JEAN CERF

Topologie de certains espaces de plongements

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 227-380
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__227_0>

Bull. Soc. math. France,
89, 1961, p. 227 à 380.

TOPOLOGIE DE CERTAINS ESPACES DE PLONGEMENTS (1)

PAR

JEAN CERF

(Lille).

TABLE DES MATIÈRES.

(1) Thèse Sc. math., Paris, 1960.

CHAPITRE III.

Groupes d'automorphismes et groupes de difféomorphismes des variétés compactes de dimension 3.

INTRODUCTION.

Le point de départ de ce travail a été la « conjecture de Feldbau » (*cf.* J. Feldbau [1]). Une forme affaiblie de cette conjecture est la suivante :

(F) Le groupe $SO(n+1)$, et le groupe G_n des automorphismes de la sphère S_n qui conservent l'orientation, sont homotopiquement équivalents.

On n'a aujourd'hui aucune raison de penser que (F) soit exacte pour toute valeur de n. Quant à la conjecture analogue relative (au lieu de G_n) au groupe H_n de tous les difféomorphismes de S_n conservant l'orientation, J. Milnor a montré en [1] qu'elle est inexacte pour $n=6$. Par contre, S. Smale a conjecturé que $SO(4)$ et H_3 sont homotopiquement équivalents. Or le principal résultat de notre deuxième partie (corollaire 1 du théorème 8, chapitre III) affirme que si la conjecture de Smale est exacte, « le groupe H des difféomorphismes, et le groupe G des automorphismes de la structure topologique d'une variété différentiable compacte de dimension 3, sont homotopiquement équivalents ». Il en résulte notamment que si la conjecture de Smale est exacte, la conjecture (F) est exacte pour $n=3$ (2).

La démonstration du théorème 8 nécessite une étude préalable des propriétés topologiques des espaces de plongements différentiables (en particulier des espaces de difféomorphismes). Or l'étude des espaces de plongements différentiables présente par elle-même un grand intérêt. Des travaux récents, au premier rang desquels il faut mettre Milnor [1], ont en

---

(2) Ce résultat a été annoncé dans J. Cerf [1]. La conjecture de Feldbau forte pour $n=2$ [i. e., $SO(3)$ est un rétracte de déformation de G^2] a été démontrée, dès 1926, par H. Kneser [1]; ce théorème a été retrouvé depuis par différents auteurs, notamment M. E. Hamstrom et E. Dyer [1], qui obtiennent en même temps d'autres résultats.

effet ouvert des perspectives nouvelles en ce qui concerne l'étude des structures différentiables sur les variétés, et cette étude est étroitement liée à celle des espaces de plongements. Nous avons donc été conduit à donner à notre étude des espaces de plongements un caractère systématique; c'est cette étude qui occupe la première partie de ce travail (Préliminaires, chapitres I et II).

Nous avons été conduit par les applications, que nous avions en vue, à généraliser un peu la notion habituelle de variété différentiable à bord : les « variétés » que nous considérons peuvent avoir des singularités analogues à celles du cube fermé. Le choix de cette catégorie présente le double avantage suivant : c'est une catégorie avec produits (contrairement à celle des variétés différentiables à bord); et l'on peut recoller entre eux certains objets de la catégorie sans qu'il soit nécessaire d'« arrondir les angles ». Le chapitre I est consacré à la définition et à l'étude générale des « variétés » en ce sens et des espaces fonctionnels correspondants. La principale difficulté qu'on rencontre du fait de cette généralisation est la suivante : il faut montrer l'existence de « voisinages prismatiques du bord » en un sens convenable: c'est l'objet du théorème 1, (2.2.1). Grâce à ce théorème, on peut étendre au cas des « variétés » un certain nombre de résultats classiques : notamment les théorèmes de H. WHITNEY relatifs à la possibilité de régulariser une structure C^r en une structure C^∞ [théorème 2, (3.2.2)], et à la possibilité de plonger une variété dans un espace euclidien [corollaire (3.2.3)]; on montre également l'existence de voisinages tubulaires normaux pour une sous-variété d'une « variété » riemannienne; toutefois, contrairement au cas classique, de tels voisinages n'existent ici que pour certaines métriques, celles qui sont « adaptées au bord et à la sous-variété » [l'existence de telles métriques est assurée par le corollaire 1 du théorème 3, (3.3.2)]. Ceci permet, dans toute la suite, de démontrer d'emblée la plupart des résultats dans le cas général des « variétés ». Le paragraphe 4 du chapitre I est consacré à des généralités sur les espaces fonctionnels. Soient E et F deux « variétés », et soit r un entier $\geqq 1$; on note $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ l'ensemble des applications de classe C^r de E dans F; une application d'une « variété » H dans $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ est dite r-différentiable si l'application associée de $H \times E$ dans F est de classe C^r; une application de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ dans $\mathrm{Hom}^r(E', F')$ est « r-différentiable » si elle assure la transitivité des applications différentiables. Cette notion est commode car elle satisfait à un certain nombre de propriétés formelles très simples (qui peuvent s'énoncer dans le cadre plus général des « catégories avec produit et objet ponctuel » et que nous avons rassemblées dans les « Préliminaires »); il est souvent plus facile de montrer la « différentiabilité » d'une application que sa continuité; or le théorème 4, (4.5.3), affirme que (lorsque E et E' sont compacts) toute application « r-différentiable » de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ dans $\mathrm{Hom}^r(E', F')$ est continue pour la topologie C^r. Lorque E est non compact, la topologie sur $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ pour laquelle le plus grand nombre de propriétés du cas compact se généralisent, n'est pas la topologie C^r, mais une topologie plus fine que nous appelons $\mathcal{C}^r$ (elle est analogue à la topologie de l'espace $\mathcal{D}$ de L. Schwartz, en particulier, elle n'est pas métrisable); la topologie $\mathcal{C}^r$ est définie en (4.3), et utilisée systématiquement dans la suite.

L'étude proprement dite des espaces de plongements différentiables occupe le chapitre II. La proposition 1, (1.2), affirme que (pour tout $r \geqq 1$) toute application de classe C^r assez voisine au sens $\mathcal{C}^r$ d'un plongement f est encore un plongement, pourvu qu'elle ait « mêmes relations d'incidence que f » [notion définie en (1.1)]; la fin du paragraphe 1 donne des généralités sur les groupes de difféomorphismes et les groupes d'isotopies. Au paragraphe 2, après avoir établi, à l'aide du théorème de prolongement de H. Whitney, un « lemme de prolongement » (2.1.2), on démontre le théorème 5, (2.2.1), ou « premier théorème d'isotopie et de prolongement » : « Soit E une sous-variété d'une variété F et soit $r \geqq 1$. Tout plongement f' de E dans F, assez voisin de l'injection f, et ayant mêmes relations d'incidence que f, peut se déduire de f par une isotopie γ de F; en plus, γ peut être choisie fonction continue de f' ». La première partie de ce théorème généralise un théorème d'isotopie de R. Thom [1]; de la seconde partie on déduit aussitôt le « premier théorème de fibration » [corollaire 1, (2.2.2)] analogue, en plus fort, au théorème de fibration établi par S. Smale [1] dans le cas des espaces d'immersions : « Soit E une sous-variété d'une variété F; et soit M une sous-variété fermée de E; l'espace des plongements de E dans F ayant mêmes relations d'incidence que l'injection, est fibré localement trivial sur son image canonique dans l'espace des plongements de M dans F ». Le paragraphe 3 commence par quelques rappels sur les jets de C. Ehresmann; puis (E désignant une sous-variété d'une variété F, et M une sous-variété fermée de E) on démontre que, pour tout tube T normal à M dans E, l'espace Pl_M^r des r-plongements de T dans F qui induisent l'identité sur M, et qui ont mêmes relations d'incidence que l'injection, fibré sur l'espace J_M^r des jets le long de M de ces plongements, admet des sections locales continues [proposition 4, (3.3.3)]. De la proposition 4 et du théorème 5 on déduit aussitôt le théorème 6, (3.4.2), ou « deuxième théorème d'isotopie et de prolongement » : « Soient E, F, M, Pl_M^r, J_M^r comme ci-dessus; soit $j \in J_M^r$; tout $j' \in J_M^r$ assez voisin de j, peut se déduire de j par une isotopie γ de F induisant sur M l'isotopie identique; en plus γ peut être choisie fonction continue de j' ». On en déduit immédiatement le « deuxième théorème de fibration » : « Soient E, F, M, Pl_M^r, J_M^r comme ci-dessus; Pl_M^r est fibré localement trivial sur J_M^r ». Le paragraphe 4 est consacré à l'« isotopie locale »; la situation de E, F, M étant la même que ci-dessus, ainsi que la notation Pl_M^r, on dit que deux éléments f' et f'' de Pl_M^r sont « localement isotopes » s'il existe une isotopie γ de F induisant l'identité sur M, telle que f' et f'' coïncident sur tout un voisinage de M dans E. Après avoir étudié l'effet sur Pl_M^r des « dilatations d'âme M », on démontre à l'aide des théorèmes 5 et 6 le théorème 7, (4.2.2.), et son corollaire ou « théorème d'isotopie locale » :

