

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUELINE LELONG-FERRAND

**Sur le prolongement des groupes locaux  
d'homéomorphismes sur un espace localement compact**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 89 (1961), p. 429-450

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1961\\_\\_89\\_\\_429\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__429_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LE PROLONGEMENT  
DES GROUPES LOCAUX D'HOMÉOMORPHISMES  
SUR UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT ;**

PAR

M<sup>me</sup> JACQUELINE LELONG-FERRAND

(Paris).

**Introduction.** — Dans un article antérieur [1], nous avons étudié l'opérateur différentiel  $X$  (dérivée de Lie) attaché à un champ de vecteurs lipschitzien  $\xi$ , à divergence bornée, sur une variété différentiable  $V$  portant un élément de volume. Désignant par  $\mathcal{O}$  l'espace des fonctions complexes de classe  $C^1$ , à support compact dans  $V$ , et par  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert constitué par les fonctions de carré sommable sur  $V$ , on peut considérer  $X$  comme un opérateur de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{H}$ ; et  $\mathcal{O}$  étant dense dans  $\mathcal{H}$ , il est possible de définir l'*extension forte* de  $X$  dans  $\mathcal{H}$ , soit  $X_0$ . D'autre part, la condition

$$|\operatorname{div} \xi| \leq k \quad (k = \text{Cte})$$

entraîne l'existence d'un opérateur  $\tilde{X}$  de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{H}$  satisfaisant à  $\|X + \tilde{X}\| \leq k$  et à  $\langle Xf, g \rangle = \langle f, \tilde{X}g \rangle$ , quels que soient  $f, g \in \mathcal{O}$ . Par définition, l'adjoint  $X_1$  de  $\tilde{X}$  constitue l'*extension faible* de  $X$ .

Cela étant, dans la première partie de [1], nous avons étudié successivement les trois hypothèses suivantes :

*a.* Le champ  $\xi$  engendre un groupe global à un paramètre d'homéomorphismes de  $V$ , c'est-à-dire une application  $\varphi$  de  $\mathbf{R} \times V$  sur  $V$ , satisfaisant à  $\varphi(0, x) = x$  et à  $\varphi[t + u, x] = \varphi[t, \varphi(u, x)]$ .

*b.* Il existe un groupe  $S_t$  d'opérateurs bornés de  $\mathcal{H}$  satisfaisant à

$$\frac{d}{dt} (S_t f) = X_0 S_t f = S_t X_0 f$$

pour tout  $f$  appartenant au domaine  $\mathcal{O}_0$  de  $X_0$ .

c.  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_1$ .

Dans les paragraphes 6, 7, 8 de [1], nous avons établi les relations  $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$  et  $(c) \Rightarrow (b)$ . Mais le raisonnement du paragraphe 9 par lequel nous voulions prouver la relation  $(b) \Rightarrow (a)$  est incomplet <sup>(1)</sup>; et les théorèmes 9a et 10a de [1] sont en fait inexacts, comme le prouve l'exemple suivant : le champ  $(\xi, \eta, \zeta)$  défini dans  $\mathbf{R}^3$  par

$$\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy, \quad \zeta = -4xz,$$

est à divergence nulle; il engendre le groupe local

$$(t, x_0, y_0, z_0) \rightarrow [x(t), y(t), z(t)]$$

défini par

$$[x(t) + iy(t)]^{-1} = (x_0 + iy_0)^{-1} - t; \quad z(t) = \exp \left[ -4 \int_0^t x(u) du \right];$$

l'application  $t \rightarrow [x(t), y(t), z(t)]$  obtenue en fixant le point  $(x_0, y_0, z_0)$  est définie pour tout  $t$  réel si l'on suppose  $y_0 \neq 0$ , et détermine un groupe global dans chacun des demi-espaces  $y > 0$  et  $y < 0$ ; on peut en déduire que les extensions faible et forte de l'opérateur  $\mathcal{X}$  associé coïncident; malgré cela si  $y_0 = 0$  et  $x_0 \neq 0$ , le point  $[x(t), y(t), z(t)]$  tend vers l'infini quand  $t$  tend vers  $+\frac{1}{x_0}$ .

Cette lacune a été remarquée par E. NELSON qui, dans un Mémoire [3] paru après [1], avait établi occasionnellement un résultat équivalent <sup>(2)</sup> à la proposition suivante :

« Si le champ  $\xi$  est à divergence nulle, et s'il engendre un groupe local  $(t, x) \rightarrow \varphi(t, x)$  tel que, pour presque tout  $x \in V$ ,  $\varphi(t, x)$  soit défini quel que soit  $t$ , alors  $i\mathcal{X}$  est autoadjoint » ;

et il affirme, sans démonstration, l'exactitude de la réciproque.

Nous sommes donc amenés à revenir sur les questions exposées dans [1], et à poser la définition suivante :

**DÉFINITION 1.** — Une mesure positive quelconque  $\mu$  étant donnée sur  $V$ , un groupe local  $(t, x) \rightarrow \varphi(t, x)$  d'homéomorphismes de  $V$  sera dit *presque global* si l'ensemble  $e$  des points  $x$  de  $V$  tels que  $\varphi(t, x)$  ne soit pas défini pour tout  $t$  réel, est de mesure nulle <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> En effet (voir bas p. 12) : l'existence d'un ensemble  $K''$  dense dans  $K'$  tel que  $\varphi(t, x)$  soit prolongeable pour tout  $x \in K''$  n'entraîne pas l'existence d'un prolongement de  $\varphi(t, x)$  pour tout  $x \in K'$ ; elle entraîne seulement l'existence d'un ouvert  $U \supset K''$  tel que  $\varphi(t, x)$  soit prolongeable pour tout  $x \in U$ .

<sup>(2)</sup> L'étude du groupe local maximal  $\varphi^*$  engendré par  $\xi$  permet en effet de montrer que les ensembles  $E_i$  de E. NELSON, relatifs à  $\varphi^*$ , sont fermés.

<sup>(3)</sup> Il est à noter que si  $\varphi$  est un groupe local maximal, l'ensemble exceptionnel  $e$  est un  $F_\sigma$  (voir note précédente).

Avec cette définition, nous allons pouvoir énoncer :

**PROPOSITION 1.** — *Chacune des hypothèses (b) et (c), précédemment rappelées, est équivalente à l'hypothèse :*

*a'. Le champ  $\xi$  engendre un groupe presque global d'homéomorphismes de  $V$ .*

L'énoncé 9 a de [1] redevient donc correct si l'on remplace les mots « groupe global » par les mots « groupe presque global » (<sup>4</sup>).

Mais au lieu de nous borner à établir la proposition 1, il nous a paru préférable de donner un résultat plus général relatif aux extensions de l'opérateur  $\mathcal{X}$  dans les espaces  $L^p(\mu)$  relatifs à une mesure positive quelconque  $\mu$  sur  $V$ .

D'autre part, la structure de variété de  $V$  ne sert en fait qu'à définir le groupe local  $\varphi$  à partir du champ  $\xi$ , et nos résultats s'étendent aux espaces localement compacts sur lesquels on a défini un groupe local  $\varphi$  et une mesure positive  $\mu$  : c'est dans ce cadre général que se situera notre étude, et la proposition 1 apparaîtra comme un cas particulier du théorème 1.

### 1. Forme générale du problème.

**DÉFINITIONS.** — Soit  $E$  un espace localement compact. Un *groupe local* à un paramètre d'homéomorphismes de  $E$  est défini par la donnée :

a. d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R} \times E$  tel que l'ensemble

$$I_a = \{ t \in \mathbf{R}; (t, a) \in \Omega \}$$

se réduise, pour chaque  $a \in E$ , à un intervalle contenant l'origine ;

b. d'une application  $\varphi$  de  $\Omega$  dans  $E$ , continue, satisfaisant à  $\varphi(0, x) = x$  quel que soit  $x \in E$ , et à

$$(1.1) \quad \varphi[t, \varphi(u, x)] = \varphi(t + u, x)$$

pourvu que  $(u, x)$ ,  $(t + u, x)$  et  $[t, \varphi(u, x)]$  appartiennent à  $\Omega$ .

L'ouvert  $\Omega$  est appelé *domaine* du groupe local  $\varphi$  ; et le groupe local  $\varphi^*$  sera dit *prolonger*  $\varphi$ , si son domaine  $\Omega^*$  contient  $\Omega$ , et si l'on a  $\varphi^* = \varphi$  sur  $\Omega$ .

Le groupe local  $\varphi$  sera dit *maximal*, s'il n'admet pas d'autre prolongement que lui-même ; il sera dit *global* si son domaine  $\Omega$  est l'espace  $\mathbf{R} \times E$  tout entier ; et, conformément à la définition 1 il sera dit *presque global* pour une

(<sup>4</sup>) Les énoncés 10 a et 14 a devront subir la même modification ; et les énoncés 14 b, 17 a et 18 b seront valables si l'on retranche de  $V^n$  un ensemble fermé convenablement choisi de mesure nulle (pour plus de précision, voir § 6).

