

# BULLETIN DE LA S. M. F.

LARS GÅRDING

## **Transformation de Fourier des distributions homogènes**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 89 (1961), p. 381-428

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1961\\_\\_89\\_\\_381\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__381_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## TRANSFORMATION DE FOURIER DES DISTRIBUTIONS HOMOGÈNES ;

PAR

LARS GÅRDING

(Lund).

**Introduction.** — La théorie de la transformation de Fourier des fonctions et des distributions homogènes a été étudiée par GEL'FAND et SHAPIRO [2] et par GEL'FAND et SHILOV dans leur traité [3]. Nous reprenons entièrement ce sujet; nous en faisons une étude systématique englobant l'analyse des singularités.

On dit qu'une distribution  $f(x) = f_x(x)$  dans  $R^l$  est homogène de degré  $\alpha$  si  $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$  pour tout  $\lambda > 0$ . Le nombre  $\alpha$  peut être complexe. Une telle distribution est tempérée, et elle a des restrictions bien définies

$$f(x)|_{x \in V}$$

à toute variété  $V$  régulière de dimension  $l-1$  qui ne touche aucune droite passant par l'origine. Soit  $\gamma(x) > 0$  régulière (de classe  $C^\infty$ ) et homogène de degré 1. Toute variété  $\gamma = 1$  a cette propriété. Soit

$$F(x) = \mathcal{F} f(x) = \int e^{ix\xi} f(\xi) \tau(\xi), \quad \tau(\xi) = d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_l$$

la transformée de Fourier de  $f$ . En passant aux coordonnées polaires par rapport à  $\gamma(x)$  on trouve après un calcul formel que

$$(1) \quad F(x) = e(\alpha') \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi) f_x(\xi) \sigma(\xi),$$

où  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont liés par  $\alpha + \alpha' = -l$ ,  $e(\alpha) = \exp\left(\frac{1}{2} \pi i \alpha\right)$ ,

$$\sigma(\xi) = \xi_1 d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_l - \xi_2 d\xi_1 \wedge d\xi_3 \wedge \dots + \dots$$

et

$$\chi_\beta(s) = \int_0^\infty e^{is\rho} \rho^{-\beta-1} d\rho = \Gamma(-\beta) e^{-\pi i\beta} s^\beta$$

avec  $0 \leq \arg s \leq \pi$ . Il faut interpréter  $\chi_\beta$  comme une distribution sur l'axe réel, valeur limite pour  $\text{Im } s \downarrow 0$  de la fonction analytique pour  $\text{Im } s > 0$  que constitue l'expression à droite si  $\beta \neq \text{entier} \geq 0$ . Si  $p = \text{entier} \geq 0$  il faut poser

$$\chi_p(s) = \left| \frac{d}{d\beta} (\beta - p) \chi_\beta(s) \right|_{\beta=p}.$$

En particulier, on trouve que

$$\chi_0(s) = \log |s|^{-1} + i(\pi - \arg s).$$

Si  $\text{Re } \beta > -1$ ,  $\chi_\beta$  est localement intégrable, si  $\beta = -1$  on trouve que

$$\chi_{-1}(s) = P s^{-1} + \pi i \delta(s),$$

où  $P$  est la valeur principale.

Les distributions  $\chi_\beta(s)$  ont la propriété que

$$\frac{d}{ds} \chi_\beta(s) = \chi_{\beta-1}(s).$$

Si  $\beta \neq p$ , elles sont homogènes d'ordre  $\beta$ ; si  $\beta = p$  elles sont quasi homogènes : la différence  $\chi_p(\lambda s) - \lambda^p \chi_p(s)$  est une fonction régulière (dans ce cas un multiple de  $s^p$ ). Notre premier résultat principal (lemme 1.6.2) est que (1) vaut pour une distribution homogène quelconque  $f_x$  pourvu que  $\alpha \neq p'$ . En particulier on peut donner un sens précis à l'intégrale où il faut regarder  $f_x$  comme distribution sur la variété  $\gamma(x) = 1$ . Si  $f_x$  est régulier, ou analytique pour  $x \neq 0$ , l'intégrale de (1) a les mêmes propriétés. Dans le cas exceptionnel, la différence des deux membres est un polynôme homogène de degré  $p$  qui dépend du choix de  $\gamma$ . Pour les fonctions, (1) est dû à GEL'FAND et SHAPIRO [2].

On peut se débarrasser du cas exceptionnel en prenant un quotient : soit  $\Phi_\alpha$  l'espace des distributions homogènes de degré  $\alpha$ , et soit  $N_\alpha$  l'espace des éléments de  $\Phi_\alpha$  qui sont des polynômes ou bien des distributions à support d'origine. On a  $N_\alpha = 0$ , sauf pour  $\alpha = p$  où  $N_\alpha$  est l'espace des polynômes  $Q_p$ , homogènes de degré  $p$ , et pour  $\alpha = p'$  où  $N_\alpha$  est l'espace des  $Q_p(\partial/\partial x) \delta(x)$ . Soit maintenant  $H_\alpha = \Phi_\alpha/N_\alpha$ , et soit  $G_\alpha$  le sous-espace des éléments de  $H_\alpha$  qui sont de classe  $C^\infty$  en dehors de l'origine. On prend sur  $H_\alpha$  la topologie induite par la topologie de l'espace des distributions tempérées et sur  $G_\alpha$  la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées sur les parties compactes de  $R$  privé de l'origine. Si  $\alpha \neq p$ , on peut identifier  $G_\alpha$  avec

la classe  $C^\infty$  sur n'importe quelle variété  $\gamma(x) = 1$ ; pour  $\alpha = p$  il faut prendre le quotient par  $N_p$ . On voit aisément (théorème 1.2.1) que

$$\int_{\gamma(x)=1} f_\alpha(x) g_{\alpha'}(x) \sigma(x)$$

est une dualité entre  $H_\alpha$  et  $G_{\alpha'}$ , et que la transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  induit une transformation linéaire  $\Lambda$  sur les  $H$  qui est un homéomorphisme linéaire  $H_\alpha \rightarrow H_{\alpha'}$  et  $G_\alpha \rightarrow G_{\alpha'}$  ayant les propriétés classiques de  $\mathcal{F}$  (voir théorème 1.6.1). On peut aussi donner les transformations analogues à  $\mathcal{F}$  opérant sur les fonctions paires et impaires respectivement (fin du 1.6). Ce sont là les principaux résultats du chapitre 1. Il est assez long : il a fallu commencer par un bref exposé de la théorie des distributions sur une variété. En effet, si cette théorie se trouve chez de RHAM [11], ce n'est pas sous une forme très maniable. Il a fallu aussi rappeler une partie de la théorie des distributions régulières par rapport à certaines variables (SCHWARTZ 10).

Dans le second chapitre, on étudie les singularités de la transformation de Fourier d'une distribution  $f$  homogène de degré  $\alpha'$ ,

$$g(x) = e(\alpha) \int_{\gamma(\xi)=1} \chi_\alpha(x\xi) f(\xi) \sigma(\xi),$$

qui devient singulière sur une variété régulière  $S : s(\xi) = 0$  de la façon suivante :

$$f(\xi) = \chi_\beta(s(\xi)) P_\mu(\xi),$$

où  $P_\mu$  est régulier (de classe  $C^\infty$ ) et homogène de degré  $\mu$ . On suppose de plus que  $s$  (réel) est régulier et homogène de degré  $m \neq 1$ , ce qui entraîne  $\alpha + m\beta + \mu + l = 0$ . Sous ces conditions,  $g$  est régulier sauf si le plan  $x\xi = 0$  touche la variété  $S$ , c'est-à-dire  $g$  est régulier en dehors du dual  $S'$  de  $S$ . Près d'un point  $x_0$  de  $S'$  tel que  $x_0\xi = 0$  touche  $S$  en un seul point  $\eta_0$ ,  $g$  a un développement asymptotique de la forme

$$e(\alpha) (2\pi)^{l/2} |m-1|^{-1} |\text{Hess } s'(x)|^{\frac{1}{2}} \theta_0(-\varepsilon) i^\nu \times \sum_0^\infty R_k(x) \chi_{\alpha+\beta+\frac{l}{2}+k}(\varepsilon s(x)) + \text{fonctions régulières.}$$

Ici  $R_k$  sont des fonctions régulières,  $R_0(x) = P_\mu(\eta)$  si  $x, \eta$  sont des points correspondants sur  $S'$  et  $S$  respectivement;  $s'(x) = 0$  est l'équation de  $S'$  convenablement normé,  $\nu$  est la signature positive de la matrice  $(\partial^2 s'(x)/\partial x_j \partial x_k)$  au point  $x_0$ , supposée non-singulière;  $\varepsilon$  est le signe du quotient  $x_0\xi/s(\xi)$  au point  $\eta_0$  et  $\theta_0(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn } t)$ . On trouve des énoncés précis dans le théorème 2.4.1. Notons que les singularités de  $f$  et de sa transformée de

Fourier  $g$  sont en correspondance ponctuelle. Si  $f$  n'est pas homogène, ce n'est pas le cas : à un point singulier de  $f$  correspond un comportement à l'infini de  $g$ , et réciproquement.

Le chapitre 2 se termine par une application du théorème ci-dessus aux solutions élémentaires des opérateurs différentiels homogènes à coefficients constants; on retrouve en particulier des résultats de BOROVIKOV [1]. Notons qu'il existe pour les opérateurs différentiels fortement hyperboliques à coefficients analytiques des résultats plus complets concernant aussi le domaine complexe : voir J. LERAY [7].

Le théorème 2.4.1 est un corollaire d'un résultat (théorème 2.3.1) portant sur des intégrales de la forme

$$(2) \quad \int \varphi(s(u, t)) P(u, t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q;$$

où  $P$  est une fonction régulière de  $t$  et de certaines autres variables  $u = u_1, u_2, \dots$ , à support compact pour  $u$  fixe;  $\varphi$  est une distribution sur la droite, régulière hors de l'origine;  $s$  une fonction réelle à gradient non nul, dont le gradient en  $t$  s'annule en un point  $(v, \tilde{t})$  où la matrice  $A = \partial^2 s / \partial t_j \partial t_k$  n'est pas singulière. Autrement dit, la variété  $s(v, t) = 0$  a un point quadratique régulier  $\tilde{t}$ . On trouve que, près de  $v$ , l'intégrale (2) a un développement asymptotique suivant des distributions  $\psi^{(k)}(s_0(u))$ , où  $\psi^{(k)}$  sont des intégrales successives d'une certaine distribution  $\psi$  et  $s_0(u)$  est la valeur de  $s(u, t)$  au point  $t = t_0(u)$  voisin de  $\tilde{t}$ , en lequel le gradient de  $s$  par rapport à  $t$  s'annule. La distribution  $\psi$  est régulière en dehors de l'origine et se déduit de  $\varphi$  par la formule

$$2\pi i \psi = \varphi \circ \left( i^\nu \chi_{\frac{1}{2}q-1} + i^{\nu-\nu} \check{\chi}_{\frac{1}{2}q-1} \right),$$

où  $\nu$  est la signature positive de  $A$ ,  $\check{\chi}_\beta(s) = \chi_\beta(-s)$ ;  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  étant des distributions régulières hors de l'origine;  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  est une quelconque des distributions de même sorte telles que

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 = \int_{-a}^{+a} \varphi_1(s-t) \varphi_2(t) dt \quad (a > 0),$$

soit régulière à l'origine. L'utilité des  $\chi$  vient en grande partie du fait que

$$\begin{aligned} \chi_\alpha \circ \chi_\beta &\equiv 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1}, & \check{\chi}_\alpha \circ \check{\chi}_\beta &\equiv 2\pi i \check{\chi}_{\alpha+\beta+1}, \\ \chi_\alpha \circ \check{\chi}_\beta &\equiv 0, \end{aligned}$$

modulo des fonctions régulières à l'origine. Le théorème 2.3.1 n'est pas nouveau; sous une autre forme on le trouve chez D. LUDWIG [8]. Un résultat analogue dans le domaine complexe se trouve aussi chez LERAY [7].

CHAPITRE 1. — Distributions homogènes.

**1. Distributions.** — Rappelons quelques points de la théorie des distributions (SCHWARTZ [9]) sur une variété (de RHAM [11]).

**1° Notations.** — Soit  $X$  une variété de classe  $C^\infty$ , notons  $x$  les points de  $X$  et  $x_1, \dots, x_l$  les coordonnées de  $x$ . Posons

$$d_\nu = (\partial/\partial x)_{\nu} = (\partial/\partial x_{\nu_1}) \dots (\partial/\partial x_{\nu_p}),$$

où  $\nu_1, \dots, \nu_p$  sont des entiers entre 1 et  $l$ . L'ordre  $p$  de cette dérivée sera noté  $|\nu|$ .

Soit  $C(X) = C^\infty(X)$  l'espace des fonctions à valeurs complexes indéfiniment différentiables sur  $X$ ; notons  $C_0(K)$  et  $C_0(X)$  les sous-espaces des éléments de  $C(X)$  à support dans un compact fixe  $K$  de  $X$  et à support compact libre respectivement. Soit  $\mathcal{R}$  un recouvrement de  $X$  par des compacts  $K_1, K_2, \dots$ , où l'on a choisi des systèmes de coordonnées  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ . Avec les seminormes

$$|g, K|_p = \sup_j \sup_{h_j} \sup_{K \cap K_j} |h_j(x)|,$$

où  $p = 0, 1, 2, \dots$  et  $h_j$  parcourt toutes les dérivées de  $g$  d'ordre  $\leq p$  par rapport à  $x^{(j)}$ ,  $C_0(K)$  devient un espace de Fréchet réflexif. Sa topologie ne dépend pas de  $\mathcal{R}$ . Il en est de même pour  $C(X)$ ; on prend les mêmes seminormes où  $K$  parcourt une suite dénombrable de compacts épuisant  $X$ . La topologie de  $C_0(X)$  sera celle de Schwartz : limite inductive des  $C_0(K)$ . Notons qu'un sous-ensemble  $B$  de  $C_0(X)$  est borné si et seulement si les supports de tous les éléments de  $B$  sont contenus dans un  $K$  fixe et  $B$  est borné dans  $C_0(K)$ .

Considérons aussi les formes différentielles de degré maximal  $l$  sur  $X$ ,

$$(1) \quad \omega(x) = g(x) \tau(x), \quad \tau(x) = \tau(x_1, \dots, x_l) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l.$$

Notons  $\Omega(X)$ ,  $\Omega_0(K)$  et  $\Omega_0(X)$  les espaces linéaires de ces formes pour lesquelles  $g$  appartient à  $C(X)$ ,  $C_0(K)$  et  $C_0(X)$  respectivement.

Nous supposons toujours que  $X$  soit orientable, c'est-à-dire qu'il existe des formes réelles  $\varepsilon \in \Omega(X)$  qui sont  $\neq 0$  partout. Alors

$$\omega \rightarrow \omega(x)/\varepsilon(x)$$

est un homéomorphisme linéaire

$$\Omega(X) \rightarrow C(X), \quad \Omega_0(K) \rightarrow C_0(K), \quad \Omega_0(X) \rightarrow C_0(X).$$

Si  $X$  est un ouvert de  $R^l$ , la distinction entre les fonctions et les formes est inutile; toute forme s'écrit sous la forme (1) dans un seul système de coordonnées.

Soit  $X$  orientable et orienté par  $\rho(x) > 0$  où  $\rho \in \Omega(X)$  est réel. Si  $X$  est un ouvert de  $R^l$  nous prenons toujours  $\rho = \tau(x) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l$ . Les distributions sur  $X$  sont, par définition, les éléments du dual de  $\Omega_0(X)$ . Nous noterons  $C'(X)$  ce dual et  $C_0(X)$  le sous-espace des distributions à support compact. Chaque fonction localement intégrable  $f(x)$  définit une distribution, à savoir,

$$\omega \rightarrow \int_X f(x) \omega(x), \quad \omega \in \Omega_0(X).$$

On identifie  $f$  avec cette distribution, et l'on emploie l'une ou l'autre notation

$$(f, \omega) = \int_X f(x) \omega(x)$$

pour la valeur de la distribution  $f \in C'(X)$  au point  $\omega$  de  $\Omega_0(X)$ . De même, une distribution sera notée comme les fonctions par  $f, g, \dots$  ou par  $f(x), g(x), \dots$ . Si  $X$  est un ouvert  $U$  de  $R^l$ , la formule  $\omega(x)$  s'identifie avec  $g(x) \tau(x)$  où  $g \in C_0(U)$  et nous écrivons

$$(f, g) = \int_U f(x) g(x) \tau(x)$$

pour  $(f, \omega)$ . Si  $U$  contient  $o$ , la distribution de Dirac  $g \rightarrow g(o)$  sera notée par  $\delta(x)$  et sa valeur  $g(o)$  sur  $g$ , c'est-à-dire sur  $g(x) \tau(x)$ , par

$$(\delta, g) = \int \delta(x) g(x) \tau(x).$$

Rappelons que  $C_0(X)$ , et *a fortiori*  $C(X)$ , est dense dans  $C'(X)$ . Les dérivées  $(\partial/\partial x)_\nu f(x)$  d'une distribution sont définies dans le domaine (ouvert)  $V$  des coordonnées  $x_1, \dots, x_l$  par

$$\int (\partial/\partial x)_\nu f(x) g(x) \tau(x) = (-1)^{|\nu|} \int f(x) (\partial/\partial x)_\nu g(x) \tau(x),$$

où  $g(x) \tau(x) \in \Omega_0(V)$ . Localement, toute distribution s'écrit sous la forme d'une somme finie

$$(2) \quad f(x) = \sum \partial_\nu F_\nu(x),$$

où les  $F_\nu$  sont des fonctions continues. On voit que cette représentation de  $f$  est équivalente à la suivante

$$f(x) = \sum h_\nu(x) \partial_\nu G_\nu(x),$$

où  $h_\nu \in C(V)$  et les  $G_\nu$  sont continues. En effet toute somme de cette forme peut s'écrire sous la forme (2).