« Soient E, F, M comme ci-dessus; on suppose M compact; pour que deux éléments f' et f'' de Pl_M^r soient localement isotopes, il faut et il suffit que leurs jets d'ordre 1 le long de M soient dans la même composante connexe de J_M^r ». Le paragraphe 5 donne des applications des théorèmes 5, 6 et 7 à un certain nombre de cas particuliers; parmi les résultats obtenus citons le suivant : « Soient f' et f'' deux plongements de la boule fermée B_m dans une variété sans bord F, de dimension $n \geqq m$. Si $n > m$, ou si F est non-orientable, f' et f'' sont toujours isotopes; si $n \geqq m$ et si F est orientable, la condition nécessaire et suffisante pour que f' et f'' soient isotopes est qu'ils aient même orientation » (3). On obtient également des résultats sur les groupes d'homotopie de certains espaces de plongements.

L'une des principales difficultés du chapitre III provient du fait suivant : la topologie, dont il est intéressant de munir le groupe H des difféomorphismes d'une variété compacte F, est la topologie C^r; cette topologie est *plus fine* que la topologie induite sur H par la topologie C^0 du groupe G des automorphismes de la structure topologique de F. C'est pourquoi le chapitre débute par une étude des « paires topologiques » : une paire topologique (A, B) est un couple d'espaces topologiques muni d'une injection continue : $B \rightarrow A$; la proposition 1, (1.2.2), est une condition suffisante d'équivalence homotopique de A et B; elle s'exprime essentiellement en termes de « n-locale connexion de B dans A » [notion définie en (1.2.1)]. Le paragraphe 2 est relatif à la situation plus particulière suivante : « paire homogène » (A, B), où $A = G/G_0$ et $B = H/H_0$ sont des espaces homogènes de groupes (G, H) formant une paire topologique. Le lemme « de suite exacte », (2.2.5), donne dans ce cas une condition suffisante [qui est essentiellement le « relèvement des petits cubes », défini en (2.2.1)] pour que, si la condition de n-locale connexion de B dans A est vérifiée quel que soit n pour deux des paires (G, H), (G_0, H_0), (A, B), elle le soit pour la troisième. Dans le cas où H est fibré localement trivial sur B, et où H_0 est dense dans G_0, la proposition 2, (2.2.4), donne une condition suffisante pour le relèvement des petits cubes : c'est la « presque locale connexion par arcs » de H_0 dans G_0 [notion définie en (2.2.3)]. Au paragraphe 3, on définit d'abord la notion de « décomposition régulière » d'une variété; à cette notion est liée celle de « hauteur »; toute variété différentiable compacte de dimension 3 est de hauteur finie [proposition 3, (3.1.1)]. A toute variété F on associe la paire de groupes (G, A) suivante : G est le groupe des automorphismes de la structure topologique de F qui induisent l'identité sur le bord; H est le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de F qui sont tangents d'ordre ∞ à l'identité le long du bord; G est muni de la topologie C^0, H de la topologie C^∞. A toute décomposition régulière de F est associée une paire

(3) Ce résultat a été trouvé indépendamment par R. S. PALAIS [2], faisant usage d'un résultat de R. S. PALAIS [1] qui est l'analogue (dans ce cas particulier) de notre théorème 7.

homogène (A, B) de la paire de groupes (G, H). La suite du paragraphe 3 est essentiellement consacrée à la démonstration du théorème 8, (3.2.1) : « Soit F une variété compacte de dimension 3; soit (G, H) la paire de groupes associés à F; soit (A, B) la paire homogène associée à une décomposition régulière de F; si la conjecture de Smale est exacte, alors pour tout entier n, H est n-localement connexe dans G, et B est n-localement connexe dans A ». La démonstration se fait par récurrence sur la hauteur de F; elle utilise d'une part les résultats du paragraphe 2 (lesquels s'appliquent en vertu des théorèmes de fibration du chapitre II); d'autre part elle utilise des théorèmes d'approximation de E. E. Moïse [1], R. H. Bing ([1], [2]) et S. Cairns ([1], [2]). Le corollaire 1 du théorème 8, cité au début de la présente Introduction, se déduit aussitôt du théorème (à l'aide de la proposition 1).

Mr H. Cartan a bien voulu être à la fois le Rapporteur et le Président du Jury de cette Thèse, dont il a été le directeur et l'inspirateur : c'est assez dire ses soins et ses justes exigences; pour les uns comme pour les autres, je lui dois infiniment; qu'il soit assuré de ma profonde reconnaissance. A Mr G. Choquet je dois plusieurs importantes améliorations; sans ses encouragements j'aurais sans doute renoncé à m'attaquer à ce sujet; qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude. Je suis heureux également de remercier Mr R. Thom pour les nombreuses et précieuses conversations que j'ai pu avoir avec lui, et Mr J.-P. Serre, qui a bien voulu relire une partie du chapitre III.

Je remercie MM. L. Schwartz et B. Malgrange qui ont bien voulu se joindre à MM. H. Cartan et G. Choquet pour constituer le Jury de cette Thèse.

Je remercie Mr J. Leray d'avoir bien voulu accepter le présent travail au *Bulletin de la Société mathématique de France.*

PRÉLIMINAIRES.

