dans G les paramètres (q, k), $q \in \mathbf{B}$, $k \in K$, définis par $g = s(q)k$, et convenons d'écrire

$$(9) \qquad F(g) = F(q, k) \qquad \text{si} \quad g = s(q)k, \quad q \in \mathbf{B}, \quad k \in K.$$

Lemme 3.1. — *Pour* $1 \leqq \alpha < \beta \leqq 4$, *on a*

$$(10) \qquad U_{X_{\alpha\beta}} F = \left(x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \text{X}_{\alpha\beta}^K \right) F,$$

ou x_1, x_2, x_3, x_4 *sont des composantes de* q, $q = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, *et* $\text{X}_{\alpha\beta}^K$ *est l'opérateur différentiel (« dérivée partielle » par rapport à la variable* k *suivant* $\text{X}_{\alpha\beta}$*) défini par*

$$(11) \qquad (\text{X}_{\alpha\beta}^K F)(q, k) = \lim_{t \to 0} (F(q, k_{\alpha\beta}(-t)k) - F(q, k))/t.$$

Démonstration. — Par définition, on a

$$(U_{X_{\alpha\beta}} F)(g) = \lim_{t \to 0} (F(k_{\alpha\beta}(-t)\, g) - F(g))/t;$$

donc, dans les paramètres (q, k), on a

$$(U_{X_{\alpha\beta}} F)(q, k) = \lim_{t \to 0} (F(q', k') - F(q, k))/t,$$

où q', k' sont déterminés par la relation suivante :

$$k_{\alpha\beta}(-t)\, s(q)\, k = s(q')\, k',$$

ou, d'après [1 (31)],

$$q' = k_{\alpha\beta}(-t).q, \qquad k' = k(k_{\alpha\beta}(-t), q)\, k;$$

or, d'après la remarque faite au n° 3, § 1, la transformation $q \to q'$ n'est autre que la rotation $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ ayant la matrice $\exp(-tX_{\alpha\beta})$; et il est clair que $k(k_{\alpha\beta}(-t), q) = k_{\alpha\beta}(-t)$; on a donc

$$(U_{X_{\alpha\beta}} F)(q, k) = \lim_{t \to 0} (F(q', k') - F(q, k'))/t \\ + \lim_{t \to 0} (F(q, k_{\alpha\beta}(-t)\, k) - F(q, k))/t,$$

ce qui donne la formule cherchée.

LEMME 3.2. — *Pour* $1 \leqq \alpha \leqq 4$, *on a les formules suivantes :*

$$(12) \qquad U_{Y_\alpha} F = \left(-\frac{1}{2}(1 + |q|^2)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + x_\alpha D + \sum_{1 \leqq \beta \leqq 4} x_\beta X^K_{\alpha\beta}\right) F,$$

où l'on a posé

$$(13) \qquad D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

$$(14) \qquad X^K_{\alpha\beta} = -X^K_{\beta\alpha} \quad si \quad \alpha > \beta, \quad X^K_{\alpha\alpha} = 0.$$

DÉMONSTRATION. — Montrons par exemple pour $\alpha = 1$. Alors

$$(U_{Y_1} F)(q, k) = \lim_{t \to 0} (F(q', k') - F(q, k))/t,$$

où q', k' sont déterminés par la relation : $a_1(-t)\, s(q)\, k = s(q')k'$, ou, toujours d'après [1 (31)],

$$q' = a_1(-t).q = \left(q \operatorname{ch}\frac{1}{2}t - \operatorname{sh}\frac{1}{2}t\right)\left(\operatorname{ch}\frac{1}{2}t - q \operatorname{sh}\frac{1}{2}t\right)^{-1},$$
$$k' = k(a_1(-t), q)\, k;$$

par suite, on a, d'après [1 (31')],

$$q' = q - t(1 + |q|^2)/2 + t x_1 q + o(t) \quad (^{13}),$$

$$k' = \begin{pmatrix} u' & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \begin{cases} u' = \left(\operatorname{ch}\frac{1}{2}t - q \operatorname{sh}\frac{1}{2}t\right)\left|\operatorname{ch}\frac{1}{2}t - q \operatorname{sh}\frac{1}{2}t\right|^{-1} u, \\ v' = \left(\operatorname{ch}\frac{1}{2}t - q \operatorname{sh}\frac{1}{2}t\right)\left|\operatorname{ch}\frac{1}{2}t - q \operatorname{sh}\frac{1}{2}t\right|^{-1} v, \end{cases}$$

si $k = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$. Il vient donc

$$(U_{Y_1} F)(q, k) \\ = \left[\left(-\frac{1}{2}(1 + |q|^2) + x_1^2\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 x_4 \frac{\partial}{\partial x_4}\right] F(q, k) \\ + \lim_{t \to 0} (F(q, k') - F(q, k))/t;$$

(13) On désigne par $o(t)$ un quaternion dépendant de t tel que $|o(t)| \to 0$, lorsque $\to 0$.

or, si l'on pose

$$k'' = k_{12}(-tx_2)\, k_{13}(-tx_3)\, k_{14}(-tx_4)\, k,$$

on a

$$\lim_{t\to 0} (F(q, k') - F(q, k''))/t = 0,$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} (F(q, k') - F(q, k))/t &= \lim_{t\to 0} (F(q, k'') - F(q, k))/t \\ &= [(x_2 X^K_{12} + x_3 X^K_{13} + x_4 X^K_{14}) F] (q, k),\end{aligned}$$

d'où la formule (12), pour $\alpha = 1$; on démontre de même pour $\alpha = 2, 3, 4$.

D'après ces deux lemmes, on obtient l'expression suivante pour U_Ω :

$$(15)\quad U_\Omega F = \left[-\left(\frac{1}{2}(1-|q|^2)\right)^2 \Delta - (1-|q|^2)\left(D + \sum_{1\leq\alpha\leq 4} \Lambda^K_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) - \sum_{1\leq\alpha\leq 4} (\Lambda^K_\alpha)^2 + \sum_{1\leq\alpha<\beta\leq 4} (X^K_{\alpha\beta})^2 \right] F,$$

où D est défini par (13), Δ est le laplacien par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_4$, et l'on pose

$$(16)\quad \Lambda^K_\alpha = \sum_{1\leq\beta\leq 4} x_\beta X^K_{\alpha\beta}, \qquad \Lambda_\alpha = \sum_{1\leq\beta\leq 4} x_\beta X_{\alpha\beta}, \qquad \text{pour} \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Pour $f \in H^{\rho,p}_0$, on a

$$(J^{\rho,p} \circ T_\Omega) f = (U_\Omega \circ J^{\rho,p}) f,$$

ou

$$\frac{c^{\frac{1}{2}}}{4} (1-|q|^2)^{p+1} \rho(k)^{-1} (T_\Omega f)(q) = U_\Omega \left(\frac{c^{\frac{1}{2}}}{4} (1-|q|^2)^{p+1} \rho(k)^{-1} f(q) \right)$$

en remarquant qu'on a

$$(17)\quad (X^K_{\alpha\beta}\, \check{\rho})(k) = \rho(k^{-1})\, \rho(X_{\alpha\beta}),$$

on obtient donc la formule suivante :

$$(18)\quad -T_\Omega f = \left[\left(\frac{1}{2}(1-|q|^2)\right)^2 \Delta - p(1-|q|^2) D + (1-|q|^2) \sum_\alpha \rho(\Lambda_\alpha) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + p(p+1)|q|^2 - 2(p+1) + \sum_\alpha \rho(\Lambda_\alpha)^2 - \sum_{\alpha<\beta} \rho(X_{\alpha\beta})^2 \right] f,$$

pour $f \in H^{\rho,p}_0$.

Comme l'opérateur T_Ω commute aux opérateurs T_g, $g \in G$, le sous-espace S de $H_0^{\rho,p}$ formé par les f tels que

$$T_\Omega f = c(\Omega) f,$$

où $c(\Omega)$ est une constante fixe, est stable pour T_g, $g \in G$; nous allons montrer qu'en choisissant $c(\Omega)$ convenablement, on obtient un sous-espace fermé non-trivial sur lequel T induit une représentation irréductible de G.

3. **Étude détaillée de l'opérateur** T_Ω. — Nous avons identifié les algèbres de Lie des groupes G et $\mathbf{G}_+$ (4); d'après [1 (16)], [1 (17)], il est clair alors qu'on a

$$(19)\qquad L_1 = -X_{12} - X_{34}, \qquad M_1 = -X_{13} + X_{24}, \qquad N_1 = -X_{14} - X_{23},$$

resp.

$$(20)\qquad L_2 = X_{12} - X_{34}, \qquad M_2 = X_{13} + X_{24}, \qquad N_2 = X_{14} - X_{23},$$

forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{K}_1$ de K_1, resp. $\mathfrak{K}_2$ de K_2. De plus, si l'on désigne par ι_1, ι_2 les isomorphismes évidents de K_1, K_2 sur $\mathbf{U}$, il est clair d'après ce qui a été dit au nº 9, § 1, qu'on a

$$(21)\qquad I \circ \iota_\nu(L_\nu) = A, \qquad I \circ \iota_\nu(M_\nu) = B, \qquad I \circ \iota_\nu(N_\nu) = C \qquad (\nu = 1, 2),$$

avec A, B, C les matrices définies par [1 (66)].

Soit maintenant $\rho = \rho_K^{n,n'}$ la représentation unitaire irréductible de K dans l'espace $V^n \otimes V^{n'}$, définie au nº 9, § 1. Il est évident, d'après ce qui précède, qu'on a

$$(22)_1\qquad \begin{cases} \rho(L_1) = \sigma^n(A) \otimes I_{2n'+1}, \qquad \rho(M_1) = \sigma^n(B) \otimes I_{2n'+1}, \\ \rho(N_1) = \sigma^n(C) \otimes I_{2n'+1}, \end{cases}$$

$$(22)_2\qquad \begin{cases} \rho(L_2) = I_{2n+1} \otimes \sigma^{n'}(A), \qquad \rho(M_2) = I_{2n+1} \otimes \sigma^{n'}(B), \\ \rho(N_2) = I_{2n+1} \otimes \sigma^{n'}(C). \end{cases}$$

En particulier, dans le cas où $n' = 0$ (en identifiant $\sigma^n \otimes I_1$ à σ^n), on a les relations

$$(23)_1\qquad \begin{cases} \rho(X_{12}) = \rho(X_{34}) = -\frac{1}{2}\sigma^n(A), \qquad \rho(X_{13}) = -\rho(X_{24}) = -\frac{1}{2}\sigma^n(B), \\ \rho(X_{14}) = \rho(X_{23}) = -\frac{1}{2}\sigma^n(C); \end{cases}$$

de même, si $n = 0$, on a

$$(23)_2 \quad \begin{cases} \rho(X_{12}) = -\rho(X_{34}) = \frac{1}{2}\sigma^{n'}(A), \qquad \rho(X_{13}) = \rho(X_{24}) = \frac{1}{2}\sigma^{n'}(B), \\ \rho(X_{14}) = -\rho(X_{23}) = \frac{1}{2}\sigma^{n'}(C). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(24) \qquad A_n = \sigma^n(A), \qquad B_n = \sigma^n(B), \qquad C_n = \sigma^n(C),$$

on a, d'après (16),

$$(25)_1 \quad \left\{ \begin{aligned} \rho(\Lambda_1) &= \frac{1}{2}(-x_2 A_n - x_3 B_n - x_4 C_n), \\ \rho(\Lambda_2) &= \frac{1}{2}(\ \ x_1 A_n + x_4 B_n - x_3 C_n), \\ \rho(\Lambda_3) &= \frac{1}{2}(-x_4 A_n + x_1 B_n + x_2 C_n), \\ \rho(\Lambda_4) &= \frac{1}{2}(\ \ x_3 A_n - x_2 B_n + x_1 C_n), \end{aligned} \right\} \quad (\text{cas} : \rho = \rho_K^{n,0})$$

$$(25)_2 \quad \left\{ \begin{aligned} \rho(\Lambda_1) &= \frac{1}{2}(\ \ x_2 A_n + x_3 B_n + x_4 C_n), \\ \rho(\Lambda_2) &= \frac{1}{2}(-x_1 A_n + x_4 B_n - x_3 C_n). \\ \rho(\Lambda_3) &= \frac{1}{2}(-x_4 A_n - x_1 B_n + x_2 C_n), \\ \rho(\Lambda_4) &= \frac{1}{2}(\ \ x_3 A_n - x_2 B_n - x_1 C_n), \end{aligned} \right\} \quad (\text{cas} : \rho = \rho_K^{0,n})$$

Par conséquent, on a

$$(26) \quad \sum_\alpha \rho(\Lambda_\alpha)^2 = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(A_n^2 + B_n^2 + C_n^2) = -n(n+1)\,|q|^2,$$

$$(27) \quad \sum_{\alpha<\beta} \rho(X_{\alpha\beta})^2 = \frac{1}{2}(A_n^2 + B_n^2 + C_n^2) = -2n(n+1),$$

dans les deux cas.

Quant à l'opérateur $\sum_\alpha \rho(\Lambda_\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$, on obtient l'expression suivante :

$$(28)_1 \quad \sum_\alpha \rho(\Lambda_\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{2}(D_1^1 A_n + D_2^1 B_n + D_3^1 C_n) \qquad \text{si} \quad \rho = \rho_K^{n,0},$$

$$(28)_2 \quad \sum_\alpha \rho(\Lambda_\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{2}(D_1^2 A_n + D_2^2 B_n + D_3^2 C_n) \qquad \text{si} \quad \rho = \rho_K^{0,n},$$

où les D^{ν}_{μ} désignent les opérateurs différentiels suivants :

$$(29)_1 \quad \left\{ \begin{aligned} D^1_1 &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}, \\ D^1_2 &= x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, \\ D^1_3 &= x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}, \end{aligned} \right.$$

$$(29)_2 \quad \left\{ \begin{aligned} D^2_1 &= -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}, \\ D^2_2 &= -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, \\ D^2_3 &= -x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}, \end{aligned} \right.$$

Remarque 3.1. — On peut écrire symboliquement :

$$(30)_1 \quad (x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} - j\frac{\partial}{\partial x_3} - k\frac{\partial}{\partial x_4}\right) = D + iD^1_1 + jD^1_2 + kD^1_3,$$

$$(30)_2 \quad (x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k)\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} + j\frac{\partial}{\partial x_3} + k\frac{\partial}{\partial x_4}\right) = D + iD^2_1 + jD^2_2 + kD^2_3.$$

Finalement on obtient donc l'expression suivante pour T_Ω :

$$(18') \quad -T_\Omega f = \Big[\left(\tfrac{1}{2}(1 - |q|^2)\right)^2 \Delta - p(1 - |q|^2) D - \tfrac{1}{2}(1 - |q|^2)(D^{\nu}_1 A_n + D^{\nu}_2 B_n + D^{\nu}_3 C_n) + (p(p+1) - n(n+1))|q|^2 + 2(n(n+1) - (p+1))\Big] f,$$

où $\nu = 1$ (resp. $\nu = 2$) dans le cas : $\rho = \rho_K^{n,0}$ (resp. $\rho = \rho_K^{0,n}$).

