Bulletin de la S. M. F.

M. Zerner

Théorie de Hartogs et singularités des distributions

Bulletin de la S. M. F., tome 90 (1962), p. 165-184
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1962__90__165_0>

Bull. Soc. math. France,
90, 1962, p. 165 à 184.

THÉORIE DE HARTOGS ET SINGULARITÉS DES DISTRIBUTIONS.

PAR

MARTIN ZERNER

(Paris).

INDEX DES NOTATIONS.

I. — Fonctions analytiques à valeurs vectorielles.

Pour la démonstration des résultats énoncés sans preuve dans cette section, on pourra se reporter à GROTHENDIECK [7].

Soient E un espace vectoriel complexe localement convexe séparé (ELC), $\hat{E}$ son complété, F une fonction à valeurs dans E. On peut toujours considérer F comme fonction à valeurs dans $\hat{E}$, et il nous suffira donc de définir les fonctions analytiques à valeurs dans un ELC complet; nous dirons ensuite qu'une fonction à valeurs dans un ELC est analytique, si elle est analytique à valeurs dans le complété.

Supposons donc E complet et F définie sur un domaine (ouvert connexe) Δ du plan complexe. Les cinq propriétés suivantes sont alors équivalentes :

1° Pour tout $z \in \Delta$, le rapport

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}$$

possède une limite quand h tend vers zéro.

2° F est une fois continûment dérivable (au sens réel) et

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

3° F est continue, et pour tout contour Γ rectifiable et homotope à zéro dans Δ,

$$\int_\Gamma F(z)\, dz = 0.$$

4° Tout $z_0 \in \Delta$ possède un voisinage sur lequel $F(z)$ est somme d'une série

$$F(z) = \sum_{k \geqq 0} a_k (z - z_0)^k.$$

5° Pour toute forme linéaire continue e' sur E, la fonction $\langle e', F \rangle$ est holomorphe sur Δ.

Si F possède ces propriétés, nous dirons qu'elle est *holomorphe à valeurs dans E sur Δ*.

Les fonctions holomorphes à valeurs vectorielles possèdent les propriétés usuelles des fonctions holomorphes, en particulier :

Formule intégrale de Cauchy :

$$(1/2i\pi) \int_\Gamma F(w)\, dw/(w - z) = F(z).$$

LEMME D'ABEL. — *Si la série figurant dans la propriété 4° converge, la suite $\{ a_k |z - z_0|^k \}$ est bornée. Si E est complet, et si la suite $\{ a_k r^k \}$ est bornée, alors, pour tout $r' < r$, la série converge uniformément quand $|z - z_0| \leqq r'$.*

REMARQUE. — On peut remplacer dans ce qui a été dit, « complet » par « quasi complet ».

EXEMPLE. 1. — Soit T un espace localement compact. Prenons pour E l'espace des fonctions continues à valeurs complexes sur T muni de la topologie de la convergence compacte. Il y a alors identité entre les fonctions holomorphes à valeurs dans E sur Δ et les fonctions continues sur $\Delta \times T$ qui sont, pour tout $t \in T$ fixé, holomorphes sur Δ.

EXEMPLE 2. — Le cas où E est l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions est étudié dans la thèse de C. LONG. Par 5° la donnée de F équivaut alors à la donnée d'une application linéaire continue de l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans l'espace des fonctions holomorphes sur Δ (à cause du théorème du graphe fermé). Si $F(z)$ est la solution d'un problème correctement posé, 4° exprime l'existence d'un développement de perturbation convergent.

Les mêmes remarques restent vraies quand $\mathcal{D}'$ est remplacé par l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées.

Revenons au cas général, et énonçons les résultats que nous aurons à utiliser par la suite.

LEMME 1. — *Si F est holomorphe à valeurs dans E sur Δ, alors, pour tout $z \in \Delta$, il existe un voisinage D de z et un espace normé N plongé dans E de façon continue tels que la restriction de F à D soit holomorphe à valeurs dans N.*

LEMME 2. — *Si E est une limite projective par les applications*

$$E \overset{u_\alpha}{\to} E_\alpha$$

une condition nécessaire et suffisante pour que F soit holomorphe à valeurs dans E est que, pour chaque α, $u_\alpha \circ F$ soit holomorphe à valeurs dans E_α.

LEMME 3. — *Soient E, E_0 deux ELC, E_0 continûment plongé dans E. Supposons F holomorphe à valeurs dans E sur Δ et de plus telle que l'application*

$$\varphi \to \int F(x+iy)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy$$

définisse une distribution à valeurs dans E_0 (c'est-à-dire une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans E_0). Alors F est holomorphe à valeurs dans E_0.

DÉMONSTRATION. — Il suffit bien entendu de supposer que $o \in \Delta$, et de démontrer que F est holomorphe à valeurs dans E_0 au voisinage de l'origine.

Soit α une fonction indéfiniment différentiable d'une variable réelle, vérifiant

$$\int \alpha(t)\,dt = 1/2\pi$$

et ayant son support dans l'intervalle $[r_0, r_1]$, $o < r_0 < r_1$, et r_1 assez petit pour que le disque de rayon r_1 centré à l'origine, soit contenu dans Δ.

En multipliant la formule de Cauchy par $\alpha(r)$, et en intégrant en r, on obtient

$$F(x+iy) = \int \frac{F(re^{i\theta})\,\alpha(r)\,re^{i\theta}}{re^{i\theta} - x - iy}\,dr\,d\theta$$

Dans cette expression, la quantité à intégrer est le produit de F par une fonction de (x, y) indéfiniment différentiable à valeurs dans $\mathcal{D}$ pour

$x+iy<r_0$. Cela montre que F est une fonction différentiable à valeurs dans E_0. Mais alors elle satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann (propriété 2° de la définition des fonctions holomorphes), ce qui achève la démonstration.

Cas de plusieurs variables complexes. — Tout ce qui a été dit s'étend sans difficulté. Remarquons que la propriéte 5° permet de donner immédiatement la version vectorielle du théorème de Hartogs-Osgood : une fonction séparément holomorphe sur un produit de domaines complexes y est holomorphe.

Fonctions analytiques réelles. — Si F est une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^l$ dans E telle que, pour toute forme $e'\in E'$, la fonction $\langle e', F\rangle$ soit analytique réelle, nous dirons que F est *scalairement analytique réelle.* Nous réserverons le nom d'*analytiques réelles* aux fonctions qui se prolongent en une fonction holomorphe sur un ouvert du complexifié de $\mathbf{R}^l$, c'est-à-dire celles qui sont scalairement analytiques réelles et telles que l'intersection des domaines d'holomorphie des fonctions $\langle e', \mathrm{F}\rangle$, quand e' parcourt E', contienne un ouvert non vide.