Par contre, les énoncés de [1] relatifs aux groupes de transformations isométriques ou conformes des variétés riemanniennes n'ont pas à être modifiés : pour le voir, il suffit de se reporter à l'étude directe de [2].

mesure positive  $\mu$  si le complémentaire de son domaine se projette sur  $E$  suivant un ensemble de mesure nulle.

Enfin nous poserons  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ ; et l'orbite de  $a$  sera l'ensemble  $\varphi(I_a, a)$ .

*Opérateurs linéaires associés à un groupe local.* — Soit  $\varphi$  un groupe local opérant sur  $E$  et soit  $K$  un compact de  $E$ ; d'après la définition des groupes locaux, nous savons qu'il existe un voisinage  $V_K$  de  $K$  et un nombre  $a_K > 0$  tels que  $\varphi(t, x)$  soit défini pour  $|t| < a_K$  et  $x \in V_K$ . De plus, la continuité de  $\varphi$  entraîne l'existence d'un nombre  $b_K$  ( $0 < b_K \leq a_K$ ) tel que  $|t| < b_K$  entraîne  $\varphi_t(K) \subset V_K$ ,

Si  $f$  est une fonction complexe à support dans  $K$ , nous désignerons par  $f_t$  la fonction complexe, à support dans  $\varphi_{-t}(K)$ , définie pour  $|t| < b_K$  par

$$f_t(x) = f[\varphi(t, x)] \quad \text{pour } x \in V_K.$$

Sur l'espace des fonctions complexes à support dans  $K$  nous définissons ainsi une famille d'opérateurs  $\Phi_t: f \rightarrow f_t$ , définis pour  $|t| < b_K$  et satisfaisant à

$$\Phi_0 = I, \quad \Phi_t \circ \Phi_u = \Phi_{t+u}.$$

Nous désignerons par  $\mathcal{O}$  l'espace vectoriel constitué par les fonctions  $f$  complexes, continues et à support compact, telles que

$$Xf(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} [f_u(x) - f(x)]$$

existe en chaque point  $x$  et soit *borné* quel que soit  $x \in E$ . L'opérateur  $X$  ainsi défini sur  $\mathcal{O}$  (transformation infinitésimale associée à  $\varphi$ ) satisfait à

$$X(fg) = fXg + gXf,$$

ce qui montre immédiatement que  $\mathcal{O}$  est une algèbre.

D'autre part, si  $f \in \mathcal{O}$  a son support dans le compact  $K$ ,  $f_t = \Phi_t f$  appartient encore à  $\mathcal{O}$  pour  $|t| < b_K$ , et l'on a

$$(1.2) \quad \Phi_t Xf = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} [\Phi_{t+u} f - \Phi_t f] = X \Phi_t f.$$

Quels que soient la mesure  $\mu$  définie sur  $E$  et le nombre  $p \geq 1$ ,  $\mathcal{O}$  et  $X(\mathcal{O})$  sont des sous-espaces de  $L^p(\mu)$ . Si  $E$  est une variété de classe  $C_1^1$  et si  $X$  est l'opérateur défini par un champ de vecteurs lipschitzien,  $\mathcal{O}$  contient l'espace des fonctions de classe  $C^1$  à support compact sur  $E$ , ce qui montre que  $\mathcal{O}$  est dense dans  $L^p(\mu)$ . Dans le cas général, pour pouvoir définir l'extension forte de  $X$  dans  $L^p(\mu)$ , nous devons supposer *a priori* que  $\mathcal{O}$  est dense dans  $L^p(\mu)$ ; cette extension étant désignée par  $X_0^p$  et son domaine

par  $\mathcal{O}_0^p$ , nous dirons alors qu'un groupe  $S_t^p$  d'opérateurs bornés de  $L^p(\mu)$  prolonge  $\Phi_t$  s'il satisfait a

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt}(S_t f) = X_0^p S_t^p f = S_t^p X_0^p f, \quad \forall f \in \mathcal{O}_0^p$$

[les dérivées étant prises au sens de la convergence en norme dans  $L^p(\mu)$ ].

Et le problème posé peut s'énoncer ainsi :

*L'existence d'un groupe  $S_t^p$  d'opérateurs bornés de  $L^p(\mu)$  prolongeant  $\Phi_t$  entraîne-t-elle l'existence d'un groupe presque global prolongeant  $\varphi$  ?*

Nous résoudrons le problème pour  $p > 1$  dans le cas où la mesure positive  $\mu$  vérifie une inégalité de la forme

$$(1.4) \quad |\mu(Xf)| \leq k \mu(|f|) \quad (k = \text{Cte})$$

pour tout  $f \in \mathcal{O}$ ; la solution sera fondée, d'une part sur l'existence d'un groupe local maximal  $\varphi^*$  prolongeant  $\varphi$ , d'autre part sur les propriétés de l'opérateur  $X_0^p$  et de son extension faible  $X_1^p$  qui découlent de l'inégalité (1.4) : cette dernière étude utilise la dualité des espaces  $L^p(\mu)$  et  $L^q(\mu)$

[où  $q = \frac{p}{p-1}$ ] définie par le produit scalaire

$$(1.5) \quad \langle f, g \rangle = \mu(f\bar{g})$$

correspondant aux normes

$$\|f\|_r = [\mu(|f|^r)]^{\frac{1}{r}} \quad (r \geq 1).$$

**2. Hypothèses et résultats.** — Avant d'énoncer les résultats, il convient de préciser les hypothèses et la définition de l'opérateur  $X_1^p$ .

a. L'hypothèse «  $\mathcal{O}$  est dense dans  $L^p(\mu)$  » sera vérifiée quels que soient la mesure  $\mu$  et le nombre  $p \geq 1$ , si le groupe local  $\varphi$  satisfait à la condition suivante :

$H_1$ . *Quels que soient le point  $a$  de  $E$  et le voisinage  $V$  de  $a$ , il existe une fonction  $f \in \mathcal{O}$ , à support dans  $V$ , telle que  $f(a) \neq 0$ .*

Soit, en effet,  $h$  un élément de  $L^p(\mu)$ ; et soit  $g$  continue à support compact  $K$  telle que  $\|g - h\|_p < \varepsilon$ . Il existe un ouvert  $U$ , contenant  $K$ , de mesure finie  $m$ ; et les fonctions réelles de  $\mathcal{O}$  à support dans  $U$  constituent une algèbre séparant les points de l'espace compact  $\tilde{U}$  obtenu par adjonction à  $U$  d'un « point à l'infini ». De là résulte (d'après STONE-WEIERSTRASS) l'existence d'une fonction  $f \in \mathcal{O}$ , à support dans  $\bar{U}$ , satisfaisant à

$$|f - g| < \varepsilon m^{-\frac{1}{p}} \quad \text{sur } U.$$

On en déduit les inégalités

$$\|f - g\|_p < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|f - h\|_p < 2\varepsilon.$$

C. Q. F. D.

b. L'inégalité (1.4) est vérifiée avec  $k = 0$  si le groupe local  $\varphi$  conserve la mesure  $\mu$ ; plus généralement nous allons voir que si l'hypothèse  $(H_1)$  est vérifiée, la condition exprimée par l'inégalité (1.4) équivaut à :

$H_2$ . *A chaque compact  $K$  correspond un nombre  $t_K > 0$  tel que l'inégalité  $|t| < t_K$  entraîne*

$$(2.1) \quad |\mu(\Phi_t f)| \leq e^{k|t|} \mu(|f|)$$

pour toute  $f$  continue à support dans  $K$ .

DÉMONSTRATION. — Supposons d'abord l'inégalité (1.4) vérifiée pour  $f \in \mathcal{O}$ . Par hypothèse, si  $f \in \mathcal{O}$ ,  $Xf$  est borné; et il résulte de (1.2) que  $X\Phi_t f = \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_t f)$  a mêmes bornes que  $Xf$ . Le support de  $\Phi_t f$  restant dans un compact fixe pour  $|t|$  assez petit on en déduit (par permutation de  $\mu$  et de l'intégration en  $t$ ) l'égalité

$$\frac{d}{dt} \mu(\Phi_t f) = \mu(X\Phi_t f)$$

pourvu que  $\Phi_t f$  soit défini, c'est-à-dire pour  $|t| < b_K$ , en désignant par  $K$  le support de  $f$ , et par  $b_K$  le nombre défini au paragraphe 1. Si  $f$  est positive, l'inégalité (1.4) nous donne

$$\left| \frac{d}{dt} \mu(\Phi_t f) \right| \leq k \mu(\Phi_t f),$$

d'où, par intégration, l'inégalité (2.1) pour  $|t| < b_K$  et  $f \in \mathcal{O}$  positive.