0.1. Rappels sur les catégories avec produits ([4]).

0.1.1. Définition. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit que $\mathcal{C}$ est une *catégorie avec produits* si, pour tout couple (E, E') d'objets de $\mathcal{C}$, le « problème universel » suivant admet au moins une solution :

Trouver un objet F de $\mathcal{C}$ et deux morphismes

$$\begin{aligned} p &: \quad F \to E, \\ p' &: \quad F \to E' \end{aligned}$$

([4]) Pour les définitions élémentaires relatives aux catégories et aux foncteurs, *voir* Eilenberg-Steenrod [1], chap. IV. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, soit (E, F) un couple d'objets de $\mathcal{C}$; on note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$ l'ensemble des $\mathcal{C}$-morphismes $E \to F$. Pour la définition des catégories avec produits, *cf.* Grothendieck [1], p. 123.

tels que, pour tout objet H de $\mathcal{C}$ et tout couple de morphismes

$$f: \quad H \to E,$$
$$f': \quad H \to E'$$

il existe un morphisme *unique*

$$h: \quad H \to F$$

satisfaisant à

$$p \circ h = f; \qquad p' \circ h = f'.$$

Toute solution de ce problème universel s'appelle *un produit de E et E'*, et se note $E \times E'$ (notation qui sous entend la donnée des morphismes p et p'). Soit H un objet de $\mathcal{C}$, il y a une *bijection naturelle*

(1) $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H, E \times E') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H, E) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H, E').$$

Si l'on a deux produits $E \times_1 E'$ et $E \times_2 E'$, il y a un isomorphisme *unique* de l'un sur l'autre. On supposera toujours qu'on a *choisi*, pour tout couple (E, E') d'objets de $\mathcal{C}$, un produit noté $E \times E'$. Un tel choix définit sur $\mathcal{C}$ un *foncteur covariant de deux variables* à valeurs dans $\mathcal{C}$. En effet, la donnée d'un couple de morphismes $f: E \to E_1$, $f': E' \to E'_1$ définit un unique morphisme $h: E \times E' \to E_1 \times E'_1$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E & \xleftarrow{p} & E \times E' & \xrightarrow{p'} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ E_1 & \xleftarrow{p_1} & E_1 \times E'_1 & \xrightarrow{p'_1} & E'_1 \end{array}$$

0.1.2. *Notion de foncteur compatible avec des produits.*

Définition. — Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^*$ deux catégories avec produits. Soit T un foncteur covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}^*$. On dit que T est *compatible avec les produits sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^*$* si, pour tout couple (E, E') d'objets de $\mathcal{C}$, le morphisme

(2) $$T(E \times E') \to T(E) \times T(E')$$

[associé aux morphismes

$$T(p): T(E \times E') \to T(E) \qquad \text{et} \qquad T(p'): T(E \times E') \to T(E')]$$

est un *isomorphisme*. (Cette propriété est bien indépendante du choix des produits).

Exemple. — La catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles est une catégorie avec produits. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec produits, soit H un objet de $\mathcal{C}$. On définit un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$ en associant à tout objet E de $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H, E)$, et à tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')$ l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H, E')$

définie par f; ce foncteur est compatible avec les produits d'après (1) de (0.1.1).

0.2. Catégories avec produits et objet ponctuel.

0.2.1. Définition. — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, un objet O de $\mathcal{C}$ est dit *ponctuel* si, pour tout objet E de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, O)$ est un ensemble à un élément.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ayant un objet ponctuel; tous ses objets ponctuels sont canoniquement isomorphes entre eux, on en choisit un une fois pour toutes, et on le note O. On définit un foncteur T de $\mathcal{C}$ dans la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles en associant à tout objet E de $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(O, E)$, et à tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')$ l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(O, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(O, E')$ définie par f. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produits, le foncteur T est compatible avec les produits [*cf.* (0.1.2), définition et exemple]. Noter aussi que, pour tout objet E de $\mathcal{C}$, il y a un isomorphisme canonique

$$E \times O \approx E. \tag{3}$$

Un objet E de $\mathcal{C}$ est dit *vide* si $T(E)$ est vide (condition évidemment indépendante du choix de l'objet ponctuel O qui sert à définir T).

Soit (E, E') un couple d'objets de $\mathcal{C}$ tel que E' soit *non vide*, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')$ *est non vide;* il en résulte en particulier qu'*il existe un morphisme i de E dans $E \times E'$ tel que $p \circ i$ soit l'isomorphisme identique de E.*

0.2.2. *Applications permises.* — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec produits et objet ponctuel; soit T le foncteur défini en (0.2.1). Soient E, E', H trois objets de $\mathcal{C}$; soit une application $\psi : T(H) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')$; à l'application ψ est associée une application

$$T(H) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(T(E), T(E')),$$

donc une application

$$T(H) \times T(E) \to T(E');$$

d'où, par composition avec l'application canonique

$$T(H \times E) \to T(H) \times T(E),$$

une application

$$T(H \times E) \to T(E').$$

Définition. — Une application $\psi : T(H) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')$ est dite *permise* si l'application associée $T(H \times E) \to T(E')$ est la transformée par T d'un $\mathcal{C}$-morphisme de $H \times E$ dans E'.

LEMME. — Soient E, E', E'', H quatre objets de $\mathcal{C}$. Soit

$$\psi : \quad T(H) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E'),$$
$$\psi' : \quad T(H) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E'\, E'')$$

deux applications *permises*. Alors l'application

$$\chi : \quad T(H) \ni x \to (\xi'(x) \circ \xi(x)) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E''')$$

est *permise*.

DÉMONSTRATION. — A l'application χ est associée l'application

$$T(H \times E) \to T(E'')$$

composée de l'application $T(H \times E') \to T(E'')$ associée à ξ' et de l'application $T(H \times E) \to T(H \times E'')$ définie par l'application

$$T(H) \times T(E) \ni (x, y) \to (x, \xi(x).y) \in T(H) \times T(E).$$

0.3. Catégorie des ensembles de morphismes d'une catégorie avec produits et objet ponctuel.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec produits et objet ponctuel [*cf.* (0.2.1)].

0.3.1. *Définition de la catégorie* $\mathcal{A}$. — Ses *objets* sont les parties *quelconques* (donc éventuellement *vides*) des $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$, pour tous les couples (E, F) d'objets de $\mathcal{C}$ tels que E soit non vide. Noter que si A est un objet *non vide* de $\mathcal{A}$, A *détermine* le couple (E, F) dont il est issu.

$\mathcal{A}$-*morphismes*. — Soient (E, F) et (E', F') deux couples d'objets de $\mathcal{C}$. Soient $A \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$ et $A' \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E', F')$ deux objets de $\mathcal{A}$. Une application (ensembliste) $\varphi : A \to A'$ est un $\mathcal{A}$-morphisme si A est vide (auquel cas φ est l'application vide) *ou*, si pour tout objet H de $\mathcal{C}$ et toute application *permise* [*cf.* (0.2.2)] : $T(H) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$ dont l'image est dans A, l'application composée : $T(H) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E', F')$ (définie à l'aide de φ) est encore une application *permise*.

Il est immédiat qu'on a bien défini ainsi une catégorie $\mathcal{A}$ qui a les propriétés suivantes :

1° $\mathcal{A}$ est muni naturellement d'un *foncteur d'inclusion* Q dans la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles.

2° Si A' et B' sont deux parties de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E', F')$ telles que $A' \subset B'$, alors l'injection $A' \to B'$ est un $\mathcal{A}$-morphisme ; donc pour tout objet A de $\mathcal{A}$, et tout morphisme $A \to A'$, l'application composée $A \to B'$ est un $\mathcal{A}$-morphisme. Inversement, si un $\mathcal{A}$-morphisme $A \to B'$ a son image dans A', alors il définit déjà un $\mathcal{A}$-morphisme $A \to A'$.

3° Si A et A' sont deux objets de $\mathcal{A}$, toute application *constante* $A \to A'$ est un $\mathcal{A}$-morphisme.

4^o Il résulte de 3^o et du lemme 0.2.2 qu'on définit un *foncteur de deux variables de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{A}$* (contravariant par rapport à la première variable, covariant par rapport à la seconde) en associant, à tout couple (E, E') d'objets de $\mathcal{C}$, l'objet $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')$ de $\mathcal{A}$; et à tout couple de morphismes : $f: F \to E$; $f': E' \to F'$, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F, F')$ définie par f et f'.