Si E est complet, toute fonction scalairement analytique réelle à valeurs dans E est indéfiniment différentiable à valeurs dans E.

Lemme 4. — *Si E', muni d'une topologie plus fine que celle de la convergence simple, est un espace de Fréchet, toute fonction scalairement analytique réelle, à valeurs dans E, est analytique réelle.*

Démonstration. — Soit F scalairement analytique réelle sur U à valeurs dans E. Il suffit de démontrer que tout compact K de U possède un voisinage complexe auquel on puisse étendre F.

Notons, comme il est d'usage, $\mathcal{H}(V)$ l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert V muni de la topologie de la convergence compacte, et $\mathcal{H}(K)$ la limite inductive des $\mathcal{H}(V)$ lorsque V parcourt la famille des voisinages ouverts (complexes) de K.

F définit une application $\tilde{F}$ de E' dans $\mathcal{H}(K)$ par la formule

$$\tilde{F}(e')=\langle e', F\rangle.$$

Si e' tend vers zéro dans F', $\tilde{F}(e')$ tendra vers zéro en tout point de U. Si alors $\tilde{F}(e')$ a une limite dans $\mathcal{H}(K)$, cette limite ne peut être que nulle. $\tilde{F}$ est donc continue d'après le théorème du graphe fermé. $\mathcal{H}(K)$ étant du type (DF), il existe un voisinage de l'origine W dans E' dont l'image par $\tilde{F}$ est un borné de $\mathcal{H}(K)$. En particulier, l'image par $\tilde{F}$ de W est formée de fonctions holomorphes sur un même voisinage de K ce qui achève la démonstration, W étant absorbant.

Valeurs au bord. — Soient dans $\mathbf{R}^l$ un ouvert U et l'intersection G d'un cône ouvert et d'un voisinage ouvert de l'origine. Nous dirons qu'une fonction F, holomorphe à valeurs dans E sur $U + iG$, admet une valeur au bord près de U si, pour toute fonction φ appartenant à $\mathcal{D}(U)$, l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans U, l'expression

$$\int \varphi(u) f(u + iv)\, du$$

possède une limite dans E, quand v tend vers zéro en restant dans G. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, cette limite est alors une distribution à valeurs dans E sur U, que nous appellerons bien entendu la valeur au bord de F.

II. — Généralisation de la théorie de Hartogs.

Nous allons étudier les fonctions holomorphes à valeurs dans des espaces de fonctions continues satisfaisant à certaines conditions de croissance. Le raisonnement essentiel est celui qui conduit, dans le cas de l'espace des suites majorées par une progression géométrique, à ce résultat classique que, si un domaine de Hartogs est un domaine d'holomorphie, le logarithme de son rayon est une fonction sur-harmonique (HARTOGS [9]). Dans la section suivante, nous en donnerons des applications aux fonctions holomorphes à valeurs dans des espaces de distributions.

Conventions et notations. — Dans toute cette section, nous supposerons donnés un espace localement compact dénombrable à l'infini T et une fonction ρ strictement positive, inférieure à 1, continue et tendant vers zéro à l'infini sur T.

Nous poserons

$$\lambda = -\operatorname{Log} \rho.$$

E_p désignera l'espace de Banach des fonctions continues à valeurs complexes sur T telles que leur produit par ρ^p tende vers zéro à l'infini. E^+ sera *l'espace des fonctions à croissance lente*, réunion des E_p munie de la topologie de limite inductive. De même, E^- sera *l'espace des fonctions à décroissance rapide*, intersection des E_p munie de la topologie de limite projective.

E^- est donc un espace de Fréchet et E^+ un espace du type (DF) (GROTHENDIECK [6], th. 9).

Si $f \in E^+$ nous poserons

$$p_f = \inf\{p\,;\, f \in E_p\} = \overline{\lim_{t \to \infty}}\, [(1/\lambda) \operatorname{Log} |f(t)|]$$

et nous appellerons p_f l'*ordre* de f.

Le dual de E_p est l'espace E'_p des mesures dont le produit par ρ^{-p} est borné, la norme étant la masse de ce produit. Nous noterons E'^{-} l'intersection des espaces E'_p munie de la topologie de limite projective.

PROPOSITION 1. — *Le dual fort de E^+ est E'^{-}, la dualité étant donnée par la formule*

$$\langle \mu, f \rangle = \int_T f(t)\, d\mu(t).$$

DÉMONSTRATION. — D'abord le dual $E^{+\prime}$ est un espace de mesures. En effet les fonctions continues à support compact sont denses dans chaque E_p et par suite aussi dans E^+. Pour qu'une mesure soit dans $E^{+\prime}$, il faut et il suffit qu'elle induise une forme linéaire continue sur chaque E_p, c'est-à-dire précisément qu'elle soit dans E'^{-}.

Montrons que la topologie de E'^{-} est moins fine que celle de $E^{+\prime}$. Un système fondamental de voisinages de zéro dans E'^{-} est formé des ensembles

$$V_{p,r} = \left\{ \mu ; \int_T \rho^{-p}(t)\, d\,|\,\mu(t)\,| \leqq r \right\}.$$

Mais $V_{p,r}$ est le polaire de

$$A_{p,r} = \left\{ f ; f \in E_p, \sup_{t \in T} [\rho^p(t)\, |f(t)|\,] \leqq 1/r \right\}$$

qui est borné dans E^+. Donc $V_{p,r}$ est bien un voisinage de l'origine dans $E^{+\prime}$.

E'^{-} est un espace de Fréchet par sa définition. $E^{+\prime}$ en est un aussi comme dual d'un espace du type (DF). La démonstration s'achève donc par le théorème du graphe fermé.

PROPOSITION 2. — *L'adhérence dans E^+ d'une boule de E_p, est contenue, quel que soit $q > p$, dans la boule de même rayon de E_q. Ces boules forment un système fondamental de bornés de E^+.*

DÉMONSTRATION. — Avec les notations de la démonstration précédente, les polaires des $V_{p,r}$ forment un système fondamental de bornés de E^+. Or ce sont justement les bipolaires des boules $A_{p,r}$ c'est-à-dire, celles-ci étant convexes équilibrées, leurs adhérences. La première partie de la proposition entraîne donc la deuxième.

Le bipolaire de $A_{p,r}$ contient toutes les fonctions continues dont le produit par ρ^p est majoré par $1/r$. Pour montrer qu'il n'en contient pas d'autre, il suffit de remarquer que, δ_α désignant la mesure de masse 1 concentrée au point a de T,

$$r\rho^p(a)\,\delta_a \in V_{p,r}.$$

Corollaire. — *L'adhérence dans E^+ d'un borné de E^- est encore un borné de E^-.*

Proposition 3. — *E^+ est complet.*

Démonstration. — D'après Grothendieck [6] (corollaire 2, de la proposition 5, p. 77), il suffit de montrer que les parties bornées et fermées sont complètes.