Remarque 3.2. — Le calcul des n^os 1, 2, 3 reste valable même si p n'est pas un demi-entier $\geqq 1$, à condition que p soit réel et $> \frac{1}{2}$.

4. Construction des représentations de la série discrète.

Proposition 3.1. — *Soient n, p deux demi-entiers tels que $n \geqq p \geqq 1$ et $n - p$ entier, et soit ρ une représentation de K de la forme $\rho_K^{n,0}$ ou $\rho_K^{0,n}$. Alors le sous-espace $\mathcal{S}^{\rho,p}$ de $H_0^{\rho,p}$ formé par les f tels que*

$$(31) \quad T_\Omega f = [-n(n+1) - (p+1)(p-2)] f,$$

est non trivial et fermé dans $H^{\rho,p}$.

Démonstration. — Grâce à la formule (18′), l'équation aux dérivées partielles (31) s'écrit sous la forme suivante :

$$(32)\quad \left[\frac{1}{4}(1-|q|^2)\Delta - pD - \frac{1}{2}(D_1^\nu A_n + D_2^\nu B_n + D_3^\nu C_n) \right. \\ \left. + (n(n+1) - p(p+1))\right] f = 0,$$

$\nu = 1$ ou 2, suivant que $\rho = \rho_K^{n,0}$ ou $\rho_K^{0,n}$.

Pour montrer que (32) possède des solutions non-triviales, remarquons que, si la fonction $f(q)$ ne dépend que de $r = |q|$, c'est-à-dire si $f(q) = \varphi(r)$, on a

$$(33)\qquad D_\alpha^\nu f = 0 \qquad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$(34)\qquad Df = r\varphi'(r).$$

En effet, il suffit pour cela de remarquer qu'on a $\dfrac{\partial r}{\partial x_\alpha} = \dfrac{x_\alpha}{r}$; l'équation (32) se réduit donc à

$$\left[\frac{1-r^2}{4}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d}{dr}\right) - pr\frac{d}{dr} + (n-p)(n+p+1)\right]\varphi = 0,$$

compte tenu de l'expression du laplacien dans les coordonnées polaires; si (v_μ) est une base de V^n, et si $\varphi(r) = \sum_\mu \varphi_\mu(r) v_\mu$, alors, on a, pour tout μ,

$$\frac{1-r^2}{4}\left(\varphi_\mu'' + \frac{3}{r}\varphi_\mu'\right) - pr\varphi_\mu' + (n-p)(n+p+1)\varphi_\mu = 0;$$

en faisant le changement de variable $z = r^2$, on trouve pour la fonction $\psi_\mu(z) = \varphi_\mu(r)$, l'équation hypergéométrique :

$$(35)\quad z(1-z)\psi_\mu''(z) + (2 - 2(p+1)z)\psi_\mu'(z) - (p-n)(p+n+1)\psi_\mu = 0,$$

d'où résulte que

$$\psi_\mu(z) = c_\mu F(p-n, n+p+1; 2; z), \; c_\mu \text{ constante,}$$

puisque $\psi_\mu(z)$ doit être bornée pour $z \to 0$; on a ainsi

$$(36)\qquad f(q) = F(p-n, n+p+1; 2; |q|^2)\, v,$$

avec $v = \sum_\mu c_\mu v_\mu$ un vecteur de V^n.

Si n, p sont deux demi-entiers tels que $n \geqq p \geqq 1$, $n-p$ entier, $F(p-n, n+p+1; 2; z)$ est un polynome de degré $n-p$, donc borné dans $[0, 1]$, donc de carré intégrable pour la mesure bornée $(1-z)^{2p-2} z\, dz$, d'où résulte que la fonction (36) est bien dans $H_0^{\rho, p}$.

Pour montrer que $\mathcal{S}^{\rho,p}$ est fermé, soit f^n une suite de fonctions dans $\mathcal{S}^{\rho,p}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n = f$ dans $H^{\rho,p}$. Pour chaque μ, on a donc

$$\lim_n \int_{\mathbf{B}} f_\mu^n(q)\overline{F(q)}(1-|q|^2)^{2p-2}\,d\mu(q) = \int_{\mathbf{B}} f_\mu(q)\overline{F(q)}(1-|q|^2)^{2p-2}\,d\mu(q),$$

pour toute fonction continue bornée $F(q)$ dans $\mathbf{B}$; par suite, les f_μ^n convergent vers f_μ au sens des distributions dans $\mathbf{B}$, ce qui entraîne que f_μ est solution au sens des distributions de l'équation aux dérivées partielles (32) — ou plus précisément de sa « composante » — de *type elliptique*, et est donc elle-même indéfiniment dérivable; f est donc une vraie solution de (32), et donc appartient à $\mathcal{S}^{\rho,\rho}$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 3.2. — *La représentation unitaire de G induite par $T^{\rho,p}$ dans $\mathcal{S}^{\rho,p}$ est irréductible.*

DÉMONSTRATION. — Prenons par exemple le cas : $\rho = \rho_K^{n,0}$. Soit $\mathcal{S}_0$ un sous-espace stable non trivial de $\mathcal{S}^{\rho,p}$, et montrons que $\mathcal{S}_0$ contient nécessairement les fonctions de la forme (36); il est évident qu'on a alors $\mathcal{S}^{\rho,p} = \mathcal{S}_0$. Considérons, pour cela, l'opérateur :

$$E = \int_{K_2} T_{k_2}\,dk_2; \tag{37}$$

d'après la définition de T_g, on a

$$(Ef)(q) = \int_{\mathbf{U}} f(qu)\,d\mu(u), \qquad \text{pour} \quad f \in H^{\rho,p}, \tag{38}$$

puisque $\rho(k_2) = 1$, l'opérateur identité. Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{S}_0$, Ef ne dépend que de $|q|$, et est encore dans $\mathcal{S}_0$; Ef est donc une fonction de la forme (36); il s'agit donc d'exhiber une fonction $f \in \mathcal{S}_0$ telle que

$$Ef = F(p-n;\, n+p+1;\, 2;\, |q|^2)\,v, \qquad \text{avec} \quad v \neq 0,$$

car la formule $(T_k Ef)(q) = \rho^n(u) Ef(q)$, si $k = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u \in \mathbf{U}$, et l'irréductibilité de ρ^n entraînent alors que toute fonction de la forme (36) est dans $\mathcal{S}_0$. Comme $v = (Ef)(0) = f(0)$, cela revient à trouver une fonction f dans $\mathcal{S}_0$ telle que $f(0) \neq 0$. Or $\mathcal{S}_0$ est supposé non trivial, donc contient au moins une fonction non identiquement nulle, soit h; il y a donc un point $q_0 \in \mathbf{B}$ tel que $h(q_0) \neq 0$; mais on peut trouver un $g_0 \in G$ tel que $g_0^{-1}.0 = q_0$ [prendre par exemple : $g_0 = (k_0 a_{t_0})^{-1}$, avec $k_0 = \begin{pmatrix} q_0/|q_0| & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et t_0 tel que $\operatorname{th}\frac{1}{2}t_0 = |q_0|\,(< 1\,!)$]; on voit alors que $f = T_{g_0} h$ est dans $\mathcal{S}_0$, et que $f(0) = \left(\operatorname{ch} \frac{1}{2} t_0\right)^{-2p-2} \rho(q_0/|q_0|) h(q_0) \neq 0$, puisque $h(q_0) \neq 0$ et $\rho(q_0/|q_0|)$ est unitaire.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3.1. — *Soient n, p deux demi-entiers tels que $n \geqq p \geqq 1$,* avec $n - p$ entier, et soit ρ une des représentations $\rho_K^{n,0}$, $\rho_K^{0,n}$ de K. *Si D, D_1^ν, D_2^ν, D_3^ν désignent les opérateurs différentiels définis par* (13), (29), *avec $\nu = 1$ (resp. $\nu = 2$) dans le cas : $\rho = \rho_K^{n,0}$ (resp. $\rho = \rho_K^{0,n}$), et A_n, B_n, C_n les opérateurs* (24) *dans V^n, les solutions $f(q)$, définies dans* **B** *et à valeurs dans V^n, de l'équation aux dérivées partielles*

$$\begin{aligned}(32)\qquad \Big[\frac{1}{4}(1-|q|^2)\Delta - pD - \frac{1}{2}(D_1^\nu A_n + D_2^\nu B_n + D_3^\nu C_n) \\ + (n(n+1) - p(p+1))\Big] f = 0,\end{aligned}$$

qui sont de plus de carré intégrable pour la mesure $(1 - |q|^2)^{2p-2} d\mu(q)$ forment un espace hilbertien, muni du produit scalaire

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) = \frac{(2p-1)(n+p)(n-p+1)}{\pi^2} \\ \times \int_{\mathbf{B}} (f_1(q), f_2(q))_{V^n} (1 - |q|^2)^{2p-2} d\mu(q),\end{aligned}$$

et la formule (2) *y définit une représentation unitaire irréductible de G. De plus les fonctions $f_v(q)$ de la forme* (36) *sont de norme $(v, v)_{V^n}$, et forment un sous-espace fermé isomorphe à V^n, qui se transforme suivant ρ.*

DÉMONSTRATION. — Il reste à montrer l'assertion concernant la norme de $f_v(q)$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{B}} (f_v(q), f_v(q))_{V^n} (1 - |q|^2)^{2p-2} d\mu(q) \\ = 2\pi^2 (v, v)_{V^n} \int_{\mathbf{U}} d\mu(u) \int_0^1 (F(p-n, p+n+1; 2; r^2))^2 (1-r)^{2p-2} r^3\, dr,\end{aligned}$$

puisque $d\mu(q) = 2\pi^2 r^3 dr\, d\mu(u)$, si l'on pose $q = ru$, $u \in \mathbf{U}$; le problème est donc de montrer (changement de variables : $x = r^2$) qu'on a

$$\begin{aligned}(39)\qquad \int_0^1 (F(p-n, n+p+1; 2; x))^2 (1-x)^{2p-2} x\, dx \\ = 1/(2p-1)(n+p)(n-p+1).\end{aligned}$$

[Il est curieux de constater que l'intégrale (39) diffère de l'intégrale classique connue dans les relations d'orthogonalité des polynomes de Jacobi $F(p-n, p+n+1; 2; x) = \mathfrak{F}_{n-p}(2p+1, 2, x)$ (dans la notation de MAGNUS-OBERHETTINGER [19]); il faut donc calculer directement.] Citons pour cela les deux formules suivantes ([19], p. 15-16) :

$$(40)\qquad (c-a)_n x^{c-a-1}(1-x)^{a+b-c-n}F(a-n,\, b;\, c;\, x) = \frac{d^n}{dx^n}[x^{c-a+n-1}(1-x)^{a+b-c}F(a,\, b;\, c;\, x)],$$

$$(41)\qquad (-1)^n\frac{a_n(c-b)_n}{c_n}(1-x)^{a-1}F(a+n,\, b;\, c+n;\, x) = \frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{a+n-1}F(a,\, b;\, c;\, x)].$$

En remplaçant dans (40), $(a,\, b,\, c,\, n)$ par $(0,\, n+p+1,\, 2,\, n-p)$, on obtient la formule suivante :

$$(42)\qquad x(1-x)^{2p-1}F(p-n,\, p+n+1;\, 2;\, x) = \frac{1}{(n-p+1)!}\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}[x^{n-p+1}(1-x)^{n+p-1}];$$

de même, en remplaçant dans (41) $(a,\, b,\, c,\, n)$ par

$$(p-n,\, p+n+1,\, 2,\, n-p),$$

on obtient la formule suivante :

$$(43)\qquad \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}[(1-x)^{-1}F(p-n,\, p+n+1;\, 2;\, x)] = \frac{(-1)^{n-p}(n+p-1)!}{(2p-1)!\,(n-p+1)}(1-x)^{p-n-1}.$$

Désignons par $I_{n,p}$ le premier membre de (39). D'après (42), on a

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \int_0^1 (1-x)^{2p-2}x\,F(p-n,\, p+n+1;\, 2;\, x)^2\,dx \\ &= \frac{1}{(n-p+1)!}\int_0^1 (1-x)^{-1}F(p-n,\, p+n+1;\, 2;\, x) \\ &\quad\times \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}[x^{n-p+1}(1-x)^{n+p-1}]\,dx, \end{aligned}$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_{n,p} = \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p+1)!}\int_0^1 &\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}[(1-x)^{-1}F(p-n,\, p+n+1;\, 2;\, x)] \\ &\times x^{n-p+1}(1-x)^{n+p-1}\,dx, \end{aligned}$$

ce qui donne, en vertu de (43),

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \frac{(n+p-1)!}{(n-p+1)\,(n-p+1)!\,(2p-1)!}\int_0^1 (1-x)^{2p-2}x^{n-p+1}\,dx \\ &= 1/(2p-1)\,(n+p)\,(n-p+1), \end{aligned}$$

DÉFINITION 3.1. — Notons $T^{n,0;p}$ (resp. $T^{0,n;p}$) la représentation $T^{\rho,p}$ du théorème 3.1, dans le cas : $\rho = \rho_K^{n,0}$ (resp. $\rho = \rho_K^{0,n}$); de même, notons $\mathfrak{S}^{n,0;p}$ (resp. $\mathfrak{S}^{0,n;p}$) l'espace hilbertien $\mathfrak{S}^{\rho,p}$ dans lequel est définie la représentation $T^{n,0;p}$ (resp. $T^{0,n;p}$); ces représentations constituent, par définition, la *seconde série principale* (ou la *série discrète*) de G.