Il reste à étendre l'inégalité (2.1) au cas où  $f$  désigne une fonction continue quelconque à support dans  $K$ . L'inégalité

$$|\mu(\Phi_t f)| \leq \mu(|\Phi_t f|) = \mu(\Phi_t |f|)$$

nous permet de nous limiter au cas où  $f$  est positive. Or si  $C$  désigne un voisinage compact quelconque de  $K$ , il résulte de l'hypothèse  $(H_1)$  qu'une telle fonction  $f$  peut être considérée comme limite d'une suite uniformément convergente  $f_n$  de fonctions positives de  $\mathcal{O}$  à support dans  $C$ . Pour  $t$  fixé, ( $|t| < b_C$ ), la suite  $\Phi_t f_n$  converge uniformément vers  $\Phi_t f$  et le support de  $\Phi_t f_n$  reste dans le compact  $\varphi_{-t}(C)$ : donc  $\mu(\Phi_t f_n)$  tend vers  $\mu(\Phi_t f)$ ; en particulier,  $\mu(f_n)$  tend vers  $\mu(f)$ ; et par passage à la limite, on voit que  $f$  satisfait à (2.1) pour  $|t| < b_C$ .

Inversement, supposons l'hypothèse  $(H_2)$  vérifiée, et soit  $f$  continue à support dans un compact  $K$ . Si  $f$  est positive, l'inégalité (2.1) entraîne

$$e^{-k|t|} \mu(f) \leq \mu(\Phi_t f) \leq e^{k|t|} \mu(f),$$

d'où

$$(2.2) \quad |\mu(\Phi_t f - f)| \leq [e^{k|t|} - 1] \mu(f).$$

Si  $f$  est réelle, de signe quelconque, nous décomposerons  $f$  en  $f^+ - f^-$ , les fonctions positives continues  $f^+$  et  $f^-$  ayant leur supports dans  $K$ ; l'inégalité (2.2) s'appliquant à  $f^+$  et  $f^-$  séparément, nous aurons

$$|\mu(\Phi_t f - f)| \leq (e^{k|t|} - 1) [\mu(f^+) + \mu(f^-)],$$

soit

$$(2.3) \quad |\mu(\Phi_t f - f)| \leq [e^{k|t|} - 1] \mu(|f|),$$

inégalité qui reste valable pour  $f$  complexe.

Si  $f \in \mathcal{O}$  et si, après division par  $t$ , nous faisons tendre  $t$  vers zéro dans (2.3), nous obtenons à la limite l'inégalité (1.4).

REMARQUE. — L'hypothèse (H<sub>2</sub>) équivaut à :

H'<sub>2</sub>. A chaque compact  $K$  correspond un nombre  $t_K > 0$ , tel que  $|t| < t_K$  entraîne

$$(2.4) \quad \mu[\varphi_t(e)] \leq e^{k|t|} \mu(e)$$

quel que soit l'ensemble mesurable  $e$  contenu dans  $K$ .

c. *Définition de l'opérateur  $X_1^p$ .* — D'après Lebesgue-Nikodym, l'hypothèse (1.4) entraîne l'existence d'une fonction mesurable réelle  $\rho$  satisfaisant à  $\|\rho\|_\infty \leq k$  et à

$$(2.5) \quad \mu(Xf) = \mu(\rho f), \quad \forall f \in \mathcal{O}$$

Si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{O}$  et si nous utilisons le produit scalaire défini par (1.5), nous aurons

$$\langle f, Xg \rangle + \langle Xf, g \rangle = \mu(Xf\bar{g}) = \langle f, \rho g \rangle.$$

Posant  $\tilde{X}g = -Xg + \rho g$  la relation précédente s'écrit

$$\langle Xf, g \rangle = \langle f, \tilde{X}g \rangle$$

et montre que  $\tilde{X}$  est adjoint de  $X$ . On a

$$(2.6) \quad \|(\tilde{X} + X)g\|_r \leq k \|g\|_r, \quad \forall r > 1 \text{ et } g \in \mathcal{O};$$

et puisque  $X$  et  $\tilde{X}$  ont même domaine  $\mathcal{O}$ , l'inégalité (2.6) montre que leurs extensions fortes respectives dans  $L^r(\mu)$ , soient  $X_0^r$  et  $\tilde{X}_0^r$ , ont même domaine  $\mathcal{O}_0^r$ .

Par définition, l'extension faible  $X_1^p$  de  $X$  [resp. l'extension faible  $\tilde{X}_1^p$  de  $\tilde{X}$ ] dans  $L^p(\mu)$  est l'adjoint de  $\tilde{X}_0^q$  [resp.  $X_0^q$ ], où l'on a posé  $q = \frac{p}{p-1}$ .

Les opérateurs  $X_1^p$  et  $\tilde{X}_1^p$  ont évidemment même domaine  $\mathcal{O}_1^p$ .

Cela étant, nous allons établir le résultat suivant :

**THÉORÈME I.** — *E désignant un espace localement compact dénombrable à l'infini, soit  $\varphi$  un groupe local d'homéomorphismes de E, tel que l'algèbre  $\mathcal{O}$  associée vérifie l'hypothèse (H<sub>1</sub>) et soit  $\mu$  une mesure positive sur E satisfaisant à l'hypothèse (H<sub>2</sub>) ou à l'inégalité équivalente*

$$|\mu(Xf)| \leq k \mu(|f|) \quad (k = \text{Cte}), \quad \forall f \in \mathcal{O}.$$

Alors les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

- a. Le groupe local  $\varphi$  admet un prolongement presque global;
- b. A chaque nombre  $r > 1$  correspond un groupe  $S_i^r$  d'opérateurs bornés de  $L^r(\mu)$  satisfaisant aux conditions

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt}(S_i^r f) = X_0^r S_i^r f = S_i^r X_0^r f, \quad \forall f \in \mathcal{O}_0^r$$

(2.8) Si l'on pose  $s = \frac{r}{r-1}$  et si  $A_r$  désigne l'application de  $L^r(\mu)$  sur  $L^s(\mu)$  définie par  $A_r(f) = |f|^r \bar{f}^{-1}$  on a

$$S_i^r \circ A_r = A_r \circ S_i^r.$$

b'. Pour une valeur  $p > 1$ , il existe un groupe  $S_i^p$  d'opérateurs bornés de  $L^p(\mu)$  et un groupe  $S_i^q$  d'opérateurs bornés de  $L^q(\mu)$ , où  $q = \frac{p}{p-1}$ , tels que (2.7) soit vérifiée pour  $r = p$  et  $r = q$  et que (2.8) soit vérifiée pour  $r = p$ .

c.  $X_0^r = X_1^r$  quel que soit  $r > 1$ .

c'. Pour une valeur  $p > 1$  on a  $X_0^p = X_1^p$ .

REMARQUES :

1° L'hypothèse « E dénombrable à l'infini » servira seulement à établir (c')  $\Rightarrow$  (a).

2° La condition (2.8) disparaît si  $r = 2$ ; la proposition 1 est donc un cas particulier du théorème I.

3° Pour  $p = 2$ , on peut établir directement que (c')  $\Rightarrow$  (b') : ce résultat, qui a été établi en fait dans [1], apparaît maintenant comme un cas particulier des résultats de R. S. PHILLIPS [5] relatifs aux semi-groupes.

**3. Extension maximale d'un groupe local.** — Avant d'établir le théorème I, nous allons démontrer l'existence d'un groupe local maximal unique prolongeant  $\varphi$ ; nous généralisons ainsi une propriété classique des variétés différentiables.

PROPOSITION 2. — Soit  $\varphi$  un groupe local sur un espace localement compact  $E$ . Alors  $\varphi$  admet un prolongement maximal unique  $\varphi^*$ ; et si  $\Omega^*$  désigne le domaine de  $\varphi^*$ , les propriétés suivantes sont vérifiées :

a. Si  $(t, x) \in \Omega^*$  les relations  $(t + u, x) \in \Omega^*$  et  $[u, \varphi^*(t, x)] \in \Omega^*$  sont équivalentes

b. Si,  $x$  restant fixe, le point  $(t, x)$  tend vers la frontière de  $\Omega^*$ , alors  $\varphi^*(t, x)$  tend vers l'infini.

Pour établir cette proposition, nous utiliserons la construction qui a servi à R. S. PALAIS ([4], chap. II) dans le cas des variétés.

NOTATIONS. —  $\Omega$  désignant le domaine de  $\varphi$ , et  $a$  un point quelconque de  $E$ , posons

$$I_a = \{ t \in \mathbf{R}; (t, a) \in \Omega \}.$$

D'après les hypothèses,  $I_a$  est un intervalle ouvert contenant l'origine; et l'application  $t \rightarrow [t, \varphi(t, a)]$  de  $I_a$  dans  $\mathbf{R} \times E$  définit un arc ouvert  $C_a$ . Nous désignerons par  $\pi_E$  [resp.  $\pi_{\mathbf{R}}$ ] la projection canonique de  $\mathbf{R} \times E$  sur  $E$  [resp.  $\mathbf{R}$ ] et par  $T_u$  la translation  $(t, x) \rightarrow (t + u, x)$ .