Soit donc $\{ B_j \}_{j \in J} = \Phi$ un filtre de Cauchy sur $\overline{A}_{p,1}$. Nous allons montrer que, pour tout $q > p$, Φ converge dans E_q.

D'abord la topologie de E^+ est plus fine que la convergence compacte, et par suite Φ converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue f. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un compact K de T en dehors duquel $\rho^{q-p} \leqq \frac{\varepsilon}{2}$. De plus il existe $j \in J$, tel que toute $g \in B_j$ vérifie sur K :

$$\rho^q(t) \, | g(t) - f(t) | \leqq \varepsilon,$$

inégalité qui est alors vérifiée sur tout T, ce qui est le résultat annoncé.

Remarque. — Si les E_p sont des espaces de suites (T dénombrable et muni de la topologie discrète), la condition $\rho \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ entraîne que, pour $q > p$, l'injection de E_p dans E_q est compacte, et les résultats que nous venons de donner sont alors bien connus (Gel'fand et Silov [5], Sebastiao e Silva [18]). Dans les autres cas on notera que la condition (H2) exigée dans Zerner [21] peut être complètement supprimée.

Fonctions à valeurs dans E^+. — Soient S un ensemble quelconque et F une application de S dans E^+.

F définit une fonction à valeurs complexes sur $S \times T$. Nous noterons F_t la fonction à valeurs complexes sur S qui au point s, fait correspondre la valeur au point $t \in T$ de la fonction $F(s) \in E^+$.

Nous appellerons p_F, et, quand aucune ambiguïté ne sera à craindre, p, la fonction qui, à $s \in S$, fera correspondre l'ordre de $F(s)$.

On aura donc

$$p(s) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\operatorname{Log} | F_t(s) |}{\lambda(t)}.$$

Appelons ${}^*R$ la droite réelle complétée par le point $-\infty$.

Supposons maintenant S localement compact et F continue à valeurs dans E^+. Alors, pour tout $t \in T$, la fonction $\frac{\operatorname{Log} | F_t |}{\lambda(t)}$ est continue à valeurs dans ${}^*R$ sur S. En en prenant l'enveloppe supérieure sur le complémentaire d'un compact de T on obtient une fonction semi-continue inférieurement et par conséquent mesurable (pour les mesures de Radon sur S). Comme T est dénombrable à l'infini, p est la limite d'une suite de telles enveloppes, c'est donc une fonction mesurable.

Cas d'une fonction holomorphe. — Supposons F holomorphe à valeurs dans E^+. Le lemme I, 1 et la proposition 2 nous amènent alors à associer à F, outre p, une deuxième fonction $p^\star$ définie de la façon suivante :

$p^\star(z)$ est la borne inférieure des nombres q tels que z possède un voisinage où F soit holomorphe à valeurs dans E_q.

Il résulte de cette définition que $p^\star$ est une fonction semi-continue supérieurement qui majore p.

LEMME. — *$p^\star(z)$ est la borne inférieure des nombres q tels que z possède un voisinage où F soit bornée dans E_q.*

DÉMONSTRATION. — Il est clair que $p^\star$ n'est pas plus petite que ne l'affirme le lemme. Il suffit donc de démontrer que si F est holomorphe à valeurs dans E^+ et bornée dans E_q sur un ouvert complexe U, elle est holomorphe à valeurs dans E_q sur U.

Nous allons utiliser la forme 5° de la définition des fonctions holomorphes Soit $\mu \in E'_q$. Il existe une suite de mesures $\mu_n \in E'^-$ qui convergent vers μ dans E'_q. Les fonctions $\langle \mu_n, F \rangle$ sont holomorphes sur U et convergent uniformément vers $\langle \mu, F \rangle$ qui est donc holomorphe elle aussi.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 1. — *Soit F holomorphe à valeurs dans E^+ sur le disque unité ouvert Δ et continue sur son adhérence. Alors*

$$\forall z \in \Delta, \qquad p^\star(z) \leq \int p(e^{i\theta})\, P(z, \theta)\, d\theta,$$

où P désigne le noyau de Poisson.

De plus l'ensemble de Δ, où $p \neq p^\star$, est polaire.

DÉMONSTRATION. — Posons

$$m(z) = \int p(e^{i\theta})\, P(z, \theta)\, d\theta.$$

Cette intégrale a bien un sens. En effet, nous avons vu que p est mesurable. D'autre part, l'image de $\bar{\Delta}$ par F est compacte et, *a fortiori*, bornée dans E^+; d'après la proposition 2, il existe donc p_0 tel que cette image soit un borné de E_{p_0} d'où il suit en particulier que p_0 majore p. Ou bien p est intégrable sur la frontière de Δ, et alors $m(z)$ est finie pour tout $z \in \Delta$, ou bien $m(z)$ vaut $-\infty$ en tout point de Δ. Nous allons commencer par démontrer l'inégalité dans le premier cas.

D'après le lemme, il s'agit de trouver, pour tout $z \in \Delta$ et tout $\varepsilon > 0$, un voisinage U de z tel que l'expression $[\rho(t)]^{m(z)+\varepsilon} F_t(w)$ reste bornée quand (w, t) parcourt $U \times T$.

Appelons T' la partie de T où λ est plus grand que 1 (c'est le complémentaire d'un compact) et posons

$$L(z,\,t) = \frac{\operatorname{Log}|F_t(z)|}{\lambda(t)}.$$

Du fait que $F(z)$ parcourt un borné de E_{p_0} quand z parcourt $\overline{\Delta}$, il existe un nombre M qui majore L sur $\overline{\Delta} \times T'$.

Soient $\{K_n\}$ une suite croissante de compacts qui recouvre T et K'_n le complémentaire de K_n. Nous pouvons supposer K'_n contenu dans T', et nous poserons

$$L_n(z) = \sup_{t \in K'_n} L(z,\,t).$$

Lorsqu'on y fixe t, la fonction L devient une fonction sous-harmonique de z et satisfait donc à l'inégalité de Jensen :

$$L(w,\,t) \leqq \int L(e^{i\theta},\,t)\,P(w,\,\theta)\,d\theta,$$

d'où, pour tout $t \in K'_n$,

$$L(w,\,t) \leqq \int L_n(e^{i\theta})\,P(w,\,\theta)\,d\theta.$$

Les fonctions L_n sont semi-continues inférieurement à valeurs dans $^{\star}R$ donc mesurables, elles sont majorées par M, et elles tendent en décroissant vers p quand n tend vers l'infini. Les intégrales

$$\int |L_n(e^{i\theta})|\,d\theta$$

sont donc toutes majorées par un même nombre M_1.