REMARQUE 3.3. — La forme des opérateurs $D_1^\vee, D_2^\vee, D_3^\vee$ fait soupçonner des liens éventuels entre les fonctions de l'espace hilbertien $\mathfrak{S}^{n,0;p}$ ou $\mathfrak{S}^{0,n;p}$ et les fonctions « holomorphes » (à gauche ou à droite) d'une variable quaternionienne au sens de Fueter. Il serait intéressant d'éclaircir ce point, en vue d'applications éventuelles à la théorie des fonctions automorphes relatives aux sous-groupes discrets de G, par exemple au sous-groupe formé par les matrices à coefficients entiers quaternioniens au sens de Hurwitz.

5. **Deux cas limites : $T^{n,0;\frac{1}{2}}$ et $T^{0,n;\frac{1}{2}}$.** — Les représentations $T^{n,0;p}$, $T^{0,n;p}$ de la série discrète donnent la construction globale des représentations $\pi_{n,p}^-$, $\pi_{n,p}^+$ dans la classification de DIXMIER [6], pour $n \geqq p \geqq 1$, $n - p$ entier; cela résulte soit en comparant les coefficients (qui seront calculés au paragraphe 4), soit en remarquant l'existence d'un sous-espace qui se transforme suivant $\rho_K^{n,0}$, $\rho_K^{0,n}$ et en comparant les valeurs propres de l'opérateur de Casimir. On va maintenant donner, en imitant le cas du groupe $SL(2, \mathbf{R})$, une construction globale des représentations correspondant aux paramètres $\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On se limite au cas des représentations $T^{n,0;\frac{1}{2}}$, puisque les modifications nécessaires pour définir $T^{0,n;\frac{1}{2}}$ sont évidentes.

LEMME 3.3. — *Soit n un demi-entier (au sens strict) > 0. La formule*

$$(44)\quad (f_1, f_2)_{n,0;\frac{1}{2}} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\pi^2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2\varepsilon \int_{\mathbf{B}} (f_1(q), f_2(q))_{V^n} (1 - |q|^2)^{2\varepsilon - 1}\, d\mu(q)$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $C_{V^n}(\mathbf{B})$ des fonctions continues bornées, définies dans $\mathbf{B}$ et à valeurs dans V^n. Les opérateurs $T_g^{n,0;\frac{1}{2}}$ définis par la formule (2), avec $p = \frac{1}{2}$, $\rho = \rho_K^{n,0}$, sont unitaires par rapport à ce produit scalaire.

DÉMONSTRATION. — Comme on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbf{B}} (1 - |q|^2)^{2\varepsilon - 1}\, d\mu(q) = \pi^2 / 2\varepsilon(2\varepsilon + 1),$$

la limite dans le second membre de (44) existe, pour f_1, f_2 dans $C_{V^n}(\mathbf{B})$, et il est alors clair que cela définit une forme sesquilinéaire non dégénérée sur $C_{V^n}(\mathbf{B})$. De plus, si $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a

$$\left\| T_g^{n,0;\frac{1}{2}} f \right\|_{n,0;\frac{1}{2}}^2$$

$$= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\pi^2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2\varepsilon \int_{\mathbf{B}} |cq+d|^{-3} \| f(g^{-1}.q) \|_{V^n}^2 (1-|q|^2)^{2\varepsilon-1} \, d\mu(q)$$

$$= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\pi^2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2\varepsilon \int_{\mathbf{B}} |cq+d|^{-2\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)} \| f(g^{-1}.q) \|_{V^n}^2 (1-|q|^2)^{2\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)-4} \, d\mu(q)$$

$$= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\pi^2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2\varepsilon \int_{\mathbf{B}} \| f(g^{-1}.q) \|_{V^n}^2 (1-|g^{-1}.q|^2)^{2\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)-4} \, d\mu(g^{-1}.q)$$

$$= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\pi^2} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2\varepsilon \int_{\mathbf{B}} \| f(q) \|_{V^n}^2 (1-|q|^2)^{2\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)-4} \, d\mu(q) = \| f \|_{n,0;\frac{1}{2}}^2.$$

Notons $H^{n,0;\frac{1}{2}}$ le complété de l'espace préhilbertien $C_{V^n}(\mathbf{B})$ muni de la norme (44). Considérons l'équation aux dérivées partielles (32), correspondant aux paramètres $\left(n, \frac{1}{2}\right)$ avec $n - \frac{1}{2}$ entier $\geqq 0$, et $\nu = 1$:

$$(32)_{\frac{1}{2}} \quad \left[\frac{1-|q|^2}{4}\Delta - \frac{1}{2}(D + D_1^1 A_n + D_2^1 B_n + D_3^1 C_n) + n(n+1) - \frac{3}{4}\right] f = 0.$$

Elle possède des solutions non triviales dans $H_0^{n,0;\frac{1}{2}}$, le sous-espace de $H^{n,0;\frac{1}{2}}$ formé par les fonctions indéfiniment dérivables, car les fonctions

$$(36)_{\frac{1}{2}} \qquad f_v^{n,0;\frac{1}{2}}(q) = F\left(\frac{1}{2} - n, n + \frac{3}{2}; 2; |q|^2\right) v, \qquad v \in V^n,$$

satisfont à $(32)_{\frac{1}{2}}$, d'après le calcul du n° 4 $\left(\text{qui reste valable même pour } p = \frac{1}{2}\right)$, et sont dans $H_0^{n,0;\frac{1}{2}}$, étant donné que ce sont des « polynomes » en $|q|^2$, donc bornés dans $\mathbf{B}$. Donc on obtient, tout comme dans le cas où $p \geqq 1$, un sous-espace hilbertien non trivial $\mathcal{S}^{n,0;\frac{1}{2}}$ de $H^{n,0;\frac{1}{2}}$

formé des solutions de $(32)_{\frac{1}{2}}$. Montrons que les opérateurs $T_g^{n,0;\frac{1}{2}}$ laissent $\mathcal{S}^{n,0;\frac{1}{2}}$ stable. En effet, d'après la remarque 3.3, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(45)\quad T_g^{n,0;\frac{1}{2}+\varepsilon} T_\Omega^{n,0;\frac{1}{2}+\varepsilon} f = T_\Omega^{n,0;\frac{1}{2}+\varepsilon} T_g^{n,0;\frac{1}{2}+\varepsilon} f \qquad \text{pour } f \in H_0^{n,0;\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

en désignant par $H_0^{n,0;\frac{1}{2}+\varepsilon}$ le sous-espace de $H^{n,0;\frac{1}{2}+\varepsilon}$ formé par les fonctions indéfiniment dérivables (*voir* la remarque 3.3); $T_\Omega^{n,0;\frac{1}{2}+\varepsilon}$ désigne l'opérateur différentiel (18′), correspondant à $p = \frac{1}{2} + \varepsilon$. Or on a

$$\bigcap_{\varepsilon>0} H_0^{n,0;\frac{1}{2}+\varepsilon} \supset H_0^{n,0;\frac{1}{2}},$$

puisque, si $\varepsilon' < \varepsilon$, on a

$$\|f\|_{n,0;\frac{1}{2}+\varepsilon} \leqq \|f\|_{n,0;\frac{1}{2}+\varepsilon'}.$$

Par suite, (45) reste vrai pour $f \in H_0^{n,0;\frac{1}{2}}$. Si l'on désigne par $T_\Omega^{n,0;\frac{1}{2}}$ l'opérateur différentiel (18′) avec $p = \frac{1}{2}$, on a donc, par passage à la limite $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$,

$$T_g^{n,0;\frac{1}{2}} T_\Omega^{n,0;\frac{1}{2}} f = T_\Omega^{n,0;\frac{1}{2}} T_g^{n,0;\frac{1}{2}} f,$$

quel que soit f dans $H_0^{n,0;\frac{1}{2}}$; il en résulte aussitôt que les opérateurs $T_g^{n,0;\frac{1}{2}}$, $g \in G$, laissent stable l'espace vectoriel des fonctions f telles que $T_\Omega^{n,0;\frac{1}{2}} f = -\left[n(n+1) - \frac{3}{4}\right] f$, c'est-à-dire des f satisfaisant à $(32)_{\frac{1}{2}}$, ce qui montre notre assertion. La démonstration de l'irréductibilité de $T^{n,0;p}$ aux cas où $p \geqq 1$, reste valable dans ce cas, et nous avons donc le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Soit n un demi-entier (au sens strict) tel que $n \geqq \frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation $(32)_{\frac{1}{2}}$, appartenant à $H^{n,0;\frac{1}{2}}$, forment un espace hilbertien $\mathcal{S}^{n,0;\frac{1}{2}}$, muni du produit scalaire (44), et la formule (2), avec $p = \frac{1}{2}$ et $\rho = \rho_K^{n,0}$, y définit une représentation unitaire irréductible de G.*

Remarquons que la norme de fonction $f_\nu^{n,0;\frac{1}{2}}(q)$ de la forme $(36)_{\frac{1}{2}}$ est égale à (v, v); en effet, on a

$$\left(f_\nu^{n,0;\frac{1}{2}}, f_\nu^{n,0;\frac{1}{2}}\right)_{n,0;\frac{1}{2}}$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 (v, v) \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2\varepsilon \int_0^1 F\left(\frac{1}{2} - n, n + \frac{3}{2}; 2; x\right)^2 (1-x)^{2\varepsilon - 1} x\, dx$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 (v, v) \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2\varepsilon \int_0^1 F\left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) - (n+\varepsilon), \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) + (n+\varepsilon) + 1; 2; x\right)$$

$$\times (1-x)^{2\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)-2} x\, dx,$$

puisque

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F\left(\frac{1}{2} - n, \frac{3}{2} + n + 2\varepsilon; 2; x\right) = F\left(\frac{1}{2} - n, \frac{3}{2} + n; 2; x\right)$$

uniformément dans $[0,1]$. Or le calcul de l'intégral (39) du nº 4 reste valable, même si n, p ne sont plus des demi-entiers, à condition que $n - p$ soit un entier $\geqq 0$; on a donc

$$\int_0^1 F\left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) - (n + \varepsilon), \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) + (n + \varepsilon) + 1;\; 2;\; x\right)^2 (1 - x)^{2\varepsilon - 1} x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{2} + n + 2\varepsilon\right)\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

ce qui entraîne qu'on a

$$\left(f_\nu^{n,0;\frac{1}{2}}, f_\nu^{n,0;\frac{1}{2}}\right)_{n,0;\frac{1}{2}} = (v, v)_{V^n}.$$

Dans ce cas $p = \frac{1}{2}$, il n'existe pas d'isométrie de $H^{n,0;\frac{1}{2}}$ dans $L^2_{V^n}(G)$, et il n'y a donc pas de raison que la représentation $T^{n,0;\frac{1}{2}}$ soit de carré intégrable. On sait en effet qu'elle ne l'est pas (Dixmier [6]), et cela résultera d'ailleurs du calcul des coefficients dans le paragraphe 4.

§ 4. FONCTIONS SPHÉRIQUES.

1. **Définition des sous-algèbres A_1 et A_2 de $L(G)$.** — Soit ρ^n une représentation unitaire irréductible de dimension $2n + 1$ du groupe compact **U** dans un espace hilbertien V^n, correspondant au demi-entier n; soit v_p, $p = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$, une base orthonormale de V^n, et posons :

(1) $$\rho^n(u) v_p = \sum_q c^n_{qp}(u) v_q, \qquad c^n_{pq}(u) = (\rho^n(u) v_q, v_p).$$

On désigne par ρ_M^n la représentation unitaire irréductible de M définie par

$$\rho_M^n(m) = \rho^n(u) \qquad \text{pour} \quad m = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix},$$

dans V^n. Désignons par η^n (resp. $\chi^{n,n'}$, ζ^n) le caractère de la représentation ρ^n (resp. $\rho_K^{n,n'}$, ρ_M^n) :

$$(2) \qquad \begin{cases} \eta^n(u) = (2n+1)\operatorname{Tr}(\rho^n(u)); \qquad \chi^{n,n'}(k) = \eta^n(u_1)\,\eta^{n'}(u_2) \\ \qquad\qquad \text{si} \quad k = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}; \end{cases}$$

$$\zeta^n(m) = \eta^n(u) \qquad \text{pour} \quad m = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbf{U}.$$

D'après la théorie des groupes orthogonaux, on sait qu'on a

$$(3) \qquad \chi^{n,n'} \star \zeta^{n''}(k) = \int_M \chi^{n,n'}(km^{-1})\,\zeta^{n''}(m)\,dm \neq 0,$$

si et seulement si $n + n' \geqq n'' \geqq |n - n'|$; en particulier, on a

$$(4) \quad \chi^{n,0} \star \zeta^{n''} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n'', \\ \chi^{n,0} & \text{si } n = n''; \end{cases} \qquad \chi^{0,n'} \star \zeta^{n''} = \begin{cases} 0 & \text{si } n' \neq n'', \\ \chi^{0,n'} & \text{si } n' = n''. \end{cases}$$

Remarquons qu'on a

$$(5) \quad (\chi^{n,n'})^{\sim} = \overline{\chi^{n,n'}} = \chi^{n,n'}; \qquad (\zeta^n)^{\sim} = \overline{\zeta^n} = \zeta^n; \qquad (\eta^n)^{\sim} = \overline{\eta^n} = \eta^n.$$

En effet, on sait qu'on a $\eta^n(u) = (2n+1)\,C^1_{2n}\left(\dfrac{u+\bar{u}}{2}\right)$, pour $u \in \mathbf{U}$, où $C^1_{2n}(.)$ désigne le polynome de Gegenbauer, d'indice 1 et de degré $2n$.

Définition 4.1. — *On désigne par $A_{n,n'}$, la sous-algèbre de $L(G)$ formée par les fonctions telles que*

$$(6) \qquad f^0 = f, \qquad f \star \chi^{n,n'} = f.$$

On note $A^p_{n,n'}$ l'adhérence de $A_{n,n'}$ dans $L^p(G)$, pour $1 \leqq p \leqq +\infty$. On désigne, de plus, par A_1 (resp. A_2) la sous-algèbre de $L(G)$ formée par les fonctions $f(g)$ telles que

$$(7_1) \quad f(k_1 k_2 g k_1^{-1} k'_2) = f(g), \quad \text{quels que soient } g \in G,\ k_1 \in K_1,\ k_2, k'_2 \in K_2$$

resp.

$$(7_2) \quad f(k_1 k_2 g k'_1 k_2^{-1}) = f(g), \quad \text{quels que soient } g \in G,\ k_1, k'_1 \in K_1,\ k_2 \in K_2.$$

On note A^p_i l'adhérence de A_i dans $L^p(G)$, pour $i = 1, 2$, $1 \leqq p \leqq +\infty$.