Soient  $x_1, \dots, x_l$  et  $y_1, \dots, y_l$  deux systèmes de coordonnées ayant un domaine commun  $V$ . Alors pour une distribution quelconque  $f$  on a

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

dans  $V$ . En effet, cette règle s'étend par continuité des fonctions aux distributions.

Soient  $X$  et  $Y$  des variétés, et

$$y \rightarrow x(y)$$

une application de classe  $C^\infty$ , biunivoque et de rang  $l$  partout. Alors on a une application réciproque

$$(4) \quad f(x) \rightarrow f(x(y))$$

des fonctions. C'est un homéomorphisme linéaire  $C(X) \rightarrow C(Y)$  qui s'étend en un homéomorphisme linéaire  $C'(X) \rightarrow C'(Y)$  pour les distributions définies par

$$(5) \quad \int_Y f(x(y)) \omega(y) = \varepsilon \int_X f(x) \omega(y(x)),$$

où  $x \rightarrow y(x)$  est l'inverse de  $y \rightarrow x(y)$ ;  $\varepsilon = 1$  si ces applications conservent l'orientation et  $\varepsilon = -1$  dans le cas contraire. En effet, puisque  $\omega(y) \rightarrow \varepsilon \omega(y(x))$  est un homéomorphisme  $\Omega_0(Y) \rightarrow \Omega_0(X)$ , son adjoint (4) est bien un homéomorphisme linéaire.

Si  $X$  et  $Y$  sont des ouverts de  $R^l$ , (5) s'écrit

$$(6) \quad \int_Y f(x(y)) g(y) \tau(y) = \int_X f(x) g(y(x)) |J(x)| \tau(x),$$

où  $J(x) = \tau(y(x))/\tau(y)$  est le Jacobien.

EXEMPLE. — Soient  $y(x) = Ax + a$  linéaire en  $x$ ,  $A$  une matrice non-singulière,  $a \in R^l$ . Si  $f(x)$  est une distribution sur  $R^l$ ,  $f(Ay + a)$  est défini par (6) avec  $x(y) = A^{-1}(y - a)$  et  $J(x) = \det A$ . En permutant  $x$  et  $y$  on a donc

$$\int \delta(x - a) g(x) \tau(x) = g(a),$$

$$\delta(Ax - a) = |\det A|^{-1} \delta(x - A^{-1}a).$$

2° *Distributions de moins de  $l$  variables.* — Soit

$$X = Y \times Z,$$

où  $Y = R^p$  et  $Z = R^q$ . Il est clair que l'injection

$$C(Y) \ni f(y) \rightarrow f(y) \in C(X)$$

est un homéomorphisme linéaire dans  $\mathcal{C}(X)$  où l'image de  $\mathcal{C}(Y)$  est l'ensemble des fonctions  $f(x) = f(y, z)$  qui ne dépendent pas de  $z$  dans l'un ou l'autre des sens équivalents

$$(7) \quad \frac{\partial f(y, z)}{\partial z_k} = 0 \quad (\forall k),$$

$$(8) \quad f(y, z + b) = f(y, z) \quad (\forall b).$$

On a le même résultat pour les distributions (SCHWARTZ [6]), l'injection

$$\mathcal{C}(Y) \ni f(y) \rightarrow f(y) \in \mathcal{C}(X)$$

étant définie par

$$(f, g) = \int f(y) \left( \int g(y, z) \tau(z) \right) \tau(y);$$

c'est l'adjoint de l'application

$$(9) \quad g(y, z) \rightarrow \int g(y, z) \tau(z)$$

qui est bornée  $\mathcal{C}_0(X) \rightarrow \mathcal{C}_0(Y)$ .

On peut définir une injection analogue pour les variétés. Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés de dimensions  $l$  et  $p$  respectivement. Étant donnée une application  $x \rightarrow y(x)$  de  $X$  dans  $Y$ , on a une application

$$(10) \quad f(y) \rightarrow f(y(x))$$

dans la direction inverse pour les fonctions. Nous allons l'étendre aux distributions sous condition que

$$(11) \quad l \geq p, \quad y(x) \in \mathcal{C}^z, \quad y(x) \text{ de rang } p \text{ partout.}$$

Dans ce cas, il existe une application  $A$  unique, linéaire et bornée, l'analogue de (9),

$$\omega(x) \rightarrow \omega'(y) = (A\omega)(y)$$

de  $\Omega_0(X)$  dans  $\Omega_0(Y)$  telle que

$$\int f(y(x)) \omega(x) = \int f(y) A\omega(y)$$

pour tout  $f \in \mathcal{C}(Y)$ , et l'on définit (10) comme l'adjoint de  $A$ . Explicitement  $A$  s'obtient comme il suit. Soit  $\rho(y) > 0$  l'orientation de  $Y$ , et soit  $X_y$  la sous-variété de  $X$ ,

$$X_y: \quad x(y) = y.$$

Alors

$$\omega(x) = \omega_y(x) \wedge \rho_0(y)$$

définit une application linéaire  $\Omega(X) \rightarrow \Omega(X_y)$  et une orientation de  $X_y$ , et

$$(A\omega)(y) = \left( \int_{X_y} \omega_y(x) \right) \varrho_0(y), \quad \omega \in \Omega_0(x).$$

a les propriétés énoncées ci-dessus.

EXEMPLE. — Soit  $X$  un ouvert de  $R^l$ , et soit  $s(x) \in C(X)$ , réel tel que  $\text{grad } s \neq 0$  partout; soit  $f$  une distribution sur  $K$ . La distribution  $f(s(x))$  est définie par la formule

$$\int f(s(x)) g(x) \tau(x) = \int_V f(t) h(t) dt,$$

où  $V$ ,  $g$  et  $h$  ont les significations suivantes :  $V$  est l'ensemble (ouvert) des valeurs prises par  $s(x)$ ;  $g \in C_0(X)$ ;

$$h(t) = \int_{s(x)=t} g(x) \frac{\tau(x)}{ds(x)}.$$

En particulier, si  $V \ni 0$ ,

$$\int \delta^{(i)}(s(x)) g(x) \tau(x) = (-1)^i h^{(i)}(0).$$

Notons qu'on a aussi

$$h(t) = \int_X g(x) \delta(t - s(x)) \tau(x).$$

La démonstration du lemme suivant se réduit immédiatement au cas où  $X = R^p \times R^q$ , elle sera laissée au lecteur.

LEMME. 1.1. — L'application

$$f(y) \rightarrow f(y(x))$$

est un homéomorphisme linéaire de  $C(Y)$  dans  $C(X)$  et de  $C'(Y)$  dans  $C'(X)$ .

NOTE. — On n'a pas caractérisé les images de  $C(Y)$  et de  $C'(Y)$ . Si  $X = Y \times R^q$  et si  $x \rightarrow y(x)$  est la projection

$$x = (y, z) \rightarrow y,$$

ce sont les sous-espaces constitués par les éléments respectifs de  $C(x)$  et de  $C'(X)$  qui ne dépendent pas de  $z$ , dans l'un ou l'autre des sens (7) ou (8).

EXEMPLE : *Distributions homogènes.* — On dit qu'une partie  $A$  de  $R^l$  est un cône si  $\lambda A = A$  pour tout  $\lambda > 0$ . Par exemple,  $R^l$  et l'ouvert

$$(12) \quad \dot{R}^l = R^l - \{0\},$$

c'est-à-dire  $R^l$  privé de l'origine, ont cette propriété. Soit  $U$  un cône ouvert, et soit  $\alpha$  un nombre complexe. Nous dirons qu'une distribution  $f(x)$  est homogène de degré  $\alpha$  dans  $U$  si

$$\lambda > 0 \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Par exemple,  $|x|^\alpha$  est homogène de degré  $\alpha$  pour  $x \neq 0$ ,  $\partial_\nu \delta(x)$  est homogène de degré  $-\nu - l$  dans  $R^l$ . Le support d'une telle distribution est un cône fermé (dans  $U$ ). Soit

$$\Phi_\alpha(U)$$

l'ensemble des distributions dans  $U$ , homogènes de degré  $\alpha$ . C'est un sous-espace fermé de  $C'(U)$ . En effet, c'est l'espace où s'annulent les applications continues  $f(x) \rightarrow f(\lambda x) - \lambda^\alpha f(x)$ .

De même, soit

$$F_\alpha(U)$$

le sous-espace de  $\Phi_\alpha(U)$  dont les éléments sont de classe  $C^\alpha$  pour  $x \neq 0$ . Si  $U$  ne contient pas l'origine,  $F_\alpha(U)$  est un sous-espace fermé de  $C(U)$ .

Soit  $\gamma(x) \in F_1(\dot{R}^l)$  avec  $\gamma > 0$ . Le changement de variable

$$(13) \quad x \rightarrow (y, t), \quad t = \log \gamma(x), \quad y = x/\gamma(x)$$

applique  $\dot{R}^l$  sur le produit  $Y \times R$  où  $Y$  est la variété  $\gamma(x) = 1$ . Alors, si  $f \in \Phi_\alpha(\dot{R}^l)$ ,

$$(14) \quad F(x, t) = \gamma(x)^{-\alpha} f(x)$$

ne dépend pas de  $t$ ; la réciproque vaut; donc

$$f \rightarrow F$$

est un homéomorphisme linéaire de  $\Phi_\alpha(\dot{R}^l)$  sur l'espace des distributions dans  $C'(Y \times R)$  qui ne dépendent pas de  $t$  et de  $F_\alpha(\dot{R}^l)$  sur l'espace des fonctions de  $C(Y \times R)$  qui ne dépendent pas de  $t$ . Comme ces deux espaces s'identifient avec  $C'(Y)$  et  $C(Y)$  respectivement on a, en particulier,

LEMME 1.2. —  $F_\alpha(\dot{R}^l)$  est dense dans  $\Phi_\alpha(\dot{R}^l)$ .

3° *Distributions régulières en certaines variables.* — Soit  $X = Y \times Z$ , où  $Y = R^p$  et  $Z = R^q$ . Une distribution  $f$  sur  $X$  est dite régulière en  $z$  (SCHWARTZ [10] : intégralement semi-régulière en  $z$ ) si elle s'écrit localement sous la forme

$$(15) \quad f(x) = \sum h_\nu(x) (\partial/\partial x)_\nu F_\nu(x),$$

où  $h_\nu \in \mathcal{C}(X)$  et toutes les dérivées de  $F_\nu(x) = F_\nu(y, z)$  par rapport à  $z$  sont continues. Une représentation équivalente à (15) est évidemment la suivante

$$(16) \quad f(x) = \sum (\partial/\partial y)_\nu G_\nu(y, z),$$

où les  $G$  ont la même propriété que les  $F$ . Toute distribution indépendante de  $z$  est régulière en  $z$ . On voit tout de suite que si  $x \rightarrow x'$  est un changement de variable qui conserve  $Y$ , c'est-à-dire si

$$y'(y, z) \text{ est fonction de } y \text{ seul,}$$

alors  $f$  régulier en  $z$  entraîne  $f'(y', z') = f(y, z)$  régulier en  $z'$ . Si  $f$  est régulier en  $z$ , alors, vu (16),

$$(17) \quad \int f(y, z) g(y, z) \tau(y) \in \mathcal{C}(Z)$$

pour tout  $g \in \mathcal{C}(X)$ , à support compact dans  $Y$  pour  $z$  fixe, les dérivées s'obtenant en opérant sous le signe d'intégration. En particulier on peut définir un produit

$$h(z) f(y, z) \in \mathcal{C}'(X)$$

pour tout  $h \in \mathcal{C}'(Z)$ .

Plus généralement nous allons démontrer

**LEMME 1.3.** — Soit  $X = Y \times Z \times U$ , où  $Y = R^p$ ,  $Z = R^q$ ,  $U = R^m$  et soit  $f_1 \in \mathcal{C}'(X)$  régulier en  $z$ ,  $u$  et  $f_2 \in \mathcal{C}'(X)$  régulier en  $y$ ,  $u$ . Alors le produit

$$f_1(x) f_2(x)$$

est bien défini, et il est régulier en  $u$ .

**PREUVE.** — Nous avons localement

$$(18) \quad f_1(y, z, u) = \sum (\partial/\partial y)_\nu G_{1\nu}(y, z, u),$$

$$(19) \quad f_2(y, z, u) = \sum (\partial/\partial z)_\mu G_{2\mu}(y, z, u),$$

où toutes les dérivées des  $G_{1\nu}$  par rapport à  $z$ ,  $u$  et toutes les dérivées des  $G_{2\mu}$  par rapport à  $y$ ,  $u$  sont continues. Posons, par définition

$$(f_1 f_2, g) = \sum (-1)^{|\mu|+|\nu|} \int (\partial/\partial y)_\nu (\partial/\partial z)_\mu G_{1\nu}(y, z, u) G_{2\mu}(y, z, u) g(y, z, u) \tau(x),$$

où les dérivées n'opèrent pas sur  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$ . Il est clair que la fonction à intégrer a la forme

$$\sum H_\nu(y, z, u) (\partial/\partial x)_\nu g(y, z, u),$$

où toutes les dérivées des  $H_\nu$  par rapport à  $u$  sont continues. Donc  $f_1 f_2$  est régulier en  $u$ . Si les  $G_{1\nu}$  et les  $G_{2\mu}$  sont réguliers en  $x$ ,  $f_1 f_2$  est le produit ordinaire. En approximant les  $G$  dans (18) et (19) par des fonctions régulières on obtient des fonctions régulières  $F_1$  et  $F_2$  voisines de  $f_1$  et  $f_2$  telles que

$$(f_1 f_2, g) = \lim (F_1 F_2, g), \quad g \in C_0(X)$$

pour  $F_1 \rightarrow f_1$  et  $F_2 \rightarrow f_2$ . Il en résulte que le produit  $f_1 f_2$  ne dépend pas du choix des  $G$ . Notons que  $f_1 f_2 = f_2 f_1$  et que

$$(h f_1) f_2 = f_1 (h f_2)$$

pour  $h \in C(X)$ .

Nous aurons besoin de la notion de régularité partielle aussi sur une variété. Soient  $X$  et  $Z$  deux variétés de dimensions  $l$  et  $q \leq l$ , et soit  $x \rightarrow z(x)$  une application  $X \rightarrow Z$  telle que

$$(20) \quad z(x) \in C^s, \quad z(x) \text{ de rang } q \text{ partout.}$$

Nous dirons que la distribution  $f(x) \in C'(X)$  est régulière en  $z$  si elle se met localement sous la forme (15) ou sous la forme équivalente (16), où  $(x_1, \dots, x_l) = (y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_q)$  sont des coordonnées de  $X$  telles que

$$z_1(x) = \zeta_1(z(x)), \dots, \quad z_q(x) = \zeta_q(z(x)).$$

$\zeta_1, \dots, \zeta_q$  étant des coordonnées de  $Z$ .

Remarquons que si  $f$  est régulier en  $z$  et si  $z'(x)$  est assez voisin de  $z(x)$ , alors  $f$  est régulier en  $z'$  au moins sur une partie relativement compacte donnée de  $X$ . En effet, dans ce cas,  $z'$  satisfait encore à (20) et  $(y_1, \dots, z'_1, \dots)$ , ou  $z'_1(x) = \zeta_1(z'(x)), \dots$ , sont encore des coordonnées sur  $X$ <sup>(1)</sup>.

Notons le lemme suivant dont la démonstration est déjà faite

LEMME 1.4. — Si  $f \in C'(X)$  est régulier en  $z$ , la restriction

$$f(x) |_{z(x)=z}$$

et le produit

$$(21) \quad f(x) h(z(x)), \quad h \in C'(Z)$$

sont des distributions bien définies, respectivement sur la variété  $X_z: z(x) = z$  et sur  $X$ .

(1) Cette remarque est à la base du lemme 1.6.

EXEMPLB. — On a

LEMME 1.5. — La restriction

$$(22) \quad f(x) \rightarrow f(x)|_{\gamma(x)=1}$$

est un homéomorphisme linéaire

$$\Phi_{\alpha}(\dot{R}^l) \rightarrow C'(Y)$$

et

$$F_{\alpha}(\dot{R}^l) \rightarrow C(Y),$$

où  $Y$  est la variété  $\gamma(x) = 1$ .

PREUVE. — Faisons le changement de variable (13). Alors (22) se réduit à

$$F(y, t) \rightarrow F(y, t)|_{t=0},$$

où  $F$  ne dépend pas de  $t$ . Évidemment, cette application est l'inverse de l'injection

$$C'(Y) \ni F(y) \rightarrow F(y) \in C'(Y \times R).$$

Par conséquent, le lemme est un corollaire du lemme 1.2.