Soit $z \in \Delta$. On peut trouver un voisinage U de z, tel que, pour tout $w \in U$ et tout θ,

$$2M_1\,|P(w,\,\theta) - P(z,\,\theta)| \leqq \varepsilon$$

et par suite, pour tout $w \in U$ et tout $t \in K'_n$,

$$L(w,\,t) \leqq \varepsilon/2 + \int L_n(e^{i\theta})\,P(z,\,\theta)\,d\theta.$$

A l'intégrale figurant dans cette inégalité, nous pouvons appliquer le théorème de Lebesgue : il existe n_0 tel que, pour $w \in U$ et $t \in K'_{n_0}$,

$$L(w,\,t) \leqq m(z) + \varepsilon,$$

ce qui devient, en multipliant par $\lambda(t)$ et en passant aux exponentielles :

$$|F_t(w)| \leqq [\rho(t)]^{-[m(z)+\varepsilon]}.$$

Comme $F_t(w)$ reste bornée quand (w, t) parcourt $U \times K_{n_0}$, l'inégalité à démontrer en résulte.

Lorsque $m(z)$ vaut identiquement $-\infty$, l'inégalité à démontrer signifie que pour tout nombre réel q, pour tout $z \in \Delta$, on peut trouver un voisinage U de z tel que l'expression $[\rho(t)]^q F_t(w)$ reste bornée quand (w, t) parcourt $U \times T$.

La démonstration se fait comme dans le premier cas. La différence la plus notable est le choix de U : on le prendra tel que, pour $w \in U$, ait lieu une inégalité :

$$(1-\varepsilon) P(z, \theta) \leqq P(w, \theta) \leqq (1+\varepsilon) P(z, \theta).$$

D'autre part, au lieu du théorème de Lebesgue, il faudra appliquer un cas particulier du lemme de Fatou : si une suite décroissante majorée de fonctions mesurables tend vers une fonction non sommable, la suite des intégrales tend vers $-\infty$.

La partie du théorème que nous venons de démontrer entraîne que si $p^\star$ ne vaut pas identiquement $-\infty$, c'est une fonction sous-harmonique, régularisée supérieure de p (c'est-à-dire la plus petite fonction semi-continue supérieurement qui majore p).

Appelons L_t la fonction de z obtenue en fixant t dans L. Pour tout n, la famille de fonctions sous-harmoniques $(\mathrm{L}_t)_{t \in K'_n}$ est alors bornée supérieurement par M sur Δ. Un théorème de Brelot ([1], chap. VI, n° 4) et Cartan ([3]) assure précisément que l'enveloppe supérieure L_n d'une telle famille diffère seulement sur un ensemble polaire d'une fonction sous-harmonique (nécessairement sa régularisée supérieure $L_n^\star$).

Quand n tend vers l'infini, L_n tend en décroissant vers p, la fonction sous-harmonique $L_n^\star$ décroît aussi et tend donc vers une fonction sous-harmonique $L^\star$. Soient A_n l'ensemble (polaire) où $L_n \neq L_n^\star$ et A la réunion des A_n qui est donc encore un ensemble polaire. On a $p = L^\star$ en dehors de A, et par suite $L^\star$ n'est autre que la régularisée supérieure de p, c'est-à-dire $p^\star$.

Théorème 2. — *Soient* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$ *des courbes de Jordan du plan complexe*, $\mathbf{C}$, Δ_j *l'ouvert borné limité par* Γ_j, m_z^j *la mesure harmonique au point z dans* Δ_j, F *une fonction holomorphe à valeurs dans* E^+ *sur le produit* Δ *des* Δ_j *et continue sur l'adhérence de* Δ. *Alors*

$$\forall (z_1, \ldots, z_l) \in \Delta,$$
$$p^\star(z_1, \ldots, z_l) \leqq \int_{\Gamma_1} \cdots \int_{\Gamma_l} p(w_1, \ldots, w_l)\, dm_{z_1}^1(w_1) \ldots dm_z^l(w_l)$$

Démonstration. — Supposons d'abord que les Δ_j soient tous des disques. La démonstration se fait alors comme dans le cas d'une seule variable : les complications sont purement formelles.

Dans le cas général, soit f_j une fonction qui réalise la représentation conforme de Δ_j sur le disque unité. Il est classique que f_j se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{\Delta}_j$ sur le disque fermé (CARATHÉODORY [2], tome II, 6e partie, chap. III, p. 85 et suivantes). L'image de la mesure harmonique est bien entendu le produit du noyau de Poisson par la mesure invariante $d\theta$. Appelons f l'application produit des f_j : elle représente $\overline{\Delta}$ sur le polydisque unité et ramène ainsi la démonstration à celle du cas déjà traité.

COROLLAIRE 1. — *Soit F holomorphe à valeurs dans E^+ sur le domaine Δ. S'il existe un sous-ensemble non polaire A de Δ dont l'image par F soit contenue dans E^-, alors F est holomorphe à valeurs dans E^- sur Δ.*

COROLLAIRE 2. — *Soit F analytique réelle à valeurs dans E^+ sur un ouvert connexe U. S'il existe un sous-ensemble A de mesure non nulle de U dont l'image par F soit contenue dans E^-, alors F est analytique réelle à valeurs dans E^-.*

DÉMONSTRATION. — Soit V un domaine d'analyticité complexe de F. Il existe l intervalles réels I_j dont le produit coupe A selon un ensemble de mesure non nulle, et tels que, Δ_j désignant un demi-disque du plan complexe limité par le diamètre I_j, le produit Δ des Δ_j soit contenu dans V. Le théorème montre alors que F est holomorphe à valeurs dans E^- sur Δ, et le corollaire 1 permet d'en déduire qu'elle l'est sur tout V.

REMARQUE 1. — Dans les hypothèses du corollaire 2, on peut remplacer « analytique réelle » par « scalairement analytique réelle » (lemme I,4).

REMARQUE 2. — Dans le cas d'une seule variable, le corollaire 2 est sans intérêt : le corollaire 1 est plus fort dans ce cas. Dans les autres cas, le corollaire 1 peut être renforcé grâce à un théorème récent de LELONG ([12], [13]), nous y reviendrons dans la section IV.