A chaque point  $(t, a)$  de  $\mathbf{R} \times E$  associons l'arc  $\Gamma(t, a)$  déduit de  $C_a$  par la translation  $T_t$ , et appelons « arc élémentaire » tout sous-arc ouvert de  $\Gamma(t, a)$ . Il est facile de voir que si deux arcs élémentaires  $\gamma_1 \subset \Gamma(u, a)$  et  $\gamma_2 \subset \Gamma(v, b)$  ont un point commun  $(t, c)$ , ils ont en commun un arc élémentaire  $\gamma \subset \Gamma(t, c)$ . Nous désignerons par  $\mathfrak{E}$  la topologie la moins fine sur  $\mathbf{R} \times E$  admettant tous les arcs élémentaires pour ensembles ouverts, et par  $O_a$  la composante connexe de  $(0, a)$  dans cette topologie.

DÉMONSTRATION. — Par construction,  $O_a$  apparaît comme une variété ouverte à une dimension, c'est-à-dire un arc; et la restriction de  $\pi_{\mathbf{R}}$  à chacun des arcs élémentaires contenus dans  $O_a$  est biunivoque et bicontinue : donc  $\pi_{\mathbf{R}}$  établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre  $O_a$  et l'intervalle  $J_a = \pi_{\mathbf{R}}(O_a)$ . Désignant par  $[t, \psi(t, a)]$  le point de  $O_a$  se projetant au point  $t$  de  $J_a$ , nous allons voir que l'application  $\psi$  définit un groupe local prolongeant  $\varphi$ .

En effet, pour  $a$  fixé,  $\psi(t, a)$  est défini sur un intervalle  $J_a$  contenant  $I_a$ ; si  $b = \psi(u, a)$ ,  $O_b$  se déduit de  $O_a$  par la translation  $T_{-u}$ , de sorte que  $t \in J_b$  équivaut à  $t + u \in J_a$  et entraîne  $\psi(t, b) = \psi(t + u, a)$ ; enfin le domaine de  $\psi$  est ouvert et  $\psi$  est continue : en effet, si  $u \in J_a$ , le sous-arc de  $O_a$  correspondant à l'intervalle [ou] peut être recouvert au moyen d'un nombre fini d'arcs élémentaires; cela permet de mettre  $\psi(u, a)$  sous la forme

$$\psi(u, a) = \varphi_{u-t_n} \circ \varphi_{t_n-t_{n-1}} \circ \dots \circ \varphi_{t_2-t_1} \circ \varphi_{t_1}(a)$$

et de définir

$$\psi(t, x) = \varphi_{t-u} \circ \varphi_{u-t_n} \circ \dots \circ \varphi_{t_1}(x)$$

pour  $t$  assez voisin de  $u$  et  $x$  assez voisin de  $a$ .

D'autre part, si  $\varphi^*$  est un groupe local quelconque prolongeant  $\varphi$ , l'arc  $C_a^*$  correspondant à  $\varphi^*$  est la réunion d'arcs élémentaires; car la relation

$$\varphi^*(t, a) = \varphi[t - t_0, \varphi^*(t_0, a)],$$

valable pour  $|t - t_0|$  assez petit, prouve que chaque point  $[t_0, b = \varphi^*(t_0, a)]$  de  $C_a^*$  appartient à un arc élémentaire commun à  $C_a^*$  et à  $T_{t_0}(C_b)$ . Donc  $C_a^*$  est contenu dans  $O_a$ , et  $\psi$  est un prolongement de  $\varphi^*$ : cela prouve que  $\psi$  est maximal et unique.

Il reste à établir que  $\psi(t, a)$  tend vers l'infini quand  $t$  tend vers l'une des extrémités de  $J_a$ .

Si cela n'était pas vrai, il existerait une suite  $t_n$  convergeant vers une extrémité  $\theta$  de  $J_a$  (celle de droite pour fixer les idées) telle que  $\psi(t_n, a)$  ait une limite  $\alpha$ ; et il existerait un nombre  $h > 0$  tel que  $\psi(t, \alpha)$  soit défini pour  $|t| < h$ . On aurait

$$\psi\left(-\frac{h}{2}, \alpha\right) = \lim \psi\left[-\frac{h}{2}, \psi(t_n, a)\right] = \lim \psi\left(t_n - \frac{h}{2}, a\right) = \psi\left(\theta - \frac{h}{2}, a\right).$$

Les arcs  $T_\theta(O_\alpha)$  et  $O_a$  auraient en commun le point  $\left[\theta - \frac{h}{2}, \psi\left(-\frac{h}{2}, \alpha\right)\right]$  et coïncideraient, de sorte que  $J_a = \pi_{\mathbf{R}}(O_a)$  recouvrirait l'intervalle  $\left[0, \theta + \frac{h}{2}\right]$ , contrairement à l'hypothèse.

G. Q. F. D.

APPLICATION. — Nous pouvons prolonger l'opérateur  $\Phi_t$ , associé à  $\varphi$ , de la façon suivante :

Désignant par  $\varphi^*$  le groupe local maximal prolongeant  $\varphi$  et par  $\Omega^*$  son domaine, nous associons à chaque compact  $K$  de  $E$  la borne supérieure  $c_K$  des nombres  $c$  tels que  $[-c, +c] \times K$  soit contenu dans  $\Omega^*$ ; et si  $f$  est une fonction complexe à support dans  $K$ , nous désignerons par  $\Phi_t f = f_t$  la fonction complexe à support dans  $\varphi_{-t}(K)$  définie, pour  $|t| < c_K$ , par

$$f_t(x) = f[\varphi^*(t, x)].$$

4. **Démonstration du théorème 1.** — Les relations  $(b) \Rightarrow (b')$  et  $(c) \Rightarrow (c')$  étant évidentes, nous nous bornerons à établir les relations  $(a) \Rightarrow (b)$ ,  $(b') \Rightarrow (c')$ ,  $(b) \Rightarrow (c)$  et  $(c') \Rightarrow (a)$ .

i.  $(a) \Rightarrow (b)$ . — Soit  $\varphi^*$  un groupe presque global prolongeant  $\varphi$  et soit  $\Omega^*$  son domaine: par hypothèse  $\Omega^*$  est ouvert dans  $\mathbf{R} \times E$ , et  $\pi_E(C\Omega^*)$  est de mesure nulle. Désignons par  $I_n$  l'intervalle  $[-n, +n]$  et posons

$$F_n = C\Omega^* \cap (I_n \times E);$$

$F_n$  étant fermé et  $I_n$  compact,  $e_n = \pi_E(F_n)$  est fermé; et si  $x \in Ce_n$ ,  $\varphi^*(t, x)$  est défini pour  $|t| < n$ . Donc si  $f$  est une fonction continue à support compact

dans l'ouvert  $\omega_n = Ce_n$ ,  $\Phi_t f$  est, pour  $|t| < n$ , une fonction continue à support compact dans  $\varphi_{-t}^*(\omega_n)$ ; et cette fonction vérifie l'inégalité (2.1). En appliquant cette inégalité à  $|f|^r$  ( $r < 1$ ), on obtient

$$\|\Phi_t f\|_r^r = \mu(|\Phi_t f|^r) = \mu(\Phi_t |f|^r) \leq e^{k|t|} \mu(|f|^r),$$

soit

$$\|\Phi_t f\|_r \leq e^{\frac{k}{r}|t|} \|f\|_r.$$

$e_n$  étant fermé et de mesure nulle, l'ensemble des fonctions continues à support dans  $Ce_n$  est dense dans  $L^r(\mu)$ ; l'opérateur borné  $\Phi_t$  s'étend donc à  $L^r(\mu)$  pour  $|t| < n$ , et cela quel que soit  $n$ . Et si  $S_t^r$  désigne ce prolongement, la relation

$$\frac{d}{dt} S_t^r f = S_t^r X_0^r f = X_0^r S_t^r f$$

est vraie d'après (1.2) pour  $|t| < n$  et  $f \in \mathcal{O}$  à support dans  $Ce_n$ , s'étend par passage à la limite au cas où  $f \in \mathcal{O}_0^r$ , quel que soit  $t$ . On établirait de même les relations

$$S_0^r f = f \quad \text{et} \quad S_{t+u}^r f = S_t^r [S_u^r f]$$

pour tout  $f \in L^r(\mu)$ .

Enfin, la continuité faible de l'application  $A_r : f \rightarrow |f|^r \bar{f}^{-1}$  de  $L^r$  dans  $L^s$  (avec  $s = \frac{r}{r-1}$ ), permet de montrer que la relation  $S_t^s(A_r f) = A_r(S_t^r f)$  est vraie pour  $|t| < n$  et  $f$  continue à support dans  $Ce_n$ , reste vraie quels que soient  $f \in L^r(\mu)$  et  $t \in \mathbf{R}$ .

Les conditions (2.7) et (2.8) sont donc bien vérifiées.

ii.  $(b') \Rightarrow (c')$ . — Ce résultat découle des divers lemmes qui suivent, valables sous les hypothèses  $(b')$ .