0.3.2. $\mathcal{A}$ *comme catégorie avec produits.* — Soient E, F, E', F' quatre objets de $\mathcal{C}$, tels que E et E' soient non vides; d'après (0.3.1), 4^o, il existe des $\mathcal{A}$-morphismes

$$\begin{aligned} \psi &: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E\times E', F),\\ \psi' &: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E', F') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E\times E', F'),\\ \xi &: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E\times E', F\times F') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E\times E', F). \end{aligned}$$

D'après (1) de (0.1.1), à ψ et ψ' est associée une application

$$\varphi: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)\times_{\mathcal{E}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E', F') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E\times E', F\times F')$$

telle que, ϖ désignant la projection de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)\times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E', F')$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$, on ait

$$\xi\circ\varphi = \psi\circ\varpi.$$

D'après la fin de (0.2.1) et (0.3.1), 4^o, il existe un $\mathcal{A}$-morphisme

$$\chi: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E\times E', F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$$

tel que $\chi\circ\psi$ soit l'isomorphisme identique de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$, donc tel que

$$(4)\qquad \chi\circ\xi\circ\varphi = \varpi.$$

Soient maintenant $A\subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$ et $A'\subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E', F')$ deux objets de $\mathcal{A}$. Soit B l'image par φ du produit ensembliste $A\times_{\mathcal{E}}A'$; d'après (4) ci-dessus, la restriction de $\chi\circ\xi$ à B est une application, qu'on note p, de B dans A, telle que, si l'on note encore ϖ la projection de $A\times_{\mathcal{E}}A'$ sur A, on ait

$$(5)\qquad p\circ\varphi = \varpi.$$

On définit de même une application $B\to A'$, ayant une propriété analogue. D'après (0.3.1), 2^o, p et p' sont des $\mathcal{A}$-morphismes. Je dis que (B, p, p') *est un produit de A et A'* [*cf.* (0.1.1)]. Soit en effet, C un objet de $\mathcal{A}$; soient $\gamma: C\to A$ et $\gamma': C\to A'$ deux $\mathcal{A}$-morphismes; il leur est canoniquement associé une application ensembliste : $C\to A\times_{\mathcal{E}}A'$, d'où par composition avec φ une application ensembliste $\beta: C\to B$, qui d'après (5) vérifie

$$p\circ\beta = \gamma \qquad (\text{et de même} : p'\circ\beta = \gamma'),$$

β est l'*unique* application $C\to B$ vérifiant ces conditions, car le foncteur naturel Q de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$ est un *foncteur d'inclusion*. Il reste à montrer que β

est un $\mathfrak{A}$-morphisme; et pour cela, il suffit de vérifier que pour tout objet H de $\mathcal{C}$ et pour tout couple d'applications *permises* $T(H) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$, et $T(H) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E', F')$, l'application : $T(H) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E \times E', F \times F')$, associée par φ, est encore permise; or ceci est une conséquence immédiate du fait que les applications ψ et ψ' sont des $\mathfrak{A}$-morphismes.

Finalement, on a établi la

PROPOSITION 1. — *$\mathfrak{A}$ est une catégorie avec produits, et le foncteur d'inclusion Q de $\mathfrak{A}$ dans la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles est compatible avec les produits* [*cf.* (0.1.2)].

Compte tenu du lemme (0.2.2), il en résulte immédiatement le

COROLLAIRE. — *Soient E, E', E'' trois objets de $\mathcal{C}$. L'application canonique définie par la composition*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E', E'') \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E'')$$

est un $\mathfrak{A}$-morphisme.

0.3.3. *Inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathfrak{A}$.* — On suppose désormais que la catégorie $\mathcal{C}$ vérifie en plus la condition :

(i) Pour tout couple (E, F) d'objets de $\mathcal{C}$, l'application $f \rightarrow T(f)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(E), T(F))$ est injective.

La condition (i) est visiblement indépendante du choix de l'objet ponctuel O qui a servi à définir le foncteur T[*cf.* (0.2.1)]; elle a la conséquence suivante : la restriction du foncteur T à la sous-catégorie $\mathcal{C}^*$ des objets *non vides* de $\mathcal{C}$ est un *foncteur d'inclusion*.

Il résulte de (0.3.1), 4°, qu'au foncteur T est canoniquement associé un foncteur I de $\mathcal{C}$ dans $\mathfrak{A}$, tel que $T = Q \circ I$ [*I associe à E l'objet* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(O, E)$ *de* $\mathfrak{A}$, et à $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')$ le *$\mathfrak{A}$-morphisme* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(O, E) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(O, E')$ défini par f]; d'après (3) de (0.2.1), le foncteur I est *compatible avec les produits* sur $\mathcal{C}$ et $\mathfrak{A}$; la condition (i) entraîne que le foncteur I définit un *foncteur d'inclusion de $\mathcal{C}^*$ dans* $\mathfrak{A}$. En plus, il résulte de (3) de (0.2.1) que *l'image de $\mathcal{C}^*$ par I est une sous-catégorie pleine de* $\mathfrak{A}$ [ce qui signifie que, pour E et E' non vide, il y a une correspondance biunivoque entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')$ et $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(I(E), I(E'))$].

Si E, E', H sont des objets de $\mathcal{C}$, et si E est non vide, les $\mathfrak{A}$-morphismes

$$I(H) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')$$

ne sont autres que les applications permises [*cf.* (0.2.2)], ce qui peut encore se traduire ainsi : il y a une *bijection canonique*

$$(6) \qquad \mathcal{H}om_{\mathfrak{A}}(I(\mathrm{H}), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H \times E, E').$$

Plus généralement, soient A un objet de $\mathfrak{A}$ et (E, E') un couple d'objets de $\mathcal{C}$, tel que E soit non vide; il y a une *bijection canonique*

$$(7) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')) \approx \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A \times I(E), I(E')).$$

Il en résulte en particulier que l'*application canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E') \times I(E) \to I(E') \tag{8}$$

est un $\mathcal{A}$*-morphisme* [car la bijection (7) lui fait correspondre l'application identique de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E')$].

0.3.4. *Le foncteur* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathcal{A}}$. — Soient E, F, H trois objets de $\mathcal{C}$ tels que E et F soient non vides; soit $A \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F, H)$ un objet de $\mathcal{A}$. Au couple (E, A) on associe l'objet $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathcal{A}}(E, A)$ de $\mathcal{A}$ défini comme suit : c'est la partie de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E \times F, H)$ qui est canoniquement associée à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(I(E), A)$; et à tout couple de morphismes $f : E' \to E$, et $\varphi : A \to A'$ on associe l'application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathcal{A}}(E, A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathcal{A}}(E', A')$ définie par l'application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(I(E), A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(I(E'), A')$, elle-même définie par (f, φ). On vérifie que ceci définit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathcal{A}}$ comme *foncteur de deux variables*, *contravariant par rapport à la première*, *covariant par rapport à la seconde*, *à valeur dans* $\mathcal{A}$. Il y a une *bijection canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathcal{A}}(E, A)) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A' \times I(E), A). \tag{9}$$

On en déduit comme ci-dessus (0.3.3) que l'*application canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathcal{A}}(E, A) \times I(E) \to A \tag{10}$$

est un $\mathcal{A}$*-morphisme.*

0.4. $\mathcal{T}$-catégories, $\mathcal{C}$-fibrations, $\mathcal{C}$-groupes.