COROLLAIRE 3. — *Soit γ un arc libre dans la frontière du domaine Δ du plan complexe. Si la fonction F est holomorphe à valeurs dans E^+ sur Δ, continue sur $\Delta \cup \gamma$ et si, de plus, l'image de γ est dans E^-, alors F est holomorphe à valeurs dans E^- sur Δ. Si γ est continûment différentiable, la conclusion subsiste si l'on suppose que F applique dans E^- un sous-ensemble de mesure linéaire non nulle de γ.*

DÉMONSTRATION. — On appelle arc libre dans la frontière de Δ un arc de Jordan d'extrémités z_1, z_2 tel que, pour tout $z_0 \in \Delta$, existent deux arcs de Jordan γ_1, γ_2 contenus dans Δ sauf une extrémité, et joignant z_0 respectivement à z_1 et à z_2. Les trois arcs γ, γ_1, γ_2 forment une courbe de Jordan à laquelle on applique le théorème : dans tous les cas p y vaut $-\infty$ sur un ensemble de mesure harmonique non nulle. Le corollaire 1 achève la démonstration.

COROLLAIRE 4. — *Soit F une fonction holomorphe à valeurs dans E^+ sur $U+iG$ qui admette une valeur au bord près de U. Supposons que cette valeur au bord soit une distribution à valeurs dans E^-, alors F est holomorphe à valeurs dans E^- sur $U+iG$.*

DÉMONSTRATION. — D'après le lemme I, 3, il suffit de démontrer que F définit sur $U+iG$ une distribution à valeurs dans E^-, ou encore que, pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(U\times G)$, l'expression

$$\int \varphi(u, v)\,F(u+iv)\,du\,dv$$

est dans E^- (le théorème du graphe fermé assurera la continuité). Il suffit même de le démontrer pour toutes les φ de support assez petit : les autres en sont des sommes finies. Enfin il suffit de le faire pour un ouvert non vide $U'\subset U$ (corollaire 1).

Soient K un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^l$ et U' un ouvert tels que $U'-K\subset U$. Notre conclusion résultera du fait que, pour toute α indéfiniment différentiable sur $\mathbf{R}^l$ et à support contenu dans K, la fonction F définie par

$$F(u+iv)=\int \alpha(s)\,F(u-s+iv)\,dt$$

est holomorphe à valeurs dans E^-. Or elle est holomorphe à valeurs dans E^+. elle est continue quand v tend vers zéro d'après la définition de la valeur au bord et le fait qu'elle se déduit de F par régularisation. Enfin sur U' elle prend ses valeurs dans E^-. On peut donc lui appliquer le théorème en prenant pour Δ un produit de demi-disques tels que le produit des diamètres qui les limite soit dans U' et Δ dans $U'+iG$ (en changeant de base au besoin, on peut supposer que G contient l'intersection d'une boule avec le produit des demi-axes positifs).

III. — Application aux distributions.

Soit F une fonction holomorphe à valeurs dans l'espace $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact. En appelant $\hat{F}(z)$ la transformée de Fourier de $F(z)$, on peut appliquer à la fonction $\hat{F}$ l'étude de la section précédente, l'espace T étant $\mathbf{R}^l$ et la fonction ρ valant $(1+|t|^2)^{-1/2}$. Nous allons nous affranchir de la restriction que le support est compact.

Notations pour les espaces de distributions. — Si D est un espace de distributions sur $\mathbf{R}^l$ et A un ensemble fermé de $\mathbf{R}^l$, D_A désignera l'espace des distributions de D dont le support est contenu dans A muni de la topologie induite, $D_c(U)$, où U est un ouvert de $\mathbf{R}^l$, la réunion des D_K quand K parcourt l'ensemble des compacts de U, muni de la topologie de limite inductive, $D_{\text{loc}}(U)$ l'espace des distributions S sur U telles que, pour tout ouvert V relativement compact dans U, il existe une distribution de D égale à S sur V. Si D est stable pour la multiplication par les fonctions de $\mathcal{D}$, $D_{\text{loc}}(U)$ sera muni de la topologie limite projective par les applications $S \to \alpha S$ dans D où α parcourt $\mathcal{D}(U) = \mathcal{D}_c(U)$. Nous noterons D_c, D_{loc} au lieu de $D_c(\mathbf{R}^l)$, $D_{\text{loc}}(\mathbf{R}^l)$. Avec ces notations et les notations usuelles :

$$\mathcal{E}' = \mathcal{D}'_c = \mathcal{S}'_c, \qquad \mathcal{D}' = \mathcal{E}'_{\text{loc}} = \mathcal{S}'_{\text{loc}}, \qquad \mathcal{D} = \mathcal{E}_c = \mathcal{S}_c, \qquad \ldots .$$

B-**ordre.** — Appelons B^p l'espace des distributions S tempérées et ayant une transformée de Fourier $\hat{S}$ continue et dont le produit par $(1 + |t|^2)^{p/2}$ soit borné. Nous appellerons *B*-ordre sur l'ouvert U d'une distribution S la borne inférieure des nombres q tels que $S \in B^{-q}_{\text{loc}}(U)$.

Rappelons qu'on appelle H^p l'espace des distributions tempérées dont la transformée de Fourier est de carré sommable par rapport à la mesure $(1 + |t|^2)^p \, dt$, et qu'on appelle ordre au sens de L^2 de S la borne inférieure des nombres q tels que $S \in H^{-q}_{\text{loc}}$.

Proposition 1. — *Soit S une distribution sur* $\mathbf{R}^l$. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *Pour toute* $\alpha \in \mathcal{D}$, $\alpha S \in B^p$.

2° *La convolution avec S applique* $L^2_c = H^0_c$ *dans* H^p_{loc}.

3° *Pour tout* q, *la convolution avec S applique* H^q_c *dans* H^{q+p}_{loc}.

Corollaire 1. — B^p *est stable pour la multiplication par les fonctions de* $\mathcal{D}$.

Corollaire 2. — *La différence entre le B-ordre et l'ordre au sens de* L^2 *n'excède pas* $[l/2] + 1$.

Démonstration de la proposition 1. — Supposons d'abord S à support compact et rappelons la démonstration dans ce cas (Trèves [19]). D'abord il est clair, à cause de la formule de Parseval, que 1° implique 2° et 3° qui sont équivalentes et impliquent à leur tour $S \in B^p$. Reste à montrer que si $S \in B^p$ et $\alpha \in \mathcal{D}$, alors $\alpha S \in B^p$. Cela revient à dire que $(1 + |t|^2)^{p/2} \hat{\alpha} \star \hat{S}$ est bornée. Or, si $p \geq 0$

$$\begin{aligned} &\left| (1 + |t|^2)^{p/2} \int \hat{\alpha}(r) \, \hat{S}(t - r) \, dr \right| \\ &\quad \leq C \int \left| [(1 + |t - r|^2)(1 + |r|^2)]^{p/2} \, \hat{\alpha}(r) \, \hat{S}(t - r) \right| dr \\ &\quad \leq C \| S \|_{B^p} \int (1 + |r|^2)^{p/2} \, |\hat{\alpha}(r)| \, dr. \end{aligned}$$

(Inégalités à modifier légèrement si $p < 0$.)

