BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL EGO

Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes satisfait à certaines conditions

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 137-201

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__137_0>

Bull. Soc. math. France,
91, 1963, p. 137 à 201.

STRUCTURE DES DEMI-GROUPES DONT LE TREILLIS DES SOUS-DEMI-GROUPES SATISFAIT À CERTAINES CONDITIONS ;

PAR

MICHEL EGO (*).

INTRODUCTION [1].

1. — De nombreux mathématiciens ont étudié les relations existant entre la structure d'un groupe et celle de son treillis de sous-groupes; on trouvera une bibliographie et des indications à ce sujet dans le livre récent publié aux *Ergebnisse* par Michio SUZUKI [10]. A l'origine de ce travail, suivant une suggestion de Mme M.-L. DUBREIL-JACOTIN, nous nous sommes intéressés à une généralisation, en théorie des demi-groupes, d'un théorème de O. ORE [8]. Celui-ci caractérise les groupes ayant le treillis de leurs sous-groupes distributif; nous avons donc étudié d'abord les demi-groupes ayant le treillis de leurs sous-demi-groupes distributif.

Ce faisant, il s'est avéré que certains des résultats obtenus pouvaient l'être dans des hypothèses plus faibles que la distributivité. Nous nous sommes alors penchés successivement sur toute une série de problèmes concernant la détermination de la structure des demi-groupes D ayant le treillis $T(D)$ de leurs sous-demi-groupes modulaire, puis semi-modulaire, puis modulaire affaibli [3]. Les résultats que nous obtenons généralisent les précédents qui ont été trouvés indépendamment par ŠEVRIN [9].

(*) Thèse Sc. math., Paris, 1963.

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

Finalement c'est neuf problèmes du type ci-dessus que nous considérons; celui présentant la plus grande généralité est relatif au cas où le treillis $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, à savoir : un treillis $\mathfrak{T}$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ s'il possède un élément nul, o, et si les relations $x \succ x \wedge y$, $y \succ x \wedge y$ et $x \wedge y \neq 0$ impliquent $x \vee y \succ x$ ($u \succ v$ se lit « u couvre v » et signifie que $u > v$ et qu'il n'existe pas d'élément w tel que $u > w > v$).

L'une des caractéristiques essentielles des résultats obtenus est de ramener les problèmes posés à la détermination des groupes périodiques ayant un treillis de sous-groupes satisfaisant à la même condition.

2. — Nous avons divisé notre exposé, pour des raisons de commodité, en huit chapitres.

Dans le chapitre I, après avoir énoncé de façon précise les neuf conditions étudiées, à savoir la distributivité, la modularité, la semi-modularité, la modularité affaiblie, la semi-modularité affaiblie, et les conditions C_1, C_2, $\overline{C}_1$ et $\overline{C}_2$, et indiqué leurs implications, nous établissons le résultat essentiel suivant : *si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, D est périodique et la période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à* 5. Si nous considérons un groupe G et si $T(G)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, G est périodique; mais si G est périodique, ses sous-demi-groupes non vides sont ses sous-groupes; appelant $\mathfrak{T}(G)$ le treillis des sous-groupes de G, on a $T(G) = \mathfrak{T}(G) \cup \{\emptyset\}$; on est ramené à l'étude des groupes périodiques G pour lesquels le treillis $\mathfrak{T}(G)$ satisfait à la même condition.

D étant désormais périodique, l'ensemble I de ses idempotents n'est pas vide et c'est l'étude de I qui fera l'objet du chapitre II. Nous établissons d'abord que, *si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, I est stable.* Nous pouvons alors déterminer I dans chacune des hypothèses étudiées en utilisant un résultat de D. Mac Lean [6].

3. — Le chapitre III est consacré à quatre conditions nécessaires, concernant la multiplication des éléments de D, pour que $T(D)$ satisfasse à la condition $\overline{C}_2$. Pour cela, nous introduisons la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ suggérée par P. Dubreil [4] : $a \equiv b\ (\mathcal{R})$ si et seulement s'il existe deux entiers m et n tels que $a^m = b^n$; $\mathcal{R}$ décompose D en classes contenant un et un seul idempotent, elles sont appelées fuseaux. Nous obtenons alors le résultat suivant : *si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, l'équivalence $\mathcal{R}$ est régulière,* ce qui, compte tenu de la stabilité de I, s'énonce, en utilisant le langage de A. H. Clifford [2] : *D est bande sur I de ses fuseaux.*

Dans le chapitre IV, nous donnons des formes équivalentes aux systèmes de conditions nécessaires trouvées ci-dessus pour que $T(D)$ satisfasse aux différentes conditions étudiées. Nous nous sommes efforcés d'obtenir des systèmes de conditions qui soient les plus descriptifs possible.

Le cas particulier des demi-groupes P qui sont produit direct d'un groupe périodique Γ et d'un demi-groupe rectangulaire R fait l'objet du chapitre V.

4. — Les deux chapitres suivants sont consacrés à l'énoncé et à la démonstration des *neuf conditions nécessaires et suffisantes résolvant les problèmes posés*; ces énoncés contiennent les systèmes de conditions établis au chapitre IV auxquels viennent s'ajouter des conditions portant uniquement sur les groupes maximaux du demi-groupe. Nous avons réservé le chapitre VI aux cas « distributif », « modulaire », « semi-modulaire », « condition C_1 » et « condition C_2 » dans lesquels interviennent des propriétés de produit cardinal de treillis, et le chapitre VII aux autres cas, où de telles propriétés n'ont plus lieu et où par conséquent une étude plus précise des éléments de $T(D)$ s'avère nécessaire.

Dans le dernier chapitre, nous montrons que, *si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, il existe un endomorphisme naturel de D sur la réunion D^* de ses groupes maximaux.* Nous traitons ensuite de quelques cas particuliers, notamment de celui où D est une réunion de groupes et de celui où D est abélien.

5. — Je veux exprimer ici toute ma gratitude à M^me^ M.-L. Dubreil-Jacotin. Ses conseils m'ont été d'un très grand secours, dès mon entrée au C. N. R. S., pendant toute la durée de mes recherches, et lors de la rédaction de ce travail.

Je suis également très reconnaissant envers MM. Lesieur et Lefebvre auprès de qui j'ai trouvé l'accueil le plus favorable et envers M. Clifford qui, au cours de son séjour à Paris, m'a, à maintes reprises, conseillé très utilement.

Je tiens à remercier très vivement M. Dixmier qui a bien voulu me donner mon second sujet de thèse, et M. Dubreil qui m'a fait l'honneur de présider mon jury.

Chapitre I.

Tout au long de ce travail, D désigne un demi-groupe arbitraire, $T(D)$ le treillis formé par l'ensemble de ses sous-demi-groupes ordonné par l'inclusion des ensembles (le signe $\subset$ désignera l'inclusion stricte). $\wedge$ (inf.) est l'intersection $\cap$ des ensembles, $\vee$ (sup.) est différent de la réunion $\cup$ des ensembles, $\emptyset$ est l'élément nul de $T(D)$.

Les neuf conditions étudiées sont :

1° La distributivité;
2° La modularité;
3° La semi-modularité;
4° La modularité affaiblie;
5° La condition C_1;
6° La condition C_2;

Nous renvoyons, pour les définitions relatives à ces six conditions et pour les notions fondamentales sur les treillis, aux *Lecons sur les treillis* de M.-L. Dubreil-Jacotin, Lesieur et Croisot [3].

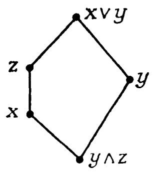
7° La semi-modularité affaiblie; un treillis $\mathfrak{T}$ est semi-modulaire affaibli s'il possède un élément nul, o, et s'il satisfait à la condition suivante : les relations $o < y \wedge z < x < z < x \vee y$ (égalités exclues) impliquent l'existence de t tel qu'on ait

$$y \wedge z < t < y \qquad \text{et} \qquad x = (x \vee t) \wedge z.$$

8° La condition $\overline{C}_1$; un treillis $\mathfrak{T}$ satisfait à la condition $\overline{C}_1$ s'il possède un élément nul, o, et si les relations $x \wedge y \neq o$ et $y \succ x \wedge y$ impliquent $x \vee y \succ x$.

9° La condition $\overline{C}_2$; un treillis $\mathfrak{T}$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ s'il possède un élément nul, o, et si les relations $x \wedge y \neq o$, $y \succ x \wedge y$ et $x \succ x \wedge y$ impliquent $x \vee y \succ x$.

Si l'on appelle $\mathfrak{T}_0$ le treillis à cinq éléments dont le diagramme de Hasse est le suivant :



les conditions ci-dessus peuvent s'énoncer pour un treillis $\mathfrak{T}$ ayant un élément nul, o, sous la forme :

2'° Un treillis $\mathfrak{T}$ est modulaire s'il ne possède pas de sous-treillis isomorphe à $\mathfrak{T}_0$.

3'° Un treillis $\mathfrak{T}$ est semi-modulaire si l'existence d'un sous-treillis de $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$ implique l'existence de t tel qu'on ait

$$y \wedge z < t < y \qquad \text{et} \qquad x = (x \vee t) \wedge z.$$

4'° Un treillis $\mathfrak{T}$ est modulaire affaibli si l'existence d'un sous-treillis de $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$ implique $y \wedge z = o$.

5'° Un treillis $\mathfrak{T}$ satisfait à la condition C_1 si l'existence d'un sous-treillis de $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$ implique l'existence de t tel qu'on ait

$$y \wedge z < t < y.$$

6'° Un treillis $\mathfrak{T}$ satisfait à la condition C_2 si l'existence d'un sous-treillis de $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$ implique :

— soit 1° l'existence de t tel qu'on ait $y \wedge z < t < y$;

— soit 2° l'existence de u tel qu'on ait $y \wedge z < u < x$.

7'° Un treillis $\mathfrak{T}$ est semi-modulaire affaibli si l'existence d'un sous-treillis de $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$ implique :

— soit 1° $y \wedge z = 0$;

— soit 2° l'existence de t tel qu'on ait $y \wedge z < t < y$ et $x = (x \vee t) \wedge z$.

8'° Un treillis $\mathfrak{T}$ satisfait à la condition $\overline{C}_1$ si l'existence d'un sous-treillis de $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$ implique :

— soit 1° $y \wedge z = 0$;

— soit 2° l'existence de t tel qu'on ait $y \wedge z < t < y$.

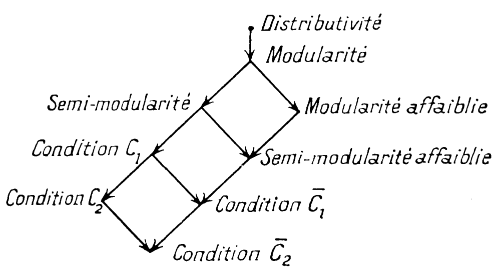
9'° Un treillis $\mathfrak{T}$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ si l'existence d'un sous-treillis de $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$ implique :

— soit 1° $y \wedge z = 0$;

— soit 2° l'existence de t tel qu'on ait $y \wedge z < t < y$;

— soit 3° l'existence de u tel qu'on ait $y \wedge z < u < x$.

Sous cette forme il apparait que les neuf conditions étudiées sont liées par des implications qui peuvent être résumées dans le diagramme suivant :



Nous aurons également besoin d'une autre forme de la condition $\overline{C}_2$:

9''° Un treillis $\mathfrak{T}$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ si l'existence d'un sous-treillis de $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$ implique :

— soit 1° $y \wedge z = 0$;

— soit 2° l'existence de t tel qu'on ait $y \wedge z < t < y$;

— soit 3° $y \wedge z \neq 0$, $y \succ y \wedge z$ et l'intervalle $[y \wedge z, x]$ n'admet pas de suite principale.

Si un treillis satisfait à la condition 9'', il satisfait évidemment à la condition $\overline{C}_2$. La démonstration de la réciproque se fera par l'absurde; supposons donc qu'un treillis $\mathfrak{T}$, satisfaisant à la condition $\overline{C}_2$, possède un sous-treillis isomorphe à $\mathcal{T}$ dans lequel $y \wedge z \neq 0$, $y \succ y \wedge z$ et dans lequel l'intervalle $[y \wedge z, x]$ admette une suite principale

$$y \wedge z = a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_{i-1} \prec a_i \prec \ldots \prec a_n = x.$$

Nous avons alors, pour tout i, $a_i \neq a_{i-1} \vee y$, car de l'égalité $a_i = a_{i-1} \vee y$ résulterait $y \leqq a_i \leqq x$, ce qui est absurde. Montrons par récurrence que, pour tout i, $a_i \prec a_i \vee y$; tout d'abord, nous avons $y \wedge z = a_0 \prec a_0 \vee y = y$; supposons que $a_{i-1} \prec a_{i-1} \vee y$; des trois relations

$$a_{i-1} \prec a_i, \qquad a_{i-1} \prec a_{i-1} \vee y \qquad \text{et} \qquad a_i \neq a_{i-1} \vee y$$

résulte alors $a_i \wedge (a_{i-1} \vee y) = a_{i-1}$; $\mathcal{T}$ satisfaisant à la condition $\overline{C}_2$, des trois relations $0 \neq y \wedge z \leqq a_{i-1}$, $a_{i-1} \prec a_i$ et $a_{i-1} \prec a_{i-1} \vee y$ résulte enfin $(a_{i-1} \vee y) \vee a_i = a_i \vee y \succ a_i$. En particulier nous avons $x = a_n \prec a_n \vee y = x \vee y$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x < z < x \vee y$. L'existence d'un sous-treillis de $\mathcal{T}$ isomorphe à $\mathcal{T}_0$ implique bien l'une au moins des trois éventualités de 9''.

THÉORÈME 1.1. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$:*

1° *D est périodique;*

2° *La période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5.*

Dans tout ce qui suit, (a) désigne le sous-demi-groupe cyclique engendré par a et $(a)_n$ le sous-demi-groupe de (a) formé par l'ensemble des puissances de a supérieures ou égale à n.

Supposons qu'il existe dans D un élément a d'ordre infini, et considérons les trois éléments X, Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = (a^2) \vee (a^7), \qquad Y = (a^3) \vee (a^4) \qquad \text{et} \qquad Z = (a^2) \vee (a^5);$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = (a^4) \vee (a)_6 \qquad \text{et} \qquad X \vee Y = (a)_2.$$

L'examen du diagramme suivant, représentant les différents sous-demi-groupes ci-dessus :

$$\begin{array}{rclllllllll}
X \vee Y = & (a)_2 & = \{ a^2, & a^3, & a^4, & a^5, & a^6, & a^7, & a^8, & \ldots \}, \\
Z & = (a^2) \vee (a^5) & = \{ a^2, & & a^4, & a^5, & a^6, & a^7, & a^8, & \ldots \}, \\
X & = (a^2) \vee (a^7) & = \{ a^2, & & a^4, & & a^6, & a^7, & a^8, & \ldots \}, \\
Y \cap Z & = (a^4) \vee (a)_6 & = \{ & & a^4, & & a^6, & a^7, & a^8, & \ldots \}, \\
Y & = (a^3) \vee (a)^4 & = \{ & a^3, & a^4, & & a^6, & a^7, & a^8, & \ldots \}
\end{array}$$

montre que

$$(X \vee Y) - Z = \{ a^3 \}, \qquad Z - X = \{ a^5 \},$$
$$X - (Y \cap Z) = \{ a^2 \} \qquad \text{et} \qquad Y - (Y \cap Z) = \{ a^3 \}.$$

Il en résulte $Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$, ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z, \qquad X \succ Y \cap Z \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z \neq \emptyset,$$

la condition $\overline{C}_2$ est mise en défaut.

Les éléments de D sont donc tous d'ordre fini : D est périodique.

Rappelons ici la proposition suivante (*voir* [1], p. 20) :

Tout demi-groupe cyclique fini (a) satisfait à :

1° Il existe deux entiers m et n tels que $a^m = a^n$ $(m < n)$;

2° n étant choisi minimal dans la relation précédente, on a

$$(a) = \{ a, a^2, \ldots, a^m, \ldots, a^{n-1} \}$$

et l'ensemble $[a] = \{ a^m, \ldots, a^{n-1} \}$ est un groupe cyclique appelé période de a.

Supposons maintenant qu'il existe dans D un élément a dont la période commence à un rang supérieur ou égal à 6. Les éléments a^2, a^3, a^4 et a^5 sont alors tous distincts entre eux et distincts des éléments a^n pour $n \geqq 6$; la construction précédente reste valable.

La période de tout sous-demi-groupe cyclique commence donc à un rang inférieur ou égal à 5.

Comme nous le verrons au corollaire 6.1, un demi-groupe cyclique fini dont la période commence à un rang inférieur ou égal à 5 a le treillis de ses sous-demi-groupes distributif. Nous avons donc :

COROLLAIRE 1.1. — *Si D est un demi-groupe cyclique, il y a équivalence entre les trois propositions :*

1° *$T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$;*

2° *$T(D)$ est distributif;*

3° *D est fini et sa période commence à un rang inférieur ou égal à 5.*

Considérons alors un groupe G; si $T(G)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, G est périodique. Mais, si G est périodique, ses sous-demi-groupes non vides sont ses sous-groupes; appelant $\mathfrak{T}(G)$ le treillis des sous-groupes de G, on a $T(G) = \mathfrak{T}(G) \cup \{ \emptyset \}$; on est ramené à l'étude des groupes périodiques G pour lesquels le treillis $\mathfrak{T}(G)$ satisfait, soit à la condition C_2, soit à la condition C_1, soit à la semi-modularité, soit à la modularité, soit à la distributivité. En effet, $T(G)$ satisfait à la propriété suivante : E désignant le sous-demi-groupe de G constitué par l'élément unité de G, tout sous-demi-groupe non vide de G contient E. Or, dans tout treillis $\mathfrak{T}$ à élément nul, o, dans lequel existe un élément $p \neq 0$ minimal dans $\mathfrak{T} - \{ 0 \}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Condition $\overline{C}_2$ et Condition C_2;

2° Condition $\overline{C}_1$ et Condition C_1;

3° Semi-modularité affaiblie et Semi-modularité;

4° Modularité affaiblie et Modularité.

Cela résulte de ce que l'existence d'un sous-treillis de $\mathfrak{T}$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$ implique $y \neq 0$ et $z \neq 0$ donc $y \geqq p$ et $z \geqq p$, d'où il résulte $y \wedge z \geqq p$ et par suite $y \wedge z \neq 0$.

Chapitre II.

D étant périodique, l'ensemble I de ses idempotents n'est pas vide. Avant d'aborder l'étude de la structure de I, nous allons faire quelques remarques au sujet des demi-groupes périodiques à deux générateurs dempotents. Soient e et f deux idempotents d'un demi-groupe périodique D, $(e) \vee (f)$ est égal à $(e) \cup (f) \cup (ef) \cup (fe) \cup (efe) \cup (fef)$; en effet, tout produit fini de e et de f, qui n'est ni e, ni f, commence soit par un e, soit par un f, et finit de même; selon le cas, un tel produit fini est donc soit dans (ef), soit dans (fe), soit dans (efe), soit dans (fef). Nous désignerons respectivement par g, g', h et h' les idempotents de (ef), (fe) (efe) et (fef) et nous poserons

$$(ef)^k = g, \qquad (fe)^{k'} = g', \qquad (efe)^{k_1} = h \qquad \text{et} \qquad (fef)^{k_2} = h'.$$

Remarque 1. — Les dix sous-ensembles suivants de $(e) \vee (f)$ sont des sous-demi-groupes :

a. $(ef) \cup (fe) \cup (efe) \cup (fef) = D''$, $D'' \cup (e)$ et $D'' \cup (f)$ car il s'agit respectivement des éléments de $(e) \vee (f)$ contenant soit au moins un facteur e et un facteur f, soit au moins un facteur e, soit au moins un facteur f;

b. $(f) \cup (ef) \cup (fef) = (f) \vee (ef)$ et $(e) \cup (ef) \cup (efe) = (e) \vee (ef)$, ensembles des éléments de $(e) \vee (f)$ soit se terminant par un facteur f, soit commençant par un facteur e;

c. $[ef] \cup [fe] \cup [efe] \cup [fef] = D'$, $D' \cup (e)$ et $D' \cup (f)$, en désignant toujours par $[a]$ la période du sous-demi-groupe cyclique (a); en effet, tout élément de ces réunions étant puissance de lui-même, tout produit fini d'éléments de ces réunions, distinct de e et de f, s'écrit de deux façons au moins comme puissance de l'un des éléments ef, fe, efe ou fef;

d. $\{e, g, h\}$ et $\{f, g, h'\}$; ils ont pour table :

	e	g	h
e	e	e	h
g	h	g	h
h	h	g	h

	f	g	h'
f	f	h'	h'
g	g	g	g
h'	h'	h'	h'

En effet, de $g = (ef)^k$, $h = (efe)^{k_1}$ et $h' = (fef)^{k_2}$ résulte

$$eg = g = gf,\ eh = h = he \qquad \text{et} \qquad fh' = h' = h'f;$$

puis de $ge = (ef)^k e = (ef)^{2k} e = (ef)^k e\,(ef)^k e = (ge)^2$ résulte

$$ge \in I \cap (efe), \qquad \text{donc} \quad ge = h;$$

on en déduit

$$gh = g\,(ge) = ge = h \qquad \text{et} \qquad hg = geg = gg = g;$$

de même, on a

$$fg \in I \cap (fef) \qquad \text{donc} \quad fg = h'$$

et par suite

$$h'g = h' \qquad \text{et} \qquad gh' = g.$$

REMARQUE 2. — Si deux des quatre idempotents g, g', h et h' sont égaux, les deux autres le sont aussi et de plus, si l'on a, soit $g = g'$, soit $h = h'$, ils le sont tous les quatre.

En effet, nous avons :

a. $g = h$, $g = h'$, $g' = h$ et $g' = h'$ entraînent respectivement $g' = h'$, $g' = h$, $g = h'$ et $g = h$; de $(ef)^k = (efe)^{k_1}$, par exemple, résulte en effet :

$$(fef)^k = (fe)^{k_1+1} \qquad \text{donc} \quad (fef)^{k_2kk'} = (fe)^{k'k_2(k_1+1)}$$

et par suite :

$$h' = g';$$

b. les trois propositions suivantes sont équivalentes : $g = g'$, $g = g' = h = h'$ et $h = h'$; de $(efe)^{k_1} = (fef)^{k_2}$, par exemple, résulte en effet :

$$(efe)^{k_1} = (fef)^{k_2} = (ef)^{k_2+1} = (fe)^{k_2+1}$$

donc

$$(efe)^{k_1kk'} = (fef)^{k_2kk'} = (ef)^{kk'(k_2+1)} = (fe)^{k'k(k_2+1)}$$

et par suite :

$$h = h' = g = g'.$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, l'ensemble I des idempotents de D est stable.*

Supposons qu'il existe deux éléments e et f de I tels que ef ne soit pas élément de I. Il en résulte :

$e \neq f$;

$g \neq e$ car de $(ef)^k = e$ résulterait $(ef)^k = (ef)^k f = ef = e$;

$g \neq f$ » $(ef)^k = f$ » $(ef)^k = e\,(ef)^k = ef = f$;
$g' \neq e$ » $(fe)^{k'} = e$ » $fe = e$ et par suite $(ef)^2 = e(fe)\,f = ef$;
$g' \neq f$ » $(fe)^{k'} = f$ » $fe = f$ et par suite $(ef)^2 = e(fe)\,f = ef$;
$h \neq f$ » $(efe)^{k_1} = f$ » $(efe)^{k_1} = e(efe)^{k_1} = ef = f$;
$h' \neq e$ » $(fef)^{k_2} = e$ » $(fef)^{k_2} = (fef)^{k_2} f = ef = e$.