LEMME 4' a. — Pour  $r = p$  et  $r = q$ , on a

$$(4.1) \quad \|S_t^r f\|_r \leq e^{\frac{k}{r}|t|} \|f\|_r, \quad \forall f \in L^r(\mu).$$

DÉMONSTRATION. — Si  $f, g \in \mathcal{O}$ , on a, d'après (1.4),

$$|\langle Xf, g \rangle + \langle f, Xg \rangle| = |\mu(Xf\bar{g})| \leq k\mu(|f\bar{g}|).$$

Par passage à la limite on en déduit l'inégalité

$$|\langle X_0^p f, g \rangle + \langle f, X_0^q g \rangle| \leq k \|f\|_p \|g\|_q$$

valable pour  $f \in \mathcal{O}_0^p$  et  $g \in \mathcal{O}_0^q$ , avec  $q = \frac{p}{p-1}$ .

Mais on a alors

$$\langle X_0^p f, g \rangle + \langle f, X_0^q g \rangle = \frac{d}{dt} \langle S_t^p f, S_t^q g \rangle,$$

d'où, pour  $v > u$ , l'inégalité

$$(4.2) \quad |\langle S_v^p f, S_v^q g \rangle - \langle S_u^p f, S_u^q g \rangle| \leq k \int_u^v \|S_t^p f\|_p \|S_t^q g\|_q dt$$

qui reste valable pour  $f \in L^p(\mu)$  et  $g \in L^q(\mu)$ .

Remplaçons, dans (4.2),  $g$  par  $|f|^p \bar{f}^{-1}$ . En tenant compte de (2.8) et en posant  $h(t) = \|S_t^p f\|_p^p$  on obtient l'inégalité

$$(4.3) \quad |h(v) - h(u)| \leq k \int_u^v h(t) dt,$$

d'où l'on déduit

$$h(t) \leq h(0) e^{k|t|},$$

c'est-à-dire (4.1) pour  $r = p$ .

Les rôles joués par  $f$  et  $g$  étant symétriques, on obtient l'inégalité (4.1) pour  $r = q$  en échangeant  $p$  et  $q$ . C. Q. F. D.

LEMME 4.b. — Soit  $\tilde{S}^q$  l'opérateur de  $L^q(\mu)$  adjoint de  $S_t^p$ . Si  $f \in L^p(\mu)$  et  $g \in \mathcal{O}_1^q$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle f, \tilde{S}^q g - g \rangle = \langle f, \tilde{X}_1^q g \rangle.$$

DÉMONSTRATION. — Si  $f \in \mathcal{O}_0^p$  et  $g \in \mathcal{O}_1^q$ , nous avons

$$\frac{d}{dt} \langle f, \tilde{S}^q g \rangle = \frac{d}{dt} \langle S_t^p f, g \rangle = \langle X_t^p S_t^p f, g \rangle = \langle S_t^p f, \tilde{X}_1^q g \rangle,$$

d'où

$$\left| \frac{d}{dt} \langle f, \tilde{S}^q g \rangle \right| \leq e^{\frac{k}{p}|t|} \|f\|_p \|\tilde{X}_1^q g\|_q$$

et, par intégration,

$$|\langle f, \tilde{S}^q g - g \rangle| \leq \frac{p}{k} (e^{\frac{k}{p}|t|} - 1) \|f\|_p \|\tilde{X}_1^q g\|_q.$$

Cette dernière inégalité étant vraie  $\forall f \in \mathcal{O}_0^p$ , et  $\mathcal{O}_0^p$  étant dense dans  $L^p(\mu)$ , on en déduit la majoration

$$(4.4) \quad \|\tilde{S}^q g - g\|_q \leq \frac{p}{k} (e^{\frac{k}{p}|t|} - 1) \|\tilde{X}_1^q g\|_q, \quad \forall g \in \mathcal{O}_1^q.$$

Cela prouve que  $\left\| \frac{1}{t} (\tilde{S}^q g - g) \right\|$  reste borné quand  $t$  tend vers zéro; et comme

$$\frac{1}{t} \langle f, \tilde{S}^q g - g \rangle = \frac{1}{t} \langle S_t^p f - f, g \rangle$$

tend vers

$$\langle X^p f, g \rangle = \langle f, \tilde{X}^q g \rangle \quad \text{pour } f \in \mathcal{O}_0^p,$$

on en déduit que  $\frac{1}{t} \langle f, \tilde{S}_t^q g - g \rangle$  converge encore vers

$$\langle f, \tilde{X}^q g \rangle \quad \text{pour } f \in L^p(\mu).$$

C. Q. F. D.

LEMME 4 c. — Soit  $B^p$  l'extension à  $L^p(\mu)$  de l'opérateur borné  $X + \tilde{X}$ ; et soit  $\tilde{S}_t^p$  l'opérateur de  $L^p(\mu)$  adjoint de  $S_t^q$ . Si  $f \in L^p(\mu)$  et  $g \in L^q(\mu)$ , on a

$$\lim_{t > 0} \frac{1}{t} \langle S_t^p f - \tilde{S}_t^p f, g \rangle = \langle B^p f, g \rangle.$$

DÉMONSTRATION. — Si  $f \in \mathcal{O}_0^p$  et  $g \in \mathcal{O}_0^q$  on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \tilde{S}_t^p S_t^p f, g \rangle &= \frac{d}{dt} \langle S_t^p f, S_t^q g \rangle \\ &= \langle X^p S_t^p f, S_t^q g \rangle + \langle S_t^p f, X^q S_t^q g \rangle = \langle B^p S_t^p f, S_t^q g \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant (2.6) et (4.1) on obtient

$$\left| \frac{d}{dt} \langle \tilde{S}_t^p S_t^p f, g \rangle \right| \leq k e^{k|t|} \|f\|_p \|g\|_q,$$

d'où la majoration

$$\| \tilde{S}_t^p S_t^p f - f \| \leq (e^{k|t|} - 1) \|f\|_p$$

valable  $\forall f \in \mathcal{O}_0^p$  donc aussi pour  $f \in L^p(\mu)$ .

L'opérateur  $\Sigma_t = \frac{1}{t} (\tilde{S}_t^p S_t^p - I)$  est donc uniformément borné pour  $|t| \leq \alpha$ , quel que soit  $\alpha$ ; et quand  $t$  tend vers zéro,  $\langle \Sigma_t f, g \rangle$  tend vers  $\langle B^p f, g \rangle$  si  $f \in \mathcal{O}_0^p$  et  $g \in \mathcal{O}_0^q$  : on en déduit que  $\langle \Sigma_t f, g \rangle$  tend vers  $\langle B^p f, g \rangle$  pour  $f \in L^p(\mu)$  et  $g \in L^q(\mu)$ . Enfin, puisque  $S_t^q g$  converge en norme vers  $g$  dans  $L^q(\mu)$ , on voit que la quantité

$$\langle \Sigma_t f, S_{-t}^q g \rangle = \frac{1}{t} \langle S_t^p f, g \rangle - \frac{1}{t} \langle f, S_{-t}^q g \rangle = \frac{1}{t} \langle S_t^p f - \tilde{S}_{-t}^p f, g \rangle$$

tend vers  $\langle B^p f, g \rangle$  si  $f \in L^p(\mu)$  et  $g \in L^q(\mu)$ .

LEMME 4 d. —  $X^q = X^p$ .

DÉMONSTRATION. — En remplaçant  $p$  par  $q$ ,  $f$  par  $g$  et  $t$  par  $-t$ , on déduit du lemme 4 b que  $\frac{1}{t} \langle \tilde{S}_{-t}^p f - f, g \rangle$  tend vers  $-\langle \tilde{X}_1 f, g \rangle$  quand  $t$  tend

vers zéro. En comparant ce résultat à celui du lemme 4c on voit que  $\frac{1}{t} \langle S_t^p f - f, g \rangle$  tend vers

$$\langle B^p f, g \rangle - \langle \tilde{X}_1^p f, g \rangle = \langle X_1^p f, g \rangle$$

si  $f \in \mathcal{O}_1^p$  et  $g \in \mathcal{O}_1^q$ . On a donc

$$\langle X_1^p f, g \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle S_t^p f - f, g \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle f, \tilde{S}_t^q g - g \rangle = \langle f, \tilde{X}_1^q g \rangle$$

pour tout  $f \in \mathcal{O}_1^p$  et tout  $g \in \mathcal{O}_1^q$ . Cette égalité montre que  $X_1^p$  et  $\tilde{X}_1^q$  sont adjoints l'un de l'autre, autrement dit que  $X_0^p = X_1^p$ .

iii. (b)  $\Rightarrow$  (c). — En donnant à  $p$  toutes les valeurs possibles dans la proposition (b')  $\Rightarrow$  (c'), on obtient la proposition (b)  $\Rightarrow$  (c).

5. **Fin de la démonstration du théorème I.** — Il nous reste à établir la proposition (c')  $\Rightarrow$  (a).

Désignons par  $\varphi^*$  l'extension maximale du groupe local  $\varphi$ , dont l'existence a été établie au paragraphe 3, et par  $\Omega^*$  le domaine de  $\varphi^*$ .