Passons au cas où le support de S est quelconque. Pour vérifier que $1^{\circ} \Rightarrow 3^{\circ}$, utilisons une partition de l'unité localement finie $\{\alpha_k\}$. Si $f \in H_c^q$,

$$S \star f = \sum (\alpha_k S) \star f$$

et la somme figurant au second membre est localement finie.

La proposition sera complètement établie si nous démontrons que la propriété 3° entraîne que le produit de S par toute fonction indéfiniment différentiable α possède encore la propriété 3°. Compte tenu du fait que le noyau de l'opérateur « convolution avec αS » est le produit du noyau de l'opérateur « convolution avec S » par $\alpha(s - r)$, cela résulte du lemme ci-dessous où l'on fera $\varphi(s, r) = \alpha(s - r)$.

Lemme 1. — *Soient U, V deux ouverts de $\mathbf{R}^l$, K un noyau sur $U \times V$ qui définit une application de $H_c^p(U)$ dans $H_{\text{loc}}^q(V)$, φ une fonction indéfiniment différentiable sur $U \times V$. Alors le noyau φK définit encore une application de $H_c^p(U)$ dans $H_{\text{loc}}^q(V)$.*

Démonstration. — Si $\varphi(s, r) = \alpha(s)\beta(r)$ le lemme est évidemment vérifié. De plus l'application qui à (α, β) fait correspondre l'application de noyau $\alpha\beta K$ est séparément continue de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}_b(H_c^p, H_{\text{loc}}^q)$. $\mathcal{E}$ étant un espace de Fréchet elle est continue d'après un théorème de Baire. D'après la propriété fondamentale du produit tensoriel projectif elle se prolonge alors de façon unique en une application linéaire continue de $\mathcal{E}(U) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(U \times V)$ dans $\mathcal{L}_b(H_c^p, H_{\text{loc}}^q)$ (Grothendieck [8], chap. I, prop. 2, p. 30, Schwartz [16], exp. 1).

Remarque. — Cette démonstration est bien entendu susceptible de nombreuses variantes. (*Cf.* le résultat utilisé dans le lemme de ma Note [20].)

Fonctions pluri-sous-harmoniques. — Rappelons qu'une fonction u à valeurs dans $^*R$ est dite pluri-sous-harmonique sur un ouvert U d'un espace vectoriel complexe de dimension finie V si elle est semi-continue supérieurement sur U et si sa restriction à l'intersection de U avec toute sous-variété affine complexe de dimension complexe un de V est sous-harmonique ou vaut identiquement $-\infty$.

Lemme 2 (Lelong [11]). — *Soit u une fonction semi-continue supérieurement à valeurs dans $^*R$ sur un ouvert U de l'espace vectoriel complexe à l dimensions V. Supposons que, pour tout $v_0 \in U$, pour toute base $(v_1, \ldots, v_l)$ de V et tout ensemble de l nombres > 0 $(r_1, \ldots, r_l)$ tel que le polydisque*

$$\{v_0 + z_1 v_1 + \ldots + z_l v_l;\ |z_j| \leq r_j\}$$

soit contenu dans U, soit vérifiée l'inégalité

$$u(v_0) \leq \int \cdots \int a(v_0 + r_1 e^{i\theta_1} + \ldots r_l e^{i\theta_l})\, d\theta_1 \ldots d\theta_l.$$

Alors u est pluri-sous-harmonique sur U.

Démonstration. — v_0 et la base étant arbitraires, il suffit de démontrer que

$$u(v_0) \leq \int u(v_0 + r_1 e^{i\theta})\, d\theta.$$

Pour cela, on fait tendre $r_2, \ldots, r_l$ vers zéro et l'on tient compte du fait que u, étant semi-continue supérieurement, l'est uniformément sur tout compact.

Proposition 2. — *Soit F une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^l)$ sur un domaine complexe Δ et soit p_U la fonction qui fait correspondre à $z \in \Delta$ le B-ordre de $F(z)$ sur l'ouvert relativement compact U. Alors p_U est égale en dehors d'un ensemble polaire de Δ à une fonction pluri-sous-harmonique qui la majore sur Δ tout entier. D'autre part, si, sur un ouvert $V \subset \Delta$, p_U, est strictement plus petite qu'un nombre p_0, F définit par restriction une fonction holomorphe à valeurs dans $B^{p_0}_{\mathrm{loc}}(U)$ sur V.*

Démonstration. — Si, pour tout $z \in \Delta$, le support de $F(z)$ est compact dans U, la proposition exprime tout simplement le théorème II,2 complété par le lemme 2. Si $\alpha \in \mathcal{D}(U)$ appelons p_α la fonction qui à z fait correspondre le B-ordre de $\alpha F(z)$. On a dans tous les cas :

$$p_U = \sup_{\alpha \in \mathcal{D}(U)} p_\alpha.$$

La régularisée supérieure $p_U^\star$ de p_U est donc pluri-sous-harmonique d'après la variante concernant les fonctions pluri-sous-harmoniques du théorème de convergence de Brelot et Cartan que nous avons utilisé plus haut (Lelong [11]).

D'après le lemme topologique de Choquet (Brelot [1], chap. I, n° 2) il existe un ensemble dénombrable de fonctions $J \subset \mathcal{D}(U)$ tel que $p_U^\star$ soit la régularisée supérieure de $\sup_{\alpha \in J} p_\alpha$. On en conclut que p_U ne diffère de $p_U^\star$ que sur un ensemble polaire grâce à une nouvelle application du théorème de convergence.

Enfin la dernière affirmation résulte de la combinaison du théorème II,2 et du lemme I,2.

Distributions tempérées. — Nous voulons aussi appliquer les résultats de la section II aux fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathcal{S}'$. A cet effet, prenons pour T le produit de l exemplaires de l'ensemble des entiers positifs et posons

$$\rho(n_1, \ldots, n_l) = \frac{1}{1 + n_1 + \ldots + n_l}.$$

A toute distribution tempérée, faisons correspondre son développement en fonctions de Hermite (SCHWARTZ [15], tome II, chap. 7, § 7, exemple 7). Nous établissons ainsi un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{S}'$ sur E^+ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est un isomorphisme sur E^-.

Nous allons énoncer une série de résultats qui s'obtiennent en traduisant les corollaires du théorème II,2 (avec l'aide du lemme I,2 quand il s'agit de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{E}$).