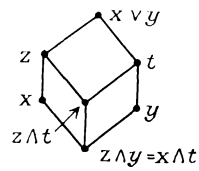
Nous distinguerons deux cas :

1° $D' \neq D''$; de cette hypothèse résulte $e \notin D''$ et $f \notin D''$; en effet $e \in D''$, par exemple, entraîne $e = h$ puisque e est différent de g, de g' et de h', donc $e = (efe)^{k_1}$; mais de $e = (efe)^{k_1}$ résulte, par multiplication des deux membres, successivement à droite, à gauche, à droite et à gauche par f et à droite par fe :

$$ef = (ef)^{k_1+1}, \qquad fe = (fe)^{k_1+1}, \qquad fef = (fef)^{k_1+1}, \qquad \text{et} \qquad efe = (efe)^{k_1+1};$$

de ces quatre égalités résulte enfin $D' = D''$.

Soit alors $\mathfrak{T}_1$ le treillis dont le diagramme de Hasse est le suivant :



Considérons les quatre éléments X, Y, Z et T de $T(D)$ définis par

$$X = D' \cup (e), \qquad Y = D' \cup (f), \qquad Z = D'' \cup (e) \qquad \text{et} \qquad T = D'' \cup (f);$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = X \cap T = D', \qquad X \vee Y = (e) \vee (f) \qquad \text{et} \qquad Z \cap T = D''.$$

Des relations $D' \subset D''$, $e \notin D''$, $f \notin D''$ et $e \neq f$ résulte enfin :

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y,$$
$$X \cap T \subset Y \subset T \subset X \vee Y \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z = X \cap T \subset Z \cap T,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_1$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z = X \cap T, \qquad X \succ X \cap T = Y \cap Z \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z = X \cap T \neq \emptyset;$$

la condition $\overline{C}_2$ est mise en défaut.

2° $D' = D''$; dans ce cas, on a $(ef) = [ef]$ donc $g.ef = ef$; par ailleurs de $h = ge$ et de $h' = fg$ résulte $hh' = gefg = ef$ donc hh' n'est pas élément de I. $(h) \vee (h')$ étant sous-demi-groupe de D', contient au plus quatre idempotents. Nous ne nous intéresserons donc qu'au problème analogue relatif aux idempotents tels que h et h', c'est-à-dire au cas où $(e) \vee (f)$ a au plus quatre idempotents.

Compte tenu de la remarque 2, les idempotents e, f, g, g', h et h' se répartissent alors *a priori* de l'une des quatre manières suivantes :

1° e, f et g sont distincts et l'on a $g = g' = h = h'$;
2° e, f, g et g' sont distincts et l'on a $h = g'$ et $h' = g$;
3° e, f, g et g' sont distincts et l'on a $h = g$ et $h' = g'$;
4° e, f, g et g' sont distincts et l'on a $h = e$ et $h' = f$.

Dans les trois premiers cas, on a $hh' = gh'$ ou $hh' = hg$ donc hh' est élément de I.

Dans le dernier cas, le seul qui reste à examiner, les quatre sous-demi-groupes $\{e, g, h\}$, $\{f, g, h'\}$, $(e) \cup (ef) \cup (efe)$ et $(f) \cup (ef) \cup (fef)$ se réduisent à $\{e, g\}$, $\{f, g\}$, $(ef) \cup (efe)$ et $(ef) \cup (fef)$; considérant alors les quatre éléments X, Y, Z et T de $T(D)$ respectivement égaux aux quatre sous-demi-groupes ci-dessus, ils sont tels que

$$X \vee Y = (e) \vee (f), \qquad Y \cap Z = X \cap T = (g) \qquad \text{et} \qquad Z \cap T = (ef);$$

il en résulte l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_1$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z = X \cap T, \qquad X \succ X \cap T = Y \cap Z \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z = X \cap T \neq \emptyset;$$

la condition $\overline{C}_2$ est mise en défaut.

Donc, si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, l'ensemble I des idempotents de D est stable.

Précisons ici quelques définitions. Un zéro-demi-groupe à droite (resp. à gauche) est un demi-groupe dont tous les éléments sont des zéros à droite (resp. à gauche). Un demi-groupe idempotent rectangulaire est un demi-groupe qui est produit direct d'un zéro-demi-groupe à droite par un zéro-demi-groupe à gauche. Nous utiliserons le terme « demi-treillis » pour désigner un demi-groupe idempotent commutatif et quand nous l'ordonnerons, ce sera en inf-demi-treillis.

Nous sommes alors en mesure de rappeler le résultat suivant dû à D. Mac Lean [6]. Si J est un demi-groupe idempotent arbitraire, il existe un demi-treillis Σ et une famille de sous-demi-groupes rectangulaires disjoints de J indexés par $\Sigma : \{R_\gamma;\ \gamma \in \Sigma\}$ tels que $J = \bigcup_{\gamma \in \Sigma} R_\gamma$ et $R_\gamma R_\delta \subseteq R_{\gamma\delta}$ pour tout couple γ, δ d'éléments de Σ.

Nous déterminerons I par son demi-treillis de structure Σ, par les demi-groupes rectangulaires R_γ et par la multiplication de R_γ par R_δ pour tout couple γ, δ d'éléments de Σ, dans chacune des hypothèses envisagées.

THÉORÈME 2.2. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition C_2, pour tout couple e, f d'éléments de I, le produit ef est égal à e ou à f.*

Supposons que e et f soient deux idempotents de D tels que le produit ef soit différent de e et de f. Dans ces conditions, e n'est pas élément de $(ef) \vee (f)$; en effet les éléments de $(ef) \vee (f)$ étant f, ef et fef, e étant différent de f, e élément de $(ef) \vee (f)$ entraîne soit $e = ef$, soit $e = fef$; multipliant à droite par f les deux membres de cette dernière égalité, on voit qu'on a toujours $e = ef$, ce qui est contraire à l'hypothèse. De même, f n'est pas élément de $(ef) \vee (e)$.

Considérons alors les quatre éléments X, Y, Z et T de $T(D)$ définis par

$$X = (e), \qquad Y = (f), \qquad Z = (ef) \vee (e) \quad \text{et} \quad T = (ef) \vee (f);$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = X \cap T = \emptyset, \qquad X \vee Y = (e) \vee (f) \qquad \text{et} \qquad ef \in Z \cap T;$$

il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y,$$
$$X \cap T \subset Y \subset T \subset X \vee Y \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z = X \cap T \subset Z \cap T,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(I)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_1$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z = X \cap T \qquad \text{et} \qquad X \succ X \cap T = Y \cap Z;$$

la condition C_2 est mise en défaut.

Dans ces conditions, le demi-treillis Σ est une chaîne; en effet, s'il existait deux éléments γ et δ non comparables de Σ on aurait $R_\gamma R_\delta \subseteq R_{\gamma\delta}$ avec $\gamma\delta \neq \gamma$ et $\gamma\delta \neq \delta$; il en résulterait que $\forall e \in R_\gamma$ et $\forall f \in R_\delta$, ef serait différent de e et de f. De plus, les demi-groupes rectangulaires R_γ sont des zéro-demi-groupes d'un côté, car un demi-groupe rectangulaire propre R, produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche N par un zéro-demi-groupe à droite L, N et L n'étant ni l'un, ni l'autre réduit à un élément, ne satisfait pas à la condition $ef = e$ ou f pour tout couple d'éléments de R; en effet si n_1 et n_2 sont deux éléments distincts de N et si l_1 et l_2 sont deux éléments distincts de L, on a $(n_1, l_1)(n_2, l_2) = (n_1, l_2)$ et (n_1, l_2) est différent de (n_1, l_1) et de (n_2, l_2). Enfin, si γ et δ sont deux éléments distincts de Σ ils sont tels que par exemple $\gamma\delta = \delta\gamma = \gamma$; dès lors $\forall e \in R_\gamma$ et $\forall f \in R_\delta$, on a, d'une part ef et fe égaux soit à e, soit à f et d'autre part $ef \in R_\gamma R_\delta \subseteq R_{\gamma\delta}$ et $fe \in R_\delta R_\gamma \subseteq R_{\delta\gamma}$: on a donc $ef = fe = e$.

Réciproquement d'ailleurs, étant donnée une famille de zéro-demi-groupes d'un côté S_γ indexés par les éléments d'une chaîne C, la réunion $\bigcup_{\gamma \in C} S_\gamma$ munie de la multiplication suivante :

1° si e et f sont éléments d'un même S_γ, ils se multiplient comme dans S_γ;

2° si $e \in S_\gamma$, $f \in S_\delta$ avec par exemple $\gamma\delta = \delta\gamma = \gamma$, on a $ef = fe = e$;
est un demi-groupe satisfaisant à $ef = e$ ou f pour tout couple d'éléments.

Le théorème 2.2 peut alors s'énoncer sous la forme :

Théorème 2.2′. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition C_2, Σ est une chaîne, les R_γ sont des zéro-demi-groupes d'un côté et si γ est différent de δ avec par exemple $\gamma\delta = \delta\gamma = \gamma$, $\forall e \in R_\gamma$ et $\forall f \in R_\delta$ on a $ef = fe = e$.*

Si D est un demi-groupe idempotent du type ci-dessus, toute partie de D est stable et $T(D) = \mathfrak{P}(D)$ est distributif; nous avons donc :

Corollaire 2.1. — *Si D est un demi-groupe idempotent, il y a équivalence entre les quatre propositions suivantes :*

1° *$T(D)$ satisfait à la condition C_2;*

2° *$T(D)$ est distributif;*

3° *D est tel que $\forall e$ et $f \in D$, on a $ef = e$ ou f;*

4° *D a la structure indiquée au théorème 2.2′.*

Un tel demi-groupe sera, par la suite, désigné par l'expression « demi-groupe de type $ef = e$ ou f ».

Dans le cas où $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, nous démontrons successivement :

Lemme 2.1. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ et si α et β sont deux éléments distincts de Σ tels que $\alpha < \beta$, alors $\bigcup_{\gamma \geqq \beta} R_\gamma$ est du type $ef = e$ ou f.*

S'il n'en est pas ainsi, il existe deux éléments e et f de $\bigcup_{\gamma \geqq \beta} R_\gamma$ tels que ef soit différent de e et de f et $T\left(\bigcup_{\gamma \geqq \beta} R_\gamma\right)$ contient donc un sous-treillis isomorphe à $\mathfrak{C}_1$, de générateurs X, Y, Z et T mettant en défaut la condition C_2. R_α étant idéal de $\bigcup_{(\gamma = \alpha;\, \gamma \geqq \beta)} R_\gamma$, les quatre éléments $X_1 = R_\alpha \cup X$, $Y_1 = R_\alpha \cup Y$, $Z_1 = R_\alpha \cup Z$ et $T_1 = R_\alpha \cup T$ permettent de construire un sous-treillis de $T(I)$ isomorphe à $\mathfrak{C}_1$, dans lequel on a

$$Y_1 \cap Z_1 = X_1 \cap T_1 = R_\alpha \neq \emptyset,$$

$$Y_1 - (Y_1 \cap Z_1) = Y - (Y \cap Z) \qquad \text{et} \qquad X_1 - (X_1 \cap T_1) = X - (X \cap T);$$

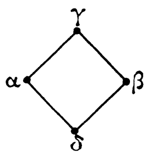
il en résulte

$$Y_1 \succ Y_1 \cap Z_1 = X_1 \cap T_1 \qquad \text{et} \qquad X_1 \succ X_1 \cap T_1 = Y_1 \cap Z_1$$

et ceci met en défaut la condition $\overline{C}_2$.

Dès lors, si γ et δ sont deux éléments non comparables de Σ, $\gamma\delta = \delta\gamma$ est élément minimal de Σ noté o et donc Σ est soit une chaîne sans élément minimal, soit un treillis à élément minimal o dans lequel tout couple γ', δ' d'éléments non comparables est tel que $\gamma'\delta' = \delta'\gamma' = o$. Dans le premier cas I est du type $ef = e$ ou f, dans le second, pour toute sous-chaîne C' de Σ ne contenant pas o, $\bigcup_{\gamma \in C} R_\gamma$ est du type $ef = e$ ou f.

Soit alors $\mathfrak{T}_2$ le treillis dont le diagramme de Hasse est le suivant :



Lemme 2.2. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, Σ ne contient pas de sous-treillis isomorphe à $\mathfrak{T}_2$.*

En effet, supposons que Σ contienne un tel sous-treillis et soient e un élément de R_α, f un élément de R_β et g un élément de R_γ. Compte tenu du lemme 2.1, on a $eg = ge = e$ et $fg = gf = f$. Par ailleurs, les éléments ef, fe, efe et fef étant dans R_δ les sous-ensembles suivants sont des sous-demi-groupes :

$$\{g, e, ef, fe, efe, fef\} \quad \text{et} \quad \{g, f, ef, fe, efe, fef\}.$$

Considérons alors les quatre éléments X, Y, Z et T de $T(D)$ définis par

$$X = \{g, f\}, \qquad Y = \{g, e\},$$
$$Z = \{g, f, ef, fe, efe, fef\} \quad \text{et} \quad T = \{g, e, ef, fe, efe, fef\};$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = X \cap T = (g),$$
$$X \vee Y = (e) \vee (f) \vee (g) \quad \text{et} \quad Z \cap T = \{g, ef, fe, efe, fef\}.$$

Du caractère distinct des quatre éléments α, β, γ et δ de Σ résulte alors

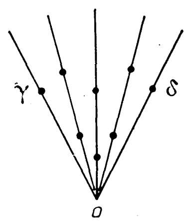
$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y,$$
$$Y \cap T \subset Y \subset T \subset X \vee Y \quad \text{et} \quad Y \cap Z = X \cap T \subset Z \cap T,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(I)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_1$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z = X \cap T, \qquad X \succ X \cap T = Y \cap Z \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z = X \cap T \neq \emptyset;$$

la condition $\overline{C}_2$ est mise en défaut.

Dans ces conditions, dans le cas où Σ contient un élément minimal, o, les chaînes issues de o n'ont que cet élément en commun; le demi-treillis Σ a le diagramme de Hasse suivant :



Nous désignerons les différentes chaînes issues de o par $C^\lambda \{\lambda \in \Lambda\}$; nous poserons $C'^\lambda = C^\lambda - \{o\}$ et $K^\lambda = \bigcup_{\gamma \in C'^\lambda} R_\gamma$; compte tenu du lemme 2.1 les K^λ sont du type $ef = e$ ou f. R_0 que nous noterons R est un demi-groupe rectangulaire donc est produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche N par un zéro-demi-groupe à droite L. Nous allons étudier la multiplication de $e \in K^\lambda$ par R.

Lemme 2.3. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, pour tout élément e de $I - R$, le complexe eRe est :*

— *soit* 1° *réduit à un élément de R;*

— *soit* 2° *un zéro-demi-groupe d'un côté maximal de R.*

Ce résultat est la conséquence des remarques suivantes :

1° eRe est un sous-demi-groupe de R; en effet si exe et eye sont deux éléments de eRe, $(exe)(eye) = e(xey)e$ est élément de eRe puisque xey est élément de R.

2° eRe ne peut pas être un demi-groupe rectangulaire propre; en effet s'il était rectangulaire propre, il existerait un sous-treillis de générateurs X, Y, Z et T de $T(eRe)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_1$ mettant en défaut la condition C_2; e étant unité bilatère pour les éléments de eRe, les quatre éléments de $T(I)$: $X_1 = X \cup (e)$, $Y_1 = Y \cup (e)$, $Z_1 = Z \cup (e)$ et $T_1 = T \cup (e)$ permettent de construire un sous-treillis de $T(I)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_1$ dans lequel on a

$$Y_1 \cap Z_1 = X_1 \cap T_1 = (e) \neq \emptyset,$$

$$Y_1 - (Y_1 \cap Z_1) = Y - (Y \cap Z) \qquad \text{et} \qquad X_1 - (X_1 \cap T_1) = X - (X \cap T);$$

dès lors

$$Y_1 \succ Y_1 \cap Z_1 = X_1 \cap T_1 \qquad \text{et} \qquad X_1 \succ X_1 \cap T_1 = Y_1 \cap Z_1$$

et ceci met en défaut la condition $\overline{C}_2$.

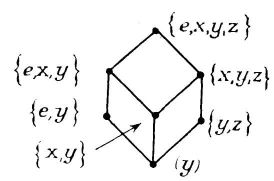
eRe est donc un zéro-demi-groupe d'un côté de R.

3° Si *eRe* n'est pas réduit à un élément, *eRe* est un zéro-demi-groupe d'un côté maximal de R; supposons en effet qu'il en soit autrement et soit S, le zéro-demi-groupe d'un côté maximal contenant *eRe*, z un élément de $S - eRe$; posons $x = eze \in eRe$ et soit y un élément de $eRe - \{ x \}$; $\{ e, x, y, z \}$ est stable et a pour table :

	e	x	y	z
e	e	x	y	x
x	x	x	x	x
y	y	y	y	y
z	z	z	z	z

(Demi-groupe n° 76 de [5])

$T(\{ e, x, y, z \})$ contient le sous-treillis suivant, isomorphe à $\mathfrak{T}_1$ et mettant en défaut la condition $\overline{C}_2$:



LEMME 2.4. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ et si pour tout élément e de K^λ, eRe est réduit à un élément de R, alors $\forall e$ et $f \in K^\lambda$, on a $eRe = fRf$.*

Si pour tout élément e de K^λ, le complexe *eRe* est réduit à un élément de R, l'application $e \in K^\lambda \to eRe \in R$ est un homomorphisme de K^λ dans R; en effet

$$efRef = ef(RefR)\,ef = \{ e(fR)\,e \} \{ f(Re)\,f \} = (eRe)\,(fRf).$$

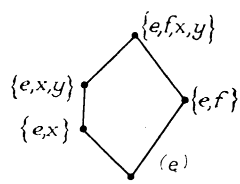
Il en résulte que si e et f sont deux éléments de K^λ qui commutent, *eRe* et *fRf* commutent et par suite $eRe = fRf$. Dès lors, si K^λ est une chaîne propre de zéro-demi-groupes d'un côté, $\forall f \in K^\lambda$, $fRf = eRe$, et si K^λ se réduit à un seul zéro-demi-groupe d'un côté, $\{ eRe;\ e \in K^\lambda \}$ est un zéro-demi-groupe d'un côté de R de même nature que K^λ.

Montrons que l'hypothèse « $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ » entraîne alors $\{ eRe,\ e \in K^\lambda \}$ réduit à un élément. La démonstration se fera par l'absurde; supposons donc qu'il existe e et $f \in K^\lambda$, zéro-demi-groupe par exemple à gauche, tels que eRe et fRf soient deux éléments de R formant un zéro-demi-groupe à gauche; posant $x = eRe$ et $y = fRf$, $\{ e, f, x, y \}$ est stable et a pour table :

	e	f	x	y
e	e	e	x	x
f	f	f	y	y
x	x	x	x	x
y	y	y	y	y

(Demi-groupe n° 73 de [5])

$T(\{ e, f, x, y \})$ contient le sous-treillis suivant, isomorphe à $\mathfrak{G}_0$ et mettant en défaut la condition $\overline{C}_2$:



Lemme 2.5. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ et si e est un élément de K^λ tel que eRe soit un zéro-demi-groupe maximal de R, non réduit à un élément, alors, pour tout $f \in K^\lambda$, le complexe fRf est égal au complexe eRe.*

Supposons, par exemple, que le complexe eRe soit un zéro-demi-groupe à gauche et soit $\{ N, l_e \}$ sa décomposition dans R. Puisque $(n, l)e = (n, l) \{ e(n, l) e \}$, on a, en appelant (n', l_e) l'élément $e(n, l)e$:

$$(n, l)e = (n, l)(n', l_e) = (n, l_e).$$

De $(n, l_e) \in eRe$ résulte $(n, l_e) = e(n, l_e)e$ et par suite $e(n, l)e = (n, l_e)$. On a donc

$$e(n, l) = \{ e(n, l)e \} (n, l) = (n, l_e)(n, l) = (n, l);$$

e est élément unité à gauche pour R.

Quant à fRf, compte tenu du lemme 2.3, trois cas peuvent se présenter :

1° $fRf = (n_f, l_f)$ d'où il résulte, en particulier $f(n, l) = (n_f, l)$;

2° $fRf = (n_f, L)$ d'où il résulte également $f(n, l) = (n_f, l)$;

3° $fRf = (N, l_f)$; par une démonstration analogue à celle faite pour eRe, on voit que dans ce cas f est unité à gauche pour R.

N contenant au moins un élément distinct de n_f, le troisième de ces cas est le seul où f est unité à gauche pour R.

Les éléments e et f appartenant à K^λ, ef et fe sont égaux soit à e, soit à f. Si $ef = e$, on a

$$\forall x \in R, \qquad fx = e(fx) = (ef)x = ex = x.$$

Si $fe = e$, on a

$$\forall x \in R, \qquad fx = f(ex) = (fe)x = ex = x.$$

Dans ces deux premiers cas, f est unité à gauche pour R et donc le complexe fRf est égal à (N, l_f). Considérant alors le sous-demi-groupe $R' = (n, L)$ de R, on a

$$e(n, L)e = (n, l_e) \qquad \text{et} \qquad f(n, L)f = (n, l_f);$$

il en résulte que $R' \cup \{ e, f \}$ est stable et que $eR'e$ et $fR'f$ sont réduits à un élément; compte tenu du lemme 2.4, on a alors $eR'e = fR'f$, donc $l_e = l_f$ et par suite $fRf = (N, l_e) = eRe$.

Il reste un seul cas à examiner, celui où $ef = fe = f$. On a alors

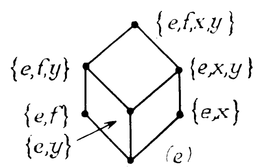
$$fRf = (ef)R(fe) = e(fRf)e \subseteq eRe,$$

et donc, compte tenu du lemme 2.3, soit $fRf = eRe = (N, l_e)$, soit $fRf = (n_f, l_e)$. Posant, dans ce second cas, $y = (n_f, l_e)$ et considérant un élément x de $eRe - \{ y \}$, $\{ e, f, x, y \}$ est stable et a pour table :

	e	f	x	y
e	e	f	x	y
f	f	f	y	y
x	x	x	x	x
y	y	y	y	y

(Demi-groupe n° 71 de [5])

$T(\{ e, f, x, y \})$ contient le sous-treillis suivant, isomorphe à $\mathfrak{C}_1$ et mettant en défaut la condition $\overline{C}_2$:



Dès lors, si pour un élément e de K^λ, le complexe eRe est réduit à un élément, il en est de même du complexe fRf pour tout f élément de K^λ.

Dès lors, les K^λ sont de trois types, selon que, pour $e \in K^\lambda$, on a

$$eRe = (N, l_e), \qquad eRe = (n_e, L) \qquad \text{ou} \qquad eRe = (n_e, l_e);$$

les deux premiers ne sont distincts du troisième que si respectivement N et L ne sont pas réduits à un élément. Cependant un seul K^λ au plus est tel que $eRe = (N, l_e)$; en effet, s'il existait K^λ et K^μ tels que, pour $e \in K^\lambda$ et $f \in K^\mu$, on ait $eRe = (N, l_e)$ et $fRf = (N, l_f)$, on en déduirait, compte tenu de $ef \in R$ et de la propriété $aba = a$, $\forall a$ et $b \in R$: $ef = ef(n, l)ef = (n, l_f)$, $\forall n \in N$, N serait donc réduit à un élément, ce qui est absurde. De même, un seul K^λ au plus est tel que $eRe = (n_e, L)$.