0.4.1. *Rappel : notion d'objet induit.* — Soit $\mathcal{C}$ (munie du foncteur T) une catégorie avec objet ponctuel satisfaisant à la condition (i) de (0.3.3). Soit A un objet de $\mathcal{C}$, soit $\tilde{B}$ une partie de $T(A)$. Supposons qu'il existe un objet B de $\mathcal{C}$ tel que

(*a*) $T(B) = \tilde{B}$.

(*b*) L'injection $\tilde{B} \to T(A)$ provient d'un morphisme (unique) $i : B \to A$.

(*c*) Pour tout objet C de $\mathcal{C}$, et tout morphisme $f : C \to A$ tel que l'image de $T(C)$ par $T(f)$ soit contenue dans $T(B)$, il existe un morphisme unique $g : C \to B$, tel que $f = i \circ g$.

On dit alors que l'objet B est *induit* par A sur $\tilde{B}$.

Il est immédiat que l'objet induit par A sur $\tilde{B}$, s'il existe, est *unique*, et qu'on a une propriété de *transitivité* des objets induits, en un sens clair.

0.4.2. $\mathcal{T}$*-catégories.* — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie avec objet ponctuel, T son foncteur à valeurs dans les ensembles [*cf.* (0.2.1)]. On dit que $\mathcal{C}$ est une $\mathcal{T}$*-catégorie* si $\mathcal{C}$ est munie d'un foncteur covariant T' à valeurs dans la catégorie $\mathcal{T}$ des espaces topologiques, tel que :

(a) T′ transforme les objets ponctuels en objets ponctuels.

(b) L'application canonique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(O, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}}(T'(O), T'(E))$ est *bijective* pour tout objet ponctuel O de $\mathcal{C}$, et tout objet E de $\mathcal{C}$.

0.4.3. *$\mathcal{C}$-fibrations.* — On suppose que $\mathcal{C}$ est une $\mathfrak{T}$-catégorie satisfaisant à la condition (i) de (0.3.3), munie de produits, et satisfaisant en plus à la condition suivante : pour tout objet A de $\mathcal{C}$, et toute partie ouverte $\tilde{B}$ de $T'(A)$, il existe un objet induit par A sur $\tilde{B}$.

DÉFINITIONS. — Soient (E, B) un couple d'objets de $\mathcal{C}$ et p un morphisme de E dans B. Soit $x \in T(B)$; on dit que *p est trivial au-dessus d'un voisinage de x* s'il existe un objet F_x de $\mathcal{C}$ et un voisinage ouvert $\tilde{V}$ de x dans $T'(B)$, tel que, si l'on note $\tilde{U}$ l'image réciproque de $\tilde{V}$ par $T(p)$, et si l'on note U et V les objets respectivement induits par E et B sur $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$, il existe un V-isomorphisme ([5]) de $V \times F_x$ sur U.

Si, quel que soit $x \in T(B)$, p est trivial au-dessus d'un voisinage de x, on dit que p [ou encore le triple (E, B, p)] est une *$\mathcal{C}$-fibration localement triviale.* L'image de $T(E)$ par $T(p)$ est alors *ouverte et fermée* dans $T'(B)$.

0.4.4. *$\mathcal{C}$-groupes et opérations des $\mathcal{C}$-groupes.* — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec produits et objet ponctuel satisfaisant à la condition (i) de (0.3.3). Soit G un objet de $\mathcal{C}$; on dit que G est un *$\mathcal{C}$-groupe* si $T(G)$ est muni d'une structure de groupe telle que l'application

$$T(G) \times T(G) \ni (x, x') \to xx'^{-1} \in T(G)$$

provienne d'un $\mathcal{C}$-morphisme de $G \times G$ dans G.

Soit E un objet de $\mathcal{C}$; on dit que *G opère à gauche dans E* si $T(G)$ opère à gauche dans $T(E)$ de façon que l'application $T(G) \times T(E) \to T(E)$ provienne d'un $\mathcal{C}$-morphisme de $G \times E$ dans E.

On suppose maintenant que *$\mathcal{C}$ est comme en* (0.4.3).

DÉFINITION. — Soit G un $\mathcal{C}$-groupe opérant à gauche dans un objet E de $\mathcal{C}$. Soient E' et E'' des objets de $\mathcal{C}$ tels que $T(E'') \subset T(E') \subset T(E)$. Soit $x \in T(E'')$; on dit que *E' est, en x, localement rétractile sur E'' par les opérations de G* s'il existe un voisinage ouvert $\tilde{V}$ de x dans $T'(E')$ et une application $s : \tilde{V} \to T(G)$ telle que :

(a) s soit *admissible*, i. e. provienne d'un morphisme de V dans G (V est l'objet induit par $\mathcal{C}$ sur $\tilde{V}$).

(b) $(s(x')).x' \in T(E'')$ pour tout $x' \in \tilde{V}$.

(c) $s(x') = e$ (élément neutre de G) pour tout $x' \in \tilde{V} \cap T(E'')$.

([5]) Un V-isomorphisme est un isomorphisme compatible avec le morphisme canonique $V \times E_x \to V$, et avec $p \circ i$, où i est le morphisme d'injection $U \to E$.

On utilise l'abréviation : *E' est G-l. r. sur E'' en x*. Dans le cas où $T(E'')$ se compose d'un seul point x, on dit simplement : *E' est G-l. r. sur x*; cela ne signifie pas autre chose ([6]) que l'existence d'une *section* admissible au-dessus d'un voisinage de x dans $T'(E')$ pour l'application

$$T(G)\ni g \to g.x \in T(E).$$

LEMME 1. — *Soit G un $\mathcal{C}$-groupe opérant (à gauche) dans un objet E de $\mathcal{C}$. Soient E', E'', E''' des objets de $\mathcal{C}$ tels que $T(E''')\subset T(E'')\subset T(E')\subset T(E)$. Soit $x\in T(E''')$. Si E' est G-l. r. sur E'' en x, et si E'' est G-l. r. sur E''' en x, alors E' est G-l. r. sur E''' en x.*

DÉMONSTRATION. — L'hypothèse fournit un voisinage $\tilde{V}$ de x dans $T'(E')$ et une application admissible $s' : \tilde{V}' \to T(G)$, ainsi qu'un voisinage $\tilde{V}''$ de x dans $T''(E'')$ et une application admissible $s'' : \tilde{V}'' \to T(G)$. L'application

$$\tilde{V}'\ni x' \to (s'(x')).x' \in T'(E'') \tag{1}$$

est admissible, donc continue; donc, si $\tilde{V}'''$ est un voisinage assez petit de x' dans $\tilde{V}'$, son image par (1) est contenue dans $\tilde{V}''$, ce qui permet de définir l'application

$$\tilde{V}'''\ni x' \to (s''(s'(x').x)).(s'(x')) \in T'''(G)$$

qui satisfait aux conditions voulues.