REMARQUE 4.1. — L'application

(8) $$Jg = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G,$$

est un automorphisme de G, et si l'on définit :

(9) $$(Jf)(g) = f(Jg) \quad \text{pour} \quad g \in G,$$

J est un isomorphsime de A_1 sur A_2. On peut donc se limiter à considérer A_1 seulement dans ce qui suit.

Il est évident que, si $f \in A_1$ ou A_2, on a $f^0 = f$. De plus, les sous-algèbres $A_{n,0}$ sont toutes contenues dans A_1, et l'on a

(10) $$A_1^2 = \bigoplus_n A_{n,0}^2 \quad \text{(somme hilbertienne)}.$$

LEMME 4.1. — *Les algèbres A_1, A_2 sont commutatives.*

DÉMONSTRATION. — Il suffit de montrer la commutativité de A_1, et pour cela, il suffit de montrer qu'on a $f(g^{-1}) = f(g)$, quel que soit g dans G, pour f dans A_1, comme dans la démonstration de la commutativité de l'algèbre A dans la remarque (I, 1.2). Soit donc $f \in A_1$; on sait que tout $g \in G$ s'écrit sous la forme

$$g = k_1 k_2 a_t k'_2, \qquad \text{avec} \quad k_1 \in K_1, \quad k_2,\ k'_2 \in K_2,$$

d'où

$$f(g) = f(k_1 k_2 a_t k'_2) = f(k_1 a_t) = f(a_t k_1),$$

puisque $f^0 = f$. Si $k'_1 \in K_1$, on a aussi $f(k'_1 k_1 k'^{-1}_1 a_t) = f(k_1 a_t)$; par suite, pour t fixe, $f(k_1 a_t)$ est une fonction centrale sur K_1, d'où résulte que $f(k_1^{-1} a_t) = f(k_1 a_t)$ (puisque $K_1 \approx \mathbf{U}$, et pour un $u \in \mathbf{U}$, il existe au moins un $v \in \mathbf{U}$ tel que $\bar{u} = vuv^{-1}$). D'autre part, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2} t & \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \\ \operatorname{sh} \frac{1}{2} t & \operatorname{ch} \frac{1}{2} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2} t & -\operatorname{sh} \frac{1}{2} t \\ -\operatorname{sh} \frac{1}{2} t & \operatorname{ch} \frac{1}{2} t \end{pmatrix} = a_{-t}$$

on a, en posant $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = k_2^0$,

$$f(k_1 a_{-t}) = f(k_1 k_2^0 a_t k_2^0) = f(k_1 a_t),$$

ce qui entraîne donc que

$$f(g^{-1}) = f(k'^{-1}_2 a_{-t} k_2^{-1} k_1^{-1}) = f(k_1^{-1} a_{-t}) = f(k_1 a_t) = f(g),$$

C. Q. F. D.

LEMME 4.2. — *Toute fonction f dans $A_{n,0}$ peut se factoriser de la manière suivante :*

$$f(g) = f(k_1 a_t) = f(a_t)\,\chi^{n,0}(k_1)/\chi^{n,0}(e), \tag{11}$$

si $g = k_1 k_2 a_t k'_2$, $k_1 \in K_1$, k_2, $k'_2 \in K_2$.

DÉMONSTRATION. — On vient de voir que

$$f(g) = f(k_1 a_t),$$

et

$$f(k_1 a_t) = \int_K \chi^{n,0}(k)\,f(k^{-1} k_1 a_t)\,dk = \int_K \chi^{n,0}(k_1 k)\,f(k^{-1} a_t)\,dk$$
$$= \int_K \chi^{n,0}(k_1 l k l^{-1})\,f(k^{-1} a_t)\,dk,$$

quel que soit l dans K, puisque la fonction $f(ka_t)$ est centrale sur K, comme on a vu au cours de la démonstration du lemme précédent; en intégrant par rapport à l sur K, il vient donc, en vertu de l'équation fonctionnelle des caractères d'un groupe compact,

$$f(k_1 a_t) = \int_K f(k^{-1} a_t)\,\chi^{n,0}(k_1)\,\chi^{n,0}(k)/\chi^{n,0}(e)\,dk = f(a_t)\,\chi^{n,0}(k_1)/\chi^{n,0}(e),$$

ce qui termine la démonstration.

REMARQUE 4.2. — Il est évident que le lemme 4.2 s'applique non seulement aux fonctions à support compact, mais à toutes fonctions f continues telles que $f^0 = f$, $f \star \chi^{n,0} = f$.

2. **Homomorphismes de A_1 dans C.** — On dira qu'une distribution ζ dans G est *sphérique de classe* $\chi^{n,n'}$ si elle induit un homomorphisme de $A^0_{n,n'} = A_{n,n} \cap \mathcal{D}(G)$ dans **C**. On montre comme dans le cas des distributions sphériques de classe 1, que ces distributions sont en réalité des fonctions analytiques $\zeta(g)$ telles que $\zeta^0 = \zeta$, $\zeta \star \chi^{n,0} = \zeta$.

Considérons le cas de classe $\chi^{n,0}$. Posons

$$\alpha_{n,0;s}(g) = e^{-st}\chi^{n,0}(k)/\chi^{n,0}(e), \qquad \text{pour} \quad g = ka_t x, \tag{12}$$

avec $k \in K$, $a_t \in A_+$, $x \in N$, et

$$\zeta_{n,0;s}(g) = (\alpha_{n,0;s})^0(g) = \int_K \alpha_{n,0;s}(kgk^{-1})\,dk. \tag{13}$$

LEMME 4.3. — *Si* $f \in A_{n,0}$, *on a*

$$\int_N f(ka_t x)\,dx = \chi^{n,0}(k)\,(\chi^{n,0}(e))^{-1} \int_N f(a_t x)\,dx. \tag{14}$$

C'est une fonction à support compact dans KA_+.

Démonstration. — Le premier membre définit une fonction $\varphi(ka_t)$ sur KA_+; montrons que son support est compact. En effet, soit

$$ka_t x = l a_{t'} l', \qquad l, l' \in K, \qquad t' \text{ réel} \geqq 0,$$

la décomposition de $ka_t x$ d'après le lemme 1.2. Si $k^{-1} l = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, $l' = \begin{pmatrix} u' & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix}$, $u, v, u', v' \in \mathbf{U}$, il est facile de voir qu'on a

$$\operatorname{ch}\frac{1}{2}t - e^{\frac{1}{2}t} x = uu' \operatorname{ch}\frac{1}{2}t',$$

d'où, si $x = \frac{1}{2}(\xi_2 + \xi_3 i + \xi_4 j)$,

$$\operatorname{ch} t' = \operatorname{ch} t + e^t \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2);$$

or, en vertu du lemme 4.2, on a

$$f(ka_t x) = f(la_{t'} l') = f(l' l a_{t'}) = f(l' l) f(a_{t'})/f(e);$$

donc si $f(a_t)$ est tel que $f(a_t) = 0$ pour $\operatorname{ch} t \geqq c$, $f(a_{t'})$ sera nulle pour $\operatorname{ch} t \geqq c$, d'où

$$f(ka_t x) = 0 \text{ pour } \operatorname{ch} t \geqq c, \qquad \text{quel que soit} \quad k \in K, x \in N,$$

d'où notre assertion.

D'autre part, on a, quel que soit $m \in M$,

$$\begin{aligned} \varphi(mka_t m^{-1}) &= \int_N f(mka_t m^{-1} x)\, dx = \int_N f(mka_t m^{-1} . mxm^{-1})\, dx \\ &= \int_N f(mka_t xm^{-1})\, dx = \int_N f(ka_t) = \varphi(ka_t), \end{aligned}$$

et il est clair que $\chi^{n,0} \star \varphi = \varphi$; par suite,

$$\begin{aligned} \varphi(ka_t) &= \int_K \chi^{n,0}(l)\, \varphi(l^{-1} mkm^{-1} a_t)\, dl = \int_K \chi^{n,0}(mkm^{-1} l)\, \varphi(l^{-1} a_t)\, dl \\ &= \int_K \chi^{n,0}(k)\, \chi^{n,0}(l)\, (\chi^{n,0}(e))^{-1} \varphi(l^{-1} a_t)\, dl = \varphi(a_t)\, \chi^{n,0}(k)/\chi^{n,0}(e), \end{aligned}$$

puisque,

$$\begin{aligned} \int_M \chi^{n,0}(mkm^{-1} l)\, dm &= \int_{\mathbf{U}} \eta^n(uu_1 u^{-1} v_1)\, du = \eta^n(u_1)\, \eta^n(v_1)/\eta^n(e) \\ &= \chi^{n,0}(k)\, \chi^{n,0}(l)/\chi^{n,0}(e), \end{aligned}$$

si $k = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$, $l = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}$, $m = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, u_1, u_2, v_1, v_2, u dans $\mathbf{U}$.

PROPOSITION 4.1. — *Pour $f \in A_{n,0}$, posons*

$$(15) \qquad F_f(t) = (\chi^{n,0}(e))^{-1}\, e^{3t/2} \int_N f(a_t x)\, dx.$$

Alors, $F_f(t)$ est une fonction continue et à support compact sur la droite réelle $\mathbf{R}$, et l'on a

$$(16) \qquad \overline{F_f(-t)} = F_{\tilde{f}}(t),$$

$$(17) \qquad F_{af+bf'} = aF_f + bF_{f'}, \qquad \text{pour} \quad a,\ b \in \mathbf{C},$$

$$(18) \qquad F_{f\star f'}(t) = \int_{\mathbf{R}} F_f(t-t')\, F_{f'}(t')\, dt'.$$

DÉMONSTRATION. — N est invariant dans A_+N, et l'on a

$$d(a_t^{-1}\, x a_t) = e^{-3t}\, dx,$$

d'où résulte tout de suite (16). (17) est triviale. On a, pour $f,\ f' \in A_{n,0}$,

$$\begin{aligned}
&\chi^{n,0}(e)\, e^{-3t/2} F_{f\star f'}(t) \\
&= \int_N \int_K \int_{\mathbf{R}} \int_N f(a_t x y^{-1} a_{t'}^{-1} l^{-1})\, f'(l a_{t'} y)\, e^{3t'}\, dl\, dt'\, dy\, dx \\
&= \int_N \int_K \int_{\mathbf{R}} \int_N f(l^{-1} a_t x y^{-1} a_{t'}^{-1})\, dx\, f'(l a_{t'} y)\, e^{3t'}\, dl\, dt'\, dy \\
&\qquad\qquad (x \to xy, \text{ puis } x \to a_{t'}^{-1} x a_{t'}) \\
&= \int_{\mathbf{R}} \int_K \int_N f(l^{-1} a_{t-t'} x)\, dx \int_N f'(l a_{t'} y)\, dy\, dt'\, dl \quad (\text{lemme } 4.3) \\
&= \int_{\mathbf{R}} \int_K \frac{\chi^{n,0}(l^{-1})\, \chi^{n,0}(l)}{(\chi^{n,0}(e))^2}\, dl \int_N f(a_{t-t'} x)\, dx \int_N f(a_{t'} y)\, dy\, dt',
\end{aligned}$$

d'où (18).

D'après (17), (18), il est clair, que si c est un nombre complexe quelconque, l'application

$$(19) \qquad A_{n,0} \ni f \to \lambda_c(f) = \int_{\mathbf{R}} F_f(t)\, e^{-ct}\, dt,$$

définit un homomorphisme de $A_{n,0}$ dans $\mathbf{C}$. Posons $c = s - \frac{3}{2}\cdot$ Alors, d'après le lemme 4.3, on a

$$\begin{aligned}\lambda_{s-\frac{\varepsilon}{2}}(f) &= \int_K \int_{\mathbf{R}} \int_N f(ka_t x)\, \chi^{n,0}(k)\, dk\, e^{-st+3t}\, dt\, dx / \chi^{n,0}(e) \\ &= \int_K \int_{\mathbf{R}} \int_N f(ka_t x)\, \alpha_{n,0;s}(ka_t x)\, e^{3t}\, dk\, dt\, dx \\ &= \int_G f(g)\, \alpha_{n,0;s}(g)\, dg \\ &= \int_G f(g)\, \zeta_{n,0;s}(g)\, dg,\end{aligned}$$

puisque $f^0 = f$. Par suite, si l'on définit :

(20) $$\zeta_{n,0;s}(f) = \int_G (\chi^{n,0} \star f^0)(g)\, \zeta_{n,0;s}(g)\, dg \qquad \text{pour} \quad f \in L(G),$$

$\zeta_{n,0;s}$ est un homomorphisme de A_1 dans $\mathbf{C}$, et l'on a donc

(21) $$\int_K \zeta_{n,0;s}(k^{-1} gkg')\, dk = \zeta_{n,0;s}(g)\, \zeta_{n,0;s}(g'),$$

quels que soient g, $g' \in G$.

Les fonctions $\zeta_{n,0;s}(g)$ définies par la formule (13) sont donc sphériques de classe $\chi^{n,0}$. Il est probable, comme dans le cas de classe $\chi^{0,0}$, i. e. de classe 1, que toute fonction sphérique de classe $\chi^{n,0}$ soit de cette forme.