THÉORÈME 2.3. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, Σ est une réunion de chaînes C^λ, $\lambda \in \Lambda$, ayant le même élément minimal,* o, *et n'ayant pas d'autre élément commun. Posant $C'^\lambda = C^\lambda - \{o\}$ les sous-ensembles $K^\lambda = \bigcup_{\gamma \in C'^\lambda} R_\gamma$ sont du type $ef = e$ ou f. R_0 que nous noterons R est, en tant que demi-groupe rectangulaire, produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche N par un zéro-demi-groupe à droite L. Les K^λ sont de trois types, les deux premiers se composant au plus d'un élément chacun, K^1 et K^2;*

1° *à K^1 est associé un élément particulier n_1 de N tel que $\forall e \in K^1$;*

$$eRe = (n, L);$$

2° *à K^2 est associé un élément particulier l_2 de L tel que $\forall f \in K^2$,*

$$fRf = (N, l_2);$$

3° *à tout $K^{\lambda'}$ pour $\lambda' \in \Lambda' = \Lambda - \{1, 2\}$ est associé un élément particulier $(n_{\lambda'}, l_{\lambda'})$ de R tel que $\forall g \in K^{\lambda'}$,*

$$gRg = (n_{\lambda'}, l_{\lambda'}).$$

Nous obtenons une description complète de I en remarquant qu'on a

$$(a) \quad \begin{cases} e(n, l) = (n_1, l), \qquad (n, l)e = (n, l) = f(n, l), \qquad (n, l)f = (n, l_2), \\ \qquad (n, l)g = (n, l_{\lambda'}) \qquad \text{et} \qquad g(n, l) = (n, l_{\lambda'}); \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} ef = ef(n, l)\,ef = (n_1, l_2) = fe(n, l)\,fe = fe, \\ eg = eg(n, l)\,eg = (n_1, l_{\lambda'}), \\ ge = (n_{\lambda'}, l_{\lambda'}) = fg \qquad \text{et} \qquad gf = (n_{\lambda'}, l_2), \\ \forall h \in K^{\mu'}, \quad \mu' \in \Lambda', \quad \mu' \neq \lambda', \qquad gh = gh(n, l)\,gh = (n_{\lambda'}, l_{\mu'}). \end{cases}$$

Le tableau suivant, où e, f, g, h et (n, l) représentent les éléments génériques de K^1, K^2, $K^{\lambda'}$, $K^{\mu'}$ et R, résume cette description :

	$(n, l) \cdot R$	$e \cdot K^1$	$f \cdot K^2$	$g \cdot K^{\lambda'}$	$h \cdot K^{\mu'}$
$R \quad (n, l) \cdot$	$(n, l) \cdot R$	$(n, l) \cdot R$	$(n, l_2) \cdot R$	$(n, l_{\lambda'}) \cdot R$	$(n, l_{\mu'}) \cdot R$
$K^1 \quad e \cdot$	$(n_1, l) \cdot R$	$e \cdot K^1$	$(n_1, l_2) \cdot R$	$(n_1, l_{\lambda'}) \cdot R$	$(n_1, l_{\mu'}) \cdot R$
$K^2 \quad f \cdot$	$(n, l) \cdot R$	$(n_1, l_2) \cdot R$	$f \cdot K^2$	$(n_{\lambda'}, l_{\lambda'}) \cdot R$	$(n_{\mu'}, l_{\mu'}) \cdot R$
$K^{\lambda'} \quad g \cdot$	$(n_{\lambda'}, l) \cdot R$	$(n_{\lambda'}, l_{\lambda'}) \cdot R$	$(n_{\lambda'}, l_2) \cdot R$	$g \cdot K^{\lambda'}$	$(n_{\lambda'}, l_{\mu'}) \cdot R$
$K^{\mu'} \quad h \cdot$	$(n_{\mu'}, l) \cdot R$	$(n_{\mu'}, l_{\mu'}) \cdot R$	$(n_{\mu'}, l_2) \cdot R$	$(n_{\mu'}, l_{\lambda'}) \cdot R$	$h \cdot K^{\nu'}$

Comme nous le verrons au théorème 7.1, un demi-groupe idempotent du type ci-dessus a le treillis de ses sous-demi-groupes semi-modulaire affaibli. Nous avons donc :

Corollaire 2.2. — *Si D est un demi-groupe idempotent, il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :*

1° *$T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$;*
2° *$T(D)$ est semi-modulaire affaibli;*
3° *D a la structure indiquée au théorème* 2.3.

Théorème 2.4. — *Si $T(D)$ est modulaire affaibli, l'ensemble I des idempotents de D a la structure indiquée au théorème* 2.3 *modifiée par l'une ou l'autre des restrictions suivantes :*

— *soit* 1° *R est un zéro-demi-groupe d'un côté;*
— *soit* 2° *$K^1 = K^2 = \emptyset$.*

Supposons en effet qu'on ait à la fois R demi-groupe rectangulaire propre, et, par exemple, $K^1 \neq \emptyset$. Soient n_1 l'élément de N associé à K^1, n un élément de N autre que n_1, l et l' deux éléments distincts de L et e un élément de K^1; posant

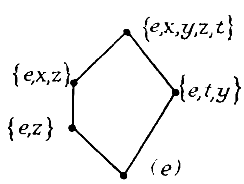
$$x = (n, l), \qquad y = (n, l'), \qquad z = (n_1, l) \qquad \text{et} \qquad t = (n_1, l'),$$

le sous-ensemble $\{e, x, y, z, t\}$ est stable et a pour table :

	e	x	y	z	t
e	e	z	t	z	t
x	x	x	y	x	y
y	y	x	y	x	y
z	z	z	t	z	t
t	t	z	t	z	t

(Demi-groupe n° 393 de [12]).

$T(\{e, x, y, z, t\})$ contient le sous-treillis suivant isomorphe à $\mathfrak{T}_0$, ce qui est en contradiction avec $T(D)$ modulaire affaibli :



Comme nous le verrons au théorème 7.2, les demi-groupes du type ci-dessus ont le treillis de leurs sous-demi-groupes modulaire affaibli. Nous avons donc :

COROLLAIRE 2.3. — *Si D est un demi-groupe idempotent, il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :*

1° *$T(D)$ est modulaire affaibli;*

2° *D a la structure indiquée au théorème 2.4.*

CHAPITRE III.

Revenant à la considération du demi-groupe D, nous introduisons la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ suggérée par P. DUBREIL [4], définie par $a \mathcal{R} b$ si et seulement s'il existe deux entiers m et n tels que $a^m = b^n$. Dans un demi-groupe D périodique, notant e_a l'idempotent unique de (a), $\mathcal{R}$ peut aussi être définie par $a \equiv b \ (\mathcal{R})$ si et seulement si $e_a = e_b$. Les classes de cette équivalence sont appelées fuseaux. Chaque fuseau contient un idempotent au moins, puisque $a \equiv e_a \ (\mathcal{R})$, et un au plus, car $e \equiv f \ (\mathcal{R})$ entraîne $e = e_e = e_f = f$. Le fuseau contenant l'idempotent e sera noté F_e. En général les fuseaux ne sont pas stables.

Dans un demi-groupe arbitraire D, on peut associer à tout idempotent e un groupe Γ_e d'élément unité e qui est maximum parmi les sous-groupes de D d'élément unité e et maximal parmi tous les sous-groupes de D.

Si D est périodique, tout élément a de Γ_e a une de ses puissances positives égale à e, donc est congrue à e modulo $\mathcal{R}$; on a donc $\Gamma_e \subseteq F_e$: on retrouve le résultat, d'ailleurs vrai dans tout demi-groupe, selon lequel les groupes maximaux de D sont deux à deux disjoints. De plus, Γ_e est idéal bilatère minimal de F_e. En effet, d'une part tout idéal de F_e contient e, donc Γ_e, et d'autre part si a est élément de F_e, il existe k tel que $a^k = e$; a^k est dans la période $[a]$ de (a), donc aussi $ea = ae = a^{k+1}$; Γ_e étant maximal parmi les sous-groupes de D d'élément unité e, $[a]$ est contenu dans Γ_e : ea et ae sont éléments de Γ_e ; il en résulte, que pour tout b appartenant à Γ_e, $ab = a(eb) = (ae)b$ est élément de Γ_e et que, de même, $ba = (be)a = b(ea)$ est élément de Γ_e.

Nous allons maintenant étudier, en utilisant la décomposition de I établie au chapitre II, la multiplication d'un fuseau F_e par un fuseau F_f quand $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$.

Auparavant, nous rappellerons une propriété, cas particulier d'un résultat dû à D. D. MILLER et A. H. CLIFFORD [7].

Si D est un demi-groupe arbitraire contenant un sous-demi-groupe R qui soit rectangulaire, les groupes maximaux de D relatifs aux idempotents de R sont tous isomorphes et leur réunion est un sous-demi-groupe de D isomorphe au produit direct de l'un de ces groupes par le demi-groupe rectangulaire R.

Une démonstration directe de cette propriété repose sur deux remarques relatives à la multiplication dans $P = \bigcup_{i \in R} \Gamma_i$:

1° Si e et f sont deux éléments de R et si a est un élément de Γ_f, eae est élément de Γ_e; en effet, a' désignant l'inverse de a par rapport à f dans Γ_f, on a, par exemple :

$$(eae)(ea'e) = ea(fef)\,a'e = e(afa')e = efe = e;$$

comme de plus l'élément eae admet e pour unité bilatère, il appartient à Γ_e.

2° Dans les mêmes hypothèses, on a $f(eae)f = a$; en effet, de $fef = f$, résulte

$$f(eae)f = fe(faf)ef = (fef)a(fef) = faf = a.$$

Considérons alors l'application φ de P dans $\Gamma_e \times R$ qui associe à l'élément a de Γ_f avec $f \in R$ le couple $\{ eae, f \}$. Cette application satisfait aux propriétés suivantes :

1° φ est surjective car le couple $\{ x, g \}$ avec $x \in \Gamma_e$ et $g \in R$ est l'image par φ de l'élément gxg; de la remarque 1° résulte en effet $gxg \in \Gamma_g$ et de la remarque 2°, on déduit $e(gxg)e = x$;

2° φ est injective car de la remarque 2°, de $eae = ea'e$ et de $f = f'$ résulte

$$a = f(eae)f = f'(ea'e)f' = a';$$

3° φ est un homomorphisme; en effet, de $a \in \Gamma_f$, $f \in R$, $b \in \Gamma_g$ et $g \in R$ résulte

$$a = f(eae)f, \qquad b = g(ebe)g;$$

compte tenu de la propriété $xyz = xz$, $\forall x$, y et $z \in R$, il vient alors

$$ab = f(eae)fg(ebe)g = (fge)a(ee)b(efg) = fg(eae)(ebe)fg \in \Gamma_{fg};$$

il en résulte que P est stable; de plus, on a

$$eabe = \{ e(fg)e \{ aeeb \{ e(fg)e \} = (eae)(ebe);$$

l'image du produit ab est donc $\{ eab.ebe, f.g \}$: φ est un homomorphisme.

φ est donc un isomorphisme. P est isomorphe au produit direct $\Gamma_e \times R$, il est réunion de groupes isomorphes. Il en résulte, en particulier, que si H est un sous-demi-groupe de Γ_e et A un sous-demi-groupe de R, l'ensemble $\bigcup_{g \in A} (gHg)$ est un sous-demi-groupe de D isomorphe au produit direct $H \times A$.

THÉORÈME 3.1. — *Si e et f sont deux idempotents distincts de D, tels que $\{ e, f \}$ soit un zéro-demi-groupe d'un côté, avec, par exemple, $ef = e$,*

$fe = f$ ([2]) et si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ alors $\forall a \in F_e$ on a $af = ae$.

Si a' est un élément quelconque de Γ_e, nous avons $a'f = a'ef = a'e$. Dès lors, la période de tout sous-demi-groupe cyclique commençant à un rang inférieur ou égal à 5, nous avons $a^k f = a^k e$, pour tout élément a de F_e et pour tout entier k supérieur ou égal à 5.

Supposons maintenant que $a^k f$ soit égal à $a^k e$ pour tout entier k supérieur ou égal à n et montrons que l'hypothèse « $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ » entraîne que $a^{n-1} f$ est égal à $a^{n-1} e$. La démonstration se fera par l'absurde; supposons donc que $a^{n-1} f$ soit différent de $a^{n-1} e$. Il en résulte les quatre conséquences suivantes :

1° $a^{n-1} \notin (a)_n$, car $a^{n-1} \in (a)_n$ entraîne $a^{n-1} f = a^{n-1} e$; nous avons donc

$$(a)_{n-1} \succ (a)_n.$$

2° F_g étant le fuseau contenant l'élément $a^{n-1} f$, les trois idempotents e, f et g sont distincts et $\{e, f, g\}$ est un zéro-demi-groupe à gauche.

En effet, d'une part $a^{n-1} f \in F_e$ entraîne

$$a^{n-1} f = a^{n-1}(fe) = (a^{n-1} f)e = e(a^{n-1} f) = (ea^{n-1})f = (a^{n-1} e)f = a^{n-1} e$$

ce qui est contraire à l'hypothèse, et d'autre part, $a^{n-1} f \in F_f$ entraîne

$$a^{n-1} f = (a^{n-1} f)f = f(a^{n-1} f);$$

pour tout entier h, nous avons donc

$$(a^{n-1} f)^h = (a^{n-1})^h f;$$

or il existe un entier h' tel qu'on ait à la fois :

$$(a^{n-1} f)^{h'} = f \qquad \text{et} \qquad (a^{n-1})^{h'} = e;$$

de $a^{n-1} f \in F_f$ résulte donc $f = ef$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit alors g l'idempotent de $(a^{n-1} f)$; il existe un entier m tel qu'on ait à la fois :

$$g = (a^{n-1} f)^m \qquad \text{et} \qquad e = (a^{n-1})^m;$$

il en résulte

$$g = (a^{n-1} f)^m = (a^{n-1} f)^m e = ge = (a^{n-1} f)^m f = gf;$$

de plus, les égalités $ea^{n-1} = a^{n-1} e$ et $ef = e$ montrent que

$$eg = e(a^{n-1} f)^m = e(a^{n-1})^m = e;$$

([2]) Le cas $ef = f$, $fe = e$ est distinct; les démonstrations, les résultats et les conditions qui y sont relatifs sont analogues et se déduisent de ceux-ci dessus par permutation de tous les produits.

enfin nous avons

$$fg = (fe)g = f(eg) = fe = f.$$

L'ensemble $\{e, f, g\}$ est bien un zéro-demi-groupe à gauche.

3° Les sous-ensembles $(a)_n \cup f[a]$, $(a)_n \cup g[a]$ et $(a)_n \cup f[a] \cup g[a]$ sont stables.

En effet, considérons le sous-groupe $[a]$ de Γ_e, $f[a]$ et $g[a]$ sont des sous-groupes respectivement de Γ_f et de Γ_g et $[a] \cup f[a] \cup g[a]$ est stable en vertu des résultats rappelés et isomorphe au produit direct $[a] \times \{e, f, g\}$.

La stabilité de $(a)_n \cup f[a]$ résulte des égalités suivantes :

$$(a)_n . f[a] = \{(a)_n . f\}[a] = \{(a)_n . e\}[a] = [a]^2 = [a]$$

et

$$f[a] . (a)_n = f\{[a]e\} . (a)_n = f[a]\{e . (a)_n\} = f[a]^2 = f[a].$$

Par ailleurs, $\forall k \geqq n$, nous avons

$$a^k g = a^k (a^{n-1} f)^m = a^{n-1}(a^k f)(a^{n-1} f)^{m-1} = a^{n-1}(a^k e)(a^{n-1} f)^{m-1};$$

les égalités $ea^{n-1} = a^{n-1} e$ et $ef = e$ montrent alors que

$$a^k g = a^k (a^{n-1})^m = a^k e$$

et par une démonstration analogue à celle faite pour $(a)_n \cup f[a]$, on montrerait que $(a)_n \cup g[a]$ est également stable.

De la stabilité des trois ensembles $(a)_n \cup f[a]$, $(a)_n \cup g[a]$ et $[a] \cup f[a] \cup g[a]$ résulte enfin celle de l'ensemble $(a)_n \cup f[a] \cup g[a]$.

Nous avons donc

$$a^{n-1} \notin (a)_n \cup f[a] \cup g[a]$$

et par suite :

$$(a)_n \cup f[a] \cup g[a] \subset (a)_{n-1} \vee (f) \qquad \text{et} \qquad (a)_{n-1} \cap \{(a)_n \cup f[a] \cup g[a]\} = (a)_n.$$

4° $(a)_n \cup f[a]$ couvre $(a)_n$; en effet $\forall x \in f[a] \subseteq \Gamma_f$, f est élément de (x) et nous avons donc

$$(a)_n \vee (x) \supseteq (a)_n \vee (f) = (a)_n \cup f[a].$$

Considérons alors les trois éléments X, Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = (a)_n \cup f[a], \qquad Y = (a)_{n-1} \qquad \text{et} \qquad Z = (a)_n \cup f[a] \cup g[a];$$

ils sont tels que

$$X \vee Y = (a)_{n-1} \vee (f) \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z = (a)_n;$$

il en résulte $Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$, ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathcal{C}_0$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z, \qquad X \succ Y \cap Z \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z \neq \emptyset;$$

la condition $\overline{C}_2$ est mise en défaut.

Donc $a^{n-1}f$ est égal à $a^{n-1}e$; la propriété étant vraie pour $n = 5$, l'est aussi pour $n = 1$: on a $af = ae$.

De même, pour tout b élément de F_f, le produit be est égal à bf.

Corollaire 3.1. — *Si e et f sont deux idempotents distincts de D, tels que $(e) \vee (f)$ soit rectangulaire, le sous-demi-groupe $\Gamma_e \cup \Gamma_f \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{fe}$ est idéal bilatère minimal du complexe $F_e \cup F_f \cup F_{ef} \cup F_{fe}$.*

En effet, $(e) \vee (f)$ contient au plus les quatre éléments e, f, ef et fe. Si a est un élément de F_e, on a :

1° $ae \in \Gamma_e$;

2° $af = (ae)f \in \Gamma_{ef}$;

en effet de $f = fef$ résulte $af = a(fef) = \{a(fe)\}f$; si $fe = e$, le produit $a(fe)$ est égal à ae et si $fe \neq e$, de $\{e, fe\}$ zéro-demi-groupe à gauche résulte encore $a(fe) = ae$; de la structure de $\Gamma_e \cup \Gamma_f \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{fe}$ résulte enfin : $af = (ae)f \in \Gamma_e . \Gamma_f = \Gamma_{ef}$. On a de même :

3° $ea \in \Gamma_e$ et

4° $fa = f(ea) \in \Gamma_{fe}$.

Les quatre produits ea, ae, fa et af étant éléments de $\Gamma_e \cup \Gamma_f \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{fe}$, ce sous-demi-groupe est bien idéal du complexe $F_e \cup F_f \cup F_{ef} \cup F_{fe}$. Si $(e) \vee (f)$ est un zéro-demi-groupe d'un côté, le résultat devient : $\Gamma_e \cup \Gamma_f$ est idéal bilatère minimal du complexe $F_e \cup F_f$.

Théorème 3.2. — *Si e est un élément de R_γ et f un élément de R_δ avec $\gamma < \delta$ et si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, alors $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$, les éléments ab et ba appartiennent à $(a) \vee (fef)$.*

Remarquons d'abord que la structure de $(a) \vee (fef)$ est entièrement déterminée par les remarques suivantes :

a. fef est élément de $R_{\delta\gamma\delta} = R_\gamma$ et $(e) \vee (fef)$ est donc rectangulaire;

b. du corollaire 3.1 résulte $(a) \vee (fef) = (a) \cup \{[a] \vee (fef)\}$;

c. $[a] \vee (fef)$ est isomorphe au produit direct $[a] \times \{(e) \vee (fef)\}$.

La démonstration se fera en deux étapes.

Montrons d'abord que $\forall a \in F_e$, les éléments af et fa appartiennent à $(a) \vee (fef)$. Si a' est un élément de Γ_e, on a

$$a'f = (a'e)f = a'(ef) = a'(efef) = (a'e)(fef) = a'(fef) \in (a') \vee (fef);$$

de même, on a

$$fa' = (fef)a' \in (a') \vee (fef).$$

La période de tout sous-demi-groupe cyclique commençant à un rang inférieur ou égal à 5, les éléments fa^k et a^kf appartiennent à $(a)_5 \vee (fef)$ pour tout élément a de F_e et pour tout entier k supérieur ou égal à 5.

Supposons maintenant que fa^k et a^kf soient éléments de $(a)_n \vee (fef)$ pour tout entier k supérieur ou égal à n, et montrons que l'hypothèse « $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ » entraîne que $a^{n-1}f$ et fa^{n-1} sont éléments de $(a)_{n-1} \vee (fef)$. La démonstration se fera par l'absurde; supposons donc par exemple, que fa^{n-1} ne soit pas élément de $(a)_{n-1} \vee (fef)$. Il en résulte les quatre conséquences suivantes :

1° $\{(a)_n \vee (fef)\} \cup (f)$ est stable; en effet, d'une part fa^k et a^kf sont dans $(a)_n \vee (fef)$ pour $k \geqq n$ et, d'autre part, on a

$$f(fef) = (fef)f = fef;$$

2° $a^{n-1} \notin (a)_n$; en effet $a^{n-1} \in (a)_n$ entraîne $fa^{n-1} \in (a)_n \vee (fef)$. Il en résulte $(a)_{n-1} \succ (a)_n$ et par suite :

$$(a)_{n-1} \vee (fef) \succ (a)_n \vee (fef);$$

3° $a^{n-1} \notin [\{(a)_n \vee (fef)\} \cup (f)] \vee (fa^{n-1}) = (a)_n \vee (f) \vee (fa^{n-1})$; en effet, tout produit fini d'éléments de $(a)_n \cup (f) \cup (fa^{n-1})$ contenant un facteur de $(a)_n$ est dans $(a)_n \vee (fef)$ puisque le produit de $(a)_n \vee (fef)$ à gauche ou à droite par f ou par (a) est contenu dans $(a)_n \vee (fef)$. Par suite, $a^{n-1} \in (a)_n \vee (f) \vee (fa^{n-1})$ entraîne $a^{n-1} \in (f) \vee (fa^{n-1})$ donc $a^{n-1} = fy$, où y est un certain élément de D; multipliant à gauche par f les deux membres de cette égalité, il vient $a^{n-1} = fa^{n-1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte

$$(a)_n \vee (f) \vee (fa^{n-1}) \subseteq (a)_{n-1} \vee (f)$$

et

$$\{(a)_{n-1} \vee (fef)\} \cap \{(a)_n \vee (f) \vee (fa^{n-1})\} = (a)_n \vee (fef);$$

4° $fa^{n-1} \neq f$; en effet il existe h tel que $(a^{n-1})^h = e$; $fa^{n-1} = f$ entraînerait $f = fa^{n-1} = f(a^{n-1})^h = fe \in R_\Upsilon$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte

$$(a)_n \vee (f) \subset (a)_n \vee (f) \vee (fa^{n-1}).$$

Considérons alors les trois éléments X, Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = (a)_n \vee (f) = \{(a)_n \vee (fef)\} \cup (f), \qquad Y = (a_{n-1}) \vee (fef)$$

et

$$Z = (a)_n \vee (f) \vee (fa^{n-1});$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = (a)_n \vee (fef) \qquad \text{et} \qquad X \vee Y = (a)_{n-1} \vee (f);$$

il en résulte $Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$, ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$; cependant, on a

$$Y \succ Y \cap Z, \qquad X \succ Y \cap Z \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z \neq \emptyset;$$

la condition $\overline{C}_2$ est mise en défaut.

Les éléments fa^{n-1} et $a^{n-1}f$ appartiennent à $(a)_{n-1} \vee (fef)$; la propriété étant vraie pour $n = 5$ l'est donc aussi pour $n = 1$: les éléments fa et af appartiennent à $(a) \vee (fef)$.