Pour chaque  $a \in E$ , posons

$$\theta_1(a) = \sup \{ t \in \mathbf{R}; (t, a) \in \Omega^* \}$$

et

$$\theta_2(a) = \inf \{ t \in \mathbf{R}; (t, a) \in \Omega^* \};$$

et désignons par  $E_1$  [resp.  $E_2$ ] l'ensemble des points  $a$  tels que  $\theta_1(a) < +\infty$  [resp.  $\theta_2(a) > -\infty$ ].  $\Omega^*$  étant ouvert,  $\theta_1(a)$  et  $-\theta_2(a)$  sont des fonctions semi-continues inférieurement, et les ensembles  $E_1, E_2$  sont mesurables. Nous allons montrer que si l'un de ces ensembles est de mesure non nulle, alors on a  $X_1^p \neq X_0^p, \forall p > 1$ . La proposition annoncée sera ainsi établie par l'absurde.

Supposons  $E_1$  de mesure non nulle; il existe alors un nombre  $T > 0$  tel que l'ensemble  $E_1^T = \{ x \in E; \theta_1(x) \leq T \}$  soit de mesure non nulle; et la semi-continuité de  $\theta_1$  entraîne que  $E_1^T$  est fermé. D'autre part,  $E$  est supposé être la réunion d'une famille dénombrable de compacts  $K_n$ . Il existe donc une valeur de  $n$  tel que le compact  $A = E_1^T \cap K_n$  soit de mesure non nulle, et, sur  $A$ , on a  $\theta_1(x) \leq T$ .

$A$  étant compact, il existe un nombre  $\alpha > 0$  tel que  $\varphi^*(t, x)$  soit défini pour tout  $x \in A$  et  $|t| < 2\alpha$ . Nous poserons

$$A_\alpha = \{ x = \varphi^*(t, a); a \in A, 0 \leq t \leq \alpha \},$$

$$B = \{ x = \varphi^*(t, a); a \in A, 0 \leq t < \theta_1(a) \}$$

et nous allons montrer que  $B$  est de mesure finie. En effet, si  $e$  désigne un compact et si l'on pose

$$\varphi_t^*(e) = \{x = \varphi^*(t, a); a \in e, \theta_1(a) > t\}$$

on voit, par une extension facile de l'inégalité (2.4), que  $\varphi_t^*(e)$  est de mesure finie. Or ici, si  $n$  désigne la partie entière de  $\frac{T}{\alpha}$ , on voit que  $B$  est

contenu dans l'ensemble  $\bigcup_{s=0}^{s=n} \varphi_{s\alpha}^*(A_\alpha)$  dont la mesure est finie puisque  $A_\alpha$  est compact.

A chaque  $x \in E$  faisons correspondre l'ensemble  $S_x$  des valeurs de  $t$  telles que  $\varphi^*(t, x) \in B$ .

Si  $S_x$  est non vide, nous désignerons par  $u(x)$  sa borne inférieure et poserons

$$h(x) = 1 \quad \text{si } u \leq 0; \quad h(x) = 0 \quad \text{si } u \geq \alpha;$$

$$h(x) = 1 - \frac{3u^2}{\alpha^2} + 2\frac{u^3}{\alpha^3} \quad \text{si } 0 < u < \alpha.$$

Si  $S_x$  est vide, nous poserons  $u(x) = +\infty$  et  $h(x) = 0$ . Il est facile de voir que la fonction  $u(x)$  est semi-continue inférieurement, donc que  $h(x)$  est mesurable; d'autre part,  $h$  est bornée et s'annule hors de l'ensemble de mesure finie

$$B' = \{x = \varphi^*(t, a); a \in A, -\alpha \leq t < \theta_1(a)\}.$$

Donc  $h \in L^p(\mu)$ ,  $\forall p \geq 1$ ; et l'on a  $h(x) = 1$  sur  $B$ .

Cela étant, nous allons montrer que, pour  $p > 1$ ,  $h$  appartient à  $\mathcal{O}_1^p$  mais n'appartient pas à  $\mathcal{O}_0^p$ : nous aurons ainsi prouvé que  $X_0^p \neq X_1^p$ .

a.  $h \in \mathcal{O}_1^p$ . — Si  $\varphi^*(t, x)$  est défini, on a

$$u_t(x) = u[\varphi^*(t, x)] = u(x) - t;$$

on en déduit facilement que le rapport  $\frac{1}{t}[h_t(x) - h(x)]$  a une limite  $\xi(x)$  quand  $t$  tend vers zéro, quel que soit  $x \in E$ . La fonction  $\xi(x)$  est mesurable; elle s'annule sur  $B$ , et satisfait à  $0 \leq \xi(x) \leq \frac{3}{2\alpha}$ . Ayant son support dans le compact

$$A'_\alpha = \{x = \varphi^*(t, a); a \in A, -\alpha \leq t \leq 0\},$$

elle appartient à  $L^p(\mu)$  quel que soit  $p > 1$ ;

Si  $g$  désigne une fonction sommable quelconque ayant son support dans un compact  $K$ ,  $\langle h_t, g \rangle = \mu(h_t \bar{g})$  est défini pour  $|t| < c_K$ , où  $c_K$  est le nombre défini à la fin du paragraphe 3; et, si  $t \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{t} \langle h_t - h, g \rangle$  tend vers  $\langle \xi, g \rangle$ .

Admettant provisoirement le lemme suivant (5 a), on en déduit que

$$\langle \xi, g \rangle = \langle h, \tilde{X}g \rangle \quad \text{quel que soit } g \in \mathcal{O};$$

autrement dit,  $h \in \mathcal{O}_1^p$  quel que soit  $p > 1$ , et  $X_1^p h = \xi$ .

LEMME 5 a. — Si  $g \in \mathcal{O}$  et  $f \in L^1(\mu)$ , alors  $\frac{1}{t} \langle f_t - f, g \rangle$  tend vers  $\langle f, \tilde{X}g \rangle$  quand  $t \rightarrow 0$ .

Désignons par  $g$  un élément fixe de  $\mathcal{O}$  et par  $K$  son support. Alors  $A_t(f) = \langle f_t, g \rangle$  est défini,  $\forall f \in L^1(\mu)$ , pour  $|t| < c_K$ ; et si  $f \in \mathcal{O}$  on a

$$(5.1) \quad \frac{d}{dt} A_t(f) = \langle Xf_t, g \rangle = \langle f_t, \tilde{X}g \rangle,$$

avec

$$(5.2) \quad |\langle f_t, \tilde{X}g \rangle| \leq e^{k|t|} \|f\|_1 \|\tilde{X}g\|_\infty.$$

Si  $f \in L^1(\mu)$  nous désignerons par  $f_n$  une suite d'éléments de  $\mathcal{O}$  convergeant en norme vers  $f$  dans  $L^1(\mu)$ ; les relations (5.1) et (5.2) prouvent que la suite  $\frac{d}{dt} A_t(f_n)$  converge uniformément vers  $\langle f_t, \tilde{X}g \rangle$  pour  $|t|$  borné; à la limite on a encore

$$\frac{d}{dt} \langle f_t, g \rangle = \langle f_t, \tilde{X}g \rangle \quad \text{pour } |t| < c_K,$$

ce qui prouve le lemme 5 a.

b.  $h$  n'appartient pas à  $\mathcal{O}_0^p$ .

Si  $h$  appartenait à  $\mathcal{O}_0^p$ , on aurait  $X_0^p h = \xi$ ; et à chaque nombre  $\varepsilon > 0$  on pourrait faire correspondre un élément  $g$  de  $\mathcal{O}$  satisfaisant à

$$(5.3) \quad \|g - h\|_p < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|Xg - \xi\|_p < \varepsilon.$$

Nous allons voir que pour  $\varepsilon > 0$  assez petit ces hypothèses aboutissent à une contradiction.

En effet, la fonction  $\xi$  s'annulant sur  $B$ , la seconde des relations (5.3) entraîne

$$(5.4) \quad \int_B |Xg|^p d\mu < \varepsilon^p.$$

Soit, d'autre part,  $x \in B$  quelconque; on sait (conséquence de la proposition 2) que  $\varphi^*(t, x)$  tend vers l'infini quand  $t \rightarrow \theta_1(x)$ ;  $g$  étant à support

compact, il existe donc un nombre  $\tau_1(x) < \theta_1(x)$  tel que  $g[\varphi^*(\tau_1, x)] = 0$ . On en déduit

$$g(x) = - \int_0^{\tau_1(x)} \frac{\partial}{\partial t} [g_t(x)] dt = - \int_0^{\tau_1(x)} X g_t(x) dt.$$

L'inégalité  $\theta_1(x) \leq T$  sur  $B$  entraîne donc

$$\int_B |g|^p d\mu \leq T^{p-1} \int_B \int_0^{\theta_1(x)} |X g_t|^p d\mu dt.$$

Désignons par  $B_t$  l'ensemble des points de  $B$  où l'on a  $\theta_1(x) > t$ ; la dernière inégalité s'écrit

$$\int_B |g|^p d\mu \leq T^{p-1} \int_0^T dt \int_{B_t} |X g_t(x)|^p d\mu(x)$$

et entraîne par application de (2.1) et (5.4)

$$(5.5) \quad \int_B |g|^p d\mu \leq T^p e^{kT} \int_B |X g|^p d\mu \leq \varepsilon^p T^p e^{kT}$$

si l'on remarque que  $\varphi^*(t, B_t)$  est contenu dans  $B$ .

