BULLETIN DE LA S. M. F.

EDOARDO VESENTINI

Non-régularité, en dimension 2, de la forme-résidu, aux points doubles quadratiques

Bulletin de la S. M. F., tome 90 (1962), p. 161-163
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1962__90__161_0>

Bull. Soc. math. France,
90, 1962, p. 161 à 163.

NON-RÉGULARITÉ, EN DIMENSION 2, DE LA FORME-RÉSIDU, AUX POINTS DOUBLES QUADRATIQUES ;

PAR

EDOARDO VESENTINI

(Pisa).

Cette Note a pour objet le théorème de G. DE RHAM, publié dans l'article de Jean LERAY, p. 84 [1]. L'énoncé qu'en donne J. Leray est en défaut lorsque la dimension complexe l de la variété complexe X est égale à 2 et la forme φ est linéaire en dx, comme il résulte de l'exemple suivant.

Supposons $l=2$, et considérons une sous-variété complexe S de X, de dimension complexe 1, ayant un point double quadratique (ordinaire) y. Employons en y des coordonnées locales complexes x_1 et x_2, telles que $y=(0, 0)$ et que l'équation locale de S, près de y, soit

$$s=x_1 x_2.$$

La forme

$$\varphi=a\frac{dx_1}{x_1}+b\frac{dx_2}{x_2}, \tag{1}$$

où a et b sont deux constantes, est holomorphe et fermée sur $X-S$. Elle a une singularité polaire d'ordre 1 sur S, mais, si $a\neq b$, rés$[\varphi]$ n'existe pas, i. e. on ne peut pas construire une fonction ψ et une forme θ, *régulières* sur X et telles que

$$\varphi=\frac{ds}{s}\,\psi+\theta \quad \text{sur } X-S.$$

Le cas particulier $l=2$ est le seul cas où la sous-variété S est nécessairement localement réductible au voisinage du point double quadratique

---

[1] LERAY (Jean). — Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 81-180.

(ordinaire) y. La forme (1) peut être considérée comme la somme des deux formes $a\frac{dx_1}{x_1}$ et $b\frac{dx_2}{x_2}$ ayant, si $a \neq b$, différents résidus sur les deux branches de S sortant de y.

Dans les autres cas le théorème de la page 84 de l'article de J. Leray reste valable. Il découle du lemme 13.2 de G. de Rham et des considérations des pages 103-104, qu'on peut mettre plus généralement sous la forme du lemme suivant :

Lemme. — *Soit S une sous-variété complexe de X, de codimension complexe* 1, *ayant un point double quadratique en un point y, définie près de y par une équation locale* $s(x, y) = 0$, *telle que*

$$s_x = 0, \qquad \mathrm{Hess}_x[s] \neq 0 \qquad \text{pour} \quad x = y.$$

Soit φ une forme régulière sur $X - S$, homogène en $(dx, d\bar{x})$, ayant sur S une singularité polaire d'ordre 1. Si φ est fermée sur $X - S$, tous les coefficients de la forme $d(s\varphi)$, régulière sur X, s'annulent au point y, sauf dans le cas où, simultanément, $l = \dim_{\mathbb{C}} X = 2$ et le degré de φ par rapport aux dx est égal à 1.

Preuve. — Employons en y des coordonnées locales complexes $x_1, \ldots, x_l$ telles que

$$y = (0, \ldots, 0), \qquad s = x_1^2 + \ldots + x_l^2.$$

Si

$$\varphi = \frac{1}{p!\,q!}\,\frac{1}{s}\sum \varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overline{\beta}_1\ldots\overline{\beta}_q}\, dx_{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dx_{\alpha_p}\wedge dx_{\overline{\beta}_1}\wedge\ldots\wedge dx_{\overline{\beta}_q}$$

est l'expression de φ près de y, la condition $d\varphi = 0$ sur $X - S$ donne les relations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\left\{(x_1^2+\ldots+x_l^2)\,\frac{\partial\varphi_{\alpha_1\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_{p+1}\overline{\beta}_1\ldots\overline{\beta}_q}}{\partial x_{\alpha_i}} \right.\\ &\qquad\qquad\qquad \left. -\, 2x_{\alpha_i}\varphi_{\alpha_1\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_{p+1}\overline{\beta}_1\ldots\overline{\beta}_q}\right\} = 0 \\ &\qquad [1 \leqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}, \beta_1, \ldots, \beta_q) \leqq l], \end{aligned}\right.$$

qui doivent être satisfaites sur X.

Il faut démontrer que

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\,\frac{\partial\varphi_{\alpha_1\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_{p+1}\overline{\beta}_1\ldots\overline{\beta}_q}}{\partial x_{\alpha_i}} = 0 \quad \text{au point } y \\ &\qquad [1 \leqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}, \beta_1, \ldots, \beta_q) \leqq l]. \end{aligned}\right.$$

En appliquant à (2) $\dfrac{\partial^2}{\partial x_\gamma^2}$, et en posant $x_1 = \ldots = x_l = 0$, on a

$$\sum_{=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \left\{ \frac{\partial \varphi_{\alpha_1 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+1} \overline{\beta}_1 \ldots \overline{\beta}_q}}{\partial x_{\alpha_i}} - 2\delta_{\alpha_i \gamma} \frac{\partial \varphi_{\alpha_1 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+1} \overline{\beta}_1 \ldots \overline{\beta}_q}}{\partial x_\gamma} \right\} = 0 \quad \text{au point } y.$$

Si $p+1 < l$, il suffit de choisir, pour chaque $(p+1)$-ple $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$, $\gamma \neq \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, p+1)$ pour obtenir (3). Si $p+1 = l$, en sommant par rapport à $\gamma = 1, \ldots, l$, on a [2]

$$(l-2) \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_{\alpha_1 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+1} \overline{\beta}_1 \ldots \overline{\beta}_q}}{\partial x_{\alpha_i}} = 0 \quad \text{au point } y.$$

C. Q. F. D.

(Manuscrit reçu le 24 novembre 1961.)

Edoardo VESENTINI,
Istituto Matematico « Leonida Tonelli »,
Università degli Studi,
Pisa (Italie).

(2) Dans son raisonnement J. LERAY a omis le facteur $l-2$, qui introduit l'hypothèse $l > 2$.