Considérons maintenant le cas général. Soient b un élément de F_f, B_1 et B_2 deux sous-demi-groupes de (b) tels que $(f) \subseteq B_1 \prec B_2 \subseteq (b)$; supposons que, pour tout élément y de B_1, les éléments ay et ya appartiennent à $(a) \vee (fef)$ et montrons que l'hypothèse « $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ » entraîne que, pour tout élément x de $B_2 - B_1$, les éléments ax et xa appartiennent à $(a) \vee (fef)$. La démonstration se fait encore par l'absurde; supposons donc qu'il existe un élément x de $B_2 - B_1$ tel que, par exemple, ax ne soit pas élément de $(a) \vee (fef)$. Il en résulte les trois conséquences suivantes :

1° $\{(a) \vee (fef)\} \cup B_1$ est stable et égal à $(a) \vee B_1$; en effet, d'une part, pour tout $y \in B_1$, les éléments ay et ya appartiennent à $(a) \vee (fef)$; d'autre part, de $fy = yf \in B_1$ et de $e \in (a)$ résulte $e(fy) \in (a) \vee (fef)$ et $(yf)e \in (a) \vee (fef)$ et par suite :

$$(fef)y = fefefy = (fef)\{e(fy)\} \qquad \text{et} \qquad y(fef) = yfefef = \{(yf)e\}(fef)$$

appartiennent aussi à $(a) \vee (fef)$;

2° $x \notin [\{(a) \vee (fef)\} \cup B_1] \vee (ax) = (a) \vee B_1 \vee (ax)$; en effet si x est élément de $(a) \vee B_1 \vee (ax)$, son écriture comme produit fini d'éléments de $(a) \cup B_1 \cup (ax)$ contient au moins un facteur ax; le premier facteur x intervenant à partir de la gauche dans cette écriture est précédé de a et éventuellement d'un élément de $(a) \vee B_1 = \{(a) \vee (fef)\} \cup B_1$; les hypothèses faites sur B_1 entraînent $B_1 . a \subseteq (a) \vee (fef)$; comme de plus, les deux produits $\{(a) \vee (fef)\} . a$ et $B_1 . \{(a) \vee (fef)\}$ sont contenus dans $(a) \vee (fef)$, l'élément x s'écrit sous l'une des formes

$$\begin{array}{llllll}
(1) & x = a^k x & \text{ou} & x = a_k xy, & & \\
(2) & x = ux & \text{ou} & x = uxy & \text{avec} & u \in \Gamma_{ef}, \\
(3) & x = vx & \text{ou} & x = vxy & \text{avec} & v \in \Gamma_{fe}, \\
(4) & x = cx & \text{ou} & x = cxy & \text{avec} & c \in \Gamma_{fef},
\end{array}$$

y étant un élément de D.

Il existe des puissances h, h_1, h_2 et h_3 respectivement de a^k, u, v et c telles que

$$(a^k)^h = e, \qquad u^{h_1} = ef, \qquad v^{h_2} = fe \qquad \text{et} \qquad c^{h_3} = fef.$$

Des écritures précédentes de x, on obtient, par multiplications convenables, les nouvelles formes

$$\begin{array}{llcl}
(1) & x = ex & \text{ou} & x = exy^{h}, \\
(2) & x = efx & \text{ou} & x = efxy^{h_1}, \\
(3) & x = fex & \text{ou} & x = fexy^{h_2}, \\
(4) & x = fefx & \text{ou} & x = fefxy^{h_3}.
\end{array}$$

De l'idempotence de e, ef, fe et fef résulte alors respectivement

$$\begin{array}{ll}
(1) & x = ex, \\
(2) & x = efx, \\
(3) & x = fex, \\
(4) & x = fefx.
\end{array}$$

Des formes (1) et (2), on tire $x = ex$; or il existe $h' > 1$ tel que $x^{h'} = f$, multipliant à droite les deux membres de l'égalité $x = ex$ par $x^{h'-1}$, il vient $f = ef$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Des formes (3) et (4), on tire $x = fx$; l'expression (3) devient alors l'expression (4) et en multipliant cette dernière à droite par $x^{h'-1}$, il vient $f = (fef)f = fef$, ce qui est également contraire à l'hypothèse.

Il en résulte

$$(a) \vee B_1 \vee (ax) \subset (a) \vee B_2 \qquad \text{et} \qquad B_2 \cap \{(a) \vee B_1 \vee (ax)\} = B_1.$$

3° $ax \notin (b)$; en effet, x étant élément de (b), il existe un entier k tel que $xb^k = f$; par suite, $ax \in (b)$ entraîne $axb^k = af \in (b)$, ce qui est contraire aux conclusions de la première partie. Il en résulte

$$(a) \vee B_1 \subset (a) \vee B_1 \vee (ax).$$

Considérons alors les trois éléments X, Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = (a) \vee B_1, \qquad Y = B_2 \qquad \text{et} \qquad Z = (a) \vee B_1 \vee (ax);$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = B_1 \qquad \text{et} \qquad X \vee Y = (a) \vee B_2;$$

il en résulte $Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$, ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathfrak{G}_0$; cependant on a $Y \succ Y \cap Z$, $Y \cap Z \neq \emptyset$ et $[Y \cap Z, X]$ de hauteur finie puisque X est fini; la condition $\overline{C}_2$ est mise en défaut.

Ayant montré que la propriété est vraie pour B_2 dès qu'elle l'est pour B_1 et qu'elle est vraie pour $B_1 = (f)$, le théorème 3.2 est démontré puisque $T((b))$ est de hauteur finie.

Compte tenu du théorème 2.3 donnant la structure la plus générale de I, les circonstances étudiées au théorème 3.2 sont l'une des deux suivantes :

1° e et f sont éléments d'un même K^λ;

2° e est élément de R et f est élément d'un certain K^λ.

Dans le premier cas, fef est égal à e; $(a) \vee (fef)$ se réduit donc à (a). Les éléments ab et ba appartiennent à (a).

Dans le second cas, $(a) \vee (fef)$ peut contenir 1, 2 ou 4 idempotents.

Si fef est égal à e, pour les mêmes raisons que ci-dessus, les éléments ab et ba appartiennent à (a).

Si $(e) \vee (fef)$ est égal à $\{e, fef\}$, on a soit $ab \in (a)$, soit $ab \in \Gamma_{fef}$.

De $ab \in (a)$ résulte $ab = a^k$ donc $eb \in (a)$; eb étant *a priori* élément de $(e) \vee (fef)$ donc idempotent, on a $eb = e$; multipliant alors un nombre convenable de fois à droite par b les deux membres de l'égalité $eb = e$, on obtient $ef = e$. De $ab \in (a)$ résulte donc $ab \in F_{ef}$.

De $ab \in \Gamma_{fef}$ résulte $ab = abfef = a\{b(fe)\}f$; l'élément $b(fe)$ appartenant *a priori* à $(fe) \vee (f.fe.f)$, est égal soit à fe, soit à fef; il en résulte $ab = afef$ qui, compte tenu de la structure de $(a) \vee (fef)$, est égal à $(ae)(fef)$ et appartient à Γ_{ef}. De $ab \in \Gamma_{fef}$ résulte donc aussi $ab \in F_{ef}$.

Enfin, si $(e) \vee (fef)$ est composé de quatre idempotents distincts, on ne peut avoir, ni $ab \in (a)$ car cela entraîne $ef = e$, ni $ab \in \Gamma_{fef}$ car cela entraîne $ef = fef$. On ne peut non plus avoir $ab \in \Gamma_{fe}$ car, de $ab \in \Gamma_{fe}$, résulte

$$ab = abfe = ab(fe)e = afe = (ae)(fe) \in \Gamma_{efe} = \Gamma_e,$$

ce qui entraîne $fe = e$. On a donc encore dans ce cas $ab \in F_{ef}$. De plus, de $ab \in \Gamma_{ef}$, résulte $ab = abef$; cependant $b(ef)$ est égal soit à ef, soit à fef; ab est donc, dans ce cas aussi, égal à $(ae)(fef)$.

Les résultats du théorème 3.2 peuvent alors être précisés de la façon suivante :

Corollaire 3.2. — *Si e est élément de R_γ et f élément de R_δ avec $\gamma < \delta$, si ef est égal à e et si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, alors $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$, le produit ab est élément de (a)* (3).

Corollaire 3.3. — *Si e est élément de R et f élément de K^λ, si ef est différent de e et si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, alors $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$, on a $ab = (ae)(fef) \in \Gamma_{ef}$* (4).

Théorème 3.3. — *Si e et f appartiennent à des K^λ distincts et si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, alors, $\forall a \in F_e$, on a $af = ef$ et $fa = fe$.*

---

(3) Si fe est égal à e, on a, pour des raisons analogues, $ba \in (a)$.

(4) De même, si fe est different de e, on a $ba = (fef)(ea) \in \Gamma_{fe}$.

Si a' est un élément quelconque de Γ_e, on a $a'f = (a'e)f = a'(ef)$ qui, compte tenu du corollaire 3.2, est élément de (ef), donc égal à ef. La période de tout sous-demi-groupe cyclique commençant à un rang inférieur ou égal à 5, nous avons $a^k f = ef$ et $fa^k = fe$ pour tout élément a de F_e et pour tout entier k supérieur ou égal à 5.

Supposons maintenant que, pour tout entier k supérieur ou égal à n, les deux éléments $a^k f$ et fa^k soient égaux respectivement à ef et à fe, et montrons que l'hypothèse « $T(D)$ satisfait à la condition $\bar{C}_2$ » entraîne $a^{n-1}f = ef$ et $fa^{n-1} = fe$. La démonstration se fera par l'absurde; supposons donc, par exemple, que fa^{n-1} soit différent de fe. Il en résulte les quatre conséquences suivantes :

1° les sous-ensembles $(a)_m \cup \{ef, fe, efe, fef\}$ et $(a)_n \cup (f) \cup \{ef, fe, efe, fef\}$ sont stables, le premier grâce au théorème 3.2, le second car, $\forall\, k \geqq n$, les éléments $a^k f$ et fa^k sont respectivement égaux à ef et à fe; on a d'ailleurs

$$(a)_m \cup \{ef, fe, efe, fef\} = (a)_m \vee (fef)$$

et

$$(a)_n \cup (f) \cup \{ef, fe, efe, fef\} = (a)_n \vee (f).$$

2° $a^{n-1} \notin (a)_n$, d'où il résulte

$$(a)_n \cup \{ef, fe, efe, fef\} \prec (a)_{n-1} \cup \{ef, fe, efe, fef\}.$$

3° $a^{n-1} \notin (a)_n \vee (f) \vee (fa^{n-1})$; en effet, tout produit fini d'éléments $(a)_n \cup (f) \cup (fa^{n-1})$ qui contient un facteur de $(a)_n$ est dans

$$(a)_n \cup \{ef, fe, efe, fef\}$$

puisque $(a)_n \cup \{ef, fe, efe, fef\}$ est idéal de $(a)_n \cup \{ef, fe, efe, fef\} \cup (a) \cup (f)$, et si l'on avait $a^{n-1} \in (f) \vee (fa^{n-1})$, il en résulterait $a^{n-1} = fy$ pour un certain y de D, donc $a^{n-1} = fa^{n-1}$ et par suite $e = fe$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

4° $fa^{n-1} \notin (a)_n \vee (f) = (a)_n \cup (f) \cup \{ef, fe, efe, fef\}$; en effet :

1° $fa^{n-1} \in (a)$ entraîne $fe \in (a)$, ce qui est absurde;

2° $fa^{n-1} = f$ entraîne $fe = f$, ce qui est absurde;

3° $fa^{n-1} = efe$ entraîne $fa^{n-1} = f(a^{n-1}e)$; ce dernier produit est égal à fe puisque $a^{n-1}e$ est élément de $(a)_n$; l'égalité $fa^{n-1} = efe$ est donc impossible puisqu'elle entraîne $fa^{n-1} = fe$, contrairement à l'hypothèse;

4° $fa^{n-1} = fef$ entraîne $fa^{n-1} = (fe)fa^{n-1} = f(efa^{n-1})$; compte tenu du théorème 3.2, $(ef)a^{n-1}$ est égal à $(ef)e$; l'égalité $fa^{n-1} = fef$ est donc impossible puisqu'elle entraîne $fa^{n-1} = fe$, contrairement à l'hypothèse;

5° $fa^{n-1} = ef$ entraîne $fa^{n-1} = fef$ donc $fa^{n-1} = fe$, ce qui est encore contraire à l'hypothèse.

Considérons alors les trois éléments X, Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = (a)_n \vee (f), \qquad Y = (a)_{n-1} \cup \{ef, fe, efe, fef$$

et

$$Z = (a)_n \vee (f) \vee (fa^{n-1});$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = (a)_n \cup \{ef, fe, efe, fef\} \qquad \text{et} \qquad X \vee Y = (a)_{n-1} \vee (f);$$

il en résulte $Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$, ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathfrak{C}_0$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z, \qquad X \succ Y \cap Z \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z \neq \emptyset;$$

la condition $\overline{C}_2$ est mise en défaut.

Les éléments fa^{n-1} et $a^{n-1}f$ sont respectivement égaux à fe et à ef; la propriété étant vraie pour $n = 5$, l'est donc aussi pour $n = 1$ et l'on a

$$af = ef \qquad \text{et} \qquad fa = fe.$$

THÉORÈME 3.4. — *Si le treillis $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ et si l'on est dans l'un ou l'autre des deux cas suivants :*

(A) : $(e) \vee (f)$ *est un demi-groupe rectangulaire;*

(B) : e *et* f *appartiennent à des* K^λ *distincts;*

alors, $\forall a \in F_e$ *et* $\forall b \in F_f$, *on a*

$$ab \in \{[a] \vee [b]\} \cup (a) \cup (b).$$

Les démonstrations relatives aux cas (A) et (B) sont identiques. Nous poserons $G = [a] \vee [b]$. Dans l'hypothèse (A), G est un sous-demi-groupe de $\Gamma_e \cup \Gamma_f \cup \Gamma_{fe} \cup \Gamma_{ef}$ isomorphe au produit direct d'un certain sous-demi-groupe de Γ_e par $(e) \vee (f)$. Dans l'hypothèse (*B*), G est égal à

$$[a] \cup [b] \cup \{ef, fe, efe, fef\}.$$

Montrons d'abord que G est idéal de $G \cup (a) \cup (b)$. Dans l'hypothèse (A), ce résultat est conséquence du corollaire 3.1, les produits $ea = ae$, $fa = f(ea)$ et $af = (ae)f$ étant éléments de G. Dans l'hypothèse (B), ce résultat est conséquence du théorème 3.3 puisque $ea = ae$, $fa = fe$ et $af = ef$ sont éléments de G.

La démonstration se fera par l'absurde; nous supposerons que le produit ab n'appartient pas à $G \cup (a) \cup (b)$. Donnons d'abord six conséquences de cette hypothèse :

1° $a \notin \Gamma_e$; en effet $a \notin \Gamma_e$ entraîne $a \in G$ et par suite, $ab \in G$;

2° $b \notin \Gamma_f$; en effet $b \in \Gamma_f$ entraîne $ab \in G$;

3° $a \notin (b)$; en effet $a \in (b)$, cas qui peut se produire si $e = f$, entraîne $ab \in (b)$;

4° $b \notin (a)$; en effet $b \in (a)$ entraîne $ab \in (a)$;

5° $b \notin (a) \vee (b)_2 \vee (ab)$; en effet si b est élément de $(a) \vee (b)_2 \vee (ab)$, dans son écriture comme produit fini d'éléments de $(a) \cup (b)_2 \cup (ab)$, le premier facteur est soit puissance de b, soit puissance de a.

Dans le premier cas, l'élément b n'appartenant pas à $(b)_2$, on a $b = b^{k-1}\, bx$ avec $k \geqq 2$ et x élément de D; de l'existence d'un entier h tel que $(b^{k-1})^h = f$, résulte alors $b = fbx^h$ et par suite $b = fb \in \Gamma_f$ et ceci est contraire à la deuxième conséquence.

Dans le second cas, l'élément b n'appartenant pas à (a), on a soit $b = a^{k'} b$, soit $b = a^{k'} bx'$ où x' est un certain élément de D; de l'existence d'un entier h' tel que $(a^{k'})^{h'} = e$, résulte alors soit $b = eb$, soit $b = eb(x')^{h'}$, et par suite $b = eb$. Dans l'hypothèse (A), le produit eb appartient à un groupe maximal et donc $b = eb$ entraîne $b \in \Gamma_f$ et ceci est encore contraire à la deuxième conséquence. Dans l'hypothèse (B), le produit eb est égal à ef et par suite l'égalité $b = eb$ est impossible.

6° $a \notin (a)_2 \vee (b) \vee (ab)$; la démonstration est analogue à celle ci-dessus elle tient compte du dernier facteur dans l'écriture de a comme produit fini d'éléments de $(a)_2 \cup (b) \cup (ab)$.

La démonstration se fera en quatre étapes.

Première étape. — Nous supposerons que le carré de l'un des éléments a ou b appartient à $\Gamma_e \cup \Gamma_f$.

G étant idéal de $G \cup (a)$, ce complexe est un sous-demi-groupe; de même $G \cup (b)$ est un sous-demi-groupe et l'on a

$$G \cup (a) = (a) \vee [b] \qquad \text{et} \qquad G \cup (b) = [a] \vee (b).$$

L'hypothèse $ab \notin G \cup (a) \cup (b)$ entraîne les inclusions strictes suivantes :

$$G = [a] \vee [b] \subset [a] \vee (b) = G \cup (b) \subset (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \subset (a) \vee (b),$$
$$G = [a] \vee [b] \subset (a) \vee [b] = G \cup (a) \subset (a) \vee (b)_2 \vee (ab) \subset (a) \vee (b).$$

Dès lors, si par exemple a^2 est élément de Γ_e, on a $G \cup (a) = G \cup \{ a \}$; on en déduit

$$G \cup (a) \succ G \qquad \text{et} \qquad \{ (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \} \cap \{ G \cup (a) \} = G.$$

Considérons alors les trois éléments X, Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = G \cup (b), \qquad Y = G \cup (a) \qquad \text{et} \qquad Z = (a)_2 \vee (b) \vee (ab);$$

ils sont tels que

$$X \vee Y = (a) \vee (b) \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z = G;$$

il en résulte $Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$, ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$; cependant on a $Y \succ Y \cap Z$,

$Y \cap Z \neq \emptyset$ et $[Y \cap Z,\ X]$ de hauteur finie; la condition $\overline{C}_2$ est mise en défaut.

Le théorème est donc démontré dans ce cas.

Au cours des trois dernières étapes, nous utiliserons les résultats suivants, conséquences de l'hypothèse $ab \notin G \cup (a) \cup (b)$:

$$(a)_2 \vee (b)_2 \subset (a) \vee (b)_2 \subseteq (a) \vee (b)_2 \vee (ab) \subset (a) \vee (b),$$
$$(a)_2 \vee (b)_2 \subset (a)_2 \vee (b) \subseteq (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \subset (a) \vee (b).$$

Deuxième étape. — Nous supposerons que les cubes des éléments a et b appartiennent à $\Gamma_e \cup \Gamma_f$.

Dans ces conditions, les produits ab^2, a^2b, a^2b^2, b^2a, ba^2 et b^2a^2 satisfont aux conditions de la première étape puisque $(a^2)^2 = a^4$ est élément de Γ_e et $(b^2)^2 = b^4$ élément de Γ_f. G étant idéal de $G \cup (a) \cup (b)$, les trois sous-ensembles $G \cup (a)_2 \cup (b)_2$, $G \cup (a)_2 \cup (b)$ et $G \cup (a) \cup (b)_2$ sont alors des sous-demi-groupes respectivement égaux à

$$(a)_2 \vee (b)_2, \qquad (a)_2 \vee (b) \qquad \text{et} \qquad (a) \vee (b)_2.$$

Il en résulte les trois conséquences suivantes :

1° $\qquad ab \notin (a)_2 \vee (b) \qquad$ et $\qquad ab \notin (a) \vee (b_2);$

2° $\qquad (a)_2 \vee (b) \succ (a)_2 \vee (b)_2 \qquad$ et $\qquad (a) \vee (b)_2 \succ (a)_2 \vee (b_2);$

3° $\qquad \{(a)_2 \vee (b) \vee (ab)\} \cap \{(a) \vee (b)_2\} = (a)_2 \vee (b)_2$

et

$$\{(a) \vee (b)_2 \vee (ab)\} \cap \{(a)_2 \vee (b)\} = (a)_2 \vee (b_2).$$

Considérons alors les quatre éléments X, Y, Z et T de $T(D)$ définis par

$$X = (a)_2 \vee (b), \qquad Y = (a) \vee (b)_2, \qquad Z = (a)_2 \vee (b) \vee (ab)$$

et

$$T = (a) \vee (b)_2 \vee (ab);$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = X \cap T = (a)_2 \vee (b)_2, \qquad X \vee Y = (a) \vee (b) \qquad \text{et} \qquad ab \in Z \cap T;$$

il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y, \qquad X \cap T \subset Y \subset T \subset X \vee Y$$

et

$$Y \cap Z = X \cap T \subset Z \cap T,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_1$; cependant on a

$$Y \succ Y \cap Z = X \cap T, \qquad X \succ X \cap T = Y \cap Z \qquad \text{et} \qquad Y \cap Z = X \cap T \neq \emptyset;$$

a condition $\overline{C}_2$ est mise en défaut.

Le théorème est démontré dans ce second cas.

Troisième étape. — Nous supposerons que le cube de l'un des éléments a ou b appartient à $\Gamma_e \cup \Gamma_f$.

Compte tenu de ce que la période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5, nous avons donc :

$$\text{soit (I)} \ : \ a^3 \in \Gamma_e, \qquad b^5 \in \Gamma_f;$$
$$\text{soit (II)} \ : \ a^5 \in \Gamma_e, \qquad b^3 \in \Gamma_f.$$

Si l'on est dans le cas (I), les produits ab^3, b^3a, ab^4, b^4a, a^2b, ba^2, a^2b^2, b^2a^2, a^2b^3, b^3a^2, a^2b^4 et b^4a^2 satisfont aux conditions de la première étape puisque $(b^3)^2$, $(b^4)^2$ et $(a^2)^2$ sont éléments de $\Gamma_e \cup \Gamma_f$ et les produits ab^2 et b^2a satisfont aux conditions de la seconde étape puisque a^3 est élément de Γ_e et $(b^2)^3$ élément de Γ_f.

Si l'on est dans le cas (II), les produits ab^2, b^2a, a^2b, ba^2, a^2b^2, b^2a^2, a^3b, ba^3, a^3b^2, b^2a^3, a^4b, ba^4, a^4b^2 et b^2a^4 satisfont de même aux conditions de l'une au moins des deux premières étapes puisque $(a^3)^2$, $(a^4)^2$, $(b^2)^2$, b^3 et $(a^2)^3$ sont éléments de $\Gamma_e \cup \Gamma_f$.

On a donc comme précédemment

$$(a)_2 \vee (b)_2 = G \cup (a)_2 \cup (b)_2, \qquad (a) \vee (b)_2 = G \cup (a) \cup (b)_2$$

et

$$(a)_2 \vee (b) = G \cup (a)_2 \cup (b).$$

La démonstration se termine comme dans la seconde étape. Le produit ab est élément de $G \cup (a) \cup (b)$ dès que le cube de l'un des éléments a ou b appartient à $\Gamma_e \cup \Gamma_f$.

Dernière étape. — Nous ne faisons plus aucune hypothèse sur les éléments a et b.

Toutefois, compte tenu de ce que la période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5, leur puissance cinquième est dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$.

Des hypothèses $(a^2)^3 \in \Gamma_e$ et $(b^2)^3 \in \Gamma_f$, résulte à nouveau, grâce à la troisième étape, la stabilité des trois sous-ensembles $G \cup (a)_2 \cup (b)_2$, $G \cup (a) \cup (b)_2$ et $G \cup (a)_2 \cup (b)$. La démonstration se termine comme dans la seconde étape.

Le théorème est établi dans le cas général.

COROLLAIRE 3.4. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, les fuseaux de D sont stables et, $\forall a$ et $b \in F_e$, on a*

$$ab \in \{[a] \vee [b]\} \cup (a) \cup (b).$$

En effet, pour tout couple a et b d'éléments de F_e, les sous-ensembles G, (a) et (b) sont contenus dans F_e et par suite le produit ab est élément de F_e.