On on a  $h(x) = 1$  sur  $B$ ; la première des inégalités (5.3) entraîne donc

$$\left[ \int_B |g|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \geq \left[ \int_B |h|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} - \varepsilon = \mu(B) - \varepsilon,$$

inégalité incompatible avec (5.5) si

$$\varepsilon \left[ 1 + T e^{\frac{kT}{p}} \right] < \mu(B).$$

On a donc nécessairement  $\mu(B) = 0$ , ce qui entraîne  $\mu(A) = 0$ ; donc  $\mu(E_1) = 0$ .

On établirait de même que les hypothèses  $\mu(E_2) \neq 0$  et  $X_0 = X_1^p$ , avec  $p > 1$ , sont incompatibles.

### 6. Résultats complémentaires.

PROPOSITION 3. — *Si pour chaque mesure invariante  $\mu^{(5)}$  le groupe local  $\varphi$  admet un prolongement presque global, alors  $\varphi$  admet un prolongement global.*

DÉMONSTRATION. — De la proposition 2 et des hypothèses, il résulte que le groupe local maximal  $\varphi^*$  engendré par  $\varphi$  est presque global pour chaque

(5)  $\mu$  est invariante si elle vérifie (1.4) ou (2.1) avec  $k = 0$ . L'opérateur  $iX_0^2$  est alors symétrique.

mesure invariante  $\mu$ . Désignons par  $e$  l'ensemble des points  $x$  de  $E$  tels que  $\varphi^*(t; x)$  ne soit pas défini pour toute valeur de  $t$ . Si  $a \in e$  et si  $I = ]t_1, t_2[$  désigne l'intervalle maximal sur lequel  $\varphi^*(t, a)$  est défini, l'ensemble  $O_a = \varphi(I, a)$  est tout entier contenu dans  $e$ . On définit une mesure invariante  $\mu$  en posant

$$\mu(f) = \lim_{\substack{u \rightarrow t_1 \\ v \rightarrow t_2}} \frac{1}{v-u} \int_u^v f[\varphi^*(t, a)] dt$$

pour chaque fonction  $f$  continue et à support compact. Cette mesure satisfait à  $\mu(O_a) = 1$ ; donc si  $e$  n'était pas vide, il existerait une mesure invariante  $\mu$  pour laquelle  $\varphi^*$  ne serait pas presque global.

**PROPOSITION 4** <sup>(6)</sup>. — Soit  $\mu$  une mesure positive sur  $E$  telle que tout ensemble ouvert de  $E$  ait une mesure strictement positive <sup>(7)</sup>, et soit  $\varphi$  un groupe local d'homéomorphismes de  $E$  conservant la mesure  $\mu$ , tel que l'hypothèse  $(H_1)$  du paragraphe 2 soit vérifiée. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$\alpha$ .  $\varphi$  admet un prolongement presque global de  $\varphi^*$ ; l'ensemble de mesure nulle  $e$  formé des points  $x \in E$  tels que  $\varphi^*(t, x)$  ne soit pas défini pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , est fermé; les orbites des points de  $Ce$  sont fermées et les périodes correspondantes sont bornées par un même nombre  $T$ .

$\beta$ . Si  $\mathcal{H}'$  désigne l'ensemble des  $f \in \mathcal{O}_1^2$  satisfaisant à  $X_1^2 f = 0$ , et si  $\mathcal{H}''$  est le sous-espace de  $L^2(\mu)$  complètement orthogonal à  $\mathcal{H}'$ , il existe une constante  $k$  telle que

$$(6.1) \quad \|f\|_2 \leq k \|X_0^2 f\|_2, \quad \forall f \in \mathcal{H}'' \cap \mathcal{O}_0.$$

i.  $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ . — Supposons la condition  $(\alpha)$  vérifiée et soit  $x \in Ce$ . Si l'orbite de  $x$  n'est pas réduite à un point, sa période est le plus petit nombre  $\tau > 0$  satisfaisant à  $\varphi^*(\tau, x) = x$ . Si  $x$  est un point fixe, nous poserons  $\tau(x) = 0$ . La fonction  $\tau(x)$  ainsi définie sur  $Ce$  est invariante et semi-continue inférieurement; et elle satisfait à  $0 \leq \tau(x) < T$ .

A chaque fonction  $f$  continue à support dans  $Ce$ , faisons correspondre la fonction  $\tilde{f}$  à support dans  $Ce$  définie par

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{1}{\tau(x)} \int_0^{\tau(x)} f[\varphi^*(t, x)] dt & \text{si } \tau(x) \neq 0; \\ \tilde{f}(x) &= f(x) & \text{si } \tau(x) = 0. \end{aligned}$$

On voit immédiatement que  $\tilde{f}$  est invariante et continue. Si, de plus,  $f$  est à support compact, alors  $\tilde{f} \in \mathcal{O}$  et  $X^2 \tilde{f} = 0$ , de sorte que  $\tilde{f} \in \mathcal{H}''$ : montrons qu'alors  $f - \tilde{f} \in \mathcal{H}'$ .

<sup>(6)</sup> Cette proposition précise et généralise le lemme (14 b) de [1].

<sup>(7)</sup> Cette hypothèse servira seulement à établir  $\beta \rightarrow \alpha$ .

En effet, si  $g \in \mathcal{B}'$ , on a, presque partout sur  $Ce$ ,  $g_t(x) = g(x)$ ; d'où, en posant  $E_t = \{x \in Ce; \tau(x) \geq t\}$  et en utilisant l'invariance de  $\tau$  et de  $\mu$ ,

$$\begin{aligned} \int_E \tilde{f} \cdot \bar{g} \, dx &= \int_0^T dt \int_{E_t} \frac{1}{\tau} f_t \bar{g} \, d\mu = \int_0^T dt \int_{E_t} \frac{1}{\tau} f \bar{g}_{-t} \, d\mu \\ &= \int_0^T dt \int_{E_t} \frac{1}{\tau} f \bar{g} \, d\mu = \int_E f \bar{g} \, d\mu. \end{aligned}$$

Et la relation  $\langle \tilde{f}, g \rangle = \langle f, g \rangle$ , vraie  $\forall g \in \mathcal{B}'$ , montre que  $f - \tilde{f} \in \mathcal{B}''$ .

Donc, si  $f$  est continue et à support compact dans  $Ce$ ,  $\tilde{f}$  est la projection de  $f$  sur  $\mathcal{B}'$ . L'ensemble  $e$  étant fermé et de mesure nulle, l'ensemble  $\mathcal{C}$  des fonctions continues à support compact dans  $Ce$  est dense dans  $L^2(\mu)$ ; l'opérateur  $P: f \rightarrow \tilde{f}$  se prolonge donc à  $L^2(\mu)$  de telle sorte que  $f \in \mathcal{B}' \Leftrightarrow Pf = 0$ , et que  $f \in \mathcal{B}'' \Leftrightarrow Pf = f$ .

Si  $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{B}''$ , on a  $\tilde{f}(x) = 0, \forall x$ ; on en déduit l'existence d'un nombre  $t_0(x)$  [ $0 \leq t_0 \leq \tau(x)$ ] tel que  $f_{t_0}(x) = 0$ . On a donc

$$|f(x)|^2 \leq t_0(x) \int_0^{t_0(x)} \left| \frac{\partial}{\partial u} f_u(x) \right|^2 du \leq T \int_0^T |X f_u(x)|^2 du,$$

d'où

$$\|f\|_2^2 \leq T \int_0^T \int_{Ce} |X f_u(x)|^2 du \, d\mu(x) = T^2 \|Xf\|_2^2.$$

Si  $f \in \mathcal{B}'' \cap \mathcal{O}_0^2$  il existe une suite  $f_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{O}$  telle que  $f_n \rightarrow f$  et  $Xf_n \rightarrow X_0^2 f$  dans  $L^2(\mu)$ . On a  $0 = Pf = \lim Pf_n$ , de sorte que  $f_n - Pf_n \rightarrow f$ ; et puisque  $f_n - Pf_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{B}''$ , on a

$$\|f_n - Pf_n\|_2 \leq T \|Xf_n\|_2$$

de sorte qu'à la limite  $f$  vérifie l'inégalité (6.1) avec  $k = T$ .