LEMME 2. — *Soient (E, B) un couple d'objets de $\mathcal{C}$ et f un morphisme : $E\to B$. Soit G un $\mathcal{C}$-groupe opérant à gauche dans E et dans B de façon compatible avec f, i. e. de façon qu'il y ait commutativité du diagramme*

$$\begin{array}{ccc} G\times E & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle \text{identité}\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ G\times B & \longrightarrow & B \end{array}$$

1° *Soient B', B'' des objets de $\mathcal{C}$ tels que $T(B'')\subset T(B')\subset T(B)$. On suppose qu'il existe des objets E', E'' de $\mathcal{C}$ tels que $T(E'')\subset T(E')\subset T(E)$, et que $T(E')$ [resp. $T(E'')$], soit l'image réciproque de $T(B')$ [resp. $T(B'')$], par $T(f)$. Soit $y\in T(B'')$; on note $\tilde{F}_y$ l'image réciproque de $\{y\}$ par $T(f)$. Alors, si B' est G-l. r. sur B'' en y, E' est G.-l. r. sur E'' en x, pour tout $x\in\tilde{F}_y$.*

2° *Soit $y\in T(B)$, et soit $\tilde{F}_y$ comme ci-dessus. Si E induit un objet noté F_y sur $\tilde{F}_y$, et si B est G-l. r. sur y [autrement dit si l'application*

$$T(G)\ni g\to g.y\in T(E)$$

([6]) Inutile de supposer $s(x)=e$: on peut toujours s'y ramener par translation.

a une section admissible au-dessus d'un voisinage de y dans $T'(B)$], *alors f est trivial au-dessus d'un voisinage de y dans $T'(B)$.* [*Donc, si ces propriétés ont lieu pour tout $y \in T(B)$, f est une $\mathcal{C}$-fibration localement triviale; en particulier l'image de $T(E)$ par $T(f)$ est ouverte et fermée dans $T(B)$.*]

DÉMONSTRATION.

1° L'hypothèse fournit un voisinage ouvert $\tilde{V}$ de y dans $T'(B')$ et une application admissible s de $\tilde{V}$ dans $T(G)$. Soit $\tilde{U}$ un voisinage ouvert de x dans $T'(E')$ qui soit contenu dans l'image réciproque de $\tilde{V}$ par $T(f)$, l'application $s \circ (T'(f))$ est définie sur $\tilde{U}$ et satisfait aux conditions voulues.

2° L'hypothèse fournit cette fois un voisinage ouvert $\tilde{V}$ de y dans $T'(B)$ et une application admissible s de $\tilde{V}$ dans $T(G)$ telle que

$$(s(y')).y' = y \qquad \text{pour} \quad y' \in \tilde{V}.$$

Soit $\tilde{U}$ l'image réciproque de $\tilde{V}$ par $T(f)$. L'application

$$\tilde{U} \ni x' \to (T(f).x', (s \circ T(f).x').x') \in \tilde{V} \times \tilde{F}_y$$

est admissible, et a une inverse admissible qui est

$$\tilde{V} \times \tilde{F}_y \ni (y', x) \to (s(y'))^{-1}.x \in \tilde{U}.$$

0.4.5. *Cas où le foncteur T est compatible avec les produits.* — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie vérifiant les conditions de (0.4.3), et telle en plus que *le foncteur T' de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{T}$ soit compatible avec les produits.* On peut alors identifier $\mathcal{C}$ à une *sous-catégorie avec produits* de $\mathcal{T}$, de sorte qu'on dit $x \in E$ au lieu de $x \in T(E)$ ou $x \in T'(E)$; $E' \subset E$ au lieu de $T'(E') \subset T'(E)$; on parle d' « applications continues de E dans F », etc. (Sans la condition de compatibilité de T' avec les produits, ces conditions conduiraient à une ambiguïté sur la notation $E \times F$.) Enfin, les propriétés suivantes sont immédiates : *tout $\mathcal{C}$-groupe est un groupe topologique, toute $\mathcal{C}$-catégorie localement triviale est une fibration topologique localement triviale; la locale rétractilité au sens de $\mathcal{C}$ entraîne la locale rétractilité topologique.*

CHAPITRE I.

VARIÉTÉS A BORD GÉNÉRALISÉES. ESPACES FONCTIONNELS.

1. Généralisation de la notion de variété différentiable.

1.1. Rappels : variétés différentiables, variétés différentiables à bord.

Soit r un entier $\geqq 1$, fini ou infini. La catégorie des variétés de classe C^r est définie comme suit : on prend comme « catégorie des modèles » celle dont les objets sont les ouverts des espaces numériques R^n (pour toutes les valeurs entières positives ou nulles de n) et dont les morphismes sont les applications de classe C^r de ces ouverts les uns dans les autres. A cette catégorie de modèles est associée une « catégorie locale », et, pour toute valeur de n, une sous-catégorie de celle-ci; cette sous-catégorie est par définition la catégorie des *variétés de dimension n, de classe C^r*; d'où, en donnant à n toute valeur entière positive ou nulle, *la catégorie des variétés de classe C^r*. Cette catégorie est munie naturellement d'un foncteur T' à valeurs dans la catégorie $\mathcal{T}$ des espaces topologiques, qui en fait une $\mathcal{T}$-catégorie [*cf.* (0.4.2)]; elle est munie de produits, et le foncteur T' est compatible avec ces produits et les produits sur $\mathcal{T}$ [*cf.* (0.1.2)].

La catégorie des *variétés à bord de classe C^r* est définie suivant le même schéma, mais en remplaçant l'espace R^n par la partie $\{ x_n \geqq 0 \}$ de R^n; la notion d'application de classe C^r d'un modèle dans un autre est celle qui sera précisée en (1.2.1). La catégorie des variétés à bord de classe C^r est une $\mathcal{T}$-catégorie, mais elle n'est pas munie de produits. (Le produit $[0, 1] \times [0,1]$, par exemple, n'est pas muni de façon naturelle d'une structure de variété à bord de classe C^r.)

1.2. Variétés à bord généralisées.

1.2.1. *La catégorie des modèles.* — Pour tout couple (n, q) d'entiers tels que $0 \leqq q \leqq n$, on note $R^n_{(q)}$ la partie de R^n définie par

$$\{ x_i \geqq 0 ; q < i \leqq n \}.$$

On a une notion évidente d'*intérieur* et de *bord* de $R^n_{(q)}$; de même pour tout ouvert de $R^n_{(q)}$.

Soit (n', q') un couple d'entiers tel que $0 \leqq q' \leqq n'$; soit U un ouvert de $R^n_{(q)}$; soit U' un ouvert de $R^{n'}_{(q')}$. Une application $f: U \to U'$ est dite de classe C^r si f peut être prolongée en une application de classe C^r d'un R^n-voisinage de U dans un $R^{n'}$-voisinage de U'; d'après Whitney [1], p. 69, il suffit pour cela que la restriction de f à l'intérieur (par rapport à R^n) de U soit de classe C^r, et que toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leqq r$ puissent être prolongées en des fonctions continues sur U.

La catégorie dont les objets sont les ouverts des $R^n_{(q)}$, et les morphismes les applications de classe C^r de ces ouverts les uns dans les autres, a les propriétés suivantes :

(a) C'est une $\mathcal{T}$-catégorie avec produits.

(b) Deux objets $U \subset R^n_{(q)}$ et $U' \subset R^{n'}_{(q')}$ ne peuvent être isomorphes que si $n = n'$ et $q = q'$.

1.2.2. *La catégorie $\mathcal{Q}^r$.* — A la catégorie de modèles (1.2.1) est associée une catégorie locale et pour toute valeur de n, une sous-catégorie de celle-ci; par définition, c'est la catégorie des *variétés à bord généralisées de dimension n, de classe C^r*; d'où, en donnant à n toute valeur entière positive ou nulle, la catégorie des *variétés à bord généralisées de classe* C^r. En fait, on se bornera toujours à considérer la sous-catégorie que forment les variétés *de type dénombrable*, on la note $\mathcal{O}^r$. On convient d'appeler simplement *r-variétés* ses objets (7). Soient E et E' deux r-variétés; l'ensemble des $\mathcal{O}^r$-morphismes de E dans E' se note $\mathrm{Hom}^r(E, E')$.