COROLLAIRE 3.5. — *Si e et f sont deux idempotents distincts de D, tels que $\{e, f\}$ soit un zéro-demi-groupe d'un côté, avec, par exemple, $ef = e$, $fe = f$* (5) *et si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, alors $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$, on a*

$$ab \in (a) \cup \{[a] \vee (eb)\}.$$

A priori, le produit ab est élément du sous-demi-groupe $G \cup (a) \cup (b)$ lequel est contenu dans $F_e \cup F_f$. Cependant $ab \in F_f$ est impossible car entraîne $(ab)f \in \Gamma_e$; or on a

$$abf = afb = aeb = (ae)\{e(fb)\} \in \Gamma_e\{e\Gamma_f\} = \Gamma_e^2 = \Gamma_e.$$

Il en résulte

$$ab \in F_e \cap \{G \cup (a) \cup (b)\} = (a) \cup \{F_e \cap G\}.$$

Par ailleurs $[a] \vee (eb)$ est un sous-groupe de Γ_e puisqu'on a

$$eb = e(fb) \in e\Gamma_f = \Gamma_e.$$

Dès lors $f\{[a] \vee (eb)\}$ est un sous-groupe de Γ_f égal à $(fa) \vee [b]$ et $\{[a] \vee (eb)\} \cup \{[b] \vee (fa)\}$ est un sous-demi-groupe de $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. Des relations $eb = e(fb)$ et $fa = f(ea)$ résulte alors

$$G = \{[a] \vee (eb)\} \cup \{[b] \vee (fa)\}$$

et par suite :

$$F_e \cap G = [a] \vee (eb).$$

COROLLAIRE 3.6. — *Si e et f sont deux idempotents de R tels que $(e) \vee (f)$ soit rectangulaire propre, et si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, alors, $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$, on a $ab = ea.fb \in \Gamma_{ef}$.*

A priori, le produit ab est élément du sous-demi-groupe $G \cup (a) \cup (b)$ lequel est contenu dans $(a) \cup (b) \cup \Gamma_e \cup \Gamma_f \cup \Gamma_{fe} \cup \Gamma_{ef}$. Cependant, compte tenu de la structure de $\Gamma_e \cup \Gamma_f \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{fe}$, on a :

1° $ab \in (a)$ est impossible car entraîne $eb \in (a)$ en contradiction avec $eb \in \Gamma_{ef}$;

2° $ab \in (b)$ est impossible car entraîne $af \in (b)$ en contradiction avec $af \in \Gamma_{ef}$;

3° $ab \in \Gamma_e$ est impossible car entraîne $ab = e(ab) = (ea)b$ en contradiction avec $(ea)b \in \Gamma_{ef}$;

4° $ab \in \Gamma_f$ est impossible car entraîne $ab = (ab)f = a(bf)$ en contradiction avec $a(bf) \in \Gamma_{ef}$;

5° $ab \in \Gamma_{fe}$ est impossible car entraîne $ab = (ab)(fe) = a(bf)e$ en contradiction avec $a(bf)e \in \Gamma_{efe} = \Gamma_e$.

---

(5) *Voir* note (2), p. 160.

On a donc $ab \in \Gamma_{ef}$ et par suite :

$$ab = (ef)(ab) = e(fa)b = e(f.ea)b = ea.b = ea.fb.$$

COROLLAIRE 3.7. — *Si e et f appartiennent à des K^{λ} distincts et si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, alors, $\forall a \in F_e$ et $\forall \in F_f$, on a*

$$ab = ef.$$

A priori, ab est élément de $G \cup (a) \cup (b) = (a) \cup (b) \cup \{ ef, fe, efe, fef \}$. Cependant, $ab \in (a)$ est impossible car entraîne $eb \in (a)$ en contradiction avec $eb = ef$, et de même $ab \in (b)$ est impossible car entraîne $af \in (b)$ en contradiction avec $af = ef$. Par ailleurs, $ab = fef$ entraîne $ab = abf = ef$, $ab = efe$ entraîne $ab = eab = ef$ et $ab = fe$ entraîne $ab = fab = feb = fef$ donc aussi $ab = ef$.

Compte tenu de la structure de I déterminé au théorème 2.3, les cas examinés aux corollaires 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 et 3.7 sont les seuls possibles. Dès lors, si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, pour tout couple e et f d'idempotents distincts ou non de D, pour tout élément a de F_e et pour tout élément b de F_f, ef est un idempotent de D et ab un élément de F_{ef}. Il s'agit là d'un résultat particulièrement important concernant la structure de D. Utilisant le langage introduit par A. H. CLIFFORD [2], nous en donnerons l'énoncé équivalent suivant :

THÉORÈME 3.5. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, D est bande sur I de ses fuseaux.*

CHAPITRE IV.

Nous donnons ici des systèmes équivalents à l'ensemble des conditions nécessaires, trouvées au cours des trois premiers chapitres, pour que $T(D)$ satisfasse aux différentes propriétés étudiées.

THÉORÈME 4.1. — *L'ensemble des conditions nécessaires rencontrées au cours des chapitres précédents pour que $T(D)$ satisfasse à la condition $\overline{C}_2$ est équivalent au système suivant :*

Système (I) *:*

1° *D est périodique;*

2° *D est bande sur I de ses fuseaux;*

3° *I a la structure indiquée au théorème* 2.3;

4° *Si e est élément de R_γ, f élément de R_δ avec $\gamma < \delta$, alors, $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$, ab et ba sont éléments de $(a) \vee (fef)$;*

5° *Si $(e) \vee (f)$ est un demi-groupe rectangulaire, ou si e et f appartiennent à des K^{λ} distincts, alors, $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$, on a*

$$ab \in \{ [a] \vee [b] \} \cup (a) \cup (b).$$

Il nous suffit de montrer ici que la deuxième conclusion du théorème 1.1 et que les conclusions des théorèmes 3.1 et 3.3 sont conséquences de ce système (I).

Examinons d'abord la deuxième conclusion du théorème 1.1; soit c un élément de D, c^2 et c^3 sont éléments d'un même fuseau; utilisant la condition 5° du système (I), nous obtenons

$$c^2 . c^3 = c^5 \in \{ [c^2] \vee [c^3] \} \cup (c^2) \cup (c^3).$$

Nous avons donc :

— soit $c^5 \in [c^2] \vee [c^3] \subseteq [c]$;

— soit $c^5 \in (c^2)$, ce qui entraîne $c^5 = c^{2k}$ pour un certain k et par suite, $c^5 \in [c]$;

— soit $c^5 \in (c^3)$, ce qui entraîne, comme ci-dessus, $c^5 \in [c]$.

Dès lors, $\forall c \in D$, c^5 est élément de $[c]$; la période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5.

Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses du théorème 3.1; e et f sont deux idempotents distincts de D tels que $\{ e, f \}$ est un zéro-demi-groupe d'un côté, avec par exemple $ef = e$, $fe = f$ (6), et a est un élément de F_e; compte tenu de la condition 5° du système (I), le produit af est élément de $\{ [a] \vee (f) \} \cup (a) \subseteq F_e \cup F_f$; or, comme nous l'avons vu au cours de la démonstration du théorème 3.1, $af \in F_f$ est impossible et $af \in F_e$ entraîne $af = ae$.

Considérons enfin les hypothèses du théorème 3.3; e et f appartiennent à des K^λ distincts et a est un élément de F_e; compte tenu de la condition 5°, le produit af est élément de $\{ [a] \vee (f) \} \cup (a)$; compte tenu de la condition 4°, pour tout a' élément de $[a]$, on a

$$a'f = (a'e)f = a'(ef) \in (ef) \vee (e . ef . e) = \{ ef, efe \}$$

et

$$fa' = f(ea') = (fe)a' \in (fe) \vee (e . fe . e) = \{ fe, efe \};$$

il en résulte

$$[a] \vee (f) = [a] \cup (f) \cup \{ ef, fe, efe, fef \};$$

cependant, comme nous l'avons vu au cours de la démonstration du théorème 3.3, les relations $af \in (a)$ et $af = f$ sont impossibles et chacune des égalités $af = fe$, $af = efe$, ou $af = fef$ entraîne $af = ef$.

Au sujet de ce système (I), nous remarquerons que la condition 2° est conséquence des quatre autres; si nous l'y avons mise, c'est à cause de son caractère descriptif très précis.

THÉORÈME 4.2. — *Le système* (I) *est équivalent au système suivant :*

(6) *Voir* note (2), p. 160.

Système (I′) :

Conditions 1°, 2° *et* 3° *du système* (I);

6° *Si a et b sont éléments d'un même fuseau* F_e, *le produit ab est élément de*

$$\{[a] \vee [b]\} \cup (a) \cup (b);$$

7° *Si e est élément de* R_γ, *f élément de* R_δ *avec* $\gamma < \delta$ *et si* $ef = e$ [7], $\forall a \in F_e$ *et* $\forall b \in F_f$, *le produit ab est élément de* (a);

8° *Si e et f sont deux éléments distincts de I tels que* $\{e, f\}$ *soit un zéro-demi-groupe d'un côté, avec par exemple* $ef = e$, $fe = f$ [8], $\forall a \in F_e$ *et* $\forall b \in F_f$, *le produit ab est élément de* $(a) \cup \{[a] \vee (eb)\}$;

9° *Si e et f sont deux éléments de R tels que* $(e) \vee (f)$ *soit rectangulaire propre*, $\forall a \in F_e$ *et* $\forall b \in F_f$, *le produit ab est égal à* $ea.fb$;

10° *Si e est élément de R, f élément de* K^λ *et si* $ef \neq e$ [9], $\forall a \in F_e$ *et* $\forall b \in F_f$, *le produit ab est égal à* $ea.fef$;

11° *Si e et f appartiennent à des* K^λ *distincts*, $\forall a \in F_e$ *et* $\forall b \in F_f$, *le produit ab est égal à ef.*

Le système (I′) entraîne évidemment le système (I); réciproquement le système (I) entraîne le système (I′) puisque les conditions 6°, 7°, 8°, 9°, 10° et 11° sont conséquences respectives des corollaires 3.4, 3.2, 3.5, 3.6, 3.3 et 3.7.

Au sujet de ce système (I′), nous remarquerons encore que la condition 2° est conséquence des huit autres. De plus, posant $\mathbf{a} = (a) - [a]$, les conditions 6°, 7° et 8° peuvent y être remplacées par les conditions plus précises :

6′° *Dans les hypothèses de* 6°, *on a* $ab \in \mathbf{a} \cup \mathbf{b} \cup \{ea.eb\}$;
7′° *Dans les hypothèses de* 7°, *on a* $ab \in \mathbf{a} \cup \{ea\}$;
8′° *Dans les hypothèses de* 8°, *on a* $ab \in \mathbf{a} \cup \{ea.fb\}$.

Ceci résulte des remarques suivantes :

(*a*) dans les hypothèses de 6°, $ab \in \Gamma_e$ entraîne

$$ab = e(ab)e = (ea)(be) = ea.eb;$$

(*b*) dans les hypothèses de 7°, $ab \in \Gamma_e$ entraîne

$$ab = e(ab) = (ae)b = a(eb);$$

mais, de $eb \in (e)$ résulte $eb = e$; $ab \in \Gamma_e$ entraîne donc $ab = ea$;

---

[7] *Voir* note [3], p. 166.
[8] *Voir* note [2] p. 160.
[9] *Voir* note [4], p. 166.

(c) dans les hypothèses de 8°, $ab \in \Gamma_e$ entraîne

$$ab = e(ab) = (ae)b = a(ef)b = ea.fb.$$

Chacun de ces systèmes imposent des conditions que doivent vérifier tout a de F_e et tout b de F_f; nous allons voir qu'on peut, compte tenu de la condition 2°, réduire sensiblement le nombre des couples a, b pour lesquels le produit ab a besoin d'être précisé et ce faisant, nous déterminerons les valeurs possibles de ces produits.

Étudions d'abord un fuseau F_e de D; c'est un demi-groupe unipotent (c'est-à-dire contenant un et un seul idempotent) et périodique, satisfaisant, compte tenu de la condition 6°, à la propriété

$$\forall a \text{ et } b \in F_e, \text{ le produit } ab \text{ est élément de } \{[a] \vee [b]\} \cup (a) \cup (b).$$

Nous appellerons $(F_e)_n$, l'ensemble des éléments de F_e qui s'écrivent sous forme d'une puissance d'un élément de F_e supérieure ou égale à n :

$$(F_e)_n = \{x \in F_e \text{ tel qu'il existe } y \in F_e \text{ et } k \geqq n \text{ avec } x = y^k\}$$

et F_e^n, l'ensemble des produits de n éléments de F_e :

$$F_e^n = \left\{\prod_{i=1}^{n} a_i \text{ avec } a_i \in F_e \text{ pour tout } i\right\}.$$

Il est clair que :

1° $(F_e)_n \subseteq F_e^n$;

2° $F_e \supseteq (F_e)_2 \supseteq (F_e)_3 \supseteq \ldots \supseteq (F_e)_n \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_e$;

3° $F_e \supseteq F_e^2 \supseteq F_e^3 \supseteq \ldots \supseteq F_e^n \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_e$;

en effet, Γ_e étant périodique, chacun de ses éléments est puissance arbitrairement grande de lui-même.

De plus, nous avons $(F_e)_3 = \Gamma_e$; cette relation n'est en effet pas autre chose que la deuxième conclusion du théorème 1.1 et cette dernière est conséquence de la condition 6°; c'est en fait ce qu'on a démontré au théorème 4.1.

Nous avons aussi les trois propriétés suivantes :

Propriété 4.1. — *Quel que soit l'entier n, on a* $(F_e)_n = F_e^n$.

La démonstration se fait par récurrence; montrons d'abord que la propriété est vraie pour $n = 2$ et pour cela que F_e^2 est contenu dans $(F_e)_2$. Soit donc ab un élément de F_e^2, il appartient par hypothèse au sous-demi-groupe $\{[a] \vee [b]\} \cup (a) \cup (b)$ lequel est contenu dans $\Gamma_e \cup (a) \cup (b)$. Si ab est élément de Γ_e, il appartient à $(F_e)_2$ puisqu'on a $\Gamma_e \subseteq (F_e)_2$. Si ab est élément de $F_e - \Gamma_e$, a et b appartiennent aussi à $F_e - \Gamma_e$ puisque Γ_e est idéal de F_e; $ab = a$ et $ab = b$ sont alors impossibles, car, par exemple $ab = a$ et $b^h = e$ entraînent $a = ab = ab^h = ae$ donc $a \in \Gamma_e$; il en résulte que $ab \notin \Gamma_e$ entraîne $ab \in (a)_2 \cup (b)_2 \subseteq (F_e)_2$.

Supposons maintenant qu'on ait l'égalité $(F_e)_{n-1} = F_e^{n-1}$ et montrons l'inclusion $F_e^n \subseteq (F_e)_n$. Soit $\prod_{i=1}^{n} a_i$ un élément de F_e^n, le produit $\prod_{i=1}^{n-1} a_i$ appartient à F_e^{n-1}, donc à $(F_e)_{n-1}$, et par suite il existe $x \in F_e$ et $k \geqq n - 1$ tel que $\prod_{i=1}^{n} a_i = x^k a_n = x^{k-1}(xa_n)$. Comme on vient de le voir, le produit xa_n appartient au complexe $(x)_2 \cup (a_n)_2 \cup \Gamma_e$; on est donc placé dans l'une des trois éventualités suivantes :

1° $xa_n \in \Gamma_e$, ce qui entraîne

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \in \Gamma_e \subseteq (F_e)_n;$$

2° $xa_n \in (x)_2$, c'est-à-dire $xa_n = x^m$ avec $m \geqq 2$; il en résulte

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = x^{k-1+m} \in (F_e)_n;$$

3° $xa_n \in (a_n)_2$, c'est-à-dire $xa_n = a_n^m$ avec $m \geqq 2$; chaque facteur x se comporte alors, à gauche de a_n comme le facteur a_n^{m-1}; il en résulte

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = x^k a_n = a_n^{k(m-1)+1} \in (F_e)_n.$$

La propriété étant vraie pour $n = 2$ l'est aussi pour tout n. En particulier, on a $(F_e)_5 = F_e^5$ et par suite $F_e^5 = \Gamma_e$.

PROPRIÉTÉ 4.2. — *Tout élément de $F_e - \Gamma_e$ est puissance d'un élément de $F_e - F_e^2$.*

Soit, en effet, a un élément de $F_e - \Gamma_e$, ou bien a est élément de $F_e - F_e^2$ et la propriété est démontrée, ou bien a est élément de $F_e^2 = (F_e)_2$; dans ce second cas il existe $b \in F_e$ et $k \geqq 2$ tel que $a = b^k$; si b est élément de $F_e - F_e^2$, la démonstration est terminée, sinon il existe $c \in F_e$ et $k' \geqq 2$ tel que $b = c^{k'}$. Dès lors c est élément de $F_e - F_e^2$; en effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait $d \in F_e$ et $k'' \geqq 2$ tel que $c = d^k$ et par suite tel que $a = d^{kk'k''}$; ceci est impossible puisque de $kk'k'' \geqq 8$ et de $(F_e)_5 = \Gamma_e$ résulte $d^{kk'k''} = a \in \Gamma_e$.

PROPRIÉTÉ 4.3. — *Pour tout couple a et b d'éléments de* $F_e - F_e^2$ *tel que le produit ab appartienne à* $F_e - \Gamma_e$, α *désignant l'un des éléments a ou b,* β *l'autre, on a :*

— *soit* 1° $ab = \alpha^3$ *ou* $ab = \alpha^4$;

— *soit* 2° $ab = \alpha^2$; *cependant ce second cas ne peut se produire que moyennant l'une des restrictions suivantes :*

(*a*) $\alpha^3 \in \Gamma_e$;

(*b*) $a^n = b^n \forall n \geqq 3$;

(*c*) $\alpha^3 = \beta^4$ *et* $\alpha^4 = \alpha^5 = e = \beta^5 = \beta^6$.

Compte tenu de la propriété 4.1, on a, *a priori*

$$ab \in \{ (a)_2 \cup (b)_2 \} \cap (F_e - \Gamma_e),$$

et par suite, $ab \in \{ a^2, a^3, a^4, b^2, b^3, b^4 \}$. On a donc :

— soit 1° $ab = \alpha^3$ ou $ab = \alpha^4$;

— soit 2° $ab = \alpha^2$.

Supposons, dans ce second cas, que α^3 n'appartienne pas à Γ_e et montrons qu'on a alors nécessairement l'une des restrictions (*b*) ou (*c*).

De $ab = a^2$, par exemple, résulte $a^2 b = a^3$; on doit donc avoir

$$a^3 \in (a^2)_2 \cup (b)_2 \cup \{ [a^2] \vee [b] \}.$$

De $a^3 \notin \Gamma_e$ résulte alors $a^3 \in \{ b^2, b^3, b^4 \}$; cependant $a^3 = b^2$ et $ab = a^2$ entraînent $a^3 = ab^2 = a^4$ en contradiction avec $a^3 \notin \Gamma_e$. On a donc :

— soit $a^3 = b^3$, d'où il résulte $\forall n' \geqq 0$:

$$b^{3+n'} = a^2 ab^{n'} = a^2 a^{1+n'} = a^{3+n'};$$

ceci n'est pas autre chose que la restriction (*b*);

— soit $a^3 = b^4$, d'où il résulte

$$b^6 = b^4 b^2 = a^3 b^2 = a^5 = ab^4 = aa^3 = a^4 = e$$

et

$$b^5 = b^4 b = a^3 b = a^4 = e,$$

soit en résumé :

$$a^4 = a^5 = e = b^5 = b^6;$$

ceci est la restriction (*c*).

Nous sommes alors en mesure de caractériser les fuseaux de D_1^*:

THÉORÈME 4.3. — *Un demi-groupe unipotent et périodique* F_e *satisfait à la condition « $\forall a$ et $b \in F_e$, le produit ab est élément de*

$\{[a] \vee [b]\} \cup (a) \cup (b)$ » *si et seulement si,* Γ_e *désignant le groupe maximal de* F_e, *on a :*

1° $F_e^5 = \Gamma_e$;

2° *Tout élément de* $F_e - \Gamma_e$ *est puissance d'un élément de* $F_e - F_e^2$;

3° F_e *satisfait à la propriété* 4.3.

Ces conditions sont nécessaires, comme on vient de le voir, montrons qu'elles sont suffisantes. Soient donc x et y deux éléments de F_e; si le produit xy appartient à Γ_e, on a

$$xy = e(xy)e = (ex)(ey) \in [x] \vee [y];$$

il nous suffit donc d'examiner le cas où le produit xy appartient à $F_e - \Gamma_e$. Dans ce cas, les éléments x et y appartiennent aussi à $F_e - \Gamma_e$ puisque Γ_e est idéal de F_e; il existe donc d'après 2°, deux éléments a et b de $F_e - F_e^2$ tels que $x = a^k$ et $y = b^h$; de plus, compte tenu de 1°, $k + h$ est inférieur ou égal à 4; utilisant maintenant la propriété 4.3, on a les trois éventualités suivantes :

— si $ab = \alpha^2$ avec par exemple $\alpha = a$, on a $xy = a^{k+h}$, donc $xy = x^{h+1}$ si $k = 1$, et $xy = x^2$ si $k = h = 2$; il reste le cas $k = 3$, $h = 1$; il ne se produit pas si l'on a l'une des restrictions (*a*) ou (*c*) car alors a^4 est élément de Γ_e; dans le cas de la restriction (*b*), de $a^4 = b^4$ résulte $xy = y^4$;

— si $ab = \alpha^3$ avec par exemple $\alpha = a$, on a $xy = a^{k+2h}$, donc $xy = x^3$ si $k = h = 1$, et $xy = x^2$ si $k = 2$ et $h = 1$; ce sont les deux seuls cas possibles;

— si $ab = \alpha^4$, il n'y a qu'un seul cas possible $k = h = 1$ et l'on a alors $xy = x^4$ ou $xy = y^4$.

Étudions maintenant la multiplication d'un fuseau F_e par un fuseau F_f dans des hypothèses correspondant aux conditions 7° et 8° du système (I').

PROPRIÉTÉ 4.4. — *Dans un demi-groupe périodique, si e et f sont deux idempotents distincts tels que* $ef = e$, *et si* F_e *est stable et satisfait aux conditions* 1° *et* 2° *du théorème* 4.3, *la condition* « $\forall a \in F_e$ *et* $\forall b \in F_f$, *le produit ab est élément de* (*a*) » *est équivalente à l'ensemble de conditions suivant :*

1° $F_e . F_f \subseteq F_e$;

2° $\forall b \in F_f$, *on a* $eb = e$;

3° $\forall a \in F_e - F_e^2$ *et* $\forall b \in F_f$, *tels que* $ab \in F_e - \Gamma_e$, *on a :*

— *soit* 1° $ab = a^2$ *et* $a^3 \in \Gamma_e$;

— *soit* 2° $ab = a$, a^3 *ou* a^4.

Ces conditions sont nécessaires, la première car (*a*) est contenu dans F_e, la seconde car (*e*) est constitué par le seul élément e; la troisième résulte de ce que a^5 est élément de Γ_e et de ce que $ab = a^2$ et $a^3 \notin \Gamma_e$ entraînent $a^2b = a^3 \notin (a^2)$ en contradiction avec l'hypothèse.