PROPOSITION 3. — *Soit F holomorphe à valeurs dans $\mathcal{D}'$ (resp. $\mathcal{S}'$) sur le domaine Δ. S'il existe un sous-ensemble A non polaire de Δ dont l'image par F soit contenue dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$), alors F est holomorphe à valeurs dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$) sur Δ.*

PROPOSITION 4. — *Soit F analytique réelle à valeurs dans $\mathcal{D}'$ (resp. $\mathcal{S}'$) sur un ouvert connexe U. S'il existe un sous-ensemble A de U de mesure non nulle dont l'image par F soit contenue dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$), alors F est analytique réelle à valeurs dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$).*

PROPOSITION 5. — *Soit F une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{S}'$) sur un ouvert $U + iG$* (p. 169) *qui admette une valeur au bord près de U. Supposons que cette valeur au bord soit une distribution à valeurs dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$), alors F est holomorphe à valeurs dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$) sur $U + iG$. (L'hypothèse sur la valeur au bord s'exprime dans le cas de $\mathcal{E}$ en disant que cette valeur au bord est un noyau semi-régulier à droite.)*

Application à la transformation de Fourier. — Soit V un espace vectoriel réel à l dimensions, soient aussi $v^\star \in V^\star$ une forme linéaire sur V et S une distribution tempérée sur V dont le support soit contenu dans

$$B = \{ v;\, a \leqq \langle v^\star, v \rangle \leqq b \} \qquad (a \text{ et } b \text{ des nombres réels}).$$

Soit enfin U un ouvert de $V^\star$ tel que la transformée de Fourier $\hat{S}$ soit indéfiniment différentiable sur U. Alors $\hat{S}$ est encore indéfiniment différentiable sur

$$\hat{U} = \bigcup_{s \in \mathbf{R}} s v^\star + U.$$

Un énoncé analogue a lieu si l'on ne suppose plus S tempérée, si B est défini, quand on a fait choix d'une base appropriée, par $a \leqq v_1 \leqq b$ et si l'on considère la transformée de Fourier partielle en v_1.

On peut d'ailleurs remarquer que le premier énoncé se ramène au second par le choix de la base et le fait que la transformée de Fourier peut être prise d'abord en v_1, puis en $(v_2, \ldots, v_l)$. Mais par l'hypothèse sur le support, la transformée de Fourier en v_1 définit une fonction analytique à valeurs dans l'espace des distributions en $(v_2, \ldots, v_l)$ d'où la possibilité d'appliquer les résultats ci-dessus.

Dans ces énoncés, B ne peut être remplacé par un demi-espace. Pour le voir, il suffit de considérer la fonction

$$\varphi(v_1, v_2) = \psi(v_2^{2m}/v_1).$$

où ψ est une fonction indéfiniment dérivable dont le support est contenu dans $[0, 1]$ et m un entier positif.

La transformée de Fourier (en v_1 et v_2) de φ est indéfiniment différentiable en dehors de l'origine.

IV. — Contre-exemples divers.

Les différents numéros de cette section sont indépendants entre eux.

1. Absence d'extension aux E L C. généraux. — Il est naturel de se demander si les résultats obtenus à la section II sont liés à la nature très particulière des espaces étudiés. Pour nous en convaincre nous allons exhiber une suite doublement infinie d'espaces de Banach A_n avec les propriétés suivantes :

(i) A_n est plongé dans A_{n+1} de façon continue.

(ii) La réunion A^+ et l'intersection A^- des espaces A_n munies respectivement des topologies de limite inductive et de limite projective sont nucléaires.

(iii) Il existe des fonctions entières à valeurs dans A^+ qui appliquent un ouvert non vide du plan complexe dans un ensemble borné de A^- sans toutefois prendre toutes leurs valeurs dans A^-.

Le plus simple est de prendre pour A_n l'ensemble des fonctions holomorphes bornées dans le disque de rayon r_n qui tendra vers zéro quand n tendra vers $+\infty$ et vers 1 quand n tendra vers $-\infty$, et de poser

$$[F(z)](w) = \frac{1}{1 - zw}.$$

2. Absence de quasi-analyticité forte. — Appelons E^0 le quotient de E^+ par E^- (sans topologie !) et convenons de dire qu'une fonction à valeurs dans E^0 est holomorphe si elle peut se relever en une fonction holomorphe à valeurs dans E^+. Une telle fonction possède une propriété de quasi-analyticité faible. Le résultat de quasi-analyticité forte correspondant serait « si une fonction holomorphe à valeurs dans E^+ a toutes ses dérivées en un point dans E^-, alors elle prend toutes ses valeurs dans E^- ». Il est faux d'après le lemme d'Abel. En effet soit $\{f_k\}$ une suite dans E^-. La série

$$\sum f_k z^k/k\,!$$

définira une fonction holomorphe à valeurs dans E^+ pourvu que pour un certain $r > 0$ la suite $\{f_k r^k/k\,!\}$ soit bornée dans E^+. Si cette fonction prend ses valeurs dans E^-, elle est holomorphe à valeurs dans E^-, d'où il résulte que pour tout $r' < r$ la suite $\{f_k r'^k/k\,!\}$ est bornée dans E^-; visiblement, ce n'est pas le cas en général.

3. **Ensembles exceptionnels.** — Demandons-nous si le corollaire 1 du théorème II,2 peut être renforcé (par exemple en y remplaçant « non polaire » par « ayant un point d'accumulation à l'intérieur de Δ »). Dans le cas classique qui mène à la théorie de Hartogs (*voir* le début de la section II) et pour une fonction d'une seule variable, la réponse est connue et négative (Cartan [4], Lelong [10]). Toujours dans ce cas, on peut trouver une fonction F telle que $p_F \neq p_F^\star$ en tout point de l'ensemble A pourvu que A soit contenu dans une réunion dénombrable de compacts polaires (mêmes références). Ces résultats subsistent, toujours pour les fonctions d'une seule variable, dans le cadre plus général où nous nous sommes placés. Les démonstrations ne diffèrent que par des modifications faciles. Nous allons d'ailleurs donner maintenant une autre démonstration de ce type.

Proposition. — *Soient Δ un domaine du plan complexe et A un sous-ensemble de Δ. Pour qu'il existe une fonction F holomorphe à valeurs dans E^+ sur Δ sans être holomorphe à valeurs dans E^- et telle que l'image de A soit un borné de E^-, il est nécessaire que l'adhérence de A dans Δ soit polaire. Si A est polaire et compact, il existe une telle fonction qui de plus n'applique dans E^- que les seuls points de A.*

Démonstration. — La condition nécessaire résulte du corollaire de la proposition II,2.