La catégorie $\mathcal{O}^r$ a des objets ponctuels qui sont des variétés de dimension zéro, on en choisit un une fois pour toutes, on le note O; on définit comme en (0.2.1) un foncteur de $\mathcal{O}^r$ dans la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles; on le note T^r; il vérifie la condition (i) de (0.3.3). La catégorie $\mathcal{O}^r$ est munie naturellement d'un foncteur T'^r à valeurs dans la catégorie $\mathcal{C}$ des espaces topologiques, le foncteur T'^r fait de $\mathcal{O}^r$ une *$\mathcal{C}$-catégorie* [*cf.* (0.4.2)]. Il résulte du (a) de (1.2.1) que $\mathcal{O}^r$ est munie de produits; le foncteur T'^r est compatible avec ces produits et les produits sur $\mathcal{C}$.

On suivra, sauf exception, les conventions habituelles [*cf.* (0.4.5)]. On parlera de « point d'une r-variété E » au lieu d' « élément de $T^r(E)$ »; on dira « application continue de E dans E' » au lieu de « application continue de $T'^r(E)$ dans $T'^r(E')$ », etc. Les $\mathcal{O}^r$-morphismes seront appelés : *applications r-différentiables*, et les $\mathcal{O}^r$-morphismes inversibles : *r-difféomorphismes*.

1.2.3. — Soit x un point d'une r-variété E de dimension n. D'après le (b) de (1.2.1), il existe un entier q (tel que $(0 \leqq q \leqq n)$ bien déterminé par la condition suivante : il existe une « carte locale d'origine x de E » dont la source soit $R^n_{(q)}$; q s'appelle l'*indice* de x. L'adhérence de toute composante connexe de l'ensemble des points d'indice q de E s'appelle une *face de dimension* q de E. La réunion de toutes les faces de dimension $\leqq q$ s'appelle le *q-squelette* de E. Pour $q' \leqq q$, le q'-squelette est un *fermé* du q-squelette. Le $(n-1)$-squelette de E s'appelle le *bord de E* et se note ∂E; $E - \partial E$ s'appelle l'*intérieur de E*.

1.2.4. — Soient r et r' deux entiers tels que $1 \leqq r' \leqq r$; il existe un foncteur naturel $T^{r'r}$ de $\mathcal{O}^r$ dans $\mathcal{O}^{r'}$; les foncteurs $T^{r'r}$ se composent naturellement entre eux et avec les foncteurs à valeurs dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ définis en (1.2.2). Soient E et E' deux objets de $\mathcal{C}^r$; on convient de noter simplement $\mathrm{Hom}^{r'}(E, E')$ l'ensemble $\mathrm{Hom}^{r'}(T^{r'r}(E), T^{r'r}(E'))$; les éléments de $\mathrm{Hom}^{r'}(E, E')$ sont appelés *applications r-différentiables de E dans E'*.

1.2.5. *Espace tangent.* — Soit F une r-variété de dimension n [au sens de (1.2.2)]. On peut appliquer à F le procédé classique à l'aide duquel on définit l'espace tangent à une variété sans bord (*cf.* STEENROD [1], p. 23). Soit $\widetilde{\mathcal{C}}(F)$ l'espace ainsi construit; c'est un espace fibré localement trivial, de base F, de fibre R^n, de groupe structural $GL(n)$. En plus, en tout point d'une face de dimension q de F, les matrices jacobiennes des changements

(7) On précise le cas échéant : r-variété sans bord, r-variété à bord.

de coordonnées locales appartiennent au sous-groupe de $GL(n)$ formé des matrices dont les opérations dans R^n laissent stables (à une permutation près) toutes les faces de dimension $(n-1)$ de $R^n_{(q)}$.

Soit $\tilde{p}$ la projection de $\tilde{\mathfrak{T}}(F)$ sur F; soit $x \in F$; soit ψ un difféomorphisme d'un ouvert U de $R^n_{(q)}$ sur un voisinage ouvert V de x dans F; ψ définit un difféomorphisme, noté ψ', de $U \times R^n$ sur $\tilde{p}^{-1}(V)$. On note y_i ($i = 1, \ldots, n$) les coordonnées d'un point y de R^n; soit W la partie de $U \times R^n$ formée des (y, y') tels que

$$\begin{cases} y = \psi^{-1}(x) \\ y' \geqq 0 \quad \text{pour tout } i > q \text{ tel que } y_i \geqq 0; \end{cases}$$

l'image de W par ψ' est une partie de $\tilde{p}^{-1}(\{x\})$ invariante par changement de coordonnées locales; on la note $\mathfrak{T}_x(F)$. *L'espace tangent* $\mathfrak{T}(F)$ à la variété F est par définition la réunion des $\mathfrak{T}_x(F)$; c'est une partie de $\tilde{\mathfrak{T}}(F)$, qui coïncide avec $\tilde{\mathfrak{T}}(F)$ dans le seul cas où F est sans bord.

Noter que $\mathfrak{T}_x(F)$ *est toujours une partie convexe de* $\tilde{\mathfrak{T}}_x(F)$.

L'espace $\mathfrak{T}_x(F)$ s'identifie canoniquement à l'espace des 1-jets de R_+ dans F [*cf.* EHRESMANN, [1]; *cf.* aussi II, (3.1)].

1.2.6. — C'est une conséquence triviale du même résultat relatif à R^n, que pour tout ouvert U de $R^n_{(q)}$ et tout compact $K \subset U$, il existe une fonction de classe $C^\infty : R^n_{(q)} \to [0, 1]$, égale à 1 sur K et à support compact contenu dans U. Les résultats relatifs à l'existence de partitions différentiables de l'unité subordonnées à un recouvrement ouvert (*cf.* par exemple DE RHAM, [1], chap. I. § 2) s'étendent donc immédiatement au cas d'une variété au sens de (1.2.2).

1.3. Sous-variétés. Plongements.

1.3.1. DÉFINITIONS.

Sous-modèles. — Soit $R^n_{(q)}$ le modèle défini en (1.2.1). On définit des sous-modèles de $R^n_{(q)}$ en adjoignant aux équations et inéquations qui définissent $R^n_{(q)}$ un certain nombre d'équations et inéquations du même type. D'une façon précise, considérons les relations

$$(1) \qquad x_i = 0 \qquad \text{pour} \begin{cases} q + p_1 < i \leqq n & \text{avec} \quad 0 \leqq p_1 \leqq n - q, \\ p_2 < i \leqq q & \text{»} \quad 0 \leqq p_2 \leqq q, \end{cases}$$

$$(2) \qquad x_i \geqq 0 \qquad \text{pour} \qquad p_3 < i \leqq p_2 \qquad \text{»} \quad 0 \leqq p_3 \leqq p_2.$$

Posons $p_1 + p_2 = m$. Pour tout ouvert U de $R^n_{(q)}$, l'intersection de U avec la partie de $R^n_{(q)}$ définie par (1) et (2) s'appelle un *sous-modèle de dimension m de U*.