Supposons que dans le produit (21),  $f$ ,  $h$  et  $z$  soient des fonctions d'un paramètre  $u$ . Plus tard nous rencontrerons des situations où il faut étudier les propriétés de l'intégrale

$$(23) \quad \int f(x, u) h(z(x, u), u) \omega(x), \quad \omega \in \Omega_0(X),$$

comme fonction de  $u$ . Le cas spécial suivant en est typique

$$(24) \quad \int f(x) h(ux) g(x) \tau(x),$$

où  $f \in C'(R^l)$ ,  $g \in C_0(R^l)$ ,  $h \in C'(R)$  et  $ux$  est un produit scalaire

$$ux = u_0 + u_1 x_1 + \dots + u_l x_l.$$

Soit donc  $U$  une variété,  $u \in U$ , et soit  $x, u \rightarrow z(x, u)$  une application  $X \times U \rightarrow Z$  de classe  $C^\infty$  telle que

$$x \rightarrow z_0(x) = z(x, u_0)$$

satisfait à (20) pour un  $u_0$  fixé dans  $U$ . On a

LEMME 1.6. — Supposons que  $f(x, u) \in C'(X \times U)$  soit régulier en  $z(x, u_0)$ ,  $u$  pour  $u$  proche de  $u_0$  et que  $h(z, u) \in C'(Z \times U)$  soit régulier en  $u$  proche de  $u_0$ . Alors, étant donné un ouvert relativement compact  $V$  de  $X$ ,

la restriction de  $f$  à  $V \times U$  est régulière en  $(z(x, u), u)$  pour  $u$  proche de  $u_0$ ; le produit

$$f(x, u) h(z(x, u), u)$$

est régulier en  $u$  proche de  $u_0$ . En particulier, proche de  $u_0$ , l'intégrale (23) est fonction régulière de  $u$  pour tout  $\omega$ .

PREUVE. — Par une partition de l'unité, on se ramène à une situation locale. Soient

$$(25) \quad y_1, \dots, y_p, \quad \xi_1^0, \dots, \xi_q^0$$

des coordonnées de  $x$  telles que

$$\xi_1^0(x) = \zeta_1(z(x, u_0)), \dots,$$

$\zeta_1, \dots$  étant des coordonnées de  $Z$ , et que

$$f(x, u) = F(y_1, \dots, \xi_1^0, \dots, u_1, \dots),$$

$F$  étant régulier en  $\xi_1^0, \dots, u_1, \dots$ . Alors près de  $u = u_0$ ,

$$(26) \quad y_1, \dots, y_p, \quad \xi_1, \dots, \xi_q,$$

où

$$\xi_1(x) = \zeta_1(z(x, u)), \dots$$

sont encore des coordonnées sur  $X$ . Comme le passage de (25) à (26) ne change pas  $y_1, \dots$ , on a encore

$$f(x, u) = G(y_1, \dots, \xi_1, \dots, u_1, \dots)$$

$G$  étant régulier en  $\xi_1, \dots, u_1, \dots$ . Par hypothèse,

$$h(z(x, u), u) = H(\xi_1, \dots, u_1, \dots),$$

$H$  étant régulier en  $u_1, \dots$ . Donc le lemme résulte du lemme 1.3.

EXEMPLE. — Si  $f \in C(R^l)$ , l'intégrale (24) est régulière en  $u$  pour  $u_1, \dots, u_m \neq 0$ . On obtient d'ailleurs immédiatement ce résultat par un changement de variable linéaire transformant  $ux$  en l'une des nouvelles coordonnées.

4° Transformation de Fourier. — Posons

$$x_\nu = x_{\nu_1} \dots x_{\nu_p}.$$

L'espace des fonctions  $g$  de  $C(R^l)$  pour lesquelles les semi-normes

$$|g|_p = \sup |x_\nu \partial_\nu g(x)|; \quad x \in R^l, \quad |\nu| \leq p, \quad |\nu^j| \leq p,$$

sont finies forment un Fréchet réflexif que nous appellerons  $S = S(R^l)$ . Il est dense dans son dual  $S'$ , l'espace des distributions tempérées. Pour qu'une

distribution  $f$  soit tempérée, il faut et il suffit qu'il existe un  $c > 0$  et un  $k$  tel que

$$|(f, g)| \leq c |g|_k, \quad g \in C_0(R^l).$$

En particulier, toute distribution à support compact est tempérée. La transformation de Fourier

$$(\mathcal{F}f)(x) = \int e^{ix\xi} f(\xi) \tau(\xi),$$

et sa conjuguée

$$(\overline{\mathcal{F}}f)(x) = \int e^{-ix\xi} f(\xi) \tau(\xi),$$

où  $x\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_l\xi_l$  sont des homéomorphismes linéaires  $S \rightarrow S$  tel que

$$(27) \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = (2\pi)^l, \quad \overline{\mathcal{F}}\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\mathcal{F}.$$

On étend  $\mathcal{F}$  à  $S'$  par dualité,

$$(\mathcal{F}f, g) = (f, \overline{\mathcal{F}}g), \quad f \in S', \quad g \in S$$

et de même pour  $\overline{\mathcal{F}}$ . On voit que  $\mathcal{F}$  et  $\overline{\mathcal{F}}$  sont des homéomorphismes linéaires  $S' \rightarrow S'$  satisfaisant à (27).

EXEMPLE. —

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\delta &= \overline{\mathcal{F}}\delta = 1, & \mathcal{F}1 &= \overline{\mathcal{F}}1 = (2\pi)^l \delta, \\ \mathcal{F}\partial_\nu \delta &= i^{-|\nu|} x_\nu, & \overline{\mathcal{F}}\partial_\nu \delta &= i^{|\nu|} x_\nu; \\ \mathcal{F}x_\nu &= i^{-|\nu|} \partial_\nu \delta, & \overline{\mathcal{F}}x_\nu &= i^{|\nu|} \partial_\nu \delta. \end{aligned}$$

EXEMPLE. — Nous allons voir plus tard que les distributions homogènes dans tout l'espace sont tempérées :

$$\Phi_\alpha = \overline{\Phi}_\alpha(R^l) \subset S'.$$

On a

$$(28) \quad \mathcal{F}\Phi_\alpha = \overline{\mathcal{F}}\Phi_\alpha = \Phi_{\alpha'},$$

où  $\alpha'$  est le conjugué de  $\alpha$  défini par

$$(29) \quad \alpha + \alpha' = -l.$$

En effet, posons  $g_\lambda(x) = \lambda^{-l} g(x/\lambda)$ . Alors  $(\mathcal{F}g_\lambda)(x) = (\mathcal{F}g)(\lambda x)$ . Par conséquent, si  $f \in \Phi_\alpha$  on a

$$\begin{aligned} \int \mathcal{F}f(\lambda x) g(x) \tau(x) &= \int \mathcal{F}f(x) g_\lambda(x) \tau(x) \\ &= \int f(x) \overline{\mathcal{F}}g_\lambda(x) \tau(x) = \int f(x) \overline{\mathcal{F}}g(\lambda x) \tau(x) \\ &= \lambda^{\alpha'} \int f(x) \overline{\mathcal{F}}g(x) \tau(x) = \int \lambda^{\alpha'} \mathcal{F}f(x) g(x) \tau(x), \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\mathcal{F}f \in \Phi_\alpha$ , et de même pour  $\bar{\mathcal{F}}$ . Par conséquent  $\mathcal{F}\Phi_\alpha \subset \Phi_\alpha$ . Combiné avec (27) ceci entraîne (28).

La convolution

$$f \star g(x) = \int f(x-y)g(y)\tau(y)$$

est une application  $S \times S \rightarrow S$  et  $S' \times S \rightarrow S' \cap C(R^l)$ . Elle s'étend à une application  $S' \times C'_0(R^l) \rightarrow S'$ . Dans tous les cas,

$$\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}f \mathcal{F}g, \quad \bar{\mathcal{F}}(f \star g) = \bar{\mathcal{F}}f \bar{\mathcal{F}}g.$$

En particulier,

$$\mathcal{F}fg = (2\pi)^{-l} \mathcal{F}f \star \mathcal{F}g, \quad \bar{\mathcal{F}}fg = (2\pi)^{-l} \bar{\mathcal{F}}f \star \bar{\mathcal{F}}g$$

sur  $S' \times S$ .

**2. Dualité homogène.** — Soit  $\gamma(x) > 0$  une fonction sur  $\dot{R}^l$  indéfiniment différentiable et homogène de degré 1. Comme nous allons souvent utiliser des coordonnées polaires par rapport à  $\gamma$ , nous donnerons ici quelques formules à cet égard. Soit

$$\sigma(x) = \sum (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \dots \wedge dx_l.$$

Alors on a

$$(1) \quad \sigma(x) \wedge d\gamma(x) = \gamma(x)\tau(x)$$

$$(2) \quad \tau(x) = \gamma(x)^{l-1} d\gamma(x) \wedge \sigma(x/\gamma(x))$$

$$(3) \quad d(f(x)\sigma(x)) = \sum \left( x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + lf \right) \tau(x).$$

Plus généralement, posons

$$X_j = x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_l$$

et

$$\tau_j(x) = \tau(X_j), \quad \sigma_j(x) = \sigma(X_j)$$

de sorte que, par exemple,

$$\sigma(x) = \sum_j (-1)^{j-1} x_j \tau_j(x).$$

Alors

$$(4) \quad d[f(x)\sigma_j(x)] = \left( \sum_{k=1}^l x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + (l-1)^j f \right) \tau_j + (-1)^j \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma(x)$$

Posons

$$\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(\dot{R}^l), \quad F_\alpha = F_\alpha(\dot{R}^l).$$

Nous écrivons  $f = f_x$  pour les distributions dans  $\Phi_x$ . Il est clair que

$$\Phi_x f_\beta \subset \Phi_{x+\beta}, \quad F_x f_\beta \subset F_{x+\beta}$$

si  $f_\beta \in F_\beta$ , Vu (3), la forme

$$f_{-l}(x) \sigma(x)$$

est close. Donc, si nous définissons le conjugué  $\alpha'$  de  $\alpha$  par (1.29), l'intégrale suivante, définie sur le produit  $F_x \times F_{\alpha'}$ ,

$$(5) \quad \langle f_\alpha, f_{\alpha'} \rangle = \int_{\gamma=1} f_\alpha(x) f_{\alpha'}(x) \sigma(x)$$

ne dépend pas de  $\gamma$ . Vu que les éléments de  $\Phi_x$  sont réguliers en  $\gamma(x)$ , elle est définie sur  $\Phi_x \times F_{\alpha'}$ ; dans ce cas encore, elle est indépendante de  $\gamma$ , puisque  $F_x$  est dense dans  $\Phi_x$ .

**THÉORÈME 2.1.** — Mis en dualité par (5), chacun des espaces  $\Phi_x$  et  $F_x$  est le dual de l'autre.

**PREUVE.** — Vu le lemme 1.1.5, il suffit de vérifier que,  $Y$  étant la variété  $\gamma(x) = 1$ , la forme bilinéaire

$$\int_{\gamma(x)=1} f(x) g(x) \sigma(x)$$

est une dualité entre  $C'(Y)$  et  $C(Y)$ , chacun de ces espaces étant le dual de l'autre. Or ceci est évident :  $\sigma(x) \neq 0$  sur  $Y$  et, puisque  $Y$  est compact,  $C(Y)$  est un Fréchet réflexif.

**NOTE.** — Soient  $f_x \in \Phi_x$  et  $g \in C(\mathbb{R}^l)$ . Alors, vu que  $f_x$  est régulier en  $\gamma(x)$ ,

$$\langle f_x, g \rangle_\gamma = \int_{\gamma(x)=1} f_x(x) g(x) \sigma(x)$$

est une forme bilinéaire continue sur  $\Phi_x \times C(\mathbb{R}^l)$ , qui dépend de  $\gamma$ . Vu (1) on peut aussi l'écrire

$$\int f_x(x) \delta(\gamma(x) - 1) g(x) \tau(x).$$

**NOTE.** — La formule (4) montre qu'on a

$$\int_{\gamma=1} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma(x) = (-1)^{j-1} \int_{\gamma=1} \left[ \sum x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + (l-1)f \right] \tau_j(x).$$

En particulier on a une formule d'intégration par parties dans (5), à savoir

$$(6) \quad \int_{\gamma=1} \frac{\partial}{\partial x_j} (f_{\alpha+1}(x) f_{\alpha'}(x)) \sigma(x) = 0.$$

Elle vaut évidemment sur  $F_{\alpha+1} \times F_{\alpha}$ , et elle s'étend par continuité à  $\Phi_{\alpha+1} \times F_{\alpha}$ .

**3. L'application  $T_{\alpha}$ .** — Soit  $f_{\alpha} \in F_{\alpha}(R^l)$  et soit  $g \in C_0(R^l)$  nul près de 0. En prenant des coordonnées polaires  $r = \gamma(x)$ ,  $y = x/\gamma(x)$  dans

$$(f_{\alpha}, g) = \int f_{\alpha}(x) g(x) \tau(x),$$

on obtient, vu (2.2),

$$(1) \quad (f_{\alpha}, g) = \langle f_{\alpha}, T_{\alpha'} g \rangle_{\gamma},$$

où

$$(2) \quad T_{\alpha'} g(x) = \int_0^{\infty} r^{-\alpha'} g(rx) dr/r$$

appartient à  $F_{\alpha'}(\dot{R}^l)$ . Soit

$$S(\dot{R}^l)$$

l'espace des fonctions de  $S(R^l)$  qui s'annulent avec toutes leurs dérivées à l'origine. Il est clair que  $T_{\alpha'}$  est une application continue  $S(\dot{R}^l) \rightarrow F_{\alpha'}(\dot{R}^l)$ ; donc, vu les lemmes 1.1.2 et 1.1.5, (1) s'étend par continuité au produit  $\Phi_{\alpha}(\dot{R}^l) \times S(\dot{R}^l)$ .

NOTE. — En particulier, soit  $f_{\alpha}$  homogène dans tout l'espace, soit  $g \in C_0(R^l)$ , et fixons  $h \in C_0(R^l)$  égal à 1 près de l'origine. Alors, la forme

$$(f_{\alpha}, g) = (f_{\alpha}, hg) + (f_{\alpha}, (1-h)g)$$

se prolonge en une forme linéaire continue sur  $S(R^l)$ : toute distribution homogène dans l'espace est tempérée.

Nous allons prolonger  $T_{\alpha}$  à  $S = S(R^l)$ . Soit  $p$  générique pour les entiers  $\geq 0$ . Si  $\text{Re } \alpha < 0$ , l'intégrale (2) avec  $\alpha'$  remplacé par  $\alpha$ , converge aussi pour  $g \in S$ , et l'on a, par des intégrations par parties,

$$(3) \quad T_{\alpha} g(x) = \int_0^{\infty} (\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p))^{-1} r^{-\alpha+p} g^{(p+1)}(rx) dr,$$

où

$$g^{(p+1)}(rx) = \left(\frac{d}{dr}\right)^p g(rx) = \sum_{|\nu|=p} x_{\nu} (\partial_{\nu} g)(rx).$$

Plus généralement, si  $\text{Re } \alpha < \text{Re } p$  et si  $\alpha \neq 0, 1, 2, \dots, p-1$ , l'intégrale (3) converge et ne dépend pas de  $p$ . Nous la prenons comme définition de  $T_{\alpha}$  si  $\alpha \neq p$ .

On voit que, pour  $x \neq 0$  fixé,  $T_\alpha g(x)$  est une fonction méromorphe de  $\alpha$  avec des pôles simples pour  $\alpha = p$ . Nous poserons, par définition,

$$(4) \quad T_p g(x) = \left[ \frac{d}{d\alpha} (\alpha - p) T_\alpha g(x) \right]_{\alpha=p}.$$

Autrement dit, dans le développement de Laurent pour  $T_\alpha g(x)$  autour de  $\alpha = p$ ,  $T_p g(x)$  est le terme constant. Un calcul facile donne

$$(5) \quad T_p g(x) = \frac{1}{p!} \int_0^\infty \left( \log \frac{1}{r} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{p} \right) g^{(p+1)}(rx) dr.$$

Notons que

$$T_p g(x) = \frac{1}{p!} \int_0^\infty \log \frac{1}{r} g^{(p+1)}(rx) dr$$

au polynôme homogène de degré  $p$ , près :

$$\frac{1}{p!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} \right) \sum_{|\nu|=p} x_\nu d_\nu g(0).$$

Notons aussi que si  $f_\alpha \in F_\alpha(\dot{R}^l)$ , si  $\gamma \in F_1(\dot{R}^l)$  avec  $\gamma > 0$  et si  $h(r) \in C_0(R)$  a son support dans  $r > 0$ , alors

$$(6) \quad g(x) = f_\alpha(x) h(\gamma(x)) \in C_0(\dot{R}^l)$$

et

$$(7) \quad T_\alpha g(x) = f_\alpha(x) \int_0^{+\infty} h(r) dr/r.$$

LEMME 3.1. — Soit  $\lambda > 0$ . Alors

$$T_\alpha g(\lambda x) = \lambda^\alpha T_\alpha g(x)$$

pour  $\alpha \neq p$  et

$$T_p g(\lambda x) = \lambda^p T_p g(x) - \frac{\lambda^p}{p!} \log \lambda \sum_{|\nu|=p} x_\nu d_\nu g(0)$$

pour  $\alpha = p$ . Les applications

$$T_\alpha : C_0(\dot{R}^l) \rightarrow F_\alpha(\dot{R}^l), \quad T_\alpha : S \rightarrow C(\dot{R}^l)$$

sont bornées, la première étant surjective.

PREUVE. — Immédiate, vu (2), (3), (5) et (7).

4. Distributions homogènes dans tout l'espace. — Maintenant nous allons nous intéresser aux distributions  $f_\alpha$  qui sont homogènes dans tout l'espace. Nous poserons désormais

$$\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(R^l).$$

Nous savons que  $\Phi_\alpha \subset S'$ . Soit  $N_\alpha$  l'espace des éléments de  $\Phi_\alpha$  qui sont des polynômes ou bien des distributions ayant l'origine pour support. On a  $N_\alpha = 0$  sauf dans le cas  $\alpha = p$ , où  $N_\alpha$  est l'espace des polynômes  $Q_p$ , homogènes de degré  $p$ , et dans le cas  $\alpha = p'$ , où  $N_\alpha$  est l'espace des  $Q_p(\partial/\partial x) \delta(x)$ .