D'après la remarque 4.2, on a, si $g = k_1 k_2 a_t k'_2$, $k_1 \in K_1$, k_2, $k'_2 \in K_2$

$$\zeta_{n,0;s}(g) = \zeta_{n,0;s}(a_t)\, \chi^{n,0}(k_1)/\chi^{n,0}(e).$$

Par suite, pour déterminer $\zeta_{n,0;s}(g)$ explicitement, il suffit de considérer le cas $g = a_t$. On a alors, d'après la définition (13),

$$\begin{aligned}&\zeta_{n,0;s}(a_t) \\ &= \int_K \alpha_{n,0;s}(k^{-1} a_t k)\, dk = \int_K \alpha_{n,0;s}(k^{-1} k_{a_t} a_{t(a_t,k)} x)\, dk \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2} \int_K \chi^{n,0}(k^{-1} k_{a_t})\, e^{-st(a_t,k)}\, dk \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2} \int_{\mathbf{U}} \int_{\mathbf{U}} \eta^n \left(\frac{u_1 \left(u_1 \operatorname{ch} \frac{1}{2} t + u_2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right)}{\left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t + u_1 u_2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|} \right) \\ &\qquad \times \left| \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \bar{u}_1 u_2 \operatorname{sh} \frac{t}{2} \right|^{-2s} d\mu(u_1)\, d\mu(u_2) \\ &= \frac{1}{2n+1} \int_{\mathbf{U}} \operatorname{Tr} \left[\rho^n \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} t + u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t}{\left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t + u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|} \right) \right] \left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t + u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|^{-2s} d\mu(u);\end{aligned}$$

si l'on introduit les coordonnées sphériques dans **U** :

$$u = \cos\theta + (\sin\theta\cos\varnothing)i + (\sin\theta\sin\varnothing\cos\psi)j + (\sin\theta\sin\varnothing\sin\psi)k,$$
$$0 \leqq \theta, \qquad \varnothing \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \psi < 2\pi,$$

on sait que

$$d\mu(u) = (2\pi^2)^{-1}\sin^2\theta\sin\varnothing\, d\theta\, d\varnothing\, d\psi;$$

par suite, on a

$$(22) \quad \zeta_{n,0;s}(a_t) = \frac{2}{(2n+1)\pi}\int_0^{\pi} C^1_{2n}\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}t + \operatorname{sh}\frac{1}{2}t\cos\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}t + \operatorname{sh}t\cos\theta}}\right)\frac{\sin^2\theta\, d\theta}{(\operatorname{ch}t + \operatorname{sh}t\cos\theta)^s},$$

ou encore, en posant

$$(23) \qquad \xi = \operatorname{th}\frac{1}{2}t,$$

on a la formule suivante :

$$(22') \quad \zeta_{n,0;s}(a_t) = (1-\xi^2)^s\frac{2}{(2n+1)\pi}$$
$$\times\int_0^{\pi} C^1_{2n}\left(\frac{1+\xi\cos\theta}{\sqrt{1+2\xi\cos\theta+\xi^2}}\right)\frac{\sin^2\theta\, d\theta}{(1+2\xi\cos\theta+\xi^2)^s}.$$

Posons

$$(24) \qquad e^{i\omega} = (1+\xi e^{i\theta})/|1+\xi e^{i\theta}|, \qquad |\omega| < \pi/2;$$

on a alors,

$$\cos\omega = \frac{1+\xi\cos\theta}{(1+2\xi\cos\theta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \sin\omega = \frac{\xi\sin\theta}{(1+2\xi\cos\theta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}};$$

d'où

$$C^1_{2n}\left(\frac{1+\xi\cos\theta}{(1+2\xi\cos\theta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = C^1_{2n}(\cos\omega) = \frac{\sin(2n+1)\omega}{\sin\omega}$$
$$= \frac{(1+2\xi\cos\theta+\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{2i\xi\sin\theta}\{e^{(2n+1)i\omega} - e^{-(2n+1)i\omega}\},$$

ce qui entraîne donc

$$(1-\xi^2)^{-s}\zeta_{n,0;s}(a_t) = \frac{2}{2i\xi\pi(2n+1)}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{(1+2\xi\cos\theta+\xi^2)^{n+s}}$$
$$\times\{(1+\xi e^{i\theta})^{2n+1} - (1+\xi e^{-i\theta})^{2n+1}\}\, d\theta$$
$$= \frac{2}{2i\xi\pi(2n+1)}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{(1+\xi e^{i\theta})^{2n+1}\sin\theta\, d\theta}{(1+\xi e^{i\theta})^{n+s}(1+\xi e^{-i\theta})^{n+s}}$$
$$= \frac{1}{i\xi\pi(2n+1)}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{(1+\xi e^{i\theta})^{s-n-1}(1+\xi e^{-i\theta})^{n+s}},$$

ou encore, d'après le lemme suivant :

$$\zeta_{n,0;s}(a_t) = \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{1}{2} t\right)^s {}_2F_1\left(s+n,\, s-n-1;\, 2;\, \operatorname{th}^2 \frac{1}{2} t\right).$$

LEMME 4.4. — *Pour* $|\xi| < 1$, *on a la formule suivante :*

$$\text{(25)} \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1+\xi e^{i\theta})^\alpha (1+\xi e^{-i\theta})^\beta} = (\beta - \alpha)\xi\pi i\, {}_2F_1(\alpha, \beta;\, 2;\, \xi^2),$$

pour α, β *complexes quelconques (on prend la détermination du radical égale à* 1 *pour* $\xi = 0$*).*

DÉMONSTRATION. — Pour $|\xi| < 1$, on a les développements en séries normalement convergentes :

$$(1+\xi e^{i\theta})^\alpha = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{\alpha_p}{p!} \xi^p e^{ip\theta}, \qquad (1+\xi e^{-i\theta})^\beta = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \frac{\beta_q}{q!} \xi^q e^{-iq\theta},$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1+\xi e^{i\theta})^\alpha (1+\xi e^{-i\theta})^\beta} \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{p,\, q \geq 0} (-1)^{p+q} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(p-q+1)\theta} - e^{i(p-q-1)\theta}\right) d\theta\, \xi^{p+q} \frac{\alpha_p \beta_q}{p!\, q!} \\
&= \frac{\pi}{i} \left\{ \sum_{p \geq 0} (-1)^{2p+1} \xi^{2p+1} \frac{\alpha_p \beta_{p+1}}{p!\,(p+1)!} + \sum_{p \geq 0} (-1)^{2p-1} \xi^{2p-1} \frac{\alpha_p \beta_{p-1}}{p!\,p(-1)!} \right\} \\
&= \pi i(\beta - \alpha) \sum_{p \geq 0} \frac{\alpha_p \beta_p}{p!\,(p+1)!} \xi^{2p+1} = (\beta - \alpha)\xi\pi i\, F(\alpha, \beta;\, 2;\, \xi^2).
\end{aligned}$$

On a donc la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. — *Soit* $\zeta_{n,0;s}(g)$ *la fonction sphérique de classe* $\chi^{n,0}$ *définie par* (13); *si* $g = k_1 k_2 a_t k'_2$, $k_1 \in K_1$, k_2, $k'_2 \in K_2$,

$$\zeta_{n,0;s}(g) = \zeta_{n,0;s}(a_t)\, \chi^{n,0}(k_1)/\chi^{n,0}(e),$$

et l'on a

$$\text{(26)} \qquad \zeta_{n,0;s}(a_t) = \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{1}{2} t\right)^s {}_2F_1\left(s+n,\, s-n-1;\, 2;\, \operatorname{th}^2 \frac{1}{2} t\right).$$

La formule classique

$$F(a, b;\, c;\, X) = (1-X)^{c-a-b} F(c-a,\, c-b;\, c;\, X)$$

entraîne qu'on a

$$\text{(27)} \qquad \zeta_{n,0;s}(g) = \zeta_{n,0;3-s}(g).$$

Explicitons l'équation fonctionnelle (21), qui exprime le fait que $f \to \zeta_{n,0;s}(f)$ soit un homomorphisme de A_1 dans $\mathbf{C}$, pour $g = a_t$, $g' = a_{t'}$; soit $k^{-1} a_t k a_{t'} = k_1 k_2 a_{t''} k'_2$, avec $k_1 \in K_1$, k_2, $k'_2 \in K_2$, la décomposition de $k^{-1} a_t k a_{t'}$ suivant [1 (12)]; si l'on pose

$$k = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \qquad k_1 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$$

$$k'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u'_2 \end{pmatrix}, \qquad u,\ v,\ u_1,\ u_2,\ u'_2 \in \mathbf{U},$$

on a, en comparant les coefficients,

$$u_1 \operatorname{ch} \frac{1}{2} t'' = \bar{u}\left(u \operatorname{ch} \frac{1}{2} t \operatorname{ch} \frac{1}{2} t' + v \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \operatorname{sh} \frac{1}{2} t' \right),$$

$$u_2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} t'' = \bar{v}\left(u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \operatorname{ch} \frac{1}{2} t' + v \operatorname{ch} \frac{1}{2} t \operatorname{sh} \frac{1}{2} t' \right),$$

d'où, en posant

$$\xi = \operatorname{th} \frac{1}{2} t, \qquad \xi' = \operatorname{th} \frac{1}{2} t',$$

il vient

$$\int_K \zeta_{n,0;s}(k^{-1} a_t k a_{t'})\, dk$$

$$= \frac{1}{(2n+1)} \int_{\mathbf{U}} \int_{\mathbf{U}} C^1_{2n}(\operatorname{Re}(u_1)) \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{1}{2} t''\right)^s$$

$$\times F\left(s+n,\ s-n-1;\ 2;\ \operatorname{th}^2 \frac{1}{2} t''\right) d\mu(u)\, d\mu(v)$$

$$= \frac{2}{\pi(2n+1)} \int_0^\pi C^1_{2n}\left(\frac{1 + \xi\xi' \cos\theta}{|1 + \xi\xi' e^{i\theta}|} \right) \frac{(1-\xi^2)^s (1-\xi'^2)^s}{|1 + \xi\xi' e^{i\theta}|^{2s}}$$

$$\times F\left(s+n,\ s-n-1\ ;\ 2\ ;\ \left| \frac{\xi + \xi' e^{i\theta}}{1 + \xi\xi' e^{i\theta}} \right|^2 \right) \sin^2\theta\, d\theta;$$

on obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire. — *Soient ξ, ξ' deux nombres réels tels que $-1 < \xi, \xi' < 1$, s un nombre complexe, n un demi-entier ≥ 0. On a la relation*

$$(28) \qquad \frac{2}{\pi(2n+1)} \int_0^\pi C^1_{2n}\left(\frac{1 + \xi\xi' \cos\theta}{|1 + \xi\xi' e^{i\theta}|} \right)$$

$$\times F\left(s+n,\ s-n-1\ ;\ 2\ ;\ \left| \frac{\xi + \xi' e^{i\theta}}{1 + \xi\xi' e^{i\theta}} \right|^2 \right) \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{|1 + \xi\xi' e^{i\theta}|^{2s}}$$

$$= F(s+n,\ s-n-1;\ 2;\ \xi^2)\, F(s+n,\ s-n-1;\ 2;\ \xi'^2).$$

Il va de soi que tout ce qui précède sur $\zeta_{n,0;s}(g)$ reste vrai, *mutatis mutandis*, pour $\zeta_{0,n;s}(g)$.

3. **Coefficients des représentations de la première série principale.** — Nous allons calculer les coefficient suivants de la représentation $U^{n.s}$ de la première série principale :

$$(29) \qquad \varphi_{n,s;\nu}(g) = (U_g^{n,s} f_\nu, f_\nu), \qquad \psi_{n,s;\nu}(g) = (U_g^{n,s} F_\nu, F_\nu),$$

où f_ν, F_ν désignent les fonctions définies par [2 (26)], [2 (27)]. Comme on sait que $U_{k_2}^{n,s} F_\nu = F_\nu$ quel que soit $k_2 \in K_2$, on a, si $g = k_1 k_2 a_t k'_2$, avec $k_1 \in K_1$, k_2, $k'_2 \in K_2$,

$$\psi_{n,s;\nu}(g) = \psi_{n,s;\nu}(k_1 a_t) = (U_{a_t}^{n,s} F_\nu, U_{k^{-1}}^{n,s} F_\nu);$$

si (v_p), $p = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$, est une base orthonormale de V^n, on a donc, d'après la définition des opérateurs $U_g^{n,s}$,

$$\begin{aligned}
&\psi_{n,s;\nu}(k_1 a_t)\\
&= \int_{\mathbf{U}} (\omega_G(a_t^{-1}, u)^{-s} \rho^n (u_G(a_t^{-1}, u)^{-1}) \rho^n(a_t^{-1}.u)^{-1} v, \rho^n(k_1.u)^{-1} v)\, d\mu(u)\\
&= \int_{\mathbf{U}} \left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|^{-2s}\\
&\quad \times \left(\rho^n(u) \rho^n \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} t - \bar{u} \operatorname{sh} \frac{1}{2} t}{\left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|} \right)^{-1} \rho^n(u)^{-1} v,\ \rho^n(u_1^{-1}) v \right) d\mu(u)
\end{aligned}$$

si

$$k_1 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u_1 \in \mathbf{U};$$

par suite,

$$\begin{aligned}
&\psi_{n,s;\nu}(k_1 a_t)\\
&= \int_{\mathbf{U}} \left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|^{-2s} \left(\rho^n \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t}{\left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|} \right) v, \rho^n(u_1)^{-1} v \right) d\mu(u)\\
&= \sum_{p,q,r} (v, v_p)\, \overline{(v, v_q)}\, (\rho^n(u_1) v_r, v_q)\\
&\quad \times \int_{\mathbf{U}} \left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|^{-2s} \left(\rho^n \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t}{\left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|} \right) v_p, v_r \right) d\mu(u);
\end{aligned}$$

or, si l'on change, dans la dernière intégrale, la variable u en $\bar{w}uw$, avec $w \in \mathbf{U}$, et qu'on intègre par rapport à w dans $\mathbf{U}$, en tenant compte des relations

$$d\mu(\bar{w}uw) = d\mu(u), \qquad \left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t - \bar{w}uw \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right| = \left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|,$$

$$(30) \qquad \int_{\mathbf{U}} (\rho^n(w) A v_p, \rho^n(w) v_r)\, d\mu(w) = \delta_{pr} \operatorname{Tr}(A)/(2n+1),$$

(où A est un opérateur dans V^n), il vient

$$\begin{aligned} &\psi_{n,s;v}(k_1 a_t) \\ &= \sum_{p,q} (v, v_p) \overline{(v, v_p)}\, c_{pq}^n(u_1) \frac{1}{2n+1} \\ &\times \int_{\mathbf{U}} \left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|^{-2s} \operatorname{Tr} \left[\rho^n \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t}{\left| \operatorname{ch} \frac{1}{2} t - u \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \right|} \right) \right] d\mu(u) \\ &= \sum_{p,q} (v, v_p) \overline{(v, v_q)}\, c_{pq}^n(u_1) \frac{2}{(2n+1)\pi} \\ &\times \int_0^{\pi} C_{2n}^1 \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} t - \operatorname{sh} \frac{1}{2} t \cos\theta}{\sqrt{\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta}} \right) \frac{\sin^2\theta \, d\theta}{(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \cos\theta)^s}, \end{aligned}$$

ce qui montre, d'après (22), qu'on a

$$(31) \qquad \psi_{n,s;v}(g) = \psi_{n,s;v}(k_1 a_t) = \sum_{p,q} (v, v_p) \overline{(v, v_q)}\, c_{qp}^n(u_1) \zeta_{n,0;s}(a_t),$$

si $g = k_1 k_2 a_t k_2'$, avec $k_1 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u_1 \in \mathbf{U}$, $k_2, k_2' \in K_2$.

Il en résulte immédiatement qu'on a

$$(32) \qquad (\psi_{n,s;v})^0(g) = (v, v)\, \zeta_{n,0;s}(g),$$

en tenant compte de la formule (30).