Ces conditions sont suffisantes; soit en effet x un élément de F_e et y un élément de F_f, si le produit xy appartient à Γ_e, compte tenu de la condition 2°, on a

$$xy = exy = xey = x(ey) = xe \in (x);$$

il nous suffit donc d'examiner le cas où le produit xy appartient à $F_e - \Gamma_e$. Dans ce cas, l'élément x appartient aussi à $F_e - \Gamma_e$ puisque $x \in \Gamma_e$ entraîne $xy = exy \in \Gamma_e$; il existe donc un élément a de $F_e - F_e^2$ tel que $x = a^k$, avec d'ailleurs $k \leqq 4$; utilisant maintenant la condition 3°, on a les quatre éventualités suivantes :

— si $ay = a$, on a $xy = x \in (x)$;

— si $ay = a^2$ et si $a^3 \in \Gamma_e$, il n'y a qu'un seul cas possible $k = 1$ et l'on a alors $xy = x^2 \in (x)$;

— si $ay = a^3$, on a :

soit $k = 1$ d'où il résulte $xy = x^3 \in (x)$;
soit $k = 2$ d'où il résulte $xy = x^2 \in (x)$;

— si $ay = a^4$, il n'y a qu'un seul cas possible $k = 1$ et l'on a alors $xy = a^4 \in (x)$.

Propriété 4.5. — *Dans un demi-groupe périodique, si e et f sont deux idempotents distincts tels que $\{e, f\}$ soit un zéro-demi-groupe d'un côté avec, par exemple, $ef = e$, $fe = f$* (10), *et si F_e et F_f sont stables et satisfont aux conditions* 1° *et* 2° *du théorème* 4.3, *la condition* « $\forall a \in F_e$ *et* $\forall b \in F_f$, *le produit ab est élément de* $(a) \cup \{[a] \vee (eb)\}$ » *est équivalente à l'ensemble de conditions suivant :*

1° $F_e . F_f \subseteq F_e$;
2° $\forall a \in F_e - F_e^2$ *et* $\forall b \in F_f - F_f^2$, *tels que* $ab \in F_e - \Gamma_e$, *on a :*
— *soit* 1° $ab = a^2$ *et* $a^3 \in \Gamma_e$;
— *soit* 2° $ab = a^3$ *ou* a^4.

Ces conditions sont nécessaires, la première car $(a) \cup \{[a] \vee (eb)\}$ est contenu dans F_e; la seconde est conséquence des trois remarques suivantes;

1° a^5 est élément de Γ_e;

2° $ab = a^2$ et $a^3 \notin \Gamma_e$ est impossible, car entraîne

$$a^2b = a^3 \notin (a^2) \cup \{[a^2] \vee (eb)\}$$

en contradiction avec l'hypothèse;

(10) *Voir* note (2), p. 160.

3° $ab = a$ est également impossible, car il existe un entier h tel que $b^h = f$ et par suite $ab = a$ entraîne

$$a = ab = ab^h = af = a(fe) = (af)e = ae \in \Gamma_e.$$

Ces conditions sont suffisantes; soit en effet x un élément de F_e et y un élément de F_f, si le produit xy appartient à Γ_e, on a

$$xy = e(xy) = (ex)y = (xe)y = (xe)(ey) \in [x] \vee (ey);$$

il nous suffit donc d'examiner le cas où le produit xy appartient à $F_e - \Gamma_e$. Dans ce cas, l'élément x appartient à $F_e - \Gamma_e$ puisque $x \in \Gamma_e$ entraîne $xy = exy \in \Gamma_e$, et l'élément y appartient à $F_f - \Gamma_f$ puisque $y \in \Gamma_f$ entraîne $xy = xyf = xyfe \in \Gamma_e$; il existe donc un élément a de $F_e - F_e^2$ et un élément b de $F_f - F_f^2$ tels que $x = a^k$ et $y = b^h$, avec d'ailleurs k et h inférieurs ou égaux à 4; utilisant maintenant la condition 2°, on a les trois éventualités suivantes :

— si $ab = a^2$ et si $a^3 \in \Gamma_e$, il n'y a qu'un seul cas possible $k = h = 1$ et l'on a alors $xy = x^2 \in (x)$;

— si $ab = a^3$, on a :

soit $k = h = 1$ d'où il résulte $xy = x^3 \in (x)$;

soit $k = 2$, $h = 1$ d'où il résulte $xy = x^2 \in (x)$;

— si $ab = a^4$, il n'y a qu'un seul cas possible $k = h = 1$ et l'on a alors $xy = x^4 \in (x)$.

THÉORÈME 4.4. — *Les systèmes* (I) *et* (I′) *sont équivalents au système suivant :*

Système (I″) *:*

Conditions 1°, 2° *et* 3° *du système* (I);

6″° *Chaque fuseau* F_e *satisfait à :*

1° $F_e^5 = \Gamma_e$;

2° *Tout élément de* $F_e - \Gamma_e$ *est puissance d'un élément de* $F_e - F_e^2$;

3° *Pour tout couple* a, $b \in F_e - F_e^2$, *tel que* $ab \in F_e - \Gamma_e$, α *désignant l'un des éléments* a *ou* b, β *l'autre, on a :*

— *soit* 1° $ab = \alpha^3$ *ou* α^4;

— *soit* 2° $ab = \alpha^2$; *mais dans ce cas on a l'une des restrictions suivantes :*

(*a*) $\alpha^3 \in \Gamma_e$;

(*b*) $a^n = b^n$, $\forall n \geqq 3$;

(*c*) $\alpha^3 = \beta^4$ *et* $\alpha^4 = \alpha^5 = e = \beta^5 = \beta^6$.

7″° Si e est élément de R_γ, *f élément de* R_δ *avec* $\gamma < \delta$ *et si* $ef = e$, *la multiplication de* F_e *par* F_f (11) *satisfait à :*

1° $\forall b \in F_f$, *on a* $eb = e$;

2° $\forall a \in F_e - F_e^2$ *et* $\forall b \in F_f$, *tels que* $ab \in F_e - \Gamma_e$, *on a :*

— *soit* 1° $ab = a^2$ *et* $a^3 \in \Gamma_e$;

— *soit* 2° $ab = a$, a^3 *ou* a^4.

8″° Si e et f sont deux éléments distincts de I tels que $\{e, f\}$ *soit un zéro-demi-groupe d'un côté avec, par exemple,* $ef = e$, $fe = f$ (12), *la multiplication de* F_e *par* F_f *satisfait à* $\forall a \in F_e - F_e^2$ *et* $\forall b \in F_f - F_f^2$, *tels que* $ab \in F_e - \Gamma_e$, *on a :*

— *soit* 1° $ab = a^2$ *et* $a^3 \in \Gamma_e$;

— *soit* 2° $ab = a^3$ *ou* a^4.

9″° Si e et f sont deux éléments de R tels que $(e) \vee (f)$ *soit rectangulaire propre, la multiplication de* F_e *par* F_f *satisfait à* $\forall a \in F_e - F_e^2$ *et* $\forall b \in F_f - F_f^2$, *on a*

$$ab = ea.fb;$$

10″° Si e est élément de R, f élément de K^λ *tels que* $ef \neq e$, *la multiplication de* F_e *par* F_f (13) *satisfait à* $\forall a \in F_e - F_e^2$ *et* $\forall b \in F_f - F_f^2$, on a

$$ab = ea.fb \qquad \text{et} \qquad af = ea.f;$$

11″° Si e et f appartiennent à des K^λ *distincts, la multiplication de* F_e *par* F_f *satisfait à* $\forall a \in F_e - F_e^2$ *et* $\forall b \in F_f - F_f^2$, *on a*

$$ab = ea.fb, \qquad af = ea.f \qquad \text{et} \qquad eb = e.fb.$$

Compte tenu de la condition 2° commune à ces systèmes, du théorème 4.3 et des propriétés 4.4 et 4.5, les conditions 6°, 7° et 8° de (I′) sont équivalentes aux conditions 6″°, 7″° et 8″° de (I″). La condition 9° entraîne la condition 9″°. De la première partie de la condition 7″° résulte, dans les hypothèses de 10″°, l'égalité $(ef)(fb) = ef$, et, dans les hypothèses de 11″°, la double égalité $(ea)(ef) = ef = (ef)(fb)$; dès lors, les conditions 10″° et 11″° sont conséquences respectivement des conditions 10° et 11°. De tout ceci résulte déjà que le système (I″) est conséquence du système (I′).

Pour démontrer la réciproque, il nous suffit de vérifier que les conditions 9°, 10° et 11° sont conséquences du système (I″).

(11) On déduira aisément les conditions intéressant la multiplication de F_f par F_e quand $fe = e$.

(12) *Voir* note (2), p. 160.

(13) On déduira de même les conditions intéressant la multiplication de F_f par F_e quand $fe \neq e$.

Plaçons-nous d'abord dans les hypothèses de la condition 9°, soient e et f deux éléments de R tels que $(e) \vee (f)$ soit rectangulaire propre, x un élément de F_e et y un élément de F_f. Nous distinguerons deux cas :

— l'un des éléments x ou y appartient à $\Gamma_e \cup \Gamma_f$; supposons, par exemple, que l'élément x appartienne à Γ_e. De $ey \in F_{ef}$, conséquence de la condition 2°, et de $e = efe$ résulte

$$ey = (ef)(ey) = (ey)(ef) = eyf.$$

On a donc

$$xy = (xe)y = x(ey) = x(eyf) = xe.yf;$$

— l'élément x appartient à $F_f - \Gamma_e$ et l'élément y à $F_f - \Gamma_f$. Compte tenu de la deuxième partie de la condition 6″°, il existe $a \in F_e - F_e^2$ et $b \in F_f - F_f^2$ tels que $x = a^k$ et $y = b^h$; compte tenu alors de la condition 9″°, on a

$$xy = a^k b^h = a^k efb^h = ex.fy.$$

Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses de la condition 10°, soient e un élément de R, f un élément de K^λ avec $ef \neq e$, x un élément de F_e et y un élément de F_f. De la première partie de la condition 7″° résulte $(ef)(fy) = ef$; il nous suffira donc de montrer que le produit xy est égal à $ex.fy$. Nous distinguerons trois cas :

— l'élément x appartient à Γ_e. De $ey \in F_{ef}$ et de $e = efe$ résulte encore $ey = eyf$ et par suite on a

$$xy = xe.yf;$$

— l'élément x appartient à $F_e - \Gamma_e$ et l'élément y à Γ_f. Il existe alors $a \in F_e - F_e^2$ tel que $x = a^k$; compte tenu de la condition 10″°, on a

$$xy = a^k fy = a^k efy = ex.fy;$$

— l'élément x appartient à $F_e - \Gamma_e$ et l'élément y à $F_f - \Gamma_f$. Il existe alors $a \in F_e - F_e^2$ et $b \in F_f - F_f^2$ tels que $x = a^k$ et $y = b^h$; compte tenu encore de la condition 10″°, on a

$$xy = a^k b^h = a^k efb^h = ex.fy.$$

Plaçons-nous enfin dans les hypothèses de la condition 11°, soient e un élément de K^λ, f un élément de K^μ avec $\lambda \neq \mu$, x un élément de F_e et y un élément de F_f. De la première partie de la condition 7″° résulte $(ex)(ef) = ef = (ef)(fy)$; il nous suffira encore de montrer que le produit xy est égal à $ex.fy$. Nous distinguerons à nouveau trois cas :

— les éléments x et y appartiennent à $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. Le résultat est, dans ce cas, évident;

— un et un seul des éléments x ou y appartient à $\Gamma_e \cup \Gamma_f$; supposons, par exemple que l'élément x appartienne à Γ_e et que l'élément y appartienne à $F_f - \Gamma_f$. Il existe alors $b \in F_f - F_f^2$ tel que $y = b^h$; compte tenu de la condition 11″°, on a

$$xy = xeb^h = xefb^h = ex.fy;$$

— l'élément x appartient à $F_e - \Gamma_e$ et l'élément y à $F_f - \Gamma_f$. Il existe alors $a \in F_e - F_e^2$ et $b \in F_f - F_f^2$ tels que $x = a^k$ et $y = b^h$; compte tenu encore de la condition 11″°, on a

$$xy = a^k b^h = a^k efb^h = ex.fy.$$

Dans ce système (I″), la condition 2° n'est plus superflue; c'est d'ailleurs elle, en grande partie, qui a permis de remplacer les conditions 6°, 7°, 8°, 9°, 10° et 11° par les conditions 6″°, 7″°, 8″°, 9″°, 10″° et 11″°.

Théorème 4.5. — *Si $T(D)$ est modulaire affaibli, D satisfait aux systèmes équivalents de conditions nécessaires suivants :*

Système (II) [*resp.* (II′) *et* (II″)] *:*

Système (I) [*resp.* (I′) *et* (I″)] *modifié par l'une ou l'autre des deux restrictions suivantes :*

1° $K^1 = K^2 = \emptyset$;

2° *R est un zéro-demi-groupe d'un côté et les groupes maximaux relatifs aux idempotents de R sont réduits à leur élément unité.*

Compte tenu du théorème 2.4, nous savons déjà que, si K^1 par exemple est non vide, l'hypothèse « $T(D)$ est modulaire affaibli » implique que R est un zéro-demi-groupe d'un côté. Il nous suffit donc de montrer que, si K^1 est non vide et si les groupes maximaux relatifs aux idempotents de R ne sont pas réduits à leur élément unité, alors $T(D)$ n'est pas modulaire affaibli. Soit toujours N et L les composantes de R, puisque K^1 n'est pas vide, L n'est pas réduit à un élément; considérons alors un idempotent g de K^1 et deux éléments distincts $e = (n_1, l)$ et $f = (n_1, l')$ de R. Les sous-ensembles suivants, $X = \{g, e\}$, $Z = (g) \cup \Gamma_e$ et $Y = (g) \cup \Gamma_f$ sont stables puisque g est élément unité de $\Gamma_e \cup \Gamma_f \cup (g)$; ils sont tels que $Y \cap Z = (g)$ et $X \vee Y = \Gamma_e \cup \Gamma_f \cup (g)$; il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathfrak{C}_0$; cependant $Y \cap Z$ n'est pas vide; $T(D)$ n'est pas modulaire affaibli.

Théorème 4.6. — *Si $T(D)$ satisfait à la condition C_2, D satisfait aux systèmes équivalents de conditions nécessaires suivants :*

Système (III) *:*

Conditions 1°, 2°, 4° *et* 5° *du système* (I);

3′° *I a la structure indiquée au théorème* 2.2′.

Système (III′) :

Conditions 1°, 2°, 6°, 7° et 8° *du système* (I′) *et condition* 3′°.

Système (III″) :

Conditions 1°, 2°, 6″°, 7″° et 8″° *du système* (I″) *et condition* 3′°.

L'équivalence de ces trois systèmes résulte de ce que, l'ensemble I des idempotents de D ayant la structure indiquée au théorème 2.2′, les circonstances relatives aux conditions 9°, 10° et 11° du système (I′) [resp. aux conditions 9″°, 10″° et 11″° du système (I″)] ne se présentent pas.

COROLLAIRE 4.1. — *Les systèmes* (III), (III′) *et* (III″) *se déduisent de l'un quelconque des précédents en supposant que l'ensemble I des idempotents de D se réduise à un seul K^λ.*

Tout K^λ, en effet, est un « demi-groupe de type $ef = e$ ou f″ et a donc la structure définie au théorème 2.2′.

CHAPITRE V.

Nous étudions, dans ce chapitre, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le treillis $T(P)$ des sous-demi-groupes d'un demi-groupe P, produit direct d'un demi-groupe rectangulaire R et d'un groupe périodique Γ, satisfasse à chacune des neuf conditions étudiées. $\mathfrak{T}(\Gamma)$ désignera le treillis des sous-groupes du groupe Γ.

THÉORÈME 5.1. — *$T(P)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ (resp. à la condition $\overline{C}_1$, à la semi-modularité affaiblie et à la modularité affaiblie) si et seulement si $\mathfrak{T}(\Gamma)$ satisfait à la condition C_2 (resp. à la condition C_1, à la semi-modularité et à la modularité).*

Compte tenu de la remarque faite au début du chapitre III concernant les demi-groupes contenant un demi-groupe rectangulaire, et de ce que R est le produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche N par un zéro demi-groupe à droite L, tout sous-demi-groupe A non vide de P est le produit direct d'un certain sous-demi-groupe N_A de N, d'un certain sous-demi-groupe L_A de L et d'un certain sous-demi-groupe Γ_A de Γ : $A = N_A \times L_A \times \Gamma_A$. Dès lors si $A_0 = N_0 \times L_0 \times \Gamma_0$ est un certain sous-demi-groupe non vide de P, l'intervalle (A_0, P) est le produit direct des intervalles (N_0, N), (L_0, L) et (Γ_0, Γ). D'autre part, tout produit direct satisfait à la condition C_2 (resp. à la condition C_1, à la semi-modularité et à la modularité) si, et seulement si, chaque treillis facteur y satisfait. Les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes :

1° $T(P)$ satisfait à la condition C_2 (resp. à la condition $\overline{C}_1$, à la semi-modularité affaiblie et à la modularité affaiblie);

2° (A_0, P) satisfait, pour tout A_0 non vide de $T(P)$, à la condition C_2 (resp. à la condition C_1, à la semi-modularité et à la modularité);

3° $\mathfrak{G}(\Gamma)$ satisfait à la condition C_2 (resp. à la condition C_1, à la semi-modularité et à la modularité).

THÉORÈME 5.2. — *$T(P)$ satisfait à la condition C_2 (resp. à la condition C_1 et à la semi-modularité) si et seulement si :*

1° *R est un zéro-demi-groupe d'un côté;*

2° *$\mathfrak{G}(\Gamma)$ satisfait à la condition C_2 (resp. à la condition C_1 et à la semi-modularité).*

Ces conditions sont évidemment nécessaires.

D'autre part, (A_0, P) satisfait pour tout A_0 non vide de $T(P)$ à la condition C_2 (resp. à la condition C_1, et à la semi-modularité). Il reste donc à vérifier le caractère suffisant des conditions ci-dessus quand $X \cap Y = \emptyset$.

Posant par exemple $R = N$, les hypothèses $X \succ \emptyset$, $Y \succ \emptyset$ et $X \cap Y = \emptyset$ entraînent $X = \{n_1\} \times E$, $Y = \{n_2\} \times E$, où E désigne le sous-groupe de Γ constitué par l'élément unité de Γ et où $n_1 \neq n_2$; on a alors $X \vee Y = \{n_1, n_2\} \times E$ donc $X \vee Y \succ X$ et $X \vee Y \succ Y$; la condition C_2 est vérifiée.

L'hypothèse $X \succ \emptyset$ entraîne $X = \{n_1\} \times E$, $Y = N_2 \times \Gamma_2$ avec $n_1 \notin N_2$; dès lors, on a $X \vee Y = (N_2 \cup \{n_1\}) \times \Gamma_2$ qui couvre Y; la condition C_1 est vérifiée.

Enfin les hypothèses $\emptyset = Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$ entraînent $X = N_0 \times \Gamma_0$, $Z = N_1 \times \Gamma_1$ et $Y = N_2 \times \Gamma_2$ avec $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ puisque $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \supseteq E \neq \emptyset$. On a alors $N_1 \cap N_2 \subset N_0 \subset N_1 \subset N_0 \cup N_2$ donc $N_0 = N_1$. D'autre part Y n'est pas réduit à un élément puisque $Y \succ X \cap Y$ entraîne $X \vee Y \succ X$; n désignant un élément arbitraire de N_2 et posant $T = \{n\} \times E$, on a

$$Y \cap Z \subset T \subset Y$$

et

$$(X \vee T) \cap Z = [(N_0 \cup \{n\}) \cap N_0] \times [(\Gamma_0 \vee E) \cap \Gamma_1] = N_0 \times \Gamma_0 = X;$$

la semi-modularité est bien vérifiée.

THÉORÈME 5.3. — *Dans le cas où R n'est pas réduit à un élément, il y a équivalence entre les propositions suivantes :*

1° *$T(P)$ est distributif;*

2° *$T(P)$ est modulaire;*

3° *R est un zéro-demi-groupe d'un côté et Γ est réduit à son élément unité.*

D'une part 1° entraîne 2° et 3° entraîne 1°. D'autre part, la négation de 3° entraîne la négation de 2°. Supposons d'abord que $\Gamma \supset E$ et soient f

et g deux éléments de R formant un zéro-demi-groupe d'un côté; considérons les trois éléments X, Y et Z de $T(P) = T(R \times \Gamma)$ définis par

$$X = \{f\} \times E, \qquad Y = \{g\} \times \Gamma \qquad \text{et} \qquad Z = \{f\} \times \Gamma;$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = \emptyset \qquad \text{et} \qquad X \vee Y = \{f, g\} \times \Gamma;$$

il en résulte $Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$, ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(P)$ isomorphe à $\mathfrak{T}_0$: $T(P)$ n'est pas modulaire.

Supposons maintenant que R soit rectangulaire propre, alors, $T(R)$ et par suite $T(P)$, ne satisfaisant pas à la condition C_2, ne sont pas modulaires.

Chapitre VI.

Nous donnons ici les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles nous sommes parvenus dans le cas où $T(D)$ satisfait aux conditions étudiées qui vont de la condition C_2 à la distributivité.

Dans ces cinq cas, I est une chaîne C de zéro-demi-groupe d'un côté S_γ telle que, $\forall e \in S_\gamma$, $\forall f \in S_\delta$ avec $\gamma < \delta$, on a $ef = fe = e$. Nous poserons

$$\Phi_\gamma = \bigcup_{e \in S_\gamma} F_e \qquad \text{et} \qquad P_\gamma = \bigcup_{e \in S_\gamma} \Gamma_e.$$

Nous avons alors :

Théorème 6.1. — *Le système de conditions* (III) *est équivalent au système suivant :*

Système (III *bis*) *:*

Conditions 1°, 2° *et* 3'° *du système* (III).

4'° $\forall A \in T(\Phi_\gamma)$ *et* $\forall B \in T(\Phi_\delta)$ *avec* $\gamma \neq \delta$, *on a* $A \vee B = A \cup B$, *d'où il résulte que le treillis* $T(D)$ *est le produit cardinal général des treillis* $T(\Phi_\gamma)$ *pour* $\gamma \in C$;

5'° $\forall A$ *et* $B \in T(\Phi_\gamma)$, *on a*

$$A \vee B = A \cup B \cup (A' \vee B')$$

avec

$$A' = A \cap P_\gamma \qquad \textit{et} \qquad B' = B \cap P_\gamma.$$

La propriété 4'° résulte de la propriété 4°; en effet, $\forall a \in A$ et $\forall b \in B$, on a $a \in F_e$, $b \in F_f$, $e \in S_\gamma$, $f \in S_\delta$ avec par exemple $\gamma < \delta$ et donc ab et ba sont éléments de $(a) \subseteq A \cup B$. Dans ces conditions, la correspondance $A \in T(D) \to \{A_\gamma = A \cap \Phi_\gamma\}$, $\gamma \in C$, est injective car $A \neq B$ entraîne $A_\gamma \neq B_\gamma$ pour au moins un indice $\gamma \in C$; elle est surjective car $\{A_\gamma \in T(\Phi_\gamma)\}$

$\gamma \in C$, est l'image de $A = \bigcup_{\gamma \in C} A_\gamma$ qui est élément de $T(D)$ d'après la propriété ci-dessus; enfin, à $A \cap B$ est associé $\{(A \cap B) \cap \Phi_\gamma = A_\gamma \cap B_\gamma\}$, $\gamma \in C$ et, compte tenu des inclusions

$$A \cup B = \bigcup_{\gamma \in C} (A_\gamma \cup B_\gamma) \subseteq \bigcup_{\gamma \in C} (A_\gamma \vee B_\gamma) \subseteq A \vee B$$

et de la stabilité de $\bigcup_{\gamma \in C} (A_\gamma \vee B_\gamma)$, $A \vee B$ a pour image $\{A_\gamma \vee B_\gamma\}$, $\gamma \in C$: $T(D)$ est isomorphe au produit cardinal général des treillis $T(\Phi_\gamma)$ pour $\gamma \in C$.