LEMME 4.1. — Soit  $f_\alpha(x)$  homogène pour  $x \neq 0$ . Alors

$$(1) \quad \langle f_\alpha, N_\alpha \rangle = 0$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que  $f_\alpha$  ait un prolongement homogène à tout l'espace. Ce prolongement est unique modulo  $N_\alpha$ .

NOTE. — La condition (1) n'existe que pour  $\alpha = p'$ ; alors elle signifie

$$\langle f_{p'}, Q_p \rangle = 0, \quad \forall Q_p$$

et le prolongement de  $f_{p'}$  est unique à une distribution du type  $Q_p(\partial/\partial x) \delta(x)$ . Ce lemme se trouve chez GE'LFAND et SHILOV [3].

PREUVE. — On a pour tout  $\alpha$

$$(f_\alpha, g) = \langle f_\alpha, T_{\alpha'} g \rangle_\gamma$$

quand  $g$  s'annule suffisamment à l'origine. En vertu du lemme 3.1, le second membre, avec un  $\gamma$  déterminé, a un sens pour  $g \in S$ . Il définit dans tout l'espace une distribution tempérée (qui peut dépendre de  $\gamma$ ), donc un prolongement  $f'$  de  $f_\alpha$ .

On a

$$(2) \quad \int f'(\lambda x) g(x) \tau(x) = \lambda^{-l} \int f'(x) g(x/\lambda) \tau(x) = \lambda^{-l} \langle f_\alpha, T_{\alpha'} g_\lambda \rangle_\gamma,$$

où  $g_\lambda(x) = g(x/\lambda)$ . Par conséquent, vu le lemme 3.1,

$$f'(\lambda x) = \lambda^\alpha f'(x)$$

si  $\alpha \neq p'$  et

$$(3) \quad f'(\lambda x) = \lambda^{p'} f'(x) + (-1)^p (p!)^{-1} \lambda^{p'} \log \lambda \sum \langle f_{p'}, x_\nu \rangle \partial_\nu \delta(x)$$

si  $\alpha = p'$ . Donc, si  $f_\alpha$  a la propriété (1),  $f'$  est homogène pour tout  $x$ . Réciproquement, supposons que  $f_\alpha$  ait un prolongement homogène  $f''$ . Alors,  $f' - f''$  a pour support l'origine, c'est-à-dire, il existe un polynôme  $Q$  tel que

$$f'(x) = f''(x) + Q(\partial/\partial x) \delta(x).$$

Si  $\alpha \neq p'$ , le dernier terme est homogène de degré  $\alpha$ , ce qui entraîne  $Q = 0$ . Si  $\alpha = p'$ , nous obtenons, vu (3),

$$\begin{aligned} f'(\lambda x) - \lambda^{p'} f'(x) &= (-1)^p (p!)^{-1} \lambda^{p'} \log \lambda \sum \langle f_{p'}, x_\nu \rangle \partial_\nu \delta(x) \\ &= (Q(\lambda^{-1} \partial/\partial x) \lambda^{-l} - \lambda^{p'} Q(\partial/\partial x)) \delta(x). \end{aligned}$$

Comme les puissances entières de  $\lambda$  et leurs produits par  $\log \lambda$  sont linéairement indépendants, on a  $\langle f_{p'}, x_\nu \rangle = 0$  pour tout  $\nu$ , c'est-à-dire (1).

Comme tout  $Q_p(\partial/\partial x) \delta(x)$  est homogène de degré  $p'$ , la démonstration est achevée.

LEMME 4.2. — Soit  $f_\alpha \in \Phi_\alpha$  et  $g \in S$ . Alors la formule

$$(4) \quad (f_\alpha, g) = \langle f_\alpha, T_{\alpha'} g \rangle_\gamma + (f_\alpha^{(\gamma)}, g)$$

définit une distribution unique  $f_\alpha^{(\gamma)} \in \Phi_\alpha$ , fonction linéaire de  $f_\alpha$ , qui a l'origine pour support et qui est nulle sauf si  $\alpha = p'$ .

NOTE. — Si  $\alpha \neq p'$ , le premier terme du second membre droit de (4) ne dépend pas de  $\gamma$ ; si  $\alpha = p'$ , il en dépend.

PREUVE. — La démonstration du lemme précédent montre que  $\langle f_\alpha, T_{\alpha'} g \rangle_\gamma$  définit une distribution homogène de degré  $\alpha$  dans tout l'espace. Puisque

$$(f_\alpha, g) = \langle f_\alpha, T_{\alpha'} g \rangle_\gamma$$

quand  $g$  s'annule près de l'origine, cette distribution est égale à  $f_\alpha$  pour  $x \neq 0$ . Sa différence  $f_\alpha^{(\gamma)}$  avec  $f_\alpha$  est donc nulle, sauf si  $\alpha = p'$ ; c'est alors une distribution homogène de degré  $p'$  ayant l'origine pour support. On a donc (4).

Passons maintenant aux espaces quotients

$$(5) \quad H_\alpha = \Phi_\alpha / N_\alpha.$$

Pour  $\alpha \neq p, p'$ , on a  $H_\alpha = \Phi_\alpha$ . Soit  $G_\alpha$  l'espace des éléments de  $H_\alpha$  qui sont de classe  $C^\infty$  en dehors de l'origine. Comme les éléments de  $N_\alpha$  ont cette propriété,  $G_\alpha$  est bien défini. On a  $G_\alpha = F_\alpha(\dot{R}')$  pour  $\alpha \neq p$ . Si  $\alpha = p$ , il faut prendre le quotient par les polynômes homogènes de degré  $p$ . Comme  $N_\alpha$  est de dimension finie,  $G_\alpha$  est un Fréchet réflexif. Le lemme 4.1 montre que  $\langle f_\alpha, f_{\alpha'} \rangle$  est une dualité sur  $H_\alpha \times G_{\alpha'}$ . Le même lemme combiné avec le théorème 2.1 donne

THÉORÈME. — Mis en dualité par (2.5), chacun des espaces  $H_\alpha$  et  $G_{\alpha'}$  est le dual de l'autre.

5. Les distributions  $\chi_\alpha$ . — Nous allons étudier une famille de distributions à une variable qui sont fondamentales dans la théorie de la transformation de Fourier des distributions homogènes. Soit  $\alpha$  un nombre complexe arbitraire, et soit  $s$  une variable complexe. Posons, par définition

$$\chi_\alpha(s) = e^{-\pi i \alpha} \Gamma(-\alpha) s^\alpha,$$

où  $\alpha \neq p$  et

$$s^\alpha = e^{\alpha \log s}; \quad 0 \leq \arg s \leq \pi i, \quad s \neq 0.$$

Pour  $s$  fixé,  $\chi_\alpha(x)$  est fonction méromorphe de  $\alpha$  ayant des pôles simples pour  $\alpha = p$ .

Nous posons, conformément à (3.4),

$$(1) \quad \chi_p(s) = \left[ \frac{d}{d\alpha} (x - p) \chi_\alpha(s) \right]_{\alpha=p}$$

de sorte que  $\chi_p(s)$  est le terme constant de  $\chi_\alpha(s)$  dans son développement de Laurent autour de  $\alpha = p$ . Un calcul facile donne

$$\chi_p(s) = (p!)^{-1} s^p \left( \log s^{-1} + \pi i + \Gamma'(1) + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} \right).$$

Souvent nous utiliserons seulement la partie singulière de cette fonction,

$$\chi_p(s) \equiv (p!)^{-1} s^p \log s^{-1} \pmod{s^p}.$$

Notons quelques propriétés évidentes des fonctions  $\chi_\alpha$  :

- (2)  $\chi'_{\alpha+1} = \chi_\alpha,$   
 (3)  $s\chi_\alpha = (\alpha + 1)\chi_{\alpha+1}, \quad \alpha \neq p, \quad \alpha \neq -1,$   
 (3')  $s\chi_p \equiv (p + 1)\chi_{p+1} \pmod{s^{p+1}},$   
 (3'')  $s\chi_{-1} = -1,$   
 (4)  $\lambda > 0, \quad \alpha \neq p \Rightarrow \chi_\alpha(\lambda s) = \lambda^\alpha \chi_\alpha(s),$   
 (4')  $\lambda > 0 \Rightarrow \chi_p(\lambda s) \equiv \lambda^p \chi_p(s) \pmod{s^p},$   
 (5)  $\alpha \text{ réel } \neq p, \quad s \text{ réel } \Rightarrow \chi_\alpha(-s) = e^{-\pi i \alpha} \overline{\chi_\alpha(s)},$   
 (5')  $\alpha \text{ réel } = p, \quad s \text{ réel } \Rightarrow \text{même chose mod } s^p.$

Pour  $\alpha$  fixé,  $\chi_\alpha(s)$  est fonction analytique multiforme de  $s \neq 0$ . Nous avons défini une branche principale pour  $\text{Im } s > 0$  et nous allons définir  $\chi_\alpha(s)$  comme distribution tempérée sur l'axe réel. La valeur de  $\chi_\alpha$  pour  $\varphi \in C_0(\mathbf{R})$  sera, par définition, la limite

$$\int \chi_\alpha(s) \varphi(s) ds = \lim_{\varepsilon > 0} \int \chi_\alpha(s + i\varepsilon) \varphi(s) ds.$$

Si  $\text{Re } \alpha > -1$ , la limite existe, la fonction  $\chi_\alpha(s)$  étant intégrable au voisinage de l'origine. Si  $\text{Re } \alpha \leq -1$ , la limite existe aussi. En effet, en vertu de (2) on a

$$\int \chi_\alpha(s + i\varepsilon) \varphi(s) ds = (-1)^k \int \chi_{\alpha+k}(s + i\varepsilon) \varphi^{(k)}(s) ds$$

pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots$ ; en prenant  $k$  assez grand on se ramène au cas précédent. Comme illustration, écrivons les distributions  $\chi_{-p}$  sous forme explicite. En posant

$$(6) \quad x_0(s) = \log \frac{1}{|s|}, \quad \eta_0(s) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn } s)$$

on a, évidemment,

$$\chi_0(s) \equiv x_0(s) + \pi i \theta_0(s) \pmod{\text{constante}}.$$

Par conséquent si nous posons

$$(7) \quad x_{-p}(s) = \left(\frac{d}{ds}\right)^p x_0(s), \quad \theta_{-p}(s) = \left(\frac{d}{ds}\right)^p \theta_0(s),$$

nous aurons

$$(8) \quad \chi_{-p}(s) = x_{-p}(s) + \pi i \theta_{-p}(s).$$

Observons que  $\theta_{-p} = \delta^{(p-1)}$ ,  $\delta$  étant la distribution de Dirac, et que  $x_{-1}$ ,  $x_{-2}$ , ... sont les dérivées successives de la distribution  $x_{-1}$ , définie par la valeur principale

$$\int x_{-1}(s) \varphi(s) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|s| \geq \varepsilon} \varphi(s) ds/s.$$

Étudions maintenant quelques intégrales, étendues à  $R^l$  et aux variétés  $\gamma = 1$  contenant les noyaux  $\chi_\alpha(x\xi)$ .

LEMME 5.1. — La formule

$$(9) \quad g(x) \rightarrow \int \chi_{\alpha'}(x\xi) g(\xi) \tau(\xi)$$

définit une application continue  $S \rightarrow C(\dot{R}^l)$ . La formule

$$(10) \quad f_\alpha(x) \rightarrow \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi) f_\alpha(\xi) \sigma(\xi)$$

définit une application continue  $F_\alpha(\dot{R}^l) \rightarrow C(\dot{R}^l)$ , qui se prolonge en une application continue  $\Phi_\alpha(\dot{R}^l) \rightarrow S'$ . Dans tous les cas, les dérivées de ces deux intégrales s'obtiennent par dérivation sous le signe d'intégration :

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \int \chi_{\alpha'}(x\xi) g(\xi) \tau(\xi) = \int \chi_{\alpha'-1}(x\xi) \xi_j g(\xi) \tau(\xi),$$

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi) f_\alpha(\xi) \sigma(\xi) = \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'-1}(x\xi) \xi_j f_\alpha(\xi) \sigma(\xi).$$

NOTE. — Si  $f_\alpha \in F_\alpha$  est analytique, l'intégrale (10) est même analytique en  $x$ .

NOTE. — Vu (4) et (4'), l'intégrale (9) est homogène de degré  $\alpha'$  modulo  $N_{\alpha'}$ , donc homogène si  $\alpha' \neq p$ . Si  $f_\alpha \in F_\alpha$ , l'intégrale (10) a la même propriété. De plus, elle ne dépend pas de  $\gamma$  si  $\alpha' \neq p$ . Si  $\alpha' = p$ , alors, vu que

$$d[\chi_p(x\xi) f_{p'}(\xi) \sigma(\xi)] = (p!)^{-1} (x\xi)^p f_{p'}(\xi) \tau(\xi),$$

changer  $\gamma$  ajoute à l'intégrale un polynôme de  $N_p$ . Ces propriétés de (10) subsistent par continuité pour  $f_\alpha \in \Phi_\alpha$ .

NOTE. — Vu (2.6), si  $f_{\alpha+1} \in F_{\alpha+1}$ , alors

$$\int_{\gamma=1} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\chi_{\alpha'}(x\xi) f_{\alpha+1}(\xi)) \sigma(\xi) = 0$$

pour  $\alpha' \neq p$ . Si  $\alpha' = p$ , cette intégrale est un polynome appartenant à  $N_p$ .  
Même résultat pour  $f_{\alpha+1} \in \Phi_{\alpha+1}(\dot{R}')$ .

PREUVE. — Si  $x_j \neq 0$ , nous pouvons choisir  $\eta_j = \xi x$  et  $\eta_k = \xi_k$ ,  $k \neq j$ , comme nouvelles coordonnées dans (9) et (10) qui s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int \chi_{\alpha'}(\eta_j) g(\xi(\eta, x)) \tau(\xi(\eta, x)), \\ & \varepsilon \int \chi_{\alpha'}(\eta_j) f_{\alpha}(\xi(\eta, x)) \sigma(\xi(\eta, x)), \end{aligned}$$

$\varepsilon$  étant le signe du Jacobien. D'où la première partie du lemme et la première note. Le même changement de variable montre que, pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\int \chi_{\alpha'}(x\xi + i\varepsilon) g(\xi) \tau(\xi) \rightarrow \int \chi_{\alpha'}(x\xi) g(\xi) \tau(\xi)$$

dans  $C(\dot{R}')$ . Vu (2), on obtient la dérivée  $d/dx_j$  du premier membre en dérivant sous le signe d'intégration. Par conséquent on a (11); (12) s'obtient de la même manière. Notons aussi qu'on a

$$(13) \quad \int \chi_{\alpha'}(x\xi) \frac{\partial g}{\partial x_j} \tau(x) = - \int \chi_{\alpha'-1}(x\xi) \xi_j g(x) \tau(x).$$

Soient  $f_{\alpha} \in F_{\alpha}$  et  $g \in S$  nul près de l'origine. Alors on a

$$(14) \quad \begin{aligned} & \int \left( \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi) f_{\alpha}(\xi) \sigma(\xi) \right) g(x) \tau(x) \\ & = \int_{\gamma=1} \left( \int \chi_{\alpha'}(x\xi) g(x) \tau(x) \right) f_{\alpha}(\xi) \sigma(\xi). \end{aligned}$$

En effet, cette égalité vaut pour  $\chi_{\alpha'}(x\xi + i\varepsilon)$  avec  $\varepsilon > 0$ , donc pour  $\varepsilon = 0$ . En vertu de (9), le second membre est une fonction bornée de  $g \in S$  pour  $f_{\alpha} \in \Phi_{\alpha}(\dot{R}')$ . Donc le premier membre est une forme linéaire continue de  $g$  qui sera, par définition, l'intégrale (10) pour  $f_{\alpha} \in \Phi_{\alpha}(\dot{R}')$ . Il est clair que l'application (10) correspondante est continue, et l'on déduit de (13) et (14) que (12) est encore valable quand l'intégrale est une distribution.

6. Transformation de Fourier. — Nous allons donner des expressions explicites de la transformation de Fourier d'une distribution appartenant à  $\Phi_{\alpha}(\dot{R}')$ .

LEMME 6.1. — Soit  $g \in S$ . Alors, si  $\alpha \neq p$ , on a

$$(1) \quad T_\alpha \mathcal{F} g(x) = e(\alpha) \int \chi_\alpha(x\xi) g(\xi) \tau(\xi),$$

$$(2) \quad T_\alpha \bar{\mathcal{F}} g(x) = e(\alpha) \int \chi_\alpha(-x\xi) g(\xi) \tau(\xi),$$

où  $x \neq 0$  et

$$e(\alpha) = e^{\frac{1}{2}\pi i \alpha}.$$

Si  $\alpha = p$ , on a les mêmes égalités modulo  $N_p$ .