En ce qui concerne $\varphi_{n,s;v}(g)$, on a

$$(33) \qquad \varphi_{n,s;v}(g) = \varphi_{n,s;v}(k_1 a_t) = \sum_{p,q} (v, v_p) \overline{(v, v_q)}\, c_{qp}^n(u_2) \zeta_{n,0;s}(a_t),$$

si $g = k_1 k_2 a_t k_1'$, avec $k_1, k_1' \in K_1$, et $k_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$, $u_2 \in \mathbf{U}$, et

$$(34) \qquad (\varphi_{n,s;v})^0(g) = (v, v)\, \zeta_{0,n;s}(g).$$

COROLLAIRE. — *Si* $s = \frac{3}{2} + i\nu$, ν *réel, les fonctions* $\zeta_{n,0;s}(g)$, $\zeta_{0,n;s}(g)$ *sont de type positif.*

DÉMONSTRATION. — Il suffit de remarquer que si $f(g)$ est de type positif sur G, $f^0(g)$ l'est aussi, et ceci résulte de la relation

$$\tilde{h}\star f^0\star h(e) = \int_K (U_k h)^\sim \star f \star (U_k h)(e)\,dk \qquad \text{pour} \quad h\in L(G),$$

avec U_k la représentation régulière à gauche de K.

4. Coefficients des représentations de la seconde série principale. — Calculons maintenant les coefficients suivants des représentations $T^{n,0;p}$, $T^{0,n;p}$ de la seconde série principale, définie dans le paragraphe 3 :

$$C_\nu^{n,0;p}(g) = (T_g^{n,0;p} f_\nu^{n,0;p},\ f_\nu^{n,0;p}), \tag{35}$$

$$C_\nu^{0,n;p}(g) = (T_g^{0,n;p} f_\nu^{0,n;p},\ f_\nu^{0,n;p}), \tag{36}$$

où $f^{n,0;p}$, $f^{0,n;p}$ désignent les fonctions dans $\mathfrak{S}^{n,0;p}$, $\mathfrak{S}^{0,n;p}$ définies par la formule [3 (36)]. Comme on a

$$T_{k_2}^{n,0;p} f_\nu^{n,0;p} = f_\nu^{n,0;p}, \qquad \text{quel que soit} \quad k_2\in K_2,$$

on a, si $g = k_1 k_2 a_t k'_2$, avec $k_1\in K_1$, k_2, $k'_2\in K_2$, $k_1 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $u_1\in \mathbf{U}$,

$$\begin{aligned} C_\nu^{n,0;p}(g) &= C_\nu^{n,0;p}(k_1 a_t) \\ &= \frac{(2p+1)(n+p)(n-p+1)}{\pi^2}\int_{\mathbf{B}} \left|\operatorname{ch}\frac{1}{2}t - q\operatorname{sh}\frac{1}{2}t\right|^{-2p-2} \\ &\quad\times\left(\rho^n\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}t-\bar{q}\operatorname{sh}\frac{1}{2}t}{\left|\operatorname{ch}\frac{1}{2}t-q\operatorname{sh}\frac{1}{2}t\right|}\right)^{-1} v,\ \rho^n(\bar{u}_1)v\right) \\ &\quad\times F\left(p-n,\ p+n+1;\ 2;\ \left|\frac{q\operatorname{ch}\frac{1}{2}t-\operatorname{sh}\frac{1}{2}t}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}t-q\operatorname{sh}\frac{1}{2}t}\right|^2\right) \\ &\quad\times F(p-n,\ p+n+1;\ 2;\ |q|^2)(1-|q|^2)^{2p-2}\,d\mu(q); \end{aligned}$$

si l'on pose

$$\xi = \operatorname{th}\frac{1}{2}t, \qquad q = ru, \qquad \text{avec} \quad 0\leqq r<1, \quad u\in\mathbf{U},$$

on a

$$d\mu(q) = 2\pi^2 r^3\,dr\,d\mu(u);$$

il vient donc

$$C_{\nu}^{n,0;p}(k_1 a_l)$$
$$= \sum_{\lambda,\mu,\nu} (v, v_\lambda)\overline{(v, v_\mu)}\, c_{\mu\nu}^{n}(u_1)\, \frac{(2p+1)(p+n)(n-p+1)}{\pi^2}(1-\xi^2)^{p+1}$$
$$\times 2\pi^2 \int_0^1 \int_{\mathbf{U}} |1-r\xi u|^{-2p-2}$$
$$\times c_{\nu\lambda}^{n}\left(\frac{1-r\xi u}{|1-r\xi u|}\right) F\left(p-n, p+n+1; 2; \left|\frac{ru-\xi}{1-r\xi u}\right|^2\right)$$
$$\times F(p-n, p+n+1; 2; r^2)(1-r^2)^{2p-2} r^3\, dr\, d\mu(u);$$

dans l'intégrale par rapport à u, on peut changer u en wuw, $w \in \mathbf{U}$ comme précédemment, et intégrer par rapport à w dans $\mathbf{U}$, ce qui donne, compte tenu de (30),

$$\int_{\mathbf{U}} |1-r\xi u|^{-2p-2} c_{\nu\lambda}^{n}\left(\frac{1-r\xi u}{|1-r\xi u|}\right) F\left(p-n, p+n+1; 2; \left|\frac{ru-\xi}{1-r\xi u}\right|^2\right) d\mu(u)$$
$$= \frac{\delta_{\nu\lambda}}{2n+1} \int_{\mathbf{U}} |1-r\xi u|^{-2p-2} C_{2n}^{1}\left(\frac{1-r\xi \operatorname{Re}(u)}{|1-r\xi u|}\right)$$
$$\times F\left(p-n, p+n+1; 2; \left|\frac{ru-\xi}{1-r\xi u}\right|^2\right) d\mu(u)$$
$$= \frac{4\pi\,\delta_{\nu\lambda}}{2\pi^2(2n+1)} \int_0^{\pi} |1-r\xi e^{i\theta}|^{-2p-2} C_{2n}^{1}\left(\frac{1-r\xi\cos\theta}{|1-r\xi e^{i\theta}|}\right)$$
$$\times F\left(p-n, p+n+1; 2; \left|\frac{re^{i\theta}-\xi}{1-r\xi e^{i\theta}}\right|^2\right) \sin^2\theta\, d\theta,$$

puisque, si

$$u = \cos\theta + (\sin\theta\cos\varkappa)i + (\sin\theta\sin\varkappa\cos\psi)j + (\sin\theta\sin\varkappa\sin\psi)k,$$

on a

$$|1-r\xi u| = |1-r\xi e^{i\theta}|, \qquad |ru-\xi| = |re^{i\theta}-\xi|,$$

d'où l'intégrale en question est égale, grâce à l'équation fonctionnelle (28) pour $s = p+1$, à $F(p-n, p+n+1; 2; r^2)F(p-n, p+n+1; 2; \xi^2)$; par conséquent, on a

$$C_{\nu}^{n,0;p}(k_1 a_l)$$
$$= \sum_{\lambda,\mu} (v, v_\lambda)\overline{(v, v_\mu)}\, c_{\mu\lambda}^{n}(u_1)(2p+1)(n+p)(n-p+1)(1-\xi^2)^{p+1}$$
$$\times F(p-n, p+n+1; 2; \xi^2)$$
$$\times \int_0^1 F(p-n, p+n+1; 2; r^2)^2 (1-r^2)^{2p-3} r^3\, dr$$
$$= \left\{\sum_{\lambda,\mu} (v, v_\lambda)\overline{(v, v_\mu)}\, c_{\mu\lambda}^{n}(u_1)\right\}(1-\xi^2)^{p+1} F(p-n, p+n+1; 2; \xi^2),$$

d'après la formule (3 (39)). Nous avons donc démontré que, si $g=k_1k_2a_tk'_2$, avec $k_1\in K_1$, k_2, $k'_2\in K_2$, on a

$$(37)\qquad C_v^{n,0;p}(g) = C_v^{n,0,p}(k_1 a_t) = \sum_{\lambda,\mu}(v, v_\lambda)\overline{(v, v_\mu)}\, c_{\mu\lambda}^n(u_1)\,\zeta_{n,0;p+1}(a_t),$$

et il est facile de voir que

$$(38)\qquad (C_v^{n,0;p})^0(g) = (v, v)\,\zeta_{n,0;p+1}(g) \qquad \text{pour} \quad g\in G.$$

De façon analogue, on a, si $g = k_1k_2a_tk'_1$, k_1, $k'_1\in K_1$, $k_2\in K_2$, $k_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_2\end{pmatrix}$, $u_2\in \mathbf{U}$,

$$(39)\qquad C_v^{0,n;p}(g) = C_v^{0,n;p}(k_2 a_t) = \sum_{\lambda,\mu}(v, v_\lambda)\overline{(v, v_\mu)}\, c_{\mu\lambda}^n(u_2)\,\zeta_{0,n;p+1}(a_t),$$

$$(40)\qquad (C_v^{0,n;p})^0(g) = (v, v)\,\zeta_{0,n;p+1}(g) \qquad \text{pour} \quad g\in G.$$

Corollaire. — *Les fonctions* $\zeta_{n,0;p+1}(g)$, $\zeta_{0,n;p+1}(g)$ *sont de type positif, si* $0 < p \leqq n$, *et* $n - p$ *est entier.*

Remarque. — Le calcul ci-dessus suppose que $p \geqq 1$; mais le résultat reste vrai même pour $p = \frac{1}{2}$.

5. Décomposition de $U^{n,\frac{3}{2}}$ en somme directe de $T^{n,0;\frac{1}{2}}$ et $T^{0,n;\frac{1}{2}}$. — Pour n demi-entier au sens strict, la représentation $U^{n,\frac{3}{2}}$ de la première série principale est réductible. On va montrer qu'elle est somme directe des représentations $T^{n,0;\frac{1}{2}}$ et $T^{0,n;\frac{1}{2}}$ de la seconde série principale. En effet, soit H^+ (resp. H^-) le sous-espace stable engendré par les $F_v(u)$, $v\in V^n$ (resp. $f_v(u)$). Les formules (31), (37) montrent qu'on a

$$(41)\qquad \left(U_g^{n,\frac{3}{2}}F_v, F_v\right) = \left(T_g^{n,0;\frac{1}{2}}f_v^{n,0;\frac{1}{2}}, f_v^{n,0;\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{pour tout} \quad g\in G.$$

Or, si v_0 est un vecteur non nul dans V^n, la fonction $F_{v_0}(u)$ est un vecteur totalisateur de H^+ pour $U^{n,\frac{3}{2}}$, puisque, pour $k_1\in K_1$, $U_{k_1}^{n,\frac{3}{2}}F_{v_0}(u) = F_{\rho^n(u_1)v_0}(u)$ et la représentation ρ^n est irréductible. La représentation $T^{n,0;\frac{1}{2}}$ dans $\mathcal{S}^{n,0;\frac{1}{2}}$ est irréductible, donc $f_{v_0}^{n,0;\frac{1}{2}}$ est un vecteur totalisateur dans $\mathcal{S}^{n,0;\frac{1}{2}}$ pour $T^{n,0;\frac{1}{2}}$. Par suite, l'identité des coefficients (41) entraîne l'équi valence unitaire des représentations $U^{n, \frac{3}{2}}$ restreinte à H^{+} et $T^{n,0;\frac{1}{2}}$ De même, la restriction à H^{-} de $U^{n, \frac{3}{2}}$ est unitairement équivalente à $T^{0,n;\frac{1}{2}}$. Alors, on voit que $H^{+} \oplus H^{-} = H$, à l'aide des décompositions en sous-espaces stables pour les opérateurs $U_k^{n, \frac{3}{2}}$, $T_k^{n,0;\frac{1}{2}}$, $T_k^{0,n;\frac{1}{2}}$, $k \in K$ (*voir* les diagrammes dans DIXMIER [6]).

§ 5. FORMULE DE PLANCHEREL.

1. Transformée sphérique dans $A_{n,0}$. — La fonction sphérique $\zeta_{n,0;s}$ de classe $\chi_{n,0}$ définit un homomorphisme de l'algèbre commutative $A_{n,0}$ dans $\mathbf{C}$:

$$A_{n,0} \ni f \to \zeta_{n,0;s}(f) = \int_G f(g)\, \zeta_{n,0;s}(g)\, dg;$$

considérons $\zeta_{n,0;s}(f)$ comme fonction de s, et posons

(1) $$\hat{f}(n, 0; s) = \hat{f}(\zeta_{n,0;s}) = \zeta_{n,0;s}(f);$$

on appellera cette fonction d'une variable complexe s, la *transformée sphérique* (de classe $\chi^{n,0}$ ou dans $A_{n,0}$) de la fonction f. D'après ce qu'on a vu au paragraphe 4, n^{os} 3, 4, les fonctions sphériques $\zeta_{n,0;s}(g)$ dont le paramètre s satisfait à l'une des conditions suivantes sont *de type positif* :

(i) $$\mathrm{Re}(s) = \frac{3}{2},$$

(ii) $s = p + 1$ ou $s = 2 - p$, avec $0 < p \leq n$, $n - p$ entier.

Lorsque $\zeta_{n,0;s}(g)$ est de type positif, l'homomorphisme associé est unitaire, c'est-à-dire $\zeta(\tilde{f}) = \overline{\zeta(f)}$, donc on a

(2) $$(\tilde{f})(n, 0; s) = \overline{\hat{f}(n, 0; s)},$$

pour s satisfaisant à l'une des conditions (i), (ii).

D'autre part, la fonction $F_f(t)$, introduite au paragraphe 4, permet d'écrire la transformée sphérique de f sous la forme suivante :

(3) $$\hat{f}(n, 0; s) = \int_{\mathbf{R}} e^{\left(\frac{3}{2} - s\right)t} F_f(t)\, dt;$$

en effet, on a, d'après la définition de [4 (13)],

$$\begin{aligned}\hat{f}(n, 0; s) &= \int_G f(g) \int_K \alpha_{n,0;s}(k^{-1} g k)\, dk\, dg \\ &= \int_G f(g)\, \alpha_{n,0;s}(g)\, dg \qquad (\text{car } f^0 = f) \\ &= \int_K \int_{\mathbf{R}} \int_N f(kax)\, e^{-st} \chi^{n,0}(k)\, (\chi^{n,0}(e))^{-1} e^{3t}\, dk\, dt\, dx \\ &= \frac{1}{\chi^{n,0}(e)} \int_N \int_{\mathbf{R}} f(a_t x)\, e^{(3-s)t}\, dx\, dt,\end{aligned}$$

en vertu du lemme 4.3 [remarquer que $\chi^{n,0}(k) = \overline{\chi^{n,0}(k)}$], ce qui montre bien (3). Cette formule entraîne le lemme suivant, puisque la fonction $F_f(t)$ est à support compact, comme on a vu au paragraphe 4 (lemme 4.3).