Les propriétés 5° et 5'° sont équivalentes; de la propriété 5° résulte en effet de la stabilité de $A \cup B \cup (A' \vee B')$ et de la propriété 5'° résulte la propriété 5° en faisant $A = (a)$ et $B = (b)$.

Enfin les propriétés 2° et 4'° entraînent la propriété 4°; de la propriété 2° résulte $ab \in F_{ef}$, de la propriété 4'° résulte $ab \in (a) \cup (b)$: on a donc $ab \in (a)$ et de même $ba \in (a)$.

Les systèmes (III) et (III *bis*) sont bien équivalents.

THÉORÈME 6.2. — *Le treillis $T(D)$ des sous-demi-groupes d'un demi-groupe D satisfait à la condition C_2 (resp. à la condition C_1 et à la semi-modularité) si et seulement si :*

1° *D satisfait aux systèmes de conditions équivalentes* (III), (III'), (III'') *et* (III *bis*);

2° *Chaque groupe maximal Γ_e a le treillis $\mathscr{C}(\Gamma_e)$ de ses sous-groupes satisfaisant à la condition C_2 (resp. à la condition C_1 et à la semi-modularité).*

Ces conditions sont nécessaires, la seconde car $\mathscr{C}(\Gamma_e)$ est pour tout e sous-treillis convexe de $T(D)$.

Montrons qu'elles sont suffisantes; compte tenu de ce que $T(D)$ est le produit cardinal général des treillis $T(\Phi_\gamma)$ pour $\gamma \in C$, il nous suffira de montrer que chaque $T(\Phi_\gamma)$ satisfait à la condition C_2 (resp. à la condition C_1 et à la semi-modularité). Soient X, Y et Z trois éléments de $T(\Phi_\gamma)$ satisfaisant à $Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$; posant

$$X' = X \cap P_\gamma, \qquad Y' = Y \cap P_\gamma, \qquad Z' = Z \cap P_\gamma,$$
$$X'' = X - X' = X \cap (\Phi_\gamma - P_\gamma), \qquad Y'' = Y - Y' \quad \text{et} \quad Z'' = Z - Z',$$

il vient

$$(Y \cap Z)' = Y' \cap Z', \qquad (Y \cap Z)'' = Y'' \cap Z'',$$
$$(X \vee Y)' = \{X \cup Y \cup (X' \vee Y')\} \cap P_\gamma = X' \vee Y'$$

et

$$(X \vee Y)'' = \{X \cup Y \cup (X' \vee Y')\} \cap (\Phi_\gamma - P_\gamma) = X'' \cup Y''.$$

On a alors

$$Y'' \cap Z'' \subseteq X'' \subseteq Z'' \subseteq X'' \cup Y'',$$

d'où il résulte, compte tenu de la distributivité de $\mathfrak{L}(\Phi_\gamma - P_\gamma)$, $X'' = Z''$; cela implique

$$Y' \cap Z' \subseteq X' \subset Z' \subseteq X' \vee Y'$$

et par suite :

$$Y' \cap Z' \subset X' \subset Z' \subset X' \vee Y'.$$

Compte tenu de la condition 2° ci-dessus et du théorème 5.2, $T(P_\gamma)$ satisfait pour tout γ à la condition C_2 (resp. à la condition C_1 et à la semi-modularité).

Dans le cas de la condition C_2, il existe donc soit un élément T'_1 tel que $Y' \cap Z' \subset T'_1 \subset Y'$, soit un élément U'_1 tel que $Y' \cap Z' \subset U'_1 \subset X'$. Posant alors

$$T = T'_1 \vee (Y \cap Z) = T'_1 \cup (Y \cap Z) \cup \{ T'_1 \vee (Y' \cap Z') \} = T'_1 \cup (Y \cap Z),$$

il vient

$$T' = \{ T'_1 \cup (Y \cap Z) \} \cap P_\gamma = T'_1 \cup (Y' \cap Z') = T'_1 \qquad \text{et} \qquad T'' = Y'' \cap Z'';$$

il en résulte

$$Y' \cap Z' \subset T' \subset Y' \qquad \text{et} \qquad Y'' \cap Z'' = T'' \subseteq Y''$$

donc

$$Y \cap Z \subset T \subset Y;$$

posant, dans l'autre cas, $U = U'_1 \vee (Y \cap Z)$, on aboutirait de même à $Y \cap Z \subset U \subset X$: $T(\Phi_\gamma)$ satisfait à la condition C_2.

La démonstration est analogue en ce qui concerne la condition C_1, il existe alors T'_2 tel que $Y' \cap Z' \subset T'_2 \subset Y'$ et par suite, $T = T'_2 \vee (Y \cap Z)$ satisfait à $Y \cap Z \subset T \subset Y$.

Dans le cas semi-modulaire, il existe un élément T'_3 qui satisfait à $Y' \cap Z' \subset T'_3 \subset Y'$ et à $(X' \vee T'_3) \cap Z' = X'$; posant alors $T = T'_3 \vee (Y \cap Z)$ on a $Y \cap Z \subset T \subset Y$, $T' = T'_3$ et

$$\begin{aligned}(X \vee T) \cap Z &= \{ X \cup T \cup (X' \vee T'_3) \} \cap Z \\ &= (X \cap Z) \cup (T \cap Z) \cup \{ (X' \vee T'_3) \cap Z \} \\ &= X \cup (T \cap Z) \cup \{ (X' \vee T'_3) \cap Z' \} = X \cup (T \cap Z) \cup X';\end{aligned}$$

de $T \cap Z \subseteq Y \cap Z \subset X$ et de $X' \subseteq X$ résulte alors $(X \vee T) \subset Z = X$: $T(\Phi_\gamma)$ est semi-modulaire.

Théorème 6.3. — *Le treillis $T(D)$ des sous-demi-groupes d'un demi-groupe D est modulaire (resp. distributif) si et seulement si :*

1° *D satisfait aux systèmes de conditions équivalents* (III), (III'), III'') *et* (III *bis*);

2° *Chaque groupe maximal* Γ_e *est de l'un des deux types suivants :*

(*a*) Γ_e *a le treillis* $\mathfrak{T}$ (Γ_e) *de ses sous-groupes modulaire* (*resp. distributif*) *si e constitue à lui seul un zéro-demi-groupe d'un côté* S_γ *de la décomposition de* I;

(*b*) $\Gamma_e = \{ e \}$ *si e n'a pas cette propriété.*

Ces conditions sont nécessaires, la seconde car $T(P_\gamma)$ est pour tout γ modulaire (resp. distributif).

Pour établir leur caractère suffisant, nous montrerons que chaque $T(\Phi_\gamma)$ est modulaire (resp. distributif). Compte tenu de la condition 2° ci-dessus et du théorème 5.3, $T(P_\gamma)$ est pour tout γ modulaire (resp. distributif).

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse $T(P_\gamma)$ distributif et considérons trois éléments X, Y et Z de $T(\Phi_\gamma)$ et leurs intersections X', Y' et Z' avec P_γ. $T(P_\gamma)$ étant distributif, on a

$$Z' \cap (Y' \vee X') = (Z' \cap Y') \vee (Z' \cap X')$$

et par suite :

$$\begin{aligned} Z \cap (Y \vee X) &= Z \cap \{ Y \cup X \cup (Y' \vee X') \} \\ &= (Z \cap Y) \cup (Z \cap X) \cup \{ Z \cap (Y' \vee X') \} \\ &= (Z \cap Y) \cup (Z \cap X) \cup \{ Z' \cap (Y' \vee X') \} \\ &= (Z \cap Y) \cup (Z \cap X) \cup \{ (Z' \cap Y') \vee (Z' \cap X') \} \\ &= (Z \cap Y) \cup (Z \cap X) \cup \{ (Z \cap Y)' \vee (Z \cap X)' \} \\ &= (Z \cap Y) \vee (Z \cap X); \end{aligned}$$

$T(\Phi_\gamma)$ est distributif.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse $T(P_\gamma)$ modulaire et considérons trois éléments X, Y et Z de $T(\Phi_\gamma)$ tels que $Z \supseteq X$. Leurs intersections X', Y' et Z' avec P_γ sont telles que $Z' \supseteq X'$. $T(P_\gamma)$ étant modulaire, on a

$$Z' \cap (Y' \vee X') = (Z' \cap Y') \vee (Z' \cap X');$$

n raisonnement analogue à celui fait dans le cas distributif montre que

$$Z \cap (Y \vee X) = (Z \cap Y) \vee (Z \cap X);$$

$T(\Phi_\gamma)$ est modulaire.

Remarque 6.1. — Si $T(D)$ est modulaire, et par conséquent si $T(D)$ est distributif, $T(D)$ est de plus le produit cardinal général des treillis $T(F_e)$ pour $e \in I$.

Soient, en effet, a un élément de F_e et b un élément de F_f avec $e \neq f$. Si $\{ e, f \}$ est un demi-treillis ($ef = fe$), on a $ab \in (a) \cup (b)$; si $\{ e, f \}$ est un zéro demi-groupe d'un côté ($ef \neq fe$), compte tenu de la condition 2° (b)

ci-dessus, on a $\Gamma_e = \{ e \}$ et $\Gamma_f = \{ f \}$; il en résulte : $[a] \vee [b] = \{ e, f \}$ et par suite, on a

$$ab \in (a) \cup (b) \cup \{ [a] \vee [b] \} = (a) \cup (b).$$

Dès lors $\forall A \in T(F_e)$ et $\forall B \in T(F_f)$ avec $e \neq f$, on a $A \vee B = A \cup B$ d'où il résulte, par une démonstration analogue à celle faite au théorème 6.1, que $T(D)$ est le produit cardinal général des treillis $T(F_e)$ pour $e \in I$.

Corollaire 6.1. — *Un demi-groupe cyclique fini dont la période commence à un rang inférieur ou égal à 5, a le treillis de ses sous-demi-groupes distributif.*

Ceci est une conséquence immédiate du résultat suivant dû à O. Ore [8] : la condition nécessaire et suffisante pour que le treillis $\mathcal{G}(G)$ des sous-groupes du groupe G soit distributif, est que le groupe G soit localement cyclique.

Chapitre VII.

Ce chapitre est consacré à l'énoncé et à la démonstration des conditions nécessaires et suffisantes pour que $T(D)$ satisfasse aux quatres conditions étudiées qui vont de la condition $\overline{C}_2$ à la modularité affaiblie.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\mathcal{K}^\lambda = \bigcup_{e \in K^\lambda} F_e, \qquad \mathcal{R} = \bigcup_{e \in R} F_e, \qquad \mathcal{T} = \bigcup_{e \in R} \Gamma_e \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Q} = \mathcal{R} - \mathcal{T}.$$

Γ désignera un groupe isomorphe aux groupes maximaux relatifs aux idempotents de R dont les composantes seront encore appelées N et L. Comme on l'a vu au début du chapitre III, $\mathcal{T}$ est isomorphe au produit direct $N \times L \times \Gamma$ et de plus tout sous-demi-groupe $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$ est isomorphe au produit direct $N' \times L' \times \Gamma'$, où N', L' et Γ' sont les projections de $\mathcal{T}'$ sur N, L et Γ. Enfin, si X est un élément de $T(D)$, nous poserons

$$\mathcal{K}_X^\lambda = X \cap \mathcal{K}^\lambda, \qquad \mathcal{R}_X = X \cap \mathcal{R}, \qquad \mathcal{T}_X = X \cap \mathcal{T} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Q}_X = X \cap \mathcal{Q};$$

appelant N_X, L_X, Γ_X les composantes de $\mathcal{T}_X$, nous avons alors

$$X = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{K}_X^\lambda \right) \cup \mathcal{R}_X, \qquad \mathcal{R}_X = \mathcal{T}_X \cup \mathcal{Q}_X \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_X = N_X \times L_X \times \Gamma_X.$$

Si Y est un autre élément de $T(D)$, nous avons alors immédiatement

$$\mathcal{K}_{X \cap Y}^\lambda = \mathcal{K}_X^\lambda \cap \mathcal{K}_Y^\lambda, \qquad \mathcal{R}_{X \cap Y} = \mathcal{R}_X \cap \mathcal{R}_Y, \qquad \mathcal{T}_{X \cap Y} = \mathcal{T}_X \cap \mathcal{T}_Y,$$
$$\mathcal{Q}_{X \cap Y} = \mathcal{Q}_X \cap \mathcal{Q}_Y \qquad N_{X \cap Y} = N_X \cap N_Y, \qquad L_{X \cap Y} = L_X \cap L_Y$$

et

$$\Gamma_{X \cap Y} = \Gamma_X \cap \Gamma_Y;$$

nous avons en effet convenu de représenter le sous-demi-groupe vide de $\mathcal{P}$ par n'importe quel triplet de sous-demi-groupes de N, L et Γ dont l'un au moins est vide.

Relativement à l'union, nous avons :

a. $\mathcal{K}^\lambda_{X \vee Y} = \mathcal{K}^\lambda_X \vee \mathcal{K}^\lambda_Y$ car un produit fini d'éléments de D n'est dans $\mathcal{K}^\lambda$ que si tous les facteurs y sont.

b. $\mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y = (\mathcal{P}_X \vee \mathcal{P}_Y) \cup \mathcal{Q}_X \cup \mathcal{Q}_Y$; ceci est une conséquence immédiate de la propriété « $ab \in \{[a] \vee [b]\} \cup (a) \cup (b)$, $\forall a$ et $b \in \mathcal{R}$ », laquelle assure la stabilité du second membre.

c. $\mathcal{P}_X \vee \mathcal{P}_Y = (N_X \cup N_Y) \times (L_X \cup L_Y) \times (\Gamma_X \vee \Gamma_Y)$ si $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{P}_Y$ sont non vides; cela résulte de la structure de $\mathcal{P}$.

Nous avons de plus les deux propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 7.1. — *Si D satisfait aux systèmes de conditions* (I), (I′) *ou* (I″) *et si $\mathcal{R}_X$ et $\mathcal{R}_Y$ sont non vides, alors nous avons*

$$\mathcal{R}_{X \vee Y} = \mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y \textit{ et par suite } \mathcal{P}_{X \vee Y} = \mathcal{P}_X \vee \mathcal{P}_Y.$$

$\mathcal{R}_X$ et $\mathcal{R}_Y$ étant non vides, considérons un élément $e = (n, l)$ de $\mathcal{R}_X$ et un élément $f = (n', l')$ de $\mathcal{R}_Y$. Il nous suffit de vérifier, moyennant l'existence de ces éléments e et f, que le complexe $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{K}^\lambda_{X \vee Y}\right) \cup (\mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y)$ est stable.

Montrons d'abord que nous avons : $\mathcal{K}^\lambda_Y . \mathcal{R}_X$ et $\mathcal{R}_X . \mathcal{K}^\lambda_Y \subseteq \mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$ Soient x un élément de $\mathcal{R}_X$ et y un élément de $\mathcal{K}^\lambda_Y$, compte tenu de la condition 4° du système (I), les produits xy et yx appartiennent à $(x) \vee (e_y e_x e_y)$; il nous reste à montrer que le produit $e_y e_x e_y$ appartient à $\mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$. Posant $e_x = (n_x, l_x)$, nous sommes amenés à distinguer deux cas : $\lambda \in \{1, 2\}$ et $\lambda \in \Lambda' = \Lambda - \{1, 2\}$. Dans le premier, si $\lambda = 1$ par exemple, on a

$$e_y e_x e_y = (n_1, l_x) \qquad \text{et} \qquad e_y f e_y = (n_1, l')$$

donc

$$(n_1, l_x) = (n_1, l')(n_x, l_x) \in \mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y.$$

Dans le second, $\lambda = \lambda' \in \Lambda'$, on a

$$e_y e_x e_y = (n_{\lambda'}, l_{\lambda'}) = e_y f e_y \in \mathcal{R}_Y.$$

Montrons maintenant que si λ et μ sont deux indices distincts de Λ, nous avons $\mathcal{K}^\lambda_Y . \mathcal{K}^\mu_X \subseteq \mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$. Soient y_λ un élément de $\mathcal{K}^\lambda_Y$ et x_μ un élément de $\mathcal{K}^\mu_X$, compte tenu de la condition 11° du système (I′), le produit $y_\lambda x_\mu$ est égal à $e_{y_\lambda}\ e_{x_\mu}$. Posant $i = e_{y_\lambda}, j = e_{x_\mu}$, $i' = ifi$ et $j' = jej$, et utilisant les propriétés multiplicatives de R, il vient

$$y_\lambda x_\mu = ij = (ij)(jej)(ifi)(ij) = (ij')(i'j);$$

cependant, nous avons

$$ij' \in \mathcal{K}_Y^\lambda . \mathcal{R}_X \subseteq \mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y \qquad \text{et} \qquad i'j \in \mathcal{R}_Y . \mathcal{K}_X^\mu \subseteq \mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y;$$

il en résulte que le produit $y_\lambda x_\mu$ est bien élément de $\mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$.

Montrons enfin la stabilité annoncée. Soient r, s et z des éléments respectifs de $\mathcal{K}_{X\vee Y}^\lambda$, $\mathcal{K}_{X\vee Y}^\mu$ avec $\lambda \neq \mu$ et $\mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$, ils s'écrivent

$$r = x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_n y_n, \qquad s = x'_1 y'_1 \ldots x'_{n'} y'_{n'} \qquad \text{et} \qquad z = x''_1 y''_1 \ldots x''_{n''} y''_{n''},$$

les x_i, x'_i, x''_i, y_i, y'_i, y''_i étant éléments respectivement de $\mathcal{K}_X^\lambda$, $\mathcal{K}_X^\mu$, $\mathcal{R}_X$, $\mathcal{K}_Y^\lambda$, $\mathcal{K}_Y^\mu$ et $\mathcal{R}_Y$, omission devant être faite éventuellement des éléments x_1, y_n, x'_1, $y'_{n'}$, x''_1 et $y''_{n''}$. Le produit rz contient l'un des quatre binômes $y_n x''_1$, $y_n y''_1$, $x_n x''_1$ ou $x_n y''_1$; chacun d'eux étant élément de $\mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$, le produit rz peut s'écrire sous la forme $r_1 z_1$ avec $z_1 \in \mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$ et $r_1 \in \mathcal{K}_{X\vee Y}^\lambda$ contenant un facteur de moins que r; en raisonnant de proche en proche sur le nombre de facteurs dans l'écriture de r, nous voyons alors que le produit rz appartient à $\mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$. Quant au produit rs, il contient l'un des quatre binômes $y_n x'_1$, $y_n y'_1$, $x_n x'_1$ ou $x_n y'_1$; chacun d'eux étant élément de $\mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$, le produit rs peut s'écrire sous la forme $r_1 z_1 s_1$ avec $r_1 \in \mathcal{K}_{X\vee Y}^\lambda$, $z_1 \in \mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$ et $s_1 \in \mathcal{K}_{X\vee Y}^\mu$; de l'étude des produits de type rz résulte alors que le produit rs appartient à $\mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$.

Le complexe $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{K}_{X\vee Y}^\lambda\right) \cup (\mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y)$ est donc bien stable et par conséquent égal à $X \vee Y$; on a donc $\mathcal{R}_{X\vee Y} = \mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_Y$ et par suite, $\mathcal{T}_{X\vee Y} = \mathcal{T}_X \vee \mathcal{T}_Y$.

PROPRIÉTÉ 7.2. — *Si D satisfait aux systèmes de conditions* (I), (I′) ou (I″) *et si $\mathcal{K}_X^\lambda$ est non vide, alors, pour tout élément T^λ de T ($\mathcal{K}^\lambda$), nous avons*

$$\mathcal{R}_{X\vee T^\lambda} = \mathcal{R}_X.$$

$\mathcal{K}_X^\lambda$ étant non vide, considérons un élément idempotent g de $\mathcal{K}_X^\lambda$. Il nous suffit de vérifier, moyennant l'existence de cet élément g, que le complexe $\left(\bigcup_{\mu\in\Lambda-\{\lambda\}} \mathcal{K}_X^\mu\right) \cup (\mathcal{K}_X^\lambda \vee T^\lambda) \cup \mathcal{R}_X$ est stable.

Montrons d'abord que les complexes $T^\lambda . \mathcal{R}_X$, $\mathcal{R}_X . T^\lambda$, $\mathcal{K}_X^\mu . T^\lambda$ et $T^\lambda . \mathcal{K}_X^\mu$ sont contenus dans $\mathcal{R}_X$. Soient t un élément de T^λ, x un élément de $\mathcal{R}_X$ et x_μ un élément de $\mathcal{K}_X^\mu$ avec $\lambda \neq \mu$, nous avons d'une part :

$$tx \quad \text{et} \quad xt \in (x) \vee (e_t e_x e_t) = (x) \vee (g e_x g) \subseteq \mathcal{R}_X$$

et d'autre part :

$$x_\mu t = e_{x_\mu} e_t = e_{x_\mu} g \in \mathcal{R}_X \quad \text{et} \quad t x_\mu = e_t e_{x_\mu} = g e_{x_\mu} \in \mathcal{R}_X.$$

Considérons alors des éléments arbitraires x_μ, s et x respectivement de $\mathcal{K}_X^\mu$, de $\mathcal{K}_X^\lambda \vee T^\lambda$ et de $\mathcal{R}_X$; s s'écrit : $s = x_1 t_1 x_2 t_2 \ldots x_n t_n$ avec $x_i \in \mathcal{K}_X^\lambda$ et $t_i \in T^\lambda$, omission devant être faite éventuellement des éléments x_1 et t_n. Le produit sx contient l'un des binômes $t_n x$ ou $x_n x$; chacun d'eux étant élément de $\mathcal{R}_X$, nous voyons, de proche en proche, que le produit sx appartient à $\mathcal{R}_X$. Quant au produit $x_\mu s$, il contient l'un des binômes $x_\mu x_1$ ou $x_\mu t_1$; chacun d'eux étant élément de $\mathcal{R}_X$, nous sommes ramenés à un produit du type xs, le produit $x_\mu s$ appartient à $\mathcal{R}_X$.

Le complexe $\left(\bigcup_{\mu \in \Lambda - \{\lambda\}} \mathcal{K}_X^\mu\right) \cup (\mathcal{K}_X^\lambda \vee T^\lambda) \cup \mathcal{R}_X$ est donc bien stable et par conséquent égal à $X \vee T^\lambda$; on a donc $\mathcal{R}_{X \vee T^\lambda} = \mathcal{R}_X$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les deux théorèmes fondamentaux de ce chapitre.

THÉORÈME 7.1. — *Le treillis $T(D)$ des sous-demi-groupes d'un demi-groupe D satisfait à la condition $\overline{C}_2$ (resp. à la condition $\overline{C}_1$ et à la semi-modularité affaiblie) si et seulement si :*

1° *D satisfait aux systèmes de conditions équivalentes* (I), (I′) *et* (I″);

2° *Chaque groupe maximal Γ_e a le treillis $\mathcal{G}(\Gamma_e)$ de ses sous-groupes satisfaisant à la condition C_2 (resp. à la condition C_1 et à la semi-modularité).*

Ces conditions sont nécessaires; pour la première, on l'a vu au chapitre IV; pour la seconde, cela résulte de ce que, pour tout e, $\mathcal{G}(\Gamma_e)$ est sous-treillis convexe de $T(D)$ d'élément minimal différent de la partie vide.

Avant de démontrer que ces conditions sont suffisantes, nous remarquerons que, compte tenu des théorèmes 5.1 et 6.2, elles impliquent :

1° $T(\mathcal{K}^\lambda)$ satisfait, pour tout λ à la condition C_2 (resp. à la condition C_1 et à la semi-modularité);

2° $T(\mathcal{T})$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$ (resp. à la condition $\overline{C}_1$ et à la semi-modularité affaiblie).

Considérons alors trois éléments X, Y et Z de $T(D)$ tels qu'on ait

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y.$$

Nous sommes amenés à distinguer trois cas :

Premier cas. — Il existe un indice λ de Λ tel qu'on ait $\mathcal{K}_X^\lambda \subset \mathcal{K}_Z^\lambda$.