PREUVE. — Si  $\varepsilon > 0$  et  $\text{Re } \alpha < 0$ , vu la définition de  $\chi_\alpha$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{-\alpha-1} e^{-\varepsilon r} \mathcal{F} g(rx) dr &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{ir(x\xi+i\varepsilon)} r^{-\alpha-1} dr \right) g(\xi) \tau(\xi) \\ &= \int_0^\infty \Gamma(-\alpha) e(-\alpha) (x\xi+i\varepsilon)^\alpha g(\xi) \tau(\xi) \\ &= e(\alpha) \int_0^\infty \chi_\alpha(x\xi+i\varepsilon) g(\xi) \tau(\xi). \end{aligned}$$

Transformant le premier membre par des intégrations par parties, nous obtenons

$$(3) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{r^{p-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p)} \left( \frac{d}{dr} \right)^{p+1} e^{-\varepsilon r} \mathcal{F} g(rx) dr \\ = \int \chi_\alpha(x\xi+i\varepsilon) g(\xi) \tau(\xi). \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour  $x \neq 0$ , les deux côtés sont des fonctions méromorphes de  $\alpha$  ayant des pôles simples pour  $\alpha = p$ .

En particulier, (1) vaut pour  $\alpha \neq p$ . En multipliant les deux membres de (3) par  $\frac{d}{d\alpha}(\alpha-p)$  et en faisant ensuite  $\alpha = 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{p!} \int_0^\infty \left( \log \frac{1}{r} - 1 - \frac{1}{2} \dots \frac{1}{p} \right) \left( \frac{d}{dr} \right)^{p+1} e^{-\varepsilon r} \mathcal{F} g(rx) dr \\ = e(p) \int \left( \chi_p(x\xi+i\varepsilon) - \frac{(x\xi+i\varepsilon)^p}{p!} \frac{1}{2} \pi i \right) g(\xi) \tau(\xi). \end{aligned}$$

En faisant  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous arrivons au résultat cherché (1). Notons que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p!} \int \left( \log \frac{1}{r} \right) \left( \frac{d}{dr} \right)^{p+1} \mathcal{F} g(rx) dr \\ \equiv \frac{e(p)}{p!} \int \log \frac{1}{|x\xi|} (x\xi)^p g(\xi) \tau(\xi) \pmod{N_p}. \end{aligned}$$

La formule (2) se démontre par la même méthode.

LEMME 6.2. — Soit  $f_x \in \Phi_\alpha(R^l)$  et soit  $f_x^{(\gamma)}$  la distribution définie dans le lemme 4.2. On a

$$(4) \quad (\mathcal{F} f_x)(x) = e(\alpha') \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi) f_x(\xi) \sigma(\xi) + \mathcal{F} f_x^{(\gamma)}(x),$$

$$(5) \quad (\bar{\mathcal{F}} f_x)(x) = e(\alpha') \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(-x\xi) f_x(\xi) \sigma(\xi) + \bar{\mathcal{F}} f_x^{(\gamma)}(x),$$

où les derniers termes sont nuls pour  $\alpha \neq p'$ . Les dérivées des intégrales s'obtiennent en opérant sous le signe d'intégration.

NOTE. — Si  $\alpha' = p$ , les intégrales dépendent de  $\gamma$ ; un changement de  $\gamma$  équivaut à une addition d'un polynôme de  $N_p$ . De plus, si  $\text{supp } f_x$  est l'origine, les intégrales sont nulles.

NOTE. — Pour  $f_x = 1$  on a  $\mathcal{F} f_x = \bar{\mathcal{F}} f_x = (2\pi)^l \delta(x)$ . Par conséquent

$$(6) \quad \delta(x) = (2\pi i)^{-l} \int_{\gamma=1} \chi_{-l}(x\xi) \sigma(\xi) = (2\pi i)^{-l} \int_{\gamma=1} \chi_{-l}(-x\xi) \sigma(\xi).$$

Cette formule avec  $\gamma = |\xi|$  est due à GEL'FAND et SHAPIRO [2]. Une formule équivalente a été employée par F. JOHN [3]. L'emploi de  $\sigma$  et un  $\gamma$  arbitraire vient de J. LERAY [6]. Le calcul suivant donne une démonstration très courte

$$\begin{aligned} (2\pi)^l \delta(x) &= \lim_{\varepsilon > 0} \int e^{ix\xi - \varepsilon\gamma(\xi)} \tau(\xi) = \int_{\gamma=1} \left( \int_0^\infty e^{-i\varepsilon x\xi} \rho^{l-1} d\rho \right) \sigma(\xi) \\ &= \lim_{\varepsilon > 0} i^{-l} \int_{\gamma=1} \chi_{-l}(x\xi + i\varepsilon) \sigma(\xi). \end{aligned}$$

Prenant la partie réelle de l'intégrale (6), vu (4.10) on obtient

$$\delta(x) = (2\pi)^{-l} (-1)^{l/2} \int_{\gamma=1} \chi_{-l}(x\xi) \sigma(\xi) \quad [l \equiv 0(2)],$$

$$\delta(x) = (2\pi)^{-l} (-1)^{(l-1)/2} \int_{\gamma=1} \theta_{-l}(x\xi) \sigma(\xi) \quad [l \equiv 1(2)].$$

NOTE. — Soit  $a(\xi)$  un polynôme homogène de degré  $m$ . Pourvu qu'on ait défini des distributions  $1/a(\xi)$  dans  $\dot{R}^l$  (il suffit pour cela de l'avoir fait sur  $\gamma=1$ ) le lemme (3.1) et (6) montrent que la distribution

$$(7) \quad E(x) = (2\pi i)^{-l} \int_{\gamma=1} \chi_n(x\xi) a(\xi)^{-1} \sigma(\xi),$$

où  $n = m - l$ , satisfait à

$$a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x) = \delta(x).$$

C'est donc une solution élémentaire de  $a(\partial/\partial x)$ . Pour  $a$  elliptique, c'est-à-dire,  $a(\xi) \neq 0$  par  $\xi \neq 0$ , (7) est classique; le lemme 4.1 montre que  $E(x)$  est analytique pour  $x \neq 0$ . Si  $a$  est du type principal, c'est-à-dire si  $a_\xi(x) \neq 0$  pour  $\xi \neq 0$ , on peut définir  $1/a(\xi)$  comme valeur principale, et (7) donne une solution élémentaire explicite. Dans le cas général, la possibilité de la division avec  $a(\xi)$  sur la variété  $\gamma = 1$  résulte d'un théorème de HÖRMANDER [4].

PREUVE. — Avec  $g \in S$  on a, vu le lemme 4.2,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f_\alpha, g) &= (f_\alpha, \mathcal{F}g) = \langle f_\alpha, T_{\alpha'} \mathcal{F}g \rangle_\gamma + (f_\alpha^{(\gamma)}, \mathcal{F}g) \\ &= \langle f_\alpha, T_{\alpha'} \mathcal{F}g \rangle_\gamma + (\mathcal{F}f_\alpha^{(\gamma)}, g). \end{aligned}$$

Or, vu le lemme 6.1,

$$\langle f_\alpha, T_{\alpha'} \mathcal{F}g \rangle_\gamma = e(\alpha') \int_{\gamma=1} f_\alpha(\xi) \left( \int \chi_{\alpha'}(x\xi) g(x) \tau(x) \right) \sigma(\xi).$$

Vu la définition de

$$\int_{\gamma=1} f_\alpha(\xi) \chi_{\alpha'}(x\xi) \sigma(\xi)$$

on a donc

$$\langle f_\alpha, T_{\alpha'} \mathcal{F}g \rangle_\gamma = \int \left[ e(\alpha') \int_{\gamma=1} f_\alpha(\xi) \chi_{\alpha'}(x\xi) \sigma(\xi) \right] g(x) \tau(x),$$

c'est-à-dire (4). Pour  $\bar{\mathcal{F}}$ , la démonstration est la même. Finalement, le lemme 5.1 montre qu'on obtient les dérivées en dérivant sous le signe d'intégration.

Comme

$$\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}} : \Phi_\alpha \rightarrow \Phi_{\alpha'}; \quad \mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}} : N_\alpha \rightarrow N_{\alpha'}$$

sont des homéomorphismes linéaires, ils induisent des homéomorphismes linéaires  $H_\alpha \rightarrow H_{\alpha'}$  que nous appellerons  $\Lambda$  et  $\bar{\Lambda}$ . On a

THÉORÈME 6.1. — Les applications

$$\Lambda, \bar{\Lambda} : H_\alpha \rightarrow H_{\alpha'}$$

et

$$(8) \quad \Lambda, \bar{\Lambda} : G_\alpha \rightarrow G_{\alpha'}$$

sont des homéomorphismes linéaires telles que

$$(9) \quad \Lambda \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \Lambda = (2\pi)'$$

Les applications

$$(10) \quad \Lambda : H_\alpha \rightarrow H_{\alpha'}, \quad \Lambda : G_{\alpha'} \rightarrow G_\alpha$$

sont adjointes, il en est de même pour  $\bar{\Lambda}$ . Sous forme explicite on a

$$(11) \quad (\Lambda f_\alpha)(x) = e(\alpha') \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi) f_\alpha(\xi) \sigma(\xi),$$

$$(12) \quad (\bar{\Lambda} f_\alpha)(x) = e(\alpha') \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(-x\xi) f_\alpha(\xi) \sigma(\xi).$$

Si  $\alpha$  est réel,

$$(13) \quad \overline{\Lambda f_\alpha} = \bar{\Lambda} \bar{f}_\alpha.$$

PREUVE. — (11) et (12) résultent du lemme 6.2, (8) du lemme 5.1, (9) et (13) des mêmes propriétés de  $\mathcal{F}$  et  $\bar{\mathcal{F}}$ . Finalement, si  $f_\alpha \in F_\alpha$  et  $f_{\alpha'} \in F_{\alpha'}$ , en remplaçant  $\chi_{\alpha'}(x\xi)$  par  $\chi_{\alpha'}(x\xi + i\varepsilon)$ , et en faisant  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient, vu (11)

$$\langle \Lambda f_\alpha, f_{\alpha'} \rangle = \langle f_\alpha, \Lambda f_{\alpha'} \rangle.$$

Par continuité on a le même résultat sur le produit  $H_\alpha \times G_{\alpha'}$ , ce qui démontre que les applications (10) sont adjointes. Même raisonnement pour  $\bar{\Lambda}$ .

#### REMARQUES.

1° Posons  $\partial_j = d/i \partial x_j$ . On voit que

$$\begin{aligned} \partial_j \Lambda &= \Lambda x_j, & \partial_j \bar{\Lambda} &= -\Lambda x_j, \\ x_j \Lambda &= -\Lambda \partial_j, & x_j \bar{\Lambda} &= \bar{\Lambda} \partial_j. \end{aligned}$$

2° Soit  $\alpha$  réel. Alors, vu (13),

$$\langle \Lambda f_\alpha, \bar{\Lambda} \bar{f}_{\alpha'} \rangle = (2\pi)^l \langle f_\alpha, \bar{f}_{\alpha'} \rangle.$$

Par conséquent, si  $\alpha = \alpha'$ , c'est-à-dire  $\alpha = -l/2$ ,  $\Lambda$  est un isomorphisme  $G_\alpha \rightarrow G_{\alpha'}$  muni de la structure d'espace de Hilbert donnée par  $\langle f_\alpha, \bar{f}_{\alpha'} \rangle$ .

3° Soit  $A(f_\alpha, f_{\alpha'})$  une forme bilinéaire continue sur  $G_\alpha \times G_{\alpha'}$ . Il sera commode de l'écrire formellement comme une intégrale

$$\int_{\substack{\gamma(x)=1 \\ \gamma(y)=1}} A(x, y) f_\alpha(x) f_{\alpha'}(y) \sigma(x) \wedge \sigma(y),$$

avec un noyau  $A(x, y)$ , homogène de degré  $\alpha$  en  $x$ , et  $\alpha'$  en  $y$ . On peut justifier ce langage : un tel  $A$  existe comme distribution sur  $\dot{R}^l \times \dot{R}^l$ . Alors, si  $\delta(x, y)$  est le noyau de  $\langle f_\alpha, f_{\alpha'} \rangle$ , (9) peut s'écrire

$$(2\pi)^l \delta(x, y) = \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(\xi x) \chi_\alpha(-\xi y) \sigma(\xi).$$

*Distributions paires et impaires.* — Posons d'une manière générale

$$f^\pm(x) = \frac{1}{2}(f(x) \pm f(-x)),$$

ce qui définit  $H_{\alpha}^{\pm}$  et  $G_{\alpha}^{\pm}$ . On voit que  $\langle f_{\alpha}^+, f_{\alpha'}^- \rangle = \langle f_{\alpha}^-, f_{\alpha'}^+ \rangle = 0$  et que  $H_{\alpha}^{\pm}$  et  $G_{\alpha}^{\pm}$  sont duals l'un de l'autre avec la dualité  $\langle f_{\alpha}^{\pm}, f_{\alpha'}^{\pm} \rangle$  (signes se correspondant). De même, soit  $\Lambda^{\pm} = \frac{1}{2}(\Lambda \pm \bar{\Lambda})$ . On trouve que  $\Lambda^{\pm}$  sont des homéomorphismes linéaires  $H_{\alpha}^{\pm} \rightarrow H_{\alpha'}^{\pm}$  et  $G_{\alpha}^{\pm} \rightarrow G_{\alpha'}^{\pm}$ , tels que

$$(\Lambda^+)^2 = (\Lambda^-)^2 = (2\pi)^l.$$

Donc, en opérant sur les fonctions paires, on a

$$(2\pi i)^l \delta^+(x, y) = \int \chi_{\alpha'}^+(\xi x) \chi_{\alpha}^+(\xi y) \sigma(\xi),$$

où  $\delta^+$  est le noyau de  $\langle f_{\alpha}^+, f_{\alpha'}^+ \rangle$ . Vu (5.8) on a

$$\begin{aligned} \chi_{-p}^+(s) &= x_{-p}(s) & \text{si } p \equiv 0(2), \\ \chi_{-p}^+(s) &= \pi i \theta_{-p}(s) & \text{si } p \equiv 1(2). \end{aligned}$$

Par exemple, si  $l \equiv 0(2)$ , on obtient

$$(2\pi i)^l \delta^+(x, y) = (\pi i)^2 \int \theta_{-1}(x\xi) \theta_{1-l}(y\xi) \sigma(\xi).$$

## CHAPITRE 2. — Analyse des singularités.

1. Convolution des  $\chi_{\alpha}$ . — Nous savons que les fonctions  $\chi_{\alpha}(s)$  et

$$\check{\chi}_{\alpha}(s) = \chi_{\alpha}(-s)$$

sont analytiques pour  $\text{Im } s > 0$  et  $\text{Im } s < 0$  respectivement. Posons

$$\chi_{\alpha}^{\varepsilon}(s) = \chi_{\alpha}(s + i\varepsilon), \quad \check{\chi}_{\alpha}^{\varepsilon}(s) = \check{\chi}_{\alpha}(s - i\varepsilon) \quad (s \text{ réel}),$$

où  $\varepsilon \geq 0$ . Regardons les convolutions

$$(1) \quad \begin{cases} \chi_{\alpha}^{\varepsilon} \star \chi_{\beta}^{\varepsilon}(s) = \int \chi_{\alpha}^{\varepsilon}(s-t) \chi_{\beta}^{\varepsilon}(t) dt, \\ \chi_{\alpha}^{\varepsilon} \star \check{\chi}_{\beta}^{\varepsilon}(s) = \int \chi_{\alpha}^{\varepsilon}(s-t) \check{\chi}_{\beta}^{\varepsilon}(t) dt, \\ \check{\chi}_{\alpha}^{\varepsilon} \star \check{\chi}_{\beta}^{\varepsilon}(s) = \int \check{\chi}_{\alpha}^{\varepsilon}(s-t) \check{\chi}_{\beta}^{\varepsilon}(t) dt. \end{cases}$$

LEMME 1.1. — Si

$$(2) \quad \text{Re } \alpha + \text{Re } \beta + 1 < 0,$$

ces convolutions sont des distributions bien définies dans  $S'$ . Elles dépendent continûment de  $\varepsilon \geq 0$ . Considérées comme fonctions de  $\alpha$  et de  $\beta$  elles sont méromorphes; leurs singularités sont des singularités polaires simples, qui

ne se rencontrent pas. Pour  $\alpha = p$  on calcule ces distributions en appliquant l'opérateur

$$\left| \frac{d}{d\alpha} (\alpha - p) \right|_{\alpha=p}$$

aux membres gauches, et de même pour  $\beta = p$ .

PREUVE. — Vu (2), les intégrales convergent pour  $\varepsilon > 0$ . En effet, par exemple,

$$\chi_{\alpha}^{\varepsilon}(s-t) \chi_{\beta}^{\varepsilon}(t) = O(|t+i\varepsilon|^{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta} \log|t+i\varepsilon|)$$

pour  $t$  grand. Soit  $\varphi \in C_0(R)$ , telle que  $\varphi = 1$  près de l'origine. Alors

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha}^{\varepsilon} \star \chi_{\beta}^{\varepsilon} &= \chi_{\alpha}^{\varepsilon} \varphi \star \chi_{\beta}^{\varepsilon} \varphi + \chi_{\alpha}^{\varepsilon} (1-\varphi) \star \chi_{\beta}^{\varepsilon} \varphi \\ &\quad + \chi_{\alpha}^{\varepsilon} \varphi \star \chi_{\beta}^{\varepsilon} (1-\varphi) + \chi_{\alpha}^{\varepsilon} (1-\varphi) \star \chi_{\beta}^{\varepsilon} (1-\varphi). \end{aligned}$$

Au second membre, les trois premiers termes ont un facteur à support compact, ils sont bien définis pour  $\varepsilon > 0$  et, vu (1.5.1), ils ont les propriétés qui énoncent le lemme. Le dernier terme est une intégrale ordinaire uniformément convergente pour  $\varepsilon \geq 0$ ; on constate tout de suite qu'il a les mêmes propriétés.