Pour la condition suffisante, commençons par supposer la proposition démontrée lorsque T est l'ensemble des entiers positifs et ramenons la construction de F à ce cas. Soit donc T localement compact et dénombrable à l'infini et soit $\{t_n\}$ une suite de points distincts tendant vers l'infini dans T. D'après le cas supposé démontré du théorème, il existe une suite de fonctions entières g_n d'une variable complexe et un nombre p tels que la quantité $[\rho(t_n)]^p g_n(z)$ reste bornée quand z parcourt A et n les entiers positifs, mais tels aussi que pour tout $z \notin A$, il existe un nombre q tels que la suite $\{[\rho(t_n)]^q g_n(z)\}$ ne soit pas bornée. Soit aussi f_n une suite de fonctions continues positives à support compact sur T qui atteignent le maximum 1 au point t_n. En prenant le support de f_n suffisamment petit, on vérifiera que la fonction

$$\sum f_n g_n$$

possède les propriétés annoncées.

Nous supposons maintenant que $T = N$. La théorie de la capacité nous assure du résultat suivant :

Quels que soient les trois nombres > 0, ε, δ et k, il existe un voisinage compact K de A dont tous les points ont une distance à A au plus égale à δ, et une mesure positive μ portée par la frontière de K, de masse $\leqq \varepsilon$ et telle que sur A :

$$\int \operatorname{Log} | z - w | \, d\mu(w) \leqq - k.$$

Posons $\lambda_n = -\operatorname{Log}[\rho(n)]$. Ce nombre tend vers l'infini avec n. Cela permet d'approcher μ par des sommes finies de masses ponctuelles avec des coefficients de la forme k/λ_n (k, n des entiers positifs) et d'apporter ainsi la précision suivante au résultat cité :

Quels que soient ε, δ, k, il existe m points z_j dont la distance à A n'excède pas δ et un entier n (d'ailleurs aussi grand qu'on veut) tels que

$$m/\lambda_n \leqq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \sum_j \operatorname{Log} | z - z_j | \leqq - k\lambda_n \quad \text{sur } A.$$

Pour construire F il suffit maintenant de faire parcourir à k la suite des entiers positifs, à chaque k, on fait correspondre ε_k et δ_k tendant vers zéro en décroissant quand k tend vers l'infini. Par le résultat qu'on vient d'obtenir on fera aussi correspondre à k, ε_k, δ_k deux entiers m_k et n_k et m_k points $z_{j,k}$ et ce de façon que la suite $\{ n_k \}$ soit strictement croissante. On définira enfin la fonction F par

$$F_n(z) = 0 \quad \text{si } n \text{ ne fait pas partie de la suite } \{ n_k \},$$

$$F_{n_k}(z) = \prod_{j=1}^{m_k} (z - z_{j,k}).$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que cette fonction possède toutes les propriétés annoncées.

Cas de plusieurs variables. — On sait qu'il y a dans $\mathbf{C}^l$ deux notions d'ensembles polaires : les ensembles polaires usuels de $\mathbf{R}^{2l}$ et les ensembles $\mathbf{C}^l$-polaires qui sont ceux où une fonction pluri-sous-harmonique peut s'annuler sans être identiquement nulle. Nous avons vu que $p^\star$ était pluri-sous-harmonique, mais il est impossible d'affirmer que l'ensemble où $p \neq p^\star$ est $\mathbf{C}^l$-polaire ; par contre on sait que ce n'est pas non plus l'ensemble polaire le plus général (Lelong, [12], [13]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BRELOT (Marcel). — *Éléments de la théorie classique du potentiel.* — Paris, Centre de Documentation universitaire, 1959.

[2] CARATHÉODORY (Constantin). — *Funktionentheorie.* — Bâle, Verlag Birkhaüser, 1950.

[3] CARTAN (Henri). — Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiel, *Bull. Soc. Math. France*, t. 73, 1945 p, 74-106.

[4] CARTAN (Henri). — Sur les suites de potentiels de masses ponctuelles, *C. R. Acad. Sc. Paris.* t. 214, 1952, p. 994.

[5] GEL'FAND (I. M.) et ŠILOV (G. E.). — *Fonctions généralisées.* t. 2 : *Espaces de fonctions fondamentales et de fonctions généralisées* [en russe]. — Moscou, 1958.

[6] GROTHENDIECK (Alexander). — Sur les espaces (*F*) et (*DF*), *Summa Brasil. Math.*, t. 3, 1954, p. 57-123.

[7] GROTHENDIECK (Alexander). — Sur certains espaces de fonctions holomorphes, *J. Für reine und angew. Math.*, t. 192, 1953, p 35-64.

[8] GHOTHENDIECK (Alexander). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* — Providence, American mathematical Society, 1955 (*Mem. Amer, math. Soc.*, 16).

[9] HARTOGS (Fritz). — Zur Theorie der Analytischen Funktionen mehrerer unabhän, giger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung dersellben durch Reihen-welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, *Math. Annalen*, t. 62, 1906, p. 1-88.

[10] LELONG (Pierre). — Sur la capacité de certains ensembles de valeurs exceptionnelles, *C. R. Acad, Sc. Paris*, t. 214, 1942, p. 992.

[11] LELONG (Pierre). — Les fonctions pluri-sous-harmoniques, *Ann. scient. Norm. Sup.*, t. 62, 1945, p. 301-338.

[12] LELONG (Pierre). — Fonctions pluri-sous-harmoniques au voisinage du sous-espace réel, *C. R. Acad. Sc. Paris.* t. 251, 1960, p. 2860.

[13] LFLONG (Pierre). — Fonctions pluri-sous-harmoniques et fonctions analytiques de variables réelles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 11, 1961, p. 515-568.

[14] LONG ((lifford). — *Schwartz distributions analytic in a parameter* (*These Sc. math.*, Univ. Illinois, 1960).

[15] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions*, t. 1 (2e éd.) et t. 2, Paris, Hermann, 1957 et 1951 (*Act. scient. et ind.*, 1238 et 1122).

[16] SCHWARTZ (Laurent). — *Séminaire Schwartz*, année 1953-1954 : *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques.* — Paris, Secrétariat mathématique, 1954 (multigraphié).

[17] SCHWARTZ (Laurent). — Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, *J. Anal. math., Jérusalem*, t. 4, 1954-1955, p. 88-148.

[18] SEBASTIÃO E SILVA (José). — Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni, *Rend. di Mat. e Appl. Roma*, t. 14. 1955, p. 388-410.

[19] TRÈVES (François). — Opérateurs différentiels hypoelliptiques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 9, 1959, p. 1-73.

[20] ZERNER (Martin). — Solution élémentaire locale d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 248, 1959, p. 3679.

[21] ZERNER (Martin). — Une généralisation de la théorie de Hartogs, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 251, 1960, p. 230-232.

(Manuscrit reçu le 28 juillet 1961.)

Martin ZERNER,
Attaché de Recherches au Centre National
de la Recherche Scientifique,
La Bastide Saint-Jacques, route de Tholonet,
Aix-en-Provence (Bouches-du-Rhône).