Il résulte de cette inclusion stricte qu'on a

$$\mathcal{K}_Y^\lambda \cap \mathcal{K}_Z^\lambda \subset \mathcal{K}_X^\lambda \subset \mathcal{K}_Z^\lambda \subset \mathcal{K}_X^\lambda \vee \mathcal{K}_Y^\lambda.$$

Le treillis $T(\mathcal{K}^\lambda)$ satisfaisant soit (*a*) à la condition C_2, soit (*b*) à la condition C_1, soit (*c*) à la semi-modularité, on en déduit alors qu'il existe :

(*a*) soit un élément T_1^λ tel qu'on ait

$$\mathcal{K}_Y^\lambda \cap \mathcal{K}_Z^\lambda \subset T_1^\lambda \subset \mathcal{K}_Y^\lambda,$$

soit un élément U_1^λ tel qu'on ait

$$\mathcal{K}_Y^\lambda \cap \mathcal{K}_Z^\lambda \subset U_1^\lambda \subset \mathcal{K}_X^\lambda;$$

(*b*) un élément T_2^λ tel qu'on ait

$$\mathcal{K}_Y^\lambda \cap \mathcal{K}_Z^\lambda \subset T_2^\lambda \subset \mathcal{K}_Y^\lambda;$$

(*c*) un élément T_3^λ tel qu'on ait à la fois :

$$\mathcal{K}_Y^\lambda \cap \mathcal{K}_Z^\lambda \subset T_3^\lambda \subset \mathcal{K}_Y^\lambda \qquad \text{et} \qquad \mathcal{K}_X^\lambda = (\mathcal{K}_X^\lambda \vee T_3^\lambda) \cap \mathcal{K}_Z^\lambda.$$

Dès lors l'élément $T_i = (Y \cap Z) \vee T_i^\lambda$ est strictement compris entre $Y \cap Z$ et Y puisque $\mathcal{K}_{T_i}^\lambda = T_i^\lambda$ et de même l'élément $U_1 = (Y \cap Z) \vee U_1^\lambda$ est strictement compris entre $Y \cap Z$ et X; ceci établit la réciproque, dans ce premier cas, pour les conditions $\overline{C}_2$ et $\overline{C}_1$.

De plus, dans l'éventualité (*c*), $(X \vee T_3) \cap Z$ est égal à X; en effet de $\mathcal{K}_{T_3}^\lambda = T_3^\lambda$ résulte

$$\mathcal{K}_{(X \vee T_3) \cap Z}^\lambda = (\mathcal{K}_X^\lambda \vee T_3^\lambda) \cap \mathcal{K}_Z^\lambda = \mathcal{K}_X^\lambda,$$

de $\mathcal{K}_{T_3}^\mu = \mathcal{K}_{Y \cap Z}^\mu$ pour $\mu \neq \lambda$ résulte également

$$\mathcal{K}_{(X \vee T_3) \cap Z}^\mu = \mathcal{K}_X^\mu,$$

et, $\mathcal{K}_X^\lambda$ étant non vide, compte tenu de la propriété 7.2, nous avons

$$\mathcal{R}_{X \vee T_3} = \mathcal{R}_{X \vee T_3^\lambda} = \mathcal{R}_X \qquad \text{et par suite} \qquad \mathcal{R}_{(X \vee T_3) \cap Z} = \mathcal{R}_X.$$

Le théorème est donc entièrement démontré dans ce premier cas.

Avant d'aborder les deux autres cas où nous supposerons que $\mathcal{K}_X^\lambda$ est égal à $\mathcal{K}_Z^\lambda$ pour tout indice λ de Λ, donnons quelques conséquences de cette hypothèse. Tout d'abord, elle implique $\mathcal{R}_X \subset \mathcal{R}_Z$. Il résulte alors de cette inclusion stricte que $\mathcal{R}_X$ et $\mathcal{R}_Y$ sont non vides. En effet, de $\mathcal{R}_X = \emptyset$ résulte $X = \mathcal{K}_X^\lambda$ pour un certain λ de Λ; de $X \cap Y \neq \emptyset$ résulte alors $\mathcal{K}_Y^\lambda \neq \emptyset$; compte tenu de la propriété 7.2, nous avons donc $\mathcal{R}_{X \vee Y} = \mathcal{R}_Y$; ceci entraîne $\mathcal{R}_Z \subset \mathcal{R}_Y$ et par suite :

$$\mathcal{R}_Y \cap \mathcal{R}_Z = \mathcal{R}_Z \subseteq \mathcal{R}_X \subset \mathcal{R}_Z,$$

ce qui est absurde. De $\mathcal{R}_Y = \emptyset$ résulte de manière analogue $\mathcal{R}_{X \vee Y} = \mathcal{R}_X$; ceci entraîne $\mathcal{R}_X \subset \mathcal{R}_Z \subseteq \mathcal{R}_X$, également absurde.

Dans ces conditions, compte tenu de la propriété 7.1, nous avons

$$\mathcal{R}_{X \vee Y} = \mathcal{R}_X \vee \mathcal{R}_{\bar{Y}} = (\mathcal{T}_X \vee \mathcal{T}_Y) \cup \mathcal{Q}_X \cup \mathcal{Q}_Y.$$

De plus, de $\mathcal{Q}_Y \cap \mathcal{Q}_Z \subseteq \mathcal{Q}_X \subseteq \mathcal{Q}_Z \subseteq \mathcal{Q}_X \cup \mathcal{Q}_Y$ résulte $\mathcal{Q}_X = \mathcal{Q}_Z$ et par suite $\mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}_Z$. Il résulte de cette inclusion stricte qu'on a

$$\mathcal{T}_Y \cap \mathcal{T}_Z \subset \mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}_Z \subset \mathcal{T}_X \vee \mathcal{T}_Y.$$

Deuxième cas. — $\mathcal{K}_X^\lambda$ est égal à $\mathcal{K}_Z^\lambda$ pour tout indice λ de Λ et l'on a $\mathcal{T}_Y \cap \mathcal{T}_Z \neq \emptyset$.

Le treillis $T(\mathcal{T})$ satisfaisant soit (*a*) à la condition $\overline{C}_2$, soit (*b*) à la condition $\overline{C}_1$, soit (*c*) à la semi-modularité affaiblie, on en déduit alors qu'il existe :

(*a*) soit un élément T'_1 tel qu'on ait

$$\mathcal{T}_Y \cap \mathcal{T}_Z \subset T'_1 \subset \mathcal{T}_Y,$$

soit un élément U'_1 tel qu'on ait

$$\mathcal{T}_Y \cap \mathcal{T}_Z \subset U'_1 \subset \mathcal{T}_X;$$

(*b*) un élément T'_2 tel qu'on ait

$$\mathcal{T}_Y \cap \mathcal{T}_Z \subset T'_2 \subset \mathcal{T}_Y;$$

(*c*) un élément T'_3 tel qu'on ait à la fois

$$\mathcal{T}_Y \cap \mathcal{T}_Z \subset T'_3 \subset \mathcal{T}_Y \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_X = (\mathcal{T}_X \vee T'_3) \cap \mathcal{T}_Z.$$

Dès lors l'élément $T_i = (Y \cap Z) \vee T'_i$ est strictement compris entre $Y \cap Z$ et Y; en effet $\mathcal{R}_{Y \cap Z}$ et $\mathcal{R}_{T'_i}$ étant non vides, compte tenu de la propriété 7.1, nous avons : $\mathcal{T}_{T_i} = \mathcal{T}_{Y \cap Z} \vee \mathcal{T}_{T'_i} = T'_i$; de même l'élément $U_1 = (Y \cap Z) \vee U'_1$ est strictement compris entre $Y \cap Z$ et X; ceci établit la réciproque, dans ce second cas, pour les conditions $\overline{C}_2$ et $\overline{C}_1$.

De plus, dans l'éventualité (*c*), $(X \vee T_3) \cap Z$ est égal à X; en effet de $\mathcal{K}_{T_3}^\lambda = \mathcal{K}_{Y \cap Z}^\lambda$ résulte $\mathcal{K}_{(X \vee T_3) \cap Z}^\lambda = \mathcal{K}_X^\lambda$, et, $\mathcal{T}_{T'_3} = T'_3$ et $\mathcal{T}_X$ étant non vides, compte tenu de la propriété 7.1, nous avons

$$\mathcal{T}_{X \vee T_3} = \mathcal{T}_{X \vee T'_3} = \mathcal{T}_X \vee T'_3$$

et par suite :

$$\mathcal{T}_{(X \vee T_3) \cap Z} = (\mathcal{T}_X \vee T'_3) \cap \mathcal{T}_Z = \mathcal{T}_X$$

d'où il résulte

$$\mathcal{R}_{(X \vee T_3) \cap Z} = \mathcal{R}_X$$

puisqu'on a $\mathcal{Q}_X = \mathcal{Q}_Z$.

Le théorème est donc également démontré dans ce second cas.

Troisième cas. — $\mathcal{K}_X^\lambda$ est égal à $\mathcal{K}_Z^\lambda$ pour tout indice λ de Λ et l'on a

$$\mathcal{P}_Y \cap \mathcal{P}_Z = \emptyset.$$

Dans ce cas, il existe au moins un indice λ de Λ pour lequel $\mathcal{K}_Y^\lambda \cap \mathcal{K}_Z^\lambda \neq \emptyset$. Cet indice ne peut pas être élément de Λ' car, $\mathcal{R}_Y$ et $\mathcal{R}_Z$ étant non vides, de $\lambda = \lambda' \in \Lambda'$ résulterait que l'élément $(n_{\lambda'}, l_{\lambda'})$ appartient à $\mathcal{P}_Y$ et à $\mathcal{P}_Z$. Supposons donc, par exemple, que l'indice λ soit égal à 1. $\mathcal{P}_Y$ et $\mathcal{P}_Z$ étant non vides, on en déduit alors $n_1 \in N_Y \cap N_Z$; comme, par ailleurs $\Gamma_Y \cap \Gamma_Z$ est non vide, l'égalité $\mathcal{P}_Y \cap \mathcal{P}_Z = \emptyset$ implique $L_Y \cap L_Z = \emptyset$ et par suite, $L_Y \cap L_Z \subset L_X \subseteq L_Z \subseteq L_X \cup L_Y$, d'où il résulte $L_X = L_Z$; l'inégalité stricte $\mathcal{P}_X \subset \mathcal{P}_Z$ est alors conséquence de l'une ou l'autre des inclusions strictes $N_X \subset N_Z$ ou $\Gamma_X \subset \Gamma_Z$.

Dans ces conditions, l désignant un élément quelconque de L_Y, E désignant le sous-groupe unité de Γ, nous avons :

$$\{n_1\} \times \{l\} \times E = (n_1, l) \subset \mathcal{P}_Y;$$

en effet, de $\mathcal{P}_Y = \{n_1\} \times \{l\} \times E$ résulterait :

(*a*) $N_X \subseteq N_Z \subseteq N_X \cup N_Y = N_X \cup \{n_1\} = N_X$ puisque n_1 est élément de N_X;

(*b*) $\Gamma_X \subseteq \Gamma_Z \subseteq \Gamma_X \vee \Gamma_Y = \Gamma_X \vee E = \Gamma_X$;

or les deux égalités $N_X = N_Z$ et $\Gamma_X = \Gamma_Z$ sont simultanément impossibles.

De plus, le sous-ensemble $T = (Y \cap Z) \cup (\{n_1\} \times \{l\} \times E)$ est stable puisque d'une part $Y \cap Z$ est contenu dans $\mathcal{K}^1$ et puisque d'autre part (n_1, l) est un zéro pour $\mathcal{K}^1$.

De tout ceci résulte d'abord $Y \cap Z \subset T \subset Y$ puisqu'on a

$$\emptyset = \mathcal{P}_{Y \cap Z} \subset \mathcal{P}_T = (n_1, l) \subset \mathcal{P}_Y.$$

De plus, $(X \vee T) \cap Z$ est égal à X; en effet, d'une part, de $\mathcal{K}_T^\lambda = \mathcal{K}_{Y \cap Z}^\lambda$ résulte

$$\mathcal{K}_{(X \vee T) \cap Z}^\lambda = \mathcal{K}_X^\lambda;$$

d'autre part, de $X \vee T = X \vee (\{n_1\} \times \{l\} \times E)$ et de la propriété 7.1, résulte

$$\mathcal{P}_{X \wedge T} = (N_X \cup \{n_1\}) \times (L_X \cup \{l\}) \times (\Gamma_X \vee E) = N_X \times (L_X \cup \{l\}) \times \Gamma_X$$

et par suite, L_X étant égal à L_Z, nous avons

$$\mathcal{P}_{(X \vee T) \cap Z} = (N_X \cap N_Z) \times [(L_X \cup \{l\}) \cap L_Z] \times (\Gamma_X \vee \Gamma_Z) = \mathcal{P}_X$$

d'où il résulte $\mathcal{R}_{(X \vee T) \cap Z} = \mathcal{R}_X$ puisqu'on a $\mathcal{Q}_X = \mathcal{Q}_Z$.

Le théorème est démontré dans ce troisième et dernier cas.

Le résultat annoncé au corollaire 2.2 est une conséquence immédiate de ce théorème.

THÉORÈME 7.2. — *Le treillis $T(D)$ des sous-demi-groupes d'un demi-groupe D est modulaire affaibli si et seulement si :*

1° *D satisfait aux systèmes de conditions équivalents* (II), (II′) *et* (II″);

2° *Chaque groupe maximal Γ_e est de l'un des deux types suivants :*

(*a*) *Γ_e a le treillis $\mathcal{C}(\Gamma_e)$ de ses sous-groupes modulaire si e constitue à lui seul un zéro-demi-groupe d'un côté de la décomposition de $I - R$ ou si e est élément de R;*

(*b*) *$\Gamma_e = \{ e \}$ si e n'a pas cette propriété.*

Ces conditions sont nécessaires; pour la première, on l'a vu au chapitre IV; pour la seconde, cela résulte de ce que, pour tout indice λ, $T(\mathcal{K}^\lambda)$ est modulaire. En effet, si $T(\mathcal{K}^\lambda)$ n'était pas modulaire, il existerait un sous-treillis de générateurs X_1, Y_1 et Z_1 de $T(\mathcal{K}^\lambda)$, isomorphe à $\mathcal{C}_0$; $\mathcal{R}$ étant idéal bilatère de D, les trois éléments $X = X_1 \cup \mathcal{R}$, $Y = Y_1 \cup \mathcal{R}$ et $Z = Z_1 \cup \mathcal{R}$ engendreraient un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à $\mathcal{C}_0$ dans lequel $Y \cap Z$ ne serait pas vide : $T(D)$ ne serait pas modulaire affaibli.

Ces conditions sont suffisantes. En effet, reprenant les raisonnements faits au cours de la démonstration du théorème précédent, nous voyons successivement que :

(*a*) $\mathcal{K}^\lambda_X \subset \mathcal{K}^\lambda_Z$ est impossible puisque $T(\mathcal{K}^\lambda)$ est modulaire;

(*b*) $\mathcal{T}_Y \cap \mathcal{T}_Z \neq \emptyset$ est impossible puisque $T(\mathcal{T})$ est modulaire affaibli;

(*c*) Le dernier cas ne peut pas se présenter puisque, ou bien $K^1 = K^2 = \emptyset$, ou bien $N = \{ n_1 \}$ et $\Gamma = E$, ce qui rend impossible les inclusions strictes $N_X \subset N_Z$ ou $\Gamma_X \subset \Gamma_Z$.

L'hypothèse « il existe X, Y et Z tels que $\emptyset \subset Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$ » est absurde : $T(D)$ est modulaire affaibli.

Le résultat annoncé au corollaire 2.3 est une conséquence immédiate de ce théorème.

CHAPITRE VIII.

Ce chapitre est réservé à l'étude de cas particuliers. Rappelons que celui des demi-groupes cycliques a été résolu aux corollaires 1.1 et 6.1, que celui des demi-groupes idempotents l'a été au chapitre II et que celui des demi-groupes qui sont produit direct d'un groupe périodique et d'un demi-groupe rectangulaire l'a été au chapitre V.

Le cas où D est réunion de groupes nous a paru intéressant en raison du théorème suivant :

THÉORÈME 8.1. — *Si D satisfait aux systèmes de conditions équivalents* (I), (I′) *ou* (I″), *l'application $a \to a.e_a$ est un endomorphisme de D sur la réunion D^* de ses groupes maximaux.*

Il nous suffit de vérifier ici que, pout tout couple a et b d'éléments de D, les produits $(a.e_a)$ $(b.e_b)$ et $ab.e_{ab}$ sont égaux. De la propriété « D est bande sur I de ses fuseaux » résulte déjà l'égalité $e_{ab} = e_a.e_b$. Compte tenu de la structure de I, il nous suffit d'examiner les quatre cas suivants :

1° $(e_a) \vee (e_b)$ est rectangulaire. Du corollaire 3.1 résulte

$$be_a = (be_b)e_a \qquad \text{et} \qquad ae_b = (ae_a)e_b.$$

Nous avons alors

$$abe_{ab} = abe_a e_b = a(be_b e_a)e_b = abe_b = ae_b b = (ae_a e_b)b = (ae_a)(be_b).$$

2° e_a et e_b appartiennent à des K^λ distincts. Du corollaire 3.7 résulte : $ab = e_a e_b = ae_a be_b$ et par suite, $abe_{ab} = (ae_a)(be_b)$.

3° e_a est élément de R_γ, e_b est élément de R_δ et l'on a $\gamma < \delta$ et $e_a.e_b = e_a$. De la condition 7″° de (I″) résulte

$$ab \in (a), \qquad e_a b = e_a \qquad \text{et} \qquad ae_a be_b = ae_a.$$

Nous avons alors

$$abe_a e_b = (ab)e_a = e_a(ab) = ae_a b = ae_a = (ae_a)(be_b).$$

4° e_a est élément de R_γ, e_b est élément de R_δ et l'on a $\gamma < \delta$ et $e_a.e_b \neq e_a$. De la condition 10″° de (I″) résulte $ab = ae_a be_b$. Compte tenu de l'égalité $e_a = e_a e_b e_a$, nous avons enfin

$$abe_{ab} = e_{ab}ab = e_a e_b(ae_a be_b) = (e_a e_b e_a)abe_b = (ae_a)(be_b).$$

Remarquons que si φ est l'endormorphisme ci-dessus, ψ l'endomorphisme $a \to e_a$ définissant D comme bande sur I de ses fuseaux et ψ^* la restriction de ψ à D^*, ces trois applications sont liées par la relation : $\psi = \psi^* \circ \varphi$.

Dans le cas où D est réunion de groupes, les fuseaux se réduisant aux groupes maximaux, les complexes $F_e - F_e^2$ sont vides. Nous avons donc :

THÉORÈME 8.2. — *Si D est réunion de groupes, le système de conditions* (I″) *se réduit aux conditions* 1°, 2°, 3° *et à la première partie de la condition* 7″°. *Le demi-groupe D est alors entièrement déterminé par la donnée de I et des groupes maximaux.*

Étudions maintenant le cas où D est abélien. Cette hypothèse supplémentaire implique :

1° $\mathfrak{T}(\Gamma_e)$ est modulaire pour tout e;

2° Les R_γ sont réduits à un élément.

Dès lors, K^1 et K^2 sont vides et les conditions 2° des théorèmes 6.2, 6.3 dans le cas modulaire, 7.1 et 7.2 sont remplies.

Compte tenu de ces remarques, nous avons donc :

THÉORÈME 8.3. — *Si D est abélien, les conditions $\overline{C}_2$, $\overline{C}_1$, semi-modulaire affaibli et modulaire affaibli, d'une part, et les conditions C_2, C_1, semi-modulaire et modulaire, d'autre part, sont équivalentes.*

Nous rappellerons aussi que le cas où $T(D)$ est une chaîne avait été étudié et résolu par T. TAMURA [11]. Les demi-groupes qui ont, pour treillis de sous-demi-groupes, une chaîne, sont de l'un des types suivants :

1° Groupes de types p^∞;

2° Groupes cycliques finis d'ordre p^k (p premier);

3° Demi-groupes cycliques finis d'ordre $p^k + 1$ (p premier) ayant un seul terme irrégulier;

4° Demi-groupes cycliques finis d'ordre $p^k + 2$ (p premier, $p \neq 2$) ayant deux termes irréguliers.

Signalons enfin que si l'on suppose à la fois que $T(D)$ est complémenté et que $T(D)$ satisfait à la condition $\overline{C}_2$, alors D est réduit à l'ensemble I de ses idempotents. En effet, tout sous-demi-groupe non vide de D a, puisque D est périodique, une intersection non vide avec I; dès lors, si I admet un complément, ce dernier est vide et D est réduit à I. En particulier, nous remémorant les résultats du corollaire 2.1, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME 8.4. — *Il y a équivalence entre les quatre proprositions suivantes :*

1° *$T(D)$ est égal à $\mathfrak{P}(D)$;*

2° *$T(D)$ est un treillis de Boole;*

3° *$T(D)$ est complémenté et satisfait à la condition C_2;*

4° *D est idempotent et de « type $ef = e$ ou f ».*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). — *The algebraic theory of semigroups.* Providence, American mathematical Society, 1961 (*Mathematical Surveys*, 7).

[2] CLIFFORD (A. H.). — Bands of semigroups, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 5, 1954, p. 499-504.

[3] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). — *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques.* Paris, Gauthier-Villars, 1953 (*Cahiers scientifiques*, 21).

[4] DUBREIL (Paul). — Demi-groupes d'endomorphismes, *Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres*, t. 14, 1960-1962, n° 16.

[5] FORSYTHE (Georges E.). — SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 6, 1955, p. 443-447.

[6] MAC LEAN (David). — Idempotent semigroups, *Amer. math. Monthly*, t. 61, 1954, p. 110-113.

[7] MILLER (D. D.) and CLIFFORD (A. H.). — Regular $\mathcal{D}$-classes in semigroups, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 82, 1956, p. 270-280.

[8] ORE (Oystein). — Structures and group theory, *Duke math. J.*, t. 4, 1938, p. 247-269.

[9] ŠEVRIN (L. N.). — Semigroups with certain types of subsemigroup lattices [en russe], *Dokl. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, t. 138, 1961, p. 796-798; *Soviet Math.*, t. 2, 1961, p. 737-740.

[10] SUZUKI (Michio). — *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups.* Berlin, Springer-Verlag, 1956 (*Ergebnisse der Mathematik*, Neue Folge, 10. Reihe : *Gruppentheorie*).

[11] TAMURA (Takayuki). — On a monoid whose submonoids form a chain, *J. Gakugei, Tokushima Univ.*, t. 5, 1954, p. 8-16.

[12] TETSUYA (K.), HASHIMOTO (T.), AKAZAWA (T.), SHIBATA (R.), INUI (T.) and TAMURA (T.) — All semigroups of order at most 5, *J. Gakugei, Tokushima Univ.*, t. 6, 1955, p. 19-39.

Certains résultats de ce travail ont été résumés en quelques Notes de l'auteur aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences :*

[CR 1] EGO (Michel). — Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est distributif, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 252, 1961, p. 2490-2492.

[CR 2] EGO (Michel). — Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est modulaire ou semi-modulaire, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 254, 1962, p. 1723-1725.

CR 3] EGO (Michel). — Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes satisfait aux conditions $\overline{C}_2$, C_2, $\overline{C}_1$ ou C_1, à la semi-modularité affaiblie ou à la modularité affaiblie, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 255, 1962, p. 1840-1842.

CR 4] EGO (Michel). — Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes satisfait aux conditions $\overline{C}_2$, C_2, $\overline{C}_1$, ou C_1, à la semi-modularité affaiblie ou à la modularité affaiblie, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 255, 1962, p. 2699-2701.

(Manuscrit reçu le 25 janvier 1963.)

Michel EGO, Att. Rech. C. N. R. S.,
5, rue Général Pershing, Clermont (Oise).