Le même raisonnement vaut pour les autres convolutions.

LEMME 1.2. — Sous la condition (2) on a

$$(3) \quad \begin{cases} \chi_{\alpha} \star \chi_{\beta} = 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1}, \\ \check{\chi}_{\alpha} \star \chi_{\beta} = \chi_{\alpha} \star \check{\chi}_{\beta} = 0, \\ \check{\chi}_{\alpha} \star \check{\chi}_{\beta} = 2\pi i \check{\chi}_{\alpha+\beta+1}. \end{cases}$$

PREUVE. — Nous allons calculer les transformées de Fourier des  $\chi_{\alpha}$ . Pour  $\operatorname{Re}\alpha < 0$ , vu la définition de  $\chi_{\alpha}$ , on a, avec  $e(\alpha) = e^{\pi i \alpha / 2}$ ,

$$\chi_{\alpha}(s) = e(-\alpha) \int_0^{\infty} t^{-1-\alpha} e^{ist} dt \quad (\operatorname{Im}s \geq 0),$$

$$\check{\chi}_{\alpha}(s) = e(-\alpha) \int_{-\infty}^0 (-t)^{-1-\alpha} e^{ist} dt \quad (\operatorname{Im}s \leq 0).$$

Donc, pour  $\varepsilon \geq 0$ ,

$$\overline{\mathcal{F}} \chi_{\alpha}^{\varepsilon}(t) = 2\pi e(-\alpha) \theta_0(t) t^{-1-\alpha} e^{-\varepsilon t},$$

$$\overline{\mathcal{F}} \check{\chi}_{\alpha}^{\varepsilon}(t) = 2\pi e(-\alpha) \theta_0(-t) (-t)^{-1-\alpha} e^{\varepsilon t} = \overline{\mathcal{F}} \chi_{\alpha}^{\varepsilon}(-t).$$

En particulier,

$$(4) \quad \begin{cases} \overline{\mathcal{F}} \chi_{\alpha}^{\varepsilon} \overline{\mathcal{F}} \chi_{\beta}^{\varepsilon} = 2\pi i \overline{\mathcal{F}} \chi_{\alpha+\beta+1}^{\varepsilon}, \\ \overline{\mathcal{F}} \check{\chi}_{\alpha}^{\varepsilon} \overline{\mathcal{F}} \chi_{\beta}^{\varepsilon} = \overline{\mathcal{F}} \chi_{\alpha}^{\varepsilon} \overline{\mathcal{F}} \check{\chi}_{\beta}^{\varepsilon} = 0, \\ \overline{\mathcal{F}} \check{\chi}_{\alpha}^{\varepsilon} \overline{\mathcal{F}} \check{\chi}_{\beta}^{\varepsilon} = 2\pi i \overline{\mathcal{F}} \check{\chi}_{\alpha+\beta+1}^{\varepsilon}. \end{cases} \quad (5)$$

pour  $t \neq 0$ . Si

$$(5) \quad \operatorname{Re} \alpha + 1 < 0, \quad \operatorname{Re} \beta + 1 < 0,$$

on a les mêmes égalités pour tout  $t$ , et, les trois fonctions  $\chi_\alpha^\varepsilon$ ,  $\chi_\beta^\varepsilon$  et  $\chi_\alpha^\varepsilon \star \chi_\beta^\varepsilon$  étant intégrables,

$$\overline{\mathcal{F}}(\chi_\alpha^\varepsilon \star \chi_\beta^\varepsilon) = \overline{\mathcal{F}} \chi_\alpha^\varepsilon \overline{\mathcal{F}} \chi_\beta^\varepsilon.$$

Donc, vu (4),

$$\chi_\alpha^\varepsilon \star \chi_\beta^\varepsilon = 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1}^\varepsilon.$$

Vu le lemme 1.1, un prolongement analytique en  $\alpha$  et  $\beta$  montre qu'on a la même relation pour  $\varepsilon \geq 0$  et sous la condition (2). On a donc démontré la première des relations (3); les autres s'obtiennent de la même manière.

LEMME 1.3. — Pour  $a > 0$  et  $|s| < a$ , on a

$$(6) \quad \begin{aligned} \int_{-a}^{+a} \chi_\alpha(s-t) \chi_\beta(t) dt &= 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1}(s) + R_1(s), \\ \int_{-a}^{+a} \chi_\alpha(s-t) \check{\chi}_\beta(t) dt &= R_2(s), \\ \int_{-a}^{+a} \check{\chi}_\alpha(s-t) \check{\chi}_\beta(t) dt &= 2\pi i \check{\chi}_{\alpha+\beta+1}(s) + R_2(s), \end{aligned}$$

où les  $R$  sont réguliers pour  $|s| < a$ .

PREUVE. — Soit  $x(t)$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $|t| < a$ . Il est clair que la distribution

$$\chi_\alpha(s-t) \chi_\beta(t) x(t)$$

est régulière en  $s$  pour  $s \neq 0, \pm a$ . Donc, la première intégrale est régulière pour  $s \neq 0$  et, vu la propriété (1.5.2) des  $\chi$ , il suffit de démontrer (6) pour  $\operatorname{Re}(\alpha + \beta + 1) < 0$ . Soient  $h \in C(R)$ ,  $h(t) = 0$  pour  $|t| < a/3$ ,  $h(t) = 1$  pour  $|t| > 2a/3$ . Comme

$$\chi_\alpha(s-t) \chi_\beta(t) h(t) x(t)$$

est régulier en  $s$ , il suffit de démontrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\alpha(s-t) \chi_\beta(t) (1-h(t)) dt = 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1}(s) + R_1(s).$$

Vu le lemme 1.2, il suffit donc que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\alpha(s-t) \chi_\beta(t) h(t) dt$$

soit régulier en  $s$ . Ici, l'intégrale est la somme de deux termes, à savoir

$$\int \chi_\alpha(s-t) (1-h(s-t)) \chi_\beta(t) h(t) dt$$

qui est visiblement régulier et

$$\int \chi_\alpha(s-t) h(s-t) \chi_\beta(t) h(t) dt,$$

où la fonction à intégrer est régulière et

$$O(|t|^{1+\operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Re} \beta} \log |t|)$$

pour  $t \rightarrow \infty$ . Vu les propriétés des  $\chi$ , des dérivations par rapport à  $s$  améliorent cette croissance; donc ce terme aussi est régulier et l'on a démontré (6). Les autres s'obtiennent de la même manière.

**2. Convolution généralisées.** — Soit  $U$  une variété de dimension  $m$ ; notons  $u_1, \dots, u_m$  les coordonnées de  $u \in U$ . Soit  $s(u) \in C^\infty(U)$  réel avec

$$s_u = (\partial s / \partial u_j) \neq 0$$

partout. De plus, soit  $\varphi \in C'(R)$  une distribution telle que

$$\varphi(t) \in C(R) \quad \text{pour } t \neq 0$$

et notons

$$\varphi^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

des intégrales successives de  $\varphi$ . Nous allons étudier des distributions  $F \in C'(U)$ , régulières en dehors de  $S : s(u) = 0$ , qui, près de  $S$ , ont un développement

$$(1) \quad F \sim \sum_0^\infty F_k(u) \varphi^{(k)}(s(u)),$$

les  $F_k$  étant réguliers, et le signe  $\sim$  étant pris dans le sens que

$$\text{ordre} \left( F - \sum_0^n F_k(u) \varphi^{(k)}(s(u)) \right) > \text{ordre} \varphi + n.$$

Ceci entraîne évidemment que la restriction de  $F_0(u)$  à  $S$  est unique. La restriction d'un  $F_k$  dépend des choix des  $F_0, \dots, F_{k-1}$ , mais elle ne dépend pas des choix des  $\varphi^{(k)}$ .

**REMARQUE.** — Dans des applications nous allons prendre

$$\varphi^{(k)} = \chi_{\beta+k}$$

avec un  $\beta$  donné. Comme, vu (1.3.3) et (1.3.3')

$$s\chi_{\beta+k} = (\beta + k + 1)\chi_{\beta+k+1}$$

si  $\beta + k \neq p$  et

$$s\chi_{\beta+k} \equiv (\beta + k + 1)\chi_{\beta+k+1} \pmod{s^{\beta+k+1}}$$

si  $\beta + k = p$ , on constate facilement que dans ce cas tout  $F$ , ayant le développement (1) a, près de  $S$ , la forme

$$P(u)\chi_{\beta}(s(u)) + R(u)$$

pour  $\beta \neq p' = -1, -2, \dots$  ou bien

$$P(u)\chi_{\beta}(s(u)) + P_0(u)\chi_0(s(u)) + R(u),$$

pour  $\beta = p'$ ;  $P, P_0$  et  $R$  sont réguliers, mais ils ne sont pas complètement déterminés par  $F$ . Pour simplifier, nous allons plus tard réunir ces deux formules en une seule

$$P(u)\chi_{\beta}(s(u)) + R(u),$$

où le point du premier terme signifie qu'il faut lire  $P\chi_{\beta}$  si  $\beta \neq p'$  et  $P\chi_{\beta} + P_0\chi_0$  si  $\beta = p'$ . Remarquons finalement que, si les  $F_k$  dans (1) sont réels, on peut choisir  $P$  (et  $P_0$ ) réels.

Soient maintenant  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux distributions sur  $R$ , régulières en dehors de l'origine. Notons

$$\varphi_1 \circ \varphi_2$$

une distribution ayant la même propriété et, de plus, la suivante :

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)(s) = \int_{-a}^{+a} \varphi_1(s-t)\varphi_2(t) dt \quad (a > 0),$$

est régulier près de  $s = 0$ . Notons que l'intégrale est régulière pour  $s \neq 0, \pm a$ , et que changer  $a$  lui ajoute une distribution régulière près de  $s = 0$ . Donc  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  existe et ne dépend pas de  $a$ . On constate facilement que

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3 &\equiv \varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3), \\ (\varphi_1 \circ \varphi_2)^{(k)} &\equiv \varphi_1^{(k)} \circ \varphi_2 \equiv \varphi_1 \circ \varphi_2^{(k)} \end{aligned}$$

modulo des fonctions régulières. En particulier, vu le lemme 1.3,

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha}\chi_{\beta} &\equiv 2\pi i\chi_{\alpha+\beta+1}, \\ \check{\chi}_{\alpha}\check{\chi}_{\beta} &\equiv 2\pi i\check{\chi}_{\alpha+\beta+1}, \\ \chi_{\alpha}\check{\chi}_{\beta} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Désormais nous utiliserons aussi  $P, Q$  et  $R$ , munis ou non d'indices comme

symboles génériques pour les fonctions régulières d'une ou de plusieurs variables.

**THÉOREME 2.1.** — Soit  $I(u) : a(u) < t < b(u)$  un intervalle de  $R$  qui contient le point  $t = 0$ , et qui est fonction régulière de  $u$ . Alors, près de  $S$ , on a

$$(3) \quad \int_{I(u)} \chi_\beta(s-t) P(u, t) \varphi(t) dt \sim \sum_0^\infty R_k(u) \psi^{(k)}(s(u)),$$

où

$$(4) \quad \psi = \varphi \circ \chi_\beta;$$

les  $R_k$  ne dépendent que de  $P$  et de  $\beta$ ;

$$(5) \quad R_0(u) = P(u, 0)$$

sur  $S$ .

**NOTE.** — Vu le lemme 1.3, si  $\varphi = \chi_\alpha$  on peut prendre

$$\psi = 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1}.$$

Si  $\varphi = \check{\chi}_\alpha$ ,  $\psi$  est régulier et, par conséquent, l'intégrale (3) aussi.

**NOTE.** — En changeant  $s$  en  $-s$  et  $t$  en  $-t$  on obtient

$$\int_{I(u)} \check{\chi}_\beta(s-t) P(u, t) \varphi(t) dt \sim \sum R_k(u) \check{\psi}^{(k)}(s)$$

où

$$\check{\psi}(s) = \int_{-a}^{+a} \varphi(-s-t) \chi_\beta(t) dt = \check{\varphi} \star \check{\chi}_\beta(s)$$

avec les mêmes  $R_k$  pourvu qu'on ait

$$P(u, -t) = P(u, t).$$

**PREUVE.** — Soit  $x(u, t)$  la fonction caractéristique de  $a(u) < t < b(u)$ . La distribution

$$\chi_\beta(s-t) P(u, t) \varphi(t) x(u, t)$$

étant régulière en  $s$  pour  $s$  petit et  $\neq 0$ , (3) est une fonction régulière près de  $S$  et pour  $s \neq 0$ .

De plus, comme  $P$  est régulier, on a

$$P(u, t) = \sum_0^{n-1} Q_k(u) (s-t)^k + (s-t)^n Q_n(u, t),$$

où  $Q'_n$  et les  $Q_k$  sont réguliers. Vu (1.5.3) et (1.5.3'), modulo une fonction régulière, l'intégrale (3) est la somme de

$$(6) \quad (\beta + 1) \dots (\beta + n) \int_{I(u)} \chi_{\beta+n}(s-t) Q'_n(u, t) \varphi(t) dt$$

et des

$$(7) \quad (\beta + 1) \dots (\beta + k) Q_k(u) \int_{I(u)} \chi_{\beta+k}(s-t) \varphi(t) dt$$

pour  $k = 0, \dots, n-1$ . Il est clair que (6) appartient à toute classe  $C^r$  donnée quand on prend  $n$  suffisamment grand et que (7) s'écrit

$$(\beta + 1) \dots (\beta + k) Q_k(u) (\chi_\beta \star \varphi)^{(k)}$$

modulo une fonction régulière près de  $S$ . Donc on a (3) et (4); on voit de suite que (5) est vrai.

Du théorème (1.1) on déduit facilement

**THÉORÈME 2.2.** — Soit  $\varepsilon = \pm 1$  et soit  $\nu$  la signature positive de  $\varepsilon$ ,  $\nu(\varepsilon) = 1$  si  $\varepsilon = 1$  et  $\nu(\varepsilon) = 0$  si  $\varepsilon = -1$ . Alors, près de  $S$ , on a

$$\int_{I(u)} \varphi\left(s + \frac{1}{2} \varepsilon t^2\right) P(u, t) dt \sim (2\pi i)^{-1} \sqrt{2\pi} \sum_0^\infty R_k(u) \psi^{(k)}(s(u)),$$

où les  $R$  ne dépendent que de  $P$  et

$$\psi = \varphi \circ (i^\varepsilon \chi_{-1/2} + i^{1-\varepsilon} \check{\chi}_{-1/2}).$$

**PREUVE.** — Posons

$$\theta_{-1/2}(s) = \sqrt{\pi} s^{-1/2} \theta_0(s); \quad \text{Im } s \geq 0 \quad (0 \leq \arg s \leq \pi i).$$

La définition de  $\chi$  et un bref calcul donnent

$$(8) \quad \begin{aligned} \chi &= \check{\theta} + i\theta, & \check{\chi} &= \theta + i\check{\theta}; \\ \theta &= \frac{1}{2}(\check{\chi} - i\chi), & \check{\theta} &= \frac{1}{2}(\chi - i\check{\chi}), \end{aligned}$$

où l'on a omis l'indice  $-1/2$ . De plus, formellement, un changement de variables  $\frac{1}{2} t^2 \rightarrow t$  donne pour l'intégrale du théorème, si  $\varepsilon = 1$ ,

$$2(2\pi)^{-1/2} \int_{-a^2(u)}^{\delta^2(u)} \varphi(s-t) P'(u, t) \check{\theta}(t) dt,$$

où

$$P'(u, t) = \frac{1}{2}(P(u, \sqrt{|t|}) + P(u, -\sqrt{|t|}))$$

est régulier. Si  $\varepsilon = -1$ , il faut remplacer  $\check{\theta}$  par  $\theta$ . On justifie ce calcul en

approchant  $\varphi$  par une fonction régulière  $\varphi'$ . Puis on fait tendre  $\varphi'$  vers  $\varphi$ . Vu (8), le théorème résulte donc du théorème 1.1.

**3. Convolution généralisées, suite.** — Nous allons généraliser le théorème 2.2 en remplaçant  $t$  par plusieurs variables  $t_1, \dots, t_q$  et  $s + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$  par une fonction régulière réelle  $s(u, t)$  dont le gradient  $s(u, t)$  est différent de zéro partout. Nous allons étudier une intégrale

$$(1) \quad \int_{M(u)} \varphi(s(u, t)) P(u, t) \tau(t)$$

où  $M(u)$  est un ouvert relativement compact, ayant pour frontière une variété régulière  $N$ , qui est fonction régulière de  $u$ . Soit  $n(u, t) = 0$  l'équation de  $N$  et soit  $\chi(u, t)$  la fonction caractéristique de  $M$ . Il est clair que

$$(2) \quad \varphi(s(u, t)) P(u, t) \chi(u, t)$$

est une distribution bien définie sur  $U \times R^p$  pourvu que  $s_{u,t}$  et  $n_{u,t}$  soient indépendants quand  $s = n = 0$ , c'est-à-dire si les variétés  $s(u, t) = 0$  et  $n(u, t) = 0$  sont régulières et ne se touchent pas. Sous les conditions suivantes :

Il existe un  $\nu \in U$  tel que

- 1°  $s(\nu, t) = s_t(\nu, t) = 0$  n'a pas de solutions dans  $M \cup N$ ;
- 2°  $s(\nu, t) = 0$  ne touche pas la variété  $N(\nu)$ ,

cette distribution est évidemment régulière en  $u$  près de  $\nu$ ; par conséquent, vu le lemme 1.1.6, l'intégrale (1) est fonction régulière de  $u$  près de  $\nu$  sous les mêmes conditions.