LEMME 5.1. — *Pour tout f dans $A_{n,0}$, la fonction $\hat{f}(n, 0; s)$ est une fonction entière de s. De plus, quel que soit le polynome $P(\nu)$, les intégrales suivantes sont absolument convergentes :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\nu)\, \mathrm{th}\, \pi\nu\, \hat{f}(n, 0; \sigma + i\nu)\, d\nu, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \nu P(\nu)\, \mathrm{coth}\, \pi\nu\, \hat{f}(n, 0; \sigma + i\nu)\, d\nu.$$

2. **Formule de Plancherel dans $A_{n,0}$.** — D'après la théorie des algèbres préhilbertiennes commutatives (*voir* GODEMENT [12]), on sait qu'il existe un espace localement compact $Z^{n,0}$ formé par des fonctions sphériques de type positif et de classe $\chi^{n,0}$, et une mesure positive $m^{n,0}$ sur $Z^{n,0}$, de telle sorte que la fonction $\hat{f}(\zeta) = \zeta(f)$, définie sur $Z^{n,0}$, soit de carré intégrable pour $m^{n,0}$, et qu'on ait

$$\int_G |f(g)|^2\, dg = \int_{Z^{n,0}} |\hat{f}(\zeta)|^2\, dm^{n,0}(\zeta), \tag{4}$$

pour tout $f \in A_{n,0}$. Nous allons montrer que l'espace $Z^{n,0}$ est formé par les fonctions sphériques $\zeta_{n,0;s}(g)$ avec

$$s = \frac{3}{2} + i\nu, \quad \nu \geqq 0 \qquad \text{ou} \qquad s = p + 1, \quad 0 < p \leqq n, \quad n - p \text{ entier}, \tag{5}$$

et déterminer en même temps la mesure $m^{n,0}$ de façon explicite. Comme on a, d'après (2), $|\hat{f}(n, 0; s)|^2 = (\tilde{f} \star f)^\wedge(n, 0; s)$, pour s satisfaisant à (5) il suffit de déterminer une mesure positive $m^{n,0}$ sur $Z^{n,0}$ telle qu'on ait

$$f(e) = \int_{Z^{n,0}} \hat{f}(n, 0; s)\, dm^{n,0}(\zeta_{n,0;s}), \tag{6}$$

pour $f \in D_{n,0}$, où $D_{n,0}$ désigne la sous-algèbre de $A_{n,0}$ formée par les fonctions indéfiniment dérivables.

LEMME 5.2. — *Posons, pour* $f \in D_{n,0}$,

$$Z(s) = Z(f;\, n,\, 0;\, s) = (2n+1)^2\left(s-\frac{3}{2}\right)(s+n-1)(s-n-2) \times \operatorname{tg}\pi\left(s+n-\frac{3}{2}\right)\hat{f}(n,\, 0;\, s). \tag{7}$$

Alors $Z(s)$ *est une fonction méromorphe dans tout le plan de la variable complexe* s, *et l'on a*

$$\lim_{|\nu| \to +\infty} Z(\sigma + i\nu) = 0, \tag{8}$$

uniformément dans toute bande $a \leqq \sigma \leqq b$, *pour* $a < b$ *quelconques.*

DÉMONSTRATION. — La première assertion résulte du lemme 5.1. Il est facile de voir que, si $a \leqq \sigma \leqq b$, il existe une constante $K > 0$ telle qu'on ait

$$(2n+1)^2\left|\left(s-\frac{3}{2}\right)(s+n-1)(s-n-2)\operatorname{tg}\pi\left(s+n-\frac{3}{2}\right)\right| \leqq K|\nu|^3 \quad \text{pour} \quad |\nu| \geqq 1;$$

on a alors, pour $a \leqq \sigma \leqq b$, et $|\nu| \geqq 1$,

$$|Z(\sigma+i\nu)| \leqq K\left|\nu^3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu t} e^{\left(\frac{3}{2}-\sigma\right)t} F_f(t)\, dt\right|,$$

d'après la formule (3), ou encore [$F_f(t)$ est à support compact], en intégrant par parties,

$$|Z(\sigma+i\nu)| \leqq K\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu t}\Phi_\sigma(t)\, dt\right|,$$

avec

$$\Phi_\sigma(t) = \frac{d^3}{dt^3}\left\{e^{\left(\frac{3}{2}-\sigma\right)t} F_f(t)\right\};$$

en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue, on a donc

$$\lim_{|\nu| \to +\infty} Z(\sigma+i\nu) = 0,$$

quel que soit σ; la convergence est uniforme dans $a \leqq \sigma \leqq b$; en effet, la transformée de Fourier

$$\hat{\Phi}_\sigma(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu t}\Phi_\sigma(t)\, dt$$

est uniformément continue dans $a \leqq \sigma \leqq b$, et $-\infty < \nu < +\infty$; donc à tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\hat{\Phi}_{\sigma_1}(\nu) - \hat{\Phi}_{\sigma_2}(\nu)| < \varepsilon$, pour $|\sigma_1 - \sigma_2| < \delta$ et pour tout ν; d'autre part, on peut choisir $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ dans $[a, b]$ tels que pour tout $\sigma \in [a, b]$, il existe un σ_j, $1 \leqq j \leqq p$ tel que $|\sigma - \sigma_j| < \delta$; finalement, pour tout j, il existe un nombre positif N_j tel qu'on ait $|\hat{\Phi}_{\sigma_j}(\nu)| < \varepsilon$, pour $|\nu| \geqq N_j$; si $a \leqq \sigma \leqq b$, on choisit j tel que $|\sigma - \sigma_j| < \delta$; alors, on a

$$|\hat{\Phi}_\sigma(\nu)| \leqq |\hat{\Phi}_\sigma(\nu)| + |\hat{\Phi}_\sigma(\nu) - \hat{\Phi}_{\sigma_j}(\nu)| \leqq 2\varepsilon,$$

pour $|\nu| \geqq N$, $N = \max\limits_{1 \leqq j \leqq p} N_j$, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 5.1. — *Soit n un entier $\geqq 0$, et soit $f \in D_{n,0}$. Alors*

$$(9) \quad 16\pi^2 f(e) = (2n+1)^2 \sum_{p=1}^{n} (2p-1)(n+p)(n-p+1)\hat{f}(n, 0; p+1)$$
$$+ 2(2n+1)^2 \int_0^{+\infty} \hat{f}\left(n, 0; \frac{3}{2} + i\nu\right)$$
$$\times \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \nu^2\right] \nu \operatorname{th} \pi\nu \, d\nu,$$

l'intégrale étant absolument convergente.

DÉMONSTRATION. — Considérons le contour C_T formé en parcourant, dans le sens direct, le périmètre du rectangle ayant pour sommets les points $\frac{3}{2} \pm iT$, $n + \frac{3}{2} + iT$, $T > 0$. Si l'on intègre $Z(s)$ le long de C_T, on obtient donc

$$\int_T^{-T} Z\left(\frac{3}{2} + i\nu\right) i\, d\nu + \int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{2}} Z(\sigma - iT)\, d\sigma + \int_{-T}^{T} Z\left(n + \frac{3}{2} + i\nu\right) i\, d\nu$$
$$+ \int_{n+\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} Z(\sigma + iT)\, d\sigma = 2\pi i \sum_{p=1}^{n} \operatorname{Res}(Z(s), p+1);$$

on voit facilement que

$$(10) \quad \operatorname{Res}(Z(s), p+1) = \frac{(2n+1)^2}{2\pi}(2p-1)(n+p)(n-p+1)\hat{f}(n, 0; p+1);$$

d'après le lemme 5.2, les intégrales sur les segments horizontaux tendent vers o lorsque $T \to +\infty$, et il vient donc

$$(11) \quad -(2n+1)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (n+i\nu)\left(2n+\frac{1}{2}+i\nu\right) \times \left(i\nu-\frac{1}{2}\right) \mathrm{th}\,\pi\nu\, \hat{f}\left(n, 0; n+\frac{3}{2}+i\nu\right) d\nu$$
$$= (2n+1)^2 i \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\nu^2\right] \nu\, \mathrm{th}\,\pi\nu\, \hat{f}\left(n, 0; \frac{3}{2}+i\nu\right) d\nu$$
$$+ (2n+1)^2 i \sum_{p=1}^{n} (2p-1)(n+p)(n-p+1) \hat{f}(n, 0; p+1),$$

les intégrales étant absolument convergentes, à cause du lemme 5.1.

D'autre part, on a

$$\hat{f}(n, 0; s) = \int_G f(g)\, \zeta_{n,0;s}(g)\, dg$$
$$= 2\pi^2 \int_K \int_K \int_0^{+\infty} f(ka_t k')\, \zeta_{n,0;s}(ka_t k')\, \mathrm{sh}^3 t\, dk\, dk'\, dt,$$

en vertu du lemme 1.3. D'après le lemme 4.2, et la proposition 4.2, il vient donc

$$\hat{f}(n, 0; s) = 2\pi^2 \int_{K_1} \left\{\frac{\chi^{n,0}(k_1)}{\chi^{n,0}(e)}\right\}^2 dk_1 \int_0^{+\infty} f(a_t)\left(1-\mathrm{th}^2\frac{1}{2}t\right)^s \times F\left(n+s, s-n-1; 2; \mathrm{th}^2\frac{1}{2}t\right) \mathrm{sh}^3 t\, dt;$$

si l'on pose

$$(12) \qquad f\{\tau\} = f(a_t), \qquad \text{avec} \quad \tau = \mathrm{th}^2\frac{1}{2}t,$$

[rappelons que $f(a_t)$ est une fonction paire de t, donc peut être considérée comme fonction de la variable τ ci-dessus], il vient, compte tenu de la relation : $\mathrm{sh}^3 t\, dt = 8\tau(1-\tau)^{-4}\, d\tau$,

$$\hat{f}(n, 0; s) = \frac{16\pi^2}{(2n+1)^2} \int_0^1 f\{\tau\} F(s+n, s-n-1; 2; \tau)(1-\tau)^{s-4}\tau\, d\tau.$$

[Comme $f(g)$ est à support compact, $f\{\tau\} = 0$ pour τ assez voisin à 1; donc cette intégrale converge quel que soit s.]

Le premier membre de (11), qu'on désignera par J, est égal à :

$$J = -16\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (n+i\nu)\left(2n+\frac{1}{2}+i\nu\right)\left(i\nu-\frac{1}{2}\right)\operatorname{th}\pi\nu\, d\nu$$
$$\times \int_0^1 f\{\tau\} F\left(2n+\frac{3}{2}+i\nu, \frac{1}{2}+i\nu; 2; \tau\right)(1-\tau)^{n-\frac{5}{2}+i\nu}\tau\, d\tau.$$

Or on a la formule suivante pour la fonction hypergéométrique :

$$\frac{(-1)^n a_n (c-b)_n}{c_n}(1-\tau)^{a-1} F(a+n, b; c+n; \tau)$$
$$= \frac{d^n}{d\tau^n}[(1-\tau)^{a+n-1} F(a, b; c; \tau)],$$

pour n entier $\geqq 1$, a, b, c complexes (*voir* MAGNUS-OBERHETTINGER [19], p. 16); si l'on remplace a, b, c, n par $2n+\frac{1}{2}+i\nu$, $\frac{1}{2}+i\nu$, 1, 1 respectivement, on obtient la relation suivante :

$$-\left(2n+\frac{1}{2}+i\nu\right)\left(\frac{1}{2}-i\nu\right)(1-\tau)^{2n-\frac{1}{2}+i\nu} F\left(2n+\frac{3}{2}+i\nu, \frac{1}{2}+i\nu; 2; \tau\right)$$
$$= \frac{d}{d\tau}\left\{(1-\tau)^{2n+\frac{1}{2}+i\nu} F\left(2n+\frac{1}{2}+i\nu, \frac{1}{2}+i\nu; 1; \tau\right)\right\}.$$

Il vient donc

$$J = -16\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (n+i\nu)\operatorname{th}\pi\nu \int_0^1 f\{\tau\}(1-\tau)^{-n-2}\tau$$
$$\times \frac{d}{d\tau}\left[(1-\tau)^{2n+\frac{1}{2}+i\nu} F\left(2n+\frac{1}{2}+i\nu, \frac{1}{2}+i\nu; 1; \tau\right)\right] d\tau\, d\nu$$
$$= -16\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (n+i\nu)\operatorname{th}\pi\nu \int_0^1 \frac{d}{d\tau}[f\{\tau\}(1-\tau)^{-2-n}\tau](1-n)^{2n+\frac{1}{2}+i\nu}$$
$$\times F\left(2n+\frac{1}{2}+i\nu, \frac{1}{2}+i\nu; 1; \tau\right) d\tau\, d\nu$$
$$= -16\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (n+i\nu)\operatorname{th}\pi\nu \int_0^1 [f\{\tau\}+(n+2)(1-\tau)^{-1}\tau f\{\tau\}+\tau f'\{\tau\}]$$
$$\times F\left(2n+\frac{1}{2}+i\nu, \frac{1}{2}+i\nu; 1; \tau\right)(1-\tau)^{n-\frac{3}{2}+i\nu} d\tau\, d\nu;$$

on obtient donc : $J = 16\pi^2 i f(e)$, en vertu du lemme suivant (pour une démonstration de ce lemme, on renvoie au lemme 8 *bis* dans [21]); c'est essentiellement la formule de Plancherel dans le groupe **SL** (2, **R**).

LEMME 5.3. — *Pour toute fonction $\varphi(t)$ indéfiniment dérivable et à support compact définie dans* $[0, 1[$, *on a la formule*

$$\varphi(0) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} (n + i\nu) \operatorname{th} \pi\nu \int_0^1 \varphi(t) \times F\left(2n + \frac{1}{2} + i\nu, \frac{1}{2} + i\nu; 1; t\right)(1-t)^{n-\frac{3}{2}+i\nu} \, dt \, d\nu,$$

pour n un demi-entier (au sens large) $\geqq 0$.