(ii).  $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ . — Il résulte de  $(\beta)$  que l'opérateur symétrique  $iX_0^2$  est auto-adjoint, donc que  $\varphi$  engendre un groupe presque global  $\varphi^*$ . A chaque nombre  $n > 0$  correspond donc un ensemble  $e_n$ , fermé et de mesure nulle, tel que  $\varphi^*(t, x)$  soit défini pour  $|t| < n$  et  $x \in Ce_n$ . Supposons qu'en un point  $a$  de  $Ce_n$  on ait  $\varphi^*(t, a) \neq a$  pour  $0 < t \leq T$ , avec  $T < n$ . La continuité de  $\varphi^*$  entraîne l'existence d'un voisinage  $A$  de  $a$ , que nous pouvons supposer compact et contenu dans  $Ce_n$ , tel que les relations  $0 < t \leq T$  et  $x \in A$  entraînent  $\varphi^*(t, x) \neq x$ .

Nous pouvons, d'autre part, supposer  $A$  assez petit pour que les relations  $x \in A, \varphi(t, x) \in A$  et  $0 \leq t \leq T$  entraînent  $0 \leq t < \frac{T}{2}$ : sinon, en effet, chaque voisinage  $U$  de  $\left[\frac{T}{2}, T\right] \times \{a\}$  dans  $\mathbf{R} \times E$  contiendrait un point  $(t, x)$

tel que  $[t, \varphi(t, x)] \in U$ ; à la limite on en déduirait l'existence d'un nombre  $\theta \in \left[ \frac{T}{2}, T \right]$  tel que  $\varphi(\theta, a) = a$ , contrairement à l'hypothèse.

Le compact  $A$  étant ainsi choisi, soit  $O$  l'orbite d'un point  $b$  de  $A$ . Si  $O$  n'est pas fermée, il existe un point  $b_0 \in A \cap O$  et un seul tel que  $\varphi^*(t, b_0) \in A$  entraîne  $t \geq 0$ ; et si  $x$  désigne un point quelconque de  $O$  il existe un nombre  $u$ , et un seul, tel que  $x = \varphi(u, b_0)$ .

Si  $O$  est fermée, sa période  $\tau$  est nécessairement supérieure à  $T$ ; l'application  $\Phi_b: \exp\left(\frac{2i\pi t}{\tau}\right) \rightarrow \varphi(t, b)$  définit un homéomorphisme de la circonférence unité sur  $O$ ; et d'après les conditions imposées à  $A$  on voit que  $\Phi_b^{-1}(O \cap A)$  est contenu dans un arc de longueur inférieure à  $\pi$ . Désignons par  $\exp\left(\frac{2i\pi t_0}{\tau}\right)$  et  $\exp\left(\frac{2i\pi t_1}{\tau}\right)$  les extrémités du plus petit arc contenant  $\Phi_b^{-1}(O \cap A)$  et posons  $b_0 = \varphi(t_0, b)$ : le point  $b_0$  ne dépend pas du choix de  $b$  sur  $O$ , et à chaque point  $x$  de  $O$  correspond un nombre  $u \in [0, \tau[$  et un seul tel que  $x = \varphi(u, b_0)$ .

Nous avons défini ainsi une fonction  $u(x)$  sur l'ensemble des points de  $E$  dont l'orbite rencontre  $A$ ; si l'orbite de  $x$  ne rencontre pas  $A$  nous poserons  $u(x) = -\infty$ : on verrait facilement que la fonction  $u$  ainsi définie est semi-continue supérieurement, donc mesurable; elle satisfait à  $u(x) \geq 0$  sur  $A$ ; et à chaque valeur  $t \in [0, T]$  correspond un point  $x$ , et un seul sur chaque orbite rencontrant  $A$ , tel que  $u(x) = t$ . Enfin, si les nombres  $u(x)$  et  $u(x) + t$  appartiennent tous deux à  $[0, T]$ , on a

$$(6.2) \quad u[\varphi^*(t, x)] = u(x) + t.$$

Pour chaque  $t \in [0, T]$  nous poserons

$$A_t = \{x \in E; 0 \leq u(x) \leq t\}.$$

L'ensemble  $A_t$  est mesurable et contenu dans le compact  $\varphi^*([0, T], A)$ , donc de mesure finie. Et si  $0 \leq s \leq t + s \leq T$ , on a

$$A_{t+s} = A_t \cup \varphi^*(t, A_s); \quad A_t \cap \varphi^*(t, A_s) = \varphi^*(t, A_0).$$

d'où, puisque la mesure  $\mu$  est invariante,

$$(6.3) \quad \mu(A_{t+s}) + \mu(A_0) = \mu(A_t) + \mu(A_s).$$

D'autre part,  $\varphi^*(s, A_0) \cap \varphi^*(t, A_0)$  est vide pour  $t \neq s$ . Si  $\mu(A_0)$  était non nul, on en déduirait que  $A_t = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \varphi^*(t, A_0)$  est de mesure infinie, ce qui n'est pas. On a donc  $\mu(A_0) = 0$ , d'où l'on déduit que la fonction  $\mu(A_t)$  est continue; et la relation (6.3) entraîne l'existence d'une constante  $\lambda$  telle que  $\mu(A_t) = \lambda t$ . Si  $\lambda$  était nul,  $A_t$  serait de mesure nulle, donc aussi  $A$  car

les hypothèses faites sur  $A$  entraînent  $A \subset A_T$ . Mais l'ensemble  $A$ , contenant un ouvert, ne peut être de mesure nulle : on a donc

$$\mu(A_t) = \lambda t, \quad \text{avec } \lambda > 0.$$

Désignons maintenant par  $\chi(t)$  la fonction de classe  $C^1$  à support dans  $[0, T]$  définie par

$$\chi(t) = 1 - \cos \frac{4\pi t}{T} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

et

$$\chi(T - t) = -\chi(t).$$

Et soit  $f$  la fonction mesurable à support dans  $A_T$  définie par  $f(x) = \chi[u(x)]$ . On a d'abord

$$(6.4) \quad \|f\|_2^2 = \int_0^T \chi^2(t) d\mu(A_t) = \lambda \int_0^T \chi^2(t) dt = \frac{3\lambda T}{2}.$$

D'autre part, la formule (6.2) montre que  $\frac{1}{t} \{f[\varphi^*(t, x)] - f(x)\}$  tend vers  $\chi'[u(x)]$  quand  $t \rightarrow 0$ . Par application du lemme 5 a, on en déduit que  $f \in \mathcal{O}_1^2$ , avec  $X_1^2 f = \chi'[u(x)]$ ; et l'on a

$$(6.5) \quad \|X_1^2 f\|_2^2 = \int_0^T \chi'^2(t) d\mu(A_t) = \lambda \int_0^T \chi'^2(t) dt = \frac{8\lambda\pi^2}{T}.$$

Enfin si  $g$  désigne un élément quelconque de  $\mathcal{H}'$  et  $h$  une fonction continue à support compact, l'intégrale  $\mu_g(h) = \langle h, g \rangle$  définit une mesure  $\mu_g$  invariante sur  $E$ ; par un raisonnement analogue au précédent on en déduit l'existence d'une constante  $\rho_g \in \mathbf{C}$  (éventuellement nulle, et dépendant de  $g$ ) telle que  $\mu_g(A_t) = \rho_g t$ ; et l'on a

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T \chi(t) d\mu_g(A_t) = \rho_g \int_0^T \chi(t) dt = 0,$$

ce qui prouve que  $f \in \mathcal{H}''$ .

Les relations (6.4) et (6.5) jointes à l'hypothèse ( $\beta$ ) entraînent l'inégalité

$$T \leq \frac{4\pi k}{\sqrt{3}}.$$

Autrement dit, quels que soient  $\varepsilon > 0$ ,  $n > \frac{4\pi k}{\sqrt{3}}$  et  $x \in Ce_n$ , il existe un nombre  $\theta \in \left[0, \frac{4\pi k}{\sqrt{3}} + \varepsilon\right]$  tel que  $\varphi^*(\theta, x) = x$ . On en déduit que l'orbite de  $x$  est fermée, donc que  $\varphi^*(t, x)$  est défini quel que soit  $t$ ; et la période  $\tau(x)$  correspondante est bornée par  $\frac{4\pi k}{\sqrt{3}}$ . C. Q. F. D.

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — Application des méthodes de Hilbert à l'étude des transformations infinitésimales d'une variété différentiable, *Bull. Soc. math. France*, t. 86, 1958, p. 1-26.
- [2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — Sur les groupes à un paramètre de transformations des variétés différentiables, *J. Math. pures et appl.*, 9<sup>e</sup> série, t. 37, 1958, p. 269-278.
- [2] NELSON (Edward). — Analytic vectors, *Annals of Math.*, t. 70, 1959, p. 572-615.
- [4] PALAIS (Richard S.). — *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*. — Providence, American mathematical Society, 1957 (Memoirs of the American mathematical Society, 22).
- [5] PHILLIPS (R. S.). — Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 90, 1958, p. 193-254.

(Manuscrit reçu le 9 mai 1961.)

M<sup>me</sup> Jacqueline LELONG-FERRAND,  
Professeur à la faculté des Sciences de Paris,  
95, boulevard Jourdan  
Paris (14<sup>e</sup>).

---