

BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur l'équation différentielle des coniques

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 83-85

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__83_1

© Bulletin de la S. M. F., 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur l'équation différentielle des coniques; par M. HALPHEN.

(Séance du 13 février 1879.)

Dans une Note insérée au Tome IV de ce *Bulletin*, j'ai indiqué un moyen de former immédiatement l'équation différentielle du cinquième ordre des coniques dans le plan. Je m'y fondais sur cette propriété, facile à reconnaître *a priori*, que l'équation ne doit contenir ni la variable indépendante, ni la fonction, ni sa dérivée première. Voici maintenant un nouveau procédé pour parvenir très-rapidement aussi à cette même équation. Soit

$$y = ax + b + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$$

l'équation d'une conique. Par deux dérivations, on obtient

$$y'' = (AC - B^2)(Ax^2 + 2Bx + C)^{-\frac{3}{2}}.$$

On en peut conclure que y'' , élevé à la puissance $-\frac{2}{3}$, est un polynôme du second degré arbitraire. Par suite, l'équation cherchée est la suivante :

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0,$$

ou, développée,

$$(1) \quad 9y''^2 y' - 45y'' y''' y^{1/3} + 40y'''^2 = 0.$$

Remarquons, en passant, que l'équation $(y''^{-\frac{2}{3}})'' = 0$ serait l'équation différentielle des paraboles.

L'intégration de l'équation (1) n'est pas sans intérêt; on y trouve l'application de plusieurs procédés d'abaissement classiques. Si l'on prend y'' pour variable et y''' pour fonction, on obtient la transformée

$$y'' = \xi, \quad y''' = \eta, \quad 9\xi^2(\eta\xi'' + \eta'^2) - 45\xi\eta\eta' + 40\eta^2 = 0.$$

Cette dernière est homogène en ξ, η ; elle l'est aussi en η, η', η'' . On a donc deux procédés pour l'abaisser au premier ordre. Prenons, par exemple, celui qui découle de la deuxième homogénéité. Il consiste à prendre une nouvelle fonction u en posant $\eta = e^{u d\xi}$. La transformée est alors

$$9\xi^2(u' + 2u^2) - 45\xi u + 40 = 0.$$

Cette dernière est une de celles qui s'intègrent au moyen d'une intégrale particulière. Or il existe manifestement deux intégrales de la forme $u = A\xi^{-1}$, et l'on trouve effectivement, par substitution,

$$9A^2 - 27A + 20 = 0,$$

équation dont les racines sont $\frac{5}{3}$ et $\frac{4}{3}$. En achevant l'intégration, on obtient

$$u = \frac{1}{3\xi} \left(5 - \frac{1}{c\xi^{\frac{2}{3}} + 1} \right).$$

Par une quadrature, on a ensuite

$$\eta = c' \xi^{\frac{4}{3}} \left(1 + c\xi^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{d\xi}{dx}.$$

Séparant les variables et effectuant la nouvelle quadrature, on parvient à cette nouvelle équation, en modifiant la constante c' ,

$$b(x + a)^2 = \frac{1 + c\xi^{\frac{2}{3}}}{\xi^{\frac{2}{3}}}$$

ou

$$y''^{-\frac{2}{3}} = b(x+a)^2 - c.$$

On retrouve ainsi la seconde des équations ci-dessus, exprimant que y'' est la puissance $-\frac{3}{2}$ d'un polynôme du second degré arbitraire. Deux quadratures ramènent ensuite l'équation finie qui a servi de point de départ.