Supposons maintenant que la première condition ne soit pas vérifiée en un point  $u = \nu$ . Plus précisément, nous supposons que

a. Il existe un point  $\nu$  où

$$s(\nu, t) = s_t(\nu, t) = 0$$

a une seule solution  $t = \tilde{t}$ . Pour ce  $t$ , la matrice

$$s_{tt}(\nu, t) = (\partial^2 s / \partial t_j \partial t_k)$$

n'est pas singulière et

$$s_u(\nu, t) = (\partial s / \partial u_j) \neq 0.$$

b. La variété  $s(\nu, t) = 0$  ne touche pas la variété  $N(\nu)$ .

Sous la première condition, près de  $\nu$ , l'équation

$$s_t(u, t) = 0$$

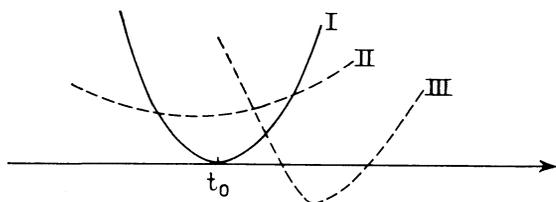
a une solution unique

$$t = t_0(u).$$

fonction régulière de  $u$ , telle que  $t_0(v) = \tilde{t}$ . Posons

$$s_0(u) = s(u, t_0(u)).$$

La figure ci-dessous donne, pour  $q = 1$ , la représentation de la fonction  $s$  pour trois valeurs de  $u$  et pour  $s_{tt}(v, t_0) > 0$ ; I correspond à  $u = v$ ;  $s_0(u)$  est le minimum de  $s$  au voisinage de  $t = t_0$ .



THÉOREME 3.1. — On a

$$\int_{M(u)} \varphi(s(u, t)) P(u, t) \tau(t) \sim (2\pi)^{q/2} |\det A(u)|^{-1/2} \sum_0^\infty R_k(u) \psi^{(k)}(s_0(u)),$$

où  $A(u)$  est la matrice

$$A(u) = s_{tt}(u, t_0(u)),$$

$\nu = \nu(A)$  sa signature positive et

$$2\pi i\psi = \varphi \circ \left( i' \chi_{\frac{1}{2}q-1} + i^{q-\nu} \check{\chi}_{\frac{1}{2}q-1} \right);$$

les  $R_k$  ne dépendent que de  $P$  et de  $|s|$ ; enfin

$$R_0(u) = P(u, t_0(u))$$

pour  $s_0(u) = 0$ .

NOTE. — On trouve à peu près le même résultat dans D. LUDWIG [5].

PREUVE. — Remarquons d'abord que si  $P$  est nul près de  $(v, t_0(v))$ , alors (2) est régulière en  $u$  près de  $v$ . Dans ce cas vu le lemme (1.1.6), l'intégrale (1) est régulière près de  $v$ . Par conséquent, il suffit de démontrer le théorème en supposant le support de  $P$  près de  $(v, t_0(v))$ .

Supposons d'abord que  $q = 1$ ; posons  $t = t_1$ . Près de  $(v, t_0(v))$ ,  $s$  a la forme

$$s(u, t) = s_0(u) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 h(u, t)$$

où  $s_0$  et  $h$  sont des  $R$  et

$$h(u, t_0) = s_{tt}(u, t_0) = A(u) \neq 0;$$

$h$  a le signe de  $A(\nu)$  et

$$h + \frac{1}{2}(t - t_0) h_t \neq 0.$$

Par conséquent, en posant

$$t' = (t - t_0) |h(u, t)|^{1/2},$$

on a

$$(3) \quad dt'/dt = |h(u, t)|^{-1/2} \operatorname{sgn} h \left( h + \frac{1}{2}(t - t_0) h_t \right) > 0.$$

Choisissons le support de  $P$  assez petit pour qu'on ait (3) sur ce support. Alors on peut utiliser  $t'$  comme nouvelle variable d'intégration dans (1) qui devient

$$(4) \quad \int \varphi \left( s_0(u) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} A(\nu) t'^2 \right) P(u, t) (dt/dt') dt'.$$

Choisissons encore ce support assez petit pour qu'on y ait

$$(5) \quad \partial s_0(u) / \partial u \neq 0.$$

Ceci est possible parce que, vu (a), on a

$$\frac{\partial}{\partial u} s_0(\nu) = \frac{\partial}{\partial u} s(\nu, t_0) \neq 0.$$

Vu (5), on peut choisir l'une des coordonnées  $u_1, \dots$  égale à  $s_0(u)$ , et (4) s'écrit

$$\int \varphi \left( s_0(u) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} A(\nu) t'^2 \right) P'(u, t') dt',$$

où

$$(6) \quad P'(u, t') = P(u, t) (dt/dt'),$$

Alors, vu le théorème 2.2, (4) a la forme

$$\sim \sqrt{2\pi} \sum_0^{\infty} R'_k(u) \psi^{(k)}(s_0(u)),$$

où

$$2\pi i \psi = \varphi \circ (i^{\nu(A)} \chi_{-1/2} + i^{1-\nu(A)} \check{\chi}_{-1/2}),$$

les  $R'_k$  ne dépendent que de  $P$  et de  $s$  et

$$R'_0(u) = P'(u, 0)$$

pour  $s_0(u) = 0$ . Vu (6) et (3), on a

$$P'(u, 0) = P(u, t_0) |A(u)|^{-1/2}.$$

Donc, en posant

$$R'_k(u) = |A(u)|^{-1/2} R_k(u),$$

on obtient le théorème pour  $q = 1$ , car il est clair qu'un changement de signe de  $s$  a pour seul effet de changer le signe de  $s_0$ .

Dans le cas général nous allons raisonner par récurrence. En intégrant d'abord par rapport à  $t_q$  nous avons à considérer

$$(7) \quad \int \left( \int \varphi(s(u, t)) P(u, t) dt_q \right) \tau(t').$$

où  $t' = t_1, \dots, t_{q-1}$ . Soit  $I$  l'intégrale en  $t_q$ . Notre théorème avec  $q = 1$  et  $u, t'$  comme paramètres, appliqué à  $I$ , montre que, près de  $(\nu, t'_0)$ , on a

$$(8) \quad I \sim \sqrt{2\pi} |\det B(u, t')|^{-1/2} \sum_0^\infty Q_k(u, t') \psi^{(k)}(g(u, t'))$$

où

$$(9) \quad 2\pi i \psi' = \varphi \circ (i^{\nu(B)} \chi_{-1/2} + i^{1-\nu(B)} \check{\chi}_{-1/2})$$

et

$$(10) \quad Q_0(u, t') = P(u, t')$$

pour  $g(u, t') = 0$ . Ici

$$(11) \quad g(u, t') = s(u, t),$$

$$(12) \quad B(u, t') = s_{qq}(u, t),$$

avec  $t_q = t_q(u, t')$  la solution de

$$(13) \quad s_u(u, t) = 0.$$

Dans ces formules on a utilisé la notation

$$s_j = \partial s / \partial t_j, \quad s_{jk} = \partial^2 s / \partial t_j \partial t_k.$$

Appliquons maintenant, par récurrence, le théorème aux intégrales

$$(14) \quad \sqrt{2\pi} \int |\det B(u, t')|^{-1/2} Q_k(u, t) \psi^{(k)}(g(u, t))$$

en supposant, ce qui est permis, que le support de  $Q_k$  soit assez voisin de  $(\nu, t'_0)$ . Le résultat est que (14) a le développement

$$(15) \quad (2\pi)^{q/2} |\det B(U, t'_0)|^{-1/2} |\det C(u)|^{-1/2} \sum_{j=0}^\infty R_{kj}(u) \psi_k^{(j)}(g_0(u))$$

où  $t'_0 = t'_0(u)$  est la solution de

$$(16) \quad g_j(u, t) = 0 \quad (j < q)$$

et où

$$(17) \quad \begin{aligned} g_0(u) &= g(u, t'_0(u)), \\ C(u) &= g_{jk}(u, t'_0(u)) \quad (j, k < q), \\ 2\pi i \psi_k &= \psi^{(k)}(i^{\nu(C)} \chi_{(q-3)/2} + i^{q-1-\nu(C)} \check{\chi}_{(q-3)/2}). \end{aligned}$$

De plus,

$$(18) \quad R_{kk}(u) = Q_k(u, t'_0(u))$$

pour  $g_0(u) = 0$ .

Maintenant, remarquons que, vu (9) et (17) et les propriétés de la composition  $\circ$ , on a

$$(19) \quad 2\pi i \psi_k^{(j)} = \left\{ \varphi \circ \left( i^{\nu(B)+\nu(C)} \chi_{\frac{1}{2}q-1} + i^{q-\nu(B)-\nu(C)} \check{\chi}_{\frac{1}{2}q-1} \right) \right\}^{(j+k)}$$

modulo une fonction régulière. Par conséquent, comme l'intégrale (14) et les termes de (15) sont arbitrairement réguliers si  $k$  et  $j$  sont suffisamment grands, on a

$$\begin{aligned} & \int \varphi(s(u, t)) P(u, t) \tau(t) \\ & \sim (2\pi)^{q/2} |\det B(u, t'_0) \det C(u)|^{-1/2} \sum_0^{\infty} R_k(u) \psi^{(k)}(g_0(u)) \end{aligned}$$

où  $2\pi i \psi$  est donné par la parenthèse  $\{ \quad \}$  dans (19) et, vu (10) et (18),

$$R_0(u) = P(u, t'_0, t_q(u, t'_0))$$

pour  $g_0(u) = 0$ . Pour achever la démonstration il suffit donc d'établir que :

$$\begin{aligned} (20) \quad & \nu(A) = \nu(B) + \nu(C), \\ (21) \quad & \det A(u) = \det B(u, t'_0) \det C(u), \\ (22) \quad & t_0(u) = (t'_0, t_q(u, t'_0)), \\ (23) \quad & g_0(u) = s_0(u). \end{aligned}$$

Exprimons les dérivées de  $g$  au moyen des dérivées de  $s$ . Vu (11),

$$(24) \quad g_j(u, t') = s_j(u, t) + s_q t_{q,j}; \quad t_{q,j} = \partial t_q / \partial t_j.$$

Donc (13) et (16) sont équivalents à

$$s_j(u, t) = 0 \quad (j \leq q).$$

Autrement dit, on a (22) et par conséquent aussi

$$g_0(u) = s(u, t_0(u)) = s_0(u),$$

c'est-à-dire (23). Une dérivation de (24) et (13) par rapport à  $t_k$  ( $k < q$ ) donne

$$g_{jk}(u, t') = s_{jk}(u, t) + s_{jq} t_{q,k} + s_{kq} t_{q,j} + s_{qq} t_{q,j} t_{q,k}$$

et

$$s_{qk}(u, t) + s_{qq}(u, t) t_{q,k} = 0,$$

où  $t_q = t_q(u, t')$ . Donc

$$g_{jk}(u, t') = s_{jk}(u, t) - s_{jq} s_{kq} s_{qo}^{-1}.$$

Vu (12) et (22)

$$B(u, t'_0) = s_{qq}(u, t_0).$$

Par conséquent, comme  $A(u) = s_{jk}(u, t_0)$ , on voit que (20) et (21) sont vrais. Finalement, on vérifie sans difficulté la dernière partie du théorème.

**4. Analyse des singularités de la transformation de Fourier des distributions homogènes.** — Revenons à la formule donnant la transformation de Fourier  $g = g_x$  d'une distribution  $f = f_{x'} \in H_{x'}$ , à savoir

$$g(x) = e(\alpha) \int_{\gamma, \xi=1} \chi_x(x\xi) f(\xi) \sigma(\xi).$$

Il s'agira de faire une description sommaire des singularités de  $g$  quand on connaît les singularités de  $f$ . D'abord supposons que  $f$  soit régulier au voisinage de  $x_0 \xi = 0$ . Alors, évidemment,  $g(x)$  est régulier près de  $x_0$ . On peut dire de plus : il suffit que  $f$  soit régulier par rapport à  $x_0 \xi$  en tout point  $\xi$  de  $x_0 \xi = 0$ . Cet énoncé est une conséquence du lemme 1.1.6 [remplacer  $x, u$  par  $\xi, x$  et  $s(x, u)$  par  $x\xi$ ]. En particulier, soit  $S: s(\xi) = 0$  l'équation d'une variété régulière homogène, de codimension 1 dans  $\gamma$  et supposons que  $f$  soit régulier en dehors de  $S$  et que, sur  $S$ ,  $f$  soit régulier par rapport aux  $(l-1)$  premières coordonnées d'un système de coordonnées, dont la dernière est  $s(\xi)$ . Alors  $g$  est régulier en tout point  $x$  tel que le plan  $x\xi = 0$  ne touche pas  $S$ ; autrement dit,  $g$  est régulier en dehors de l'enveloppe  $S'$  de  $S$ . Le théorème qui suit décrira le comportement de  $g$  sur  $S'$ .

Soit  $s(\xi)$  homogène de degré  $m \neq 1$  ( $m$  réel). Soit  $\eta_0$  un point de  $S$  et  $Y_0$  le point correspondant sur  $S'$ , c'est-à-dire le plan  $y_0 \xi = 0$  touche  $S$  en  $\eta_0$ . Nous supposons qu'on a

$$s_\xi \neq 0, \quad \text{Hess } s = \det s_{\xi\xi} \neq 0$$

près de  $\eta_0$ . Alors  $y_0$  est proportionnel à  $s_\xi(\eta_0)$ . Comme  $s_\xi$  est homogène de degré  $m-1 \neq 0$ , l'homothétie  $\eta_0 \rightarrow \lambda \eta_0$  ( $\lambda > 0$ ) permet de réaliser la condition

$$y_0 = \varepsilon s_\xi(\eta_0) \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Si  $\varepsilon = 1$ ,  $\gamma_0 \cdot \xi$  et  $s(\xi)$  varient dans le même sens quand on traverse  $S$  au point  $\eta_0$ . Si  $\varepsilon = -1$ , les sens sont opposés. Comme  $\text{Hess } s(\xi) \neq 0$  près de  $\eta_0$ , l'équation

$$(1) \quad x = \varepsilon s_\xi(\eta)$$

a une solution régulière  $\eta = \eta(x)$  près de  $\gamma_0$ , homogène de degré  $(m-1)^{-1}$  en  $x$ . [Comme  $\gamma_0 \rightarrow -\gamma_0$  a pour seul effet de changer  $\varepsilon$  en  $-\varepsilon$ ,  $\eta(x) = \eta(-x)$  est aussi solution de  $-x = -\varepsilon s_\xi(\eta)$ ].

Nous posons, par définition,

$$(2) \quad s'(x) = (m-1)s(\eta).$$

Alors  $s'(x) = s'(-x)$  est homogène de degré  $m' = m/(m-1)$  et  $s' = 0$  est l'équation de  $S'$  près de  $\pm \gamma_0$ . Notons que l'inverse de (1) est

$$\eta = \varepsilon s'_x(x)$$

et que les matrices  $s_{\xi\xi}$  et  $s'_{xx}$  sont inverses :

$$(3) \quad s_{\xi\xi}^{-1}(\eta) = s'_{xx}(x).$$

En effet, (1) donne

$$dx = \varepsilon s_{\xi\xi}(\eta) d\eta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon s_{\xi\xi}^{-1}(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Vu le théorème d'Euler,

$$s_{\xi\xi}(\eta)\eta = (m-1)s_\xi(\eta).$$

donc

$$\eta = (m-1)s_{\xi\xi}^{-1}(\eta) \frac{\partial s}{\partial \eta} = \varepsilon(m-1) \frac{\partial}{\partial x} s(\eta(x)) = \varepsilon s'_x(x)$$

et

$$\varepsilon s'_{xx}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \eta = \varepsilon s_{\xi\xi}^{-1}(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \eta = \varepsilon s_{\xi\xi}^{-1}(\eta).$$

Nous allons supposer que  $f$  devient singulier sur  $S$ ; plus précisément que  $f$  soit de la forme

$$\varphi(s(\xi)) P(\xi),$$

où  $P$  est une fonction régulière et  $\varphi$  est une distribution régulière en dehors de l'origine. La fonction  $f$  doit être homogène de degré  $\alpha'$ ; si nous supposons que  $P = P_\mu$  soit homogène de degré  $\mu$  il faut donc que  $\varphi$  soit homogène de degré  $\beta$ , où

$$\alpha + m\beta + \mu + l = 0.$$

Mais dans ce cas,  $\varphi$  est une combinaison linéaire de  $\chi_\beta$  et  $\check{\chi}_\beta$  et par conséquent, en changeant le signe de  $s$ , il suffit de poser

$$f = \chi_\beta(s(\xi)) F_\mu(\xi).$$

Si  $\beta = p$ , cette fonction n'est pas homogène, mais le résultat reste le même.

Pour simplifier les énoncés concernant les supports des fonctions homogènes, nous convenons de noter  $[\xi]$  le rayon engendré par les  $\lambda\xi$  avec  $\lambda > 0$ . Nous convenons aussi d'utiliser la notation de la remarque de 2.2.