La formule (9) résulte maintenant de (11), en remarquant qu'on a

$$\hat{f}\left(n, 0; \frac{3}{2} + i\nu\right) = \hat{f}\left(n, 0; \frac{3}{2} - i\nu\right).$$

Dans le cas où n est un demi-entier au sens strict, on peut procéder d'une façon analogue $\left[\text{la fonction } Z(s) \text{ n'a pas de pôle en } s = \frac{3}{2}, \text{ à cause du facteur } \left(s - \frac{3}{2}\right)!\right]$; comme pôles, on a, cette fois, les points $p + 1$, avec $1 \leqq p \leqq n$, $n - p$ entier $\left(\text{dans le cas } n = \frac{1}{2}, \text{ il n'y en a pas}\right)$. L'intégrale le long de la droite $\operatorname{Re}(s) = \frac{3}{2}$ est égale à

$$(2n+1)^2 i \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \nu^2\right] \nu \coth \pi\nu \, \hat{f}\left(n, 0; \frac{3}{2} + i\nu\right) d\nu;$$

le reste du calcul est valable sans changement (en particulier le lemme 5.3), et l'on obtient donc la proposition suivante :

PROPOSITION 5.2. — *Soit n un demi-entier au sens strict, $n \geqq \frac{1}{2}$, et soit $f \in D_{n,0}$. On a alors la formule suivante :*

$$(13) \quad 16\pi^2 f(e) = (2n+1)^2 \sum_{\substack{1 \leqq p \leqq n \\ n-p \text{ entier}}} (2p-1)(n+p)(n-p+1) \hat{f}(n, 0; p+1) + 2(2n+1)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \nu^2\right] \nu \coth \pi\nu \, \hat{f}\left(n, 0; \frac{3}{2} + i\nu\right) d\nu,$$

l'intégrale étant absolument convergente.

REMARQUE 5.1. — On peut remplacer les deux formules (9) et (13) par une seule, en remarquant que

$\operatorname{th}(\pi\nu + in) = \operatorname{th} \pi\nu$ si $n \equiv 0 \pmod 1$ et $\coth \pi\nu$ si $n \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$.

3. **Formule de Plancherel dans A_1.** — Comme on a la décomposition en somme hilbertienne :

(14) $$A_1^2 = \bigoplus_{n \text{ demi-entier} \geqq 0} A_{n,0}^2,$$

on obtient la formule de Plancherel dans A_1 en additionnant les formules obtenues dans chaque $A_{n,0}$. On a même un peu plus; soit $L(G/K_2)$ la sous-algèbre de $L(G)$ formée par les fonctions telles que $f(gk_2) = f(g)$, pour $g \in G$, $k_2 \in K_2$; lorsque $f \in L(G/K_2)$, la fonction

$$h = (\tilde{f} \star f)^0$$

est dans A_1, et l'on a

$$\int_G |f(g)|^2\, dg = (\tilde{f} \star f)(e) = (\tilde{f} \star f)^0(e) = h(e);$$

par suite, on a, d'après (14),

(15) $$\int_G |f(g)|^2\, dg = \sum_{n \geqq 0} (h \star \chi^{n,0})(e) \qquad \text{et} \qquad h \star \chi^{n,0} \in A_{n,0}$$

en tenant compte de la définition [4 (20)], on en déduit, grâce aux propositions 5.1 et 5.2, la formule suivante :

$$\begin{aligned}\int_G |f(g)|^2\, dg &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{n \geqq 0} (2n+1)^2 \int_0^{+\infty} \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \nu^2\right] \nu \operatorname{th}(\pi\nu + ni)\, \zeta_{n,0;\frac{3}{2}+i\nu}(\tilde{f} \star f)\, d\nu \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n \geqq 1} (2n+1)^2 \sum_{\substack{1 \leqq p \leqq n \\ n-p \text{ entier}}} (2p-1)(n+p)(n-p+1)\, \zeta_{n,0;p+1}(\tilde{f} \star f).\end{aligned}$$

Calculons, d'autre part, la trace de l'opérateur $U_h^{n,s}$, pour $s = \frac{3}{2} + i\nu$. On a

$$\operatorname{Tr}(U_h^{n,s}) = \operatorname{Tr}\left[U^{n,s}_{(\tilde{f}\star f)^0}\right] = \operatorname{Tr}\left(U^{n,s}_{\tilde{f}\star f}\right) = \operatorname{Tr}[(U_f^{n,s})^* U_f^{n,s}],$$

d'une part, et

$$\operatorname{Tr}(U_h^{n,s}) = \sum_{(p,q) \in D_n} \operatorname{Tr}(U^{n,s}_{h \star \chi^{p,q}}),$$

en vertu de la proposition 2.1. Or, pour $h \in A_1$, on a

$$h \star \chi^{p,q} = 0 \qquad \text{si} \quad q \neq 0;$$

comme on sait que $(n, 0)$ est le seul (p, q) dans D_n avec $q = 0$, il vient, en désignant par (v_p) une base orthonormale de V^n,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(U_h^{n,s}) &= \mathrm{Tr}(U_{h\star\chi^{n,0}}^{n,s}) \\
&= \sum_p (U_{h\star\chi^{n,0}}^{n,s} F_{v_p}, F_{v_p}) \\
&= \sum_p \int_G (h\star\chi^{n,0})(g)\, \psi_{n,s;v_p}(g)\, dg \\
&= \sum_p \int_G (\tilde{f}\star f)(g) (\psi_{n,s;v_p})^0(g)\, dg \\
&= \sum_p \int_G (\tilde{f}\star f)(g) \zeta_{n,0;s}(g)\, dg = (2n+1)\zeta_{n,0;s}(\tilde{f}\star f);
\end{aligned}$$

on a donc finalement,

$$\mathrm{Tr}\left[\left(U_f^{n,\frac{3}{2}+i\nu}\right)^* U_f^{n,\frac{3}{2}+i\nu}\right] = (2n+1)\zeta_{n,0;\frac{3}{2}+i\nu}(\tilde{f}\star f). \tag{16}$$

On démontre de même la formule suivante :

$$\mathrm{Tr}[(T_f^{n,0;p})^* T_f^{n,0;p}] = (2n+1)\zeta_{n,0;p+1}(\tilde{f}\star f). \tag{17}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 5.3. — *Pour $f \in L\,(G/K_2)$, on a la formule suivante :*

$$\begin{aligned}
(19)\quad \int_G |f(g)|^2\, dg
&= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{n\geq 0} (2n+1) \int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}\left[\left(U_f^{n,\frac{3}{2}+i\nu}\right)^* U_f^{n,\frac{3}{2}+i\nu}\right] \\
&\quad \times \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \nu^2\right] \nu\, \mathrm{th}(\pi\nu + in)\, d\nu \\
&\quad + \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n\geq 1} (2n+1) \\
&\quad \times \sum_{\substack{1\leq p\leq n \\ n-p \text{ entier}}} (2p-1)(n+p)(n-p+1)\, \mathrm{Tr}[(T_f^{n,0;p})^* T_f^{n,0;p}],
\end{aligned}$$

les intégrales et les séries étant absolument convergentes.

REMARQUE 5.2. — D'après HARISH-CHANDRA [16], on sait que le coefficient de $\mathrm{Tr}\left[(T_f^{n,0;p})^* T_f^{n,0;p}\right]$ dans la formule de Plancherel de G est égal à la dimension formelle $d^{n,0;p}$ de la représentation $T^{n,0;p}$, qui est caractérisée par la propriété suivante : on a

$$\int_G |(T_g^{n,0;p} f, f)|^2 \, dg = (d^{n,0;p})^{-1} (f, f)^2$$

pour toute fonction f dans $\mathcal{S}^{n,0;p}$, l'espace de la représentation $T^{n,0;p}$; en prenant $f = f_v^{n,0;p}$, avec $v \in V^n$, il vient donc

$$\begin{aligned}
&(v, v)^2 (d^{n,0;p})^{-1} \\
&\quad = \int_G |C_v^{n,0;p}(g)|^2 \, dg \\
&\quad = 2\pi^2 \int_K \int_K \int_0^{+\infty} |C^{n,0;p}(k a_t k')|^2 \operatorname{sh}^3 t \, dk \, dk' \, dt \quad \text{(lemme 1.3)} \\
&\quad = 2\pi^2 \int_{K_1} \int_0^{+\infty} |C^{n,0;p}(k_1 a_t)|^2 \operatorname{sh}^3 t \, dk_1 \, dt \quad [\text{à cause de } (4\,(37)]\\
&\quad = 2\pi^2 \sum_{\lambda, \mu} \sum_{\lambda', \mu'} (v, v_\lambda) \overline{(v, v_\mu)} \, \overline{(v, v_{\lambda'})} (v, v_{\mu'}) \\
&\qquad \times \int_{\mathbf{U}} c_{\mu\lambda}^n(u) \overline{c_{\mu'\lambda'}^n(u)} \, d\mu(u) \int_0^{+\infty} |\zeta_{n,0;p+1}(a_t)|^2 \operatorname{sh}^3 t \, dt \\
&\quad = \frac{16\pi^2}{2n+1} \sum_{\lambda, \mu} |(v, v_\lambda)|^2 |(v, v_\mu)|^2 \\
&\qquad \times \int_0^1 F(n+p+1, p-n; 2; x)^2 (1-x)^{2p-2} x \, dx \\
&\quad = (v, v)^2 (16\pi^2)/(2n+1)(2p-1)(n+p)(n-p+1),
\end{aligned}$$

d'où

$$d^{n,0;p} = (2n+1)(2p-1)(n+p)(n-p+1)/16\pi^2, \tag{20}$$

ce qui est bien le coefficient trouvé dans la formule (19).

La formule de Plancherel pour $L(G/K_1)$ est obtenue de façon analogue, et fait intervenir les représentations de la première série principale $U^{n, \frac{3}{2}+i\nu}$, et celles de la série discrète $T^{0,n;p}$; on peut donc conjecturer que la formule de Plancherel pour $L^2(G)$ soit de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\int_G |f(g)|^2\,dg &= \frac{1}{8\pi^2}\sum_{n\geq 0}(2n+1)\int_0^{+\infty}\mathrm{Tr}\Big[\Big(U_f^{n,\frac{3}{2}+i\nu}\Big)^* U_f^{n,\frac{3}{2}+i\nu}\Big] \\ &\times\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2+\nu^2\Big]\nu\,\mathrm{th}(\pi\nu+ni)\,d\nu \\ &+\frac{1}{16\pi^2}\sum_{n\geq 1}(2n+1)\sum_{\substack{1\leq p\leq n\\ n-p\ \text{entier}}}(2p-1)(n+p)(n-p+1) \\ &\times\big\{\mathrm{Tr}[(T_f^{n,0;p})^* T_f^{n,0;p}]+\mathrm{Tr}[(T_f^{0,n;p})^* T_f^{0,n;p}]\big\}.\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BARGMANN (V.). — Irreducible unitary representations of the Lorentz group, *Annals of Math.*, Series 2, t. 48, 1947, p. 568-640.

[2] BŒRNER (Hermann). — *Darstellungen von Gruppen*. Berlin, Springer-Verlag, 1955 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 74).

[3] BRUHAT (François). — Sur les représentations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. math. France*, t. 84, 1956, p. 97-205.

[4] CARTAN (Élie). — Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos, *Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 53, 1929, p. 217-252; *Œuvres complètes*, Partie I, vol. 2, p. 1045-1080. Paris, Gauthier-Villars, 1952.

[5] DIXMIER (Jacques). — Sur les représentations de certains groupes orthogonaux, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 250, 1960, p. 3263-3265.

[6] DIXMIER (Jacques). — Représentations intégrables du groupe de De Sitter, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 89, 1961, p. 9-41.

[7] EHRENPREIS (L.) and MAUTNER (F. I.). — Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups, I., *Annals of Math.*, Series 2, t. 61, 1955, p. 406-439.

[8] GEL'FAND (I. M.). — Fonctions sphériques dans les espaces riemanniens symétriques [en russe], *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 70, 1950, p. 5-8.

[9] GEL'FAND (I. M.) i NAJMARK (M. A.). — Représentations unitaires du groupe de Lorentz [en russe], *Izvestija Akad. Nauk S. S. S. R., Serija Matematičeskaja*, t. 11, 1947, p. 411-504.

[9 *bis*] NAJMARK (M. A.). — *Représentations linéaires du groupe de Lorentz* [en russe]. Moskva, 1958.

[10] GEL'FAND (I. M.) und NAJMARK (M. A.). — *Unitäre Darstellungen der klassischen* Gruppen. Berlin, Akademie-Verlag, 1957 (*Mathematische Lehrbücher und Monographien*. 2. Abteilung, 6).

[11] GODEMENT (Roger). — A theory of spherical functions, I., *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 73, 1952, p. 496-556.

[12] GODEMENT (Roger). — Introduction aux travaux de A. Selberg, *Séminaire Bourbaki*, t. 9, 1956-1957, n° 144, 16 pages.

[13] HARISH-CHANDRA. — Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space, I., *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 75, 1953, p. 185-243.

[14] HARISH-CHANDRA. — Representations of semi-simple Lie groups, III., *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 76, 1954, p. 234-253.

[15] HARISH-CHANDRA. — The Plancherel formula for complex semi-simple Lie groups, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 76, 1954, p. 485-528.

[16] HARISH-CHANDRA. — Representations of semi-simple Lie groups, VI., *Amer. J. Math.*, t. 78, 1956, p. 564-628.

[17] HARISH-CHANDRA. — Spherical functions on a semi-simple Lie groups, I., *Amer. J. Math.*, t. 80, 1958, p. 241-310.

[18] HARISH-CHANDRA. — Spherical functions on a semi-simple Lie group, II., *Amer. J. Math.*, t. 80, 1958, p. 553-613.

[19] MAGNUS (W.) und OBERHETTINGER (F.). — *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2te Auflage. Berlin, Springer-Verlag, 1948 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 52).

[20] TAKAHASHI (Reiji). — Sur les groupes de Lorentz généralisés, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 252, 1961, p. 835-837 et 980-982.

[21] TAKAHASHI (Reiji). — Sur les fonctions sphériques et la formule de Plancherel dans le groupe hyperbolique, *Japanese J. of Math.*, t. 31, 1961, p. 55-90.

[22] VILENKIN (N. Ja.). — Matrix elements of irreducible unitary representations of a group of Lobatchewsky space motions and the generalized Fock-Mehler transformation [en russe], *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 118, 1958, p. 219-222.

(Manuscrit reçu le 30 mai 1962.)

Reiji TAKAHASHI
103-2 Kaminoge-cho, Setagaya-ku
Tokyo (Japon).