**THÉORÈME 4.1.** — *Si le support de  $P_\mu$  est suffisamment voisin de  $[\eta_0]$ , alors; en prenant les signes supérieurs ou inférieurs, on a, pour  $[x]$  voisin de  $[y_0]$ ,*

$$(4) \quad \int_{\gamma=1} \chi_\alpha(\pm x \xi) \chi_\beta(s(\xi)) P_\mu(\xi) \sigma(\xi) \\ = \theta_0(\mp \varepsilon) (2\pi)^{l/2} |m-1|^{-1} |\text{Hess } s'_x|^{1/2} \\ \times i^\nu R_{\mu'}(x) \cdot \chi_{\alpha+\beta+l/2}(\pm \varepsilon s'_x(x)) + R'_\alpha(x),$$

où  $\nu$  est la signature positive de  $s'_{xx}(y_0)$ ;  $R'_\mu$  est homogène de degré  $\mu' = \mu(m-1)^{-1}$  et

$$R'_\mu(x) = P_\mu(\eta(x))$$

sur  $S'$ . La fonction  $R'_\mu$  ne dépend pas des signes de  $s$ ,  $\varepsilon$  et  $x$ . Si  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $P_\mu$  sont réels, on peut prendre  $R'_\mu$  réel.

**NOTE.** — Si  $\alpha$  et  $\alpha + \beta + l/2$  ne sont pas des entiers,  $R'_\alpha$  est homogène de degré  $\alpha$ .

**NOTE.** — Il est clair que le théorème est vrai aussi pour  $P_\mu$  à support arbitraire pourvu que  $s_\xi \neq 0$  et que  $\eta_0$  soit le seul point où  $x_0 \xi = 0$  touche  $S$ .

**NOTE.** — Quand  $P_\mu(\xi)$  est remplacé par  $P_\mu(x, \xi)$ , régulier en  $x, \xi$  et homogène de degré  $\mu$  en  $\xi$ , le théorème reste vrai pour  $x$  voisin de  $y_0$ ,  $R'_\mu$  n'étant plus nécessairement homogène. Nous démontrerons le théorème sous cette forme plus générale.

**NOTE.** — Vu (1.5.4), (1.5.4') et (1.2.3), on a

$$d(\chi_\alpha(x\xi) \chi_\beta(s(\xi)) P_\mu(\xi) \sigma(\xi)) \\ = ((\alpha!)^{-1} (x\xi)^\alpha \chi_\beta(s(\xi)) + \chi_\alpha(x\xi) (\beta!)^{-1} s(\xi)^\beta) P_\mu(\xi) \tau(\xi),$$

où les deux termes du second membre doivent être remplacés par 0 quand  $\alpha$  ou  $\beta$  ne sont pas entiers.

Par conséquent, modulo une fonction régulière de  $x$ , l'intégrale (4) ne dépend pas de  $\gamma$ .

PREUVE. — Vu la dernière Note, on peut supposer que l'intégrale est étendue au plan  $\xi_1 = \eta_{0,1} = 1$ . On a

$$s(\xi) = s(\eta) + s_\xi(\eta)(\xi - \eta) + O(|\xi - \eta|^2)$$

et

$$(5) \quad x\xi = \varepsilon s_\xi(\eta)\xi = m\varepsilon s(\eta) + \varepsilon s_\xi(\eta)(\xi - \eta).$$

Faisons un changement de variables linéaire et unimodulaire

$$\xi_2, \dots \rightarrow t = (t_2, \dots, t_l)$$

tel que  $t = 0$  pour  $\xi = \eta$  et

$$t_2 = t_2(x, \xi) = s(\eta) + s_\xi(\eta)(\xi - \eta)$$

et posons

$$(6) \quad s^*(x, t) = s(\xi) = t_2 + O(t_2^2 + \dots + t_l^2).$$

Nous allons voir que

$$(7) \quad (\text{Hess } s(\xi))_{\xi=\eta, s(\eta)=0} = -(m-1)^2 (\text{Hess}_{t_2, \dots, t_l} s^*(x, t))_{t=0}.$$

En effet, par une transformation linéaire et unimodulaire des  $t$  on peut faire en sorte que

$$s^*(x, t) = t_2 + \sum_2^l c_j t_j^2 + O(|t|^3).$$

Comme  $\xi \rightarrow \xi_1, t_2, \dots, t_l$  a la même propriété et comme  $s$  est homogène de degré  $m$ , on a

$$(8) \quad \begin{aligned} \text{Hess } s(\xi) &= \text{Hess}_{\xi_1} \xi_1^m s(1, t_2/\xi_1, \dots) \\ &= \text{Hess}_{\xi_1, t} \left( \xi_1^{m-1} t_2 + \xi_1^{m-2} \sum_2^l c_j t_j^2 + O(|t|^3) \right) \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$[\text{Hess } s(\xi)]_{\xi=\eta, s(\eta)=0} = -(m-1)^2 c_2 \dots c_l,$$

d'où (7). Vu (3), (5) et (6), si l'on utilise la variable  $t$ , l'intégrale (4) devient

$$\int \chi_x(\pm \varepsilon(s'(x) + t_2)) \chi_{t_2}(s^*(x, t)) P_\mu(x, \xi(t, x)) \tau(t).$$

Vu (7) et le fait que  $\text{Hess } s(\xi) \neq 0$  près de  $\eta_0$ , on peut utiliser le théorème 3.1 pour faire une intégration en  $t_3, \dots, t_l$ , le résultat étant

$$(9) \quad \begin{aligned} \int \chi_x(\pm \varepsilon(s'(x) + t_2)) \chi_{\beta + \frac{1}{2}l-1}(t_2) \cdot P^l(x, t_2) i^{l(B)} (2\pi)^{\frac{l}{2}-1} |\det B|^{-1/2} dt_2 \\ + \int \chi_x(\pm \varepsilon(s'(x) + t_2)) R^l(x, t_2) dt_2, \end{aligned}$$

où

$$(10) \quad B(x) = (s_{jk}^*(x, 0)) \quad (j, k = 3, \dots, l).$$

$\nu(B)$  est la signature positive de  $B$ ,  $P'$  ne dépend pas du signe de  $s$  et

$$P'(x, t_2) = P_\mu(x, \eta(x)) \quad \text{pour } t_3 = \dots = t_l = 0.$$

La seconde intégrale de (9) est visiblement régulière et la première se calcule par le théorème 2.1. Vu (7) et (10) le résultat est le suivant.

$$\begin{aligned} & 0_0(\mp \varepsilon) i^{\nu(B)+1} |m-1|^{-1} (2\pi)^{l/2} |\text{Hess } s(\eta)|^{-1/2} \\ & \times R_{\mu'}(x) \cdot \chi_{\alpha+\beta+\frac{l}{2}}(\pm \varepsilon s'(x)) + R'(x), \end{aligned}$$

où  $R_{\mu'}$  ne dépend pas des signes de  $s$  et de  $\varepsilon$  et  $R_{\mu'}(x) = P_\mu(x, \eta(x))$  sur  $S'$ . Vu (3),

$$\text{Hess } s'(x) = (\text{Hess } s(\eta))^{-1}$$

et, en regardant les matrices symétriques dans (8), on voit que  $\nu(B) + 1$  est la signature positive de  $s_{\xi\xi}(\eta)$  pour  $\eta = \eta_0$ , qui, vu (3), est aussi la signature positive de  $s'_{xx}(\gamma_0)$ . Il est clair que le dernier énoncé du théorème est vrai.

En effet, si  $P_\mu$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont réels on peut évidemment prendre  $P'$  et  $R_\mu$  réels.

Traçons enfin le cas où  $P_\mu$  ne dépend pas de  $x$ . Nous dirons qu'une distribution  $G(x)$  est quasi-homogène de degré  $\alpha$  si  $\lambda^\alpha G(x) = G(\lambda x)$  est régulière pour tout  $\lambda > 0$ . On constate que pour que le premier terme du second membre de (4) soit quasi-homogène de degré  $\alpha$ , il faut et il suffit que  $R_{\mu'}$  soit homogène de degré  $\mu' = \mu/m - 1$ . En effet,  $\text{Hess } s'(x)$  étant homogène de degré  $l(2-m)(m-1)$ , on a

$$l\left(1 - \frac{1}{2}m\right)(m-1)^{-1} + \mu' + \left(\alpha + \beta + \frac{l}{2}\right)m(m-1)^{-1} = \alpha$$

si, et seulement si

$$\alpha + m\beta + (m-1)\mu' = -l.$$

Évidemment, nous pouvons trouver  $R_{\mu'}$  et  $R'_\alpha$  tels que (4) soit vrai sur une variété  $\gamma(x) = 1$ . Alors, en faisant  $R_{\mu'}$  homogène de degré  $\mu'$ , on voit que (4) vaut pour tout  $x \neq 0$  ayant une direction voisine de celle de  $\gamma_0$ , à condition qu'on le prenne comme définition de  $R'_\alpha$ . Si  $\alpha$  et  $\alpha + \beta + l/2$  ne sont pas des entiers, on peut faire  $R'_\alpha$  homogène de degré  $\alpha$ .

**5. Applications aux solutions élémentaires.** — Soit  $s(\xi)$  un polynôme réel, homogène de degré  $m$  et supposons que la variété  $S: s(\xi) = 0$  soit sans singularité. Soit  $z_{-p}(s) = \text{Re } \gamma_{-p}(s)$  [voir (1.3.8)] et soit  $n > 0$  un entier. Alors

$$E(x) = \text{Re} (2\pi i)^{-l} (n-1)!^{-1} (-1)^n \int_{\gamma_{-1}} \chi_{mn-l}(x\xi) z_{-n}(s(\xi)) \sigma(\xi)$$

est une solution élémentaire réelle de l'opérateur différentiel  $s(\partial/\partial x)^n$ . En effet, vu (1.5.3) et (1.5.3''),

$$s^n \chi_{-n}(s) = \operatorname{Re} s^n \chi_{-n}(s) = (-1)^n (n-1)!$$

donc, vu (1.6.6),

$$s(\partial/\partial x)E(x) = \operatorname{Re}(2\pi i)^{-l} \int_{\gamma=1} \chi_{-l}(x\xi) \sigma(\xi) = \delta(x).$$

Nous avons choisi cette solution élémentaire à titre d'exemple; on peut évidemment en construire d'autres. Nous savons que  $E(x)$  est régulier si le plan  $x\xi = 0$  ne touche pas la variété  $S$  (on voit facilement qu'il est même analytique). Supposons  $x$  voisin d'un point  $y_0$  tel que  $y_0\xi = 0$  touche  $S$  aux points  $\xi = \pm \eta_0$  seulement. [S'il y en a d'autres, il faut faire une somme dans la formule (1) ci-dessous.] En multipliant  $\eta_0$  par une constante positive convenable on peut faire en sorte que

$$y_0 = \varepsilon s_\xi(\eta_0) \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Soit  $\eta = \eta(x)$  la solution unique de

$$x = \varepsilon s_\xi(\eta)$$

pour  $x$  voisin de  $y_0$  et posons

$$s'(x) = s(\eta(x)).$$

Soit  $\nu$  la signature positive de  $s_\xi(\eta_0)$ , supposé non-singulier.

**THÉORÈME 5.1.** — *Près de  $y_0$ , on a*

$$(1) \quad E(x) = \varphi(x) P_0(x) \cdot \operatorname{Re} i^{-\nu} \chi_{(m-1)n-\frac{l}{2}}(s'(x)) + R(x),$$

où

$$\varphi(x) = (-1)^{\theta_0(-\varepsilon)mn} (2\pi)^{-l/2} (m-1)^{-1} (n-1)!^{-1} |\operatorname{Hess} s'(x)|^{1/2},$$

$P_0$  et  $R$  sont réels et  $P_0(x) = 1$  sur  $S'$ .

**NOTE.** —  $\operatorname{Hess}_\xi s(\xi)$  est homogène de degré  $l(m-2)$ . Donc, si  $l$  et  $m$  sont impairs et si une nappe connexe de la variété  $s(\xi) = 0$  est invariante pour  $\xi \rightarrow -\xi$ , la variété a des points singuliers où notre formule ne vaut pas. On peut démontrer que, près d'une nappe non-singulière, on peut choisir  $P_0$  et  $R(x)$  analytiques. Pour  $n = 1$ , notre théorème contient les résultats de BOROVIKOV [1].

**NOTE.** — Les solutions élémentaires des opérateurs différentiels fortement hyperboliques  $s(x, \partial/\partial x)$  à coefficients variables analytiques font l'objet d'une étude très poussée de J. LERAY [7]. Il donne le prolongement analytique des solutions élémentaires près de l'enveloppe  $S'$  de  $S$ , qui est le cône caractéristique. Pour  $s$  à coefficients constants, ses résultats contiennent (1).

PREUVE. — Soit  $N$  un voisinage conique régulièrement borné de  $\eta_0$ . Vu le théorème 4.1 on a, près de  $y_0$ ,

$$(2) \quad \int_{N \cap (\gamma=1)} \chi_x(\pm x\xi) \chi_{-n}(s(\xi)) \sigma(\xi) \\ = \theta_0(\mp \varepsilon) \psi(x) i^\nu P_0(x) \cdot \chi_\mu(\pm \varepsilon s'(x)) + R_\alpha(x),$$

où

$$\psi(x) = (m-1)^{-1} (2\pi)^{l/2} |\text{Hess } s'(x)|^{1/2}, \\ \alpha = mn - l, \quad \mu = (m-1)n - l/2.$$

$P_0$  est homogène de degré 0, indépendant du signe de  $s'$  et  $P_0(x) = 1$  sur  $S'$ . Vu (1.5.5),

$$\chi_{-n}(s) = \frac{1}{2} (\chi_{-n}(s) + (-1)^n \chi_{-n}(-s)),$$

et il est clair que  $s \rightarrow -s$  dans (2) entraîne  $\nu \rightarrow l - \nu$ ,  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$  et  $s' \rightarrow -s'$ . Donc,

$$\int_{N \cap (\gamma=1)} \chi_x(\pm x\xi) \chi_{-n}(s(\xi)) \sigma(\xi) \\ = \frac{1}{2} \psi(x) P_0(x) (\theta_0(\pm \varepsilon) i^\nu \chi_\mu(\pm \varepsilon s') \\ + (-1)^n \theta_0(\pm \varepsilon) i^{l-\nu} \chi_\mu(\pm \varepsilon s') + R_\alpha(x)).$$

Comme  $\chi_{-n}(s(-\xi)) = (-1)^{mn} \chi_{-n}(s(\xi))$ , une intégration sur  $(-N) \cap (\gamma=1)$  change la dernière intégrale en

$$(-1)^{mn} \int_{N \cap (\gamma=1)} \chi_x(\mp x\xi) \chi_{-n}(s(\xi)) \sigma(\xi).$$

Donc, la partie singulière de l'intégrale

$$\int_{\gamma=1} \chi_x(x\xi) \chi_{-n}(s(\xi)) \sigma(\xi)$$

vaut  $\frac{1}{2} \psi(x) P_0(x)$  fois la distribution

$$(3) \quad (\theta_0(-\varepsilon) i^\nu + (-1)^n \theta_0(\varepsilon) i^{l-\nu}) \chi_\mu(\varepsilon s') \\ + (-1)^{mn} (\theta_0(\varepsilon) i^\nu + (-1)^n \theta_0(-\varepsilon) i^{l-\nu}) \chi_\mu(-\varepsilon s').$$

Maintenant, vu (1.5.5), on a

$$(4) \quad \chi_\mu(-s) = (-1)^{-mn+n+\frac{1}{2}l} \bar{\chi}_\mu(s).$$

Donc, pour  $\varepsilon = 1$ , (3) vaut

$$(-1)^n i^l (i^{-\nu} \chi_\mu(s') + i^\nu \bar{\chi}_\mu(s')).$$

Si  $\varepsilon = -1$ , il faut évidemment multiplier par  $(-1)^{mn}$ . Par conséquent, vu les définitions de  $E(x)$ ,  $\psi(x)$  et  $\varphi(x)$ ,

$$E(x) = \varphi(x) P_0(x) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Re}(i^{-\nu} \chi_\mu(s') + i^\nu \bar{\chi}_\mu(s')) + R_x(x);$$

puisque

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}(i^{-\nu} \chi_\mu(s') + i^\nu \bar{\chi}_\mu(s')) = \operatorname{Re} i^{-\nu} \chi_\mu(s'),$$

la démonstration est achevée.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOROVKOV (V. A). — La solution élémentaire des équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients constants [en Russe], *Trudy Moskovskogo matematičeskogo Obščestva*, t. 8, 1959, p. 199-257.
- [2] GEL'FAND (I. M.) et ŠAPIRO (Z. Ja.). — Les fonctions homogènes et leurs applications [en russe], *Usp. Mat. Nauk U. S. S. R.*, t. 10, 1955, n° 3, p. 3-70.
- [3] GEL'FAND (I. M.) et SHILOV (G. E.). — *Les fonctions généralisées et leurs applications*, t. 3, [en russe], Moskva, 1958.
- [4] HÖRMANDER (Lars). — On the division of distributions by polynomials, *Arkiv för Matematik*, t. 3, 1958, p. 555-568.
- [5] JOHN (F.). — The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 2, 1950, p. 273-304.
- [6] LERAY (Jean). — Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 81-180.
- [7] LERAY (Jean). — Problème de Cauchy, IV, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 1-100.
- [8] LUDWIG (D.). — *Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem*. — New York, New York University, Institute of mathematical Sciences, 1959 (multigraphié).
- [9] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions*, t. 1 et 2. — Paris, Hermann, 1950-1951 (Act. scient. et ind., 1091-1222).
- [10] SCHWARTZ (Laurent). — Distributions semi-régulières et changements de coordonnées, *J. Math. pures et appl.*, 9° série, t. 36, 1957, p. 109-127.
- [11] RHAM (G.). — *Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques*. — Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind. 1222).

(Manuscrit reçu le 12 avril 1961.)

Lars GÅRDING,  
Professeur à l'université,  
Lund (Suède).