Sous-variétés. — Soit F une variété de classe C^r, de dimension n [au sens de 1.2.2)]. Soit E une partie de F. S'il existe un entier r' tel que $1 \leqq r' \leqq r$, et un entier m tel que $0 \leqq m \leqq n$, tels que pour tout $x \in E$, il existe une « carte locale de classe $C^{r'}$ de F au voisinage de x » (i. e. $U \subset R^n_{(q)}$ et un r'-difféomorphisme ψ de U sur un voisinage de x dans F) telle que $\psi^{-1}(E \cap V)$ s'identifie à un sous-modèle de dimension m de U, alors la structure de r'-variété sous-jacente à la structure de r-variété de F *induit* [8] une structure de r'-variété sur E; E, muni de cette structure, s'appelle une *r-sous-variété de dimension m de F.*

Exemples de sous-variétés. — Tout ouvert d'une r-variété de dimension n en est une r-sous-variété de dimension n. Le bord d'une r-variété à bord en est une r-sous-variété de codimension 1. Si F est une variété difféomorphe au produit d'un certain nombre de variétés à bord, toute face de F est une sous-variété de F. Par contre, il existe des variétés dont certaines faces *ne sont pas* des sous-variétés; par exemple, soit F l'adhérence de la partie bornée de R^2 limitée par une boucle de lemniscate; F a une seule face de dimension 1, qui est le bord tout entier de F; ce n'est pas une sous-variété, en raison de l'existence d'un point singulier.

Plongements. — Soient F une r-variété de dimension n, E une r'-variété de dimension m (avec $1 \leqq r' \leqq r$, $0 \leqq m \leqq n$); soit $f \in \mathrm{Hom}^{r'}(E, F)$. On dit que f est un *r'-plongement* de E dans F si l'image E' de E par f est l'ensemble sous-jacent d'une r'-sous-variété de F, et si f induit un *r'-difféomorphisme* de E sur E', muni de sa structure de r'-sous-variété de F.

On note $\mathrm{Pl}^{r'}(E, F)$ l'ensemble des r'-plongements de E dans F.

1.3.2. *Quelques propriétés immédiates.*

(1) Tout $f \in \mathrm{Pl}^{r'}(E, F)$ est *de rang m* en tout point de E, et induit un *homéomorphisme* de E sur son image pour les structures topologiques sous-jacentes. Dans le cas où F est une variété sans bord, ces conditions caractérisent les éléments de $\mathrm{Pl}^{r'}(E, F)$ parmi ceux de $\mathrm{Hom}^{r'}(E, F)$. Un système de conditions caractéristique dans le cas général est le suivant : f induit un homéomorphisme de E sur son image, et f est un *plongement local* (c'est-à-dire : tout $x \in E$ possède un voisinage V dans E tel que la restriction de f à V soit un plongement).

(2) Tout r'-difféomorphisme de F est un r'-plongement de F dans F. Le composé de deux r'-plongements est un r'-plongement; en particulier,

---

(8) Pour la définition et les propriétés générales des structures induites, *cf.* (0.4.1). Il faut notamment vérifier que ***E* est de type dénombrable;** il en est bien ainsi (d'après l'hypothèse analogue relative à F) lorsque E est *ouvert* et lorsque E est *fermé*; or dans le cas général, E est un sous-espace localement compact de l'espace séparé F; donc d'après Bourbaki [1], § 8, n° 16, il existe un ouvert de F dans lequel E soit fermé; d'où le résultat.

pour toute r'-sous-variété H de E, la restriction à H de tout r'-plongement de E dans F est un r'-plongement de H dans F.

(3) Soient E, F, H, trois r-variétés. Soit $f \in \mathrm{Pl}^{r'}(E, F)$ et $h \in \mathrm{Hom}^{r'}(H, F)$. Si l'image de H par h est contenue dans l'image de E par f, alors il existe un élément unique h' de $\mathrm{Hom}^{r'}(H, E)$. tel que $h = f \circ h'$. Si, en plus, $h \in \mathrm{Pl}^{r'}(H, F)$, et si l'image de H par h est dans l'intérieur relatif [*cf.* II, (2.1.1)] de celle de E par f, alors $h' \in \mathrm{Pl}^{r'}(H, E)$.

(4) Si une sous-variété *connexe* E d'une variété F a un point *intérieur* contenu dans une face de F, alors E tout entière est contenue dans cette face. Il en résulte que la plus petite face de F contenant x est la même pour tout point x de l'*intérieur* de E; cette face est la plus petite face de F contenant E; on dit que c'est la face *support* de E dans F.

(5) Soit E une sous-variété d'une variété F. Il existe [*cf.* note ([8])] une sous-variété *ouverte* U de F contenant E et telle que E s'identifie à une sous-variété *fermée* de U.

2. Voisinages prismatiques du bord d'une variété.

Dans tout ce paragraphe, F désigne une variété au sens de (1.2.2), de dimension n; pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on note F_k le k-squelette de F [*cf.* 1.2.3)]. On suppose F de classe C^r, avec $r \geq 1$; toutes les applications différentiables considérées dans ce paragraphe sont de classe C^r, on sous-entend constamment l'entier r : « plongement » signifie « r-plongement », etc.

2.1. Définition des voisinages prismatiques du bord de F; t-affinités.

2.1.1. *Définition d'une k-carte.* — Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Une *k-carte* de F est, par définition, un couple (V, ψ), où V est un *modèle* du type (1.2.1), de dimension k (c'est-à-dire un ouvert d'un certain $R^k_{(q)}$, avec $0 \leq q \leq k$); et où ψ est un *plongement* : $V \times [0, 1[^{n-k} \to F$ qui envoie le bord de $V \times [0, 1[^{n-k}$ dans le bord de F.

Pour simplifier, on sous-entendra souvent la donnée de V, et l'on parlera de « la k-carte ψ ». L'image d'une k-carte ψ (c'est-à-dire l'image de $V \times [0, 1[^{n-k}$ par ψ) est un *ouvert* de F. On appelle *âme* d'une k-carte ψ l'image de $V \times \{0\}$ par ψ; *on se bornera dans toute la suite à considérer des k-cartes dont l'âme est contenue dans une k-face* (condition qui est toujours remplie lorsque V est connexe).

Isomorphisme de deux k-cartes. — Soient (V, ψ) et (V', ψ') deux k-cartes. On dit que ψ et ψ' sont *isomorphes* s'il existe un difféomorphisme f de V' sur V et une permutation σ de $[0, 1[^{n-k}$ tels que

$$\psi'.(x, y) = \psi.(f(x), \sigma(y)) \qquad \text{pour tout } (x, y) \in V' \times [0, 1[^{n-k}.$$

Deux cartes isomorphes ont en particulier même image et même âme.

2.1.2. *Définition d'une k'-sous-carte d'une k-carte.* — Soit (V, ψ) une k-carte; soit k' tel que $k \leqq k' \leqq n$. Soit H_α une $(k'-k)$-face de $[0, 1[^{n-k}$, et soit V' un ouvert de $V \times H_\alpha$; V' s'identifie canoniquement à un ouvert de $R^{k'}$. Soit $H_\alpha^\star$ le supplémentaire de H_α dans $[0, 1[^{n-k}$; il existe un isomorphisme (canoniquement défini à une permutation de $[0, 1[^{n-k'}$ près) de $H_\alpha^\star$ sur $[0, 1[^{n-k'}$: on *choisit* un tel isomorphisme, ce qui définit canoniquement la suite d'applications

$$V' \times [0, 1[^{n-k'} \to V \times H_\alpha \times [0, 1[^{n-k'} \to V \times H_\alpha \times H_\alpha^\star \to V \times [0, 1[^{n-k} \xrightarrow{\psi} F.$$

Soit $\psi' : V' \times [0, 1[^{n-k'} \to F$ la composée de ces applications; on dit que (V', ψ') est une *k'-sous-carte de ψ associée à V';* toutes les autres k'-sous-cartes de ψ associées à V' se déduisent de ψ' par toutes les permutations de $[0, 1[^{n-k'}$. L'expression « ψ' est une sous-carte de ψ » signifie : il existe $k' \geqq k$ et il existe V' tels que ψ' soit une k'-sous-carte de ψ associée à V'.

Propriétés des sous-cartes.

1° L'image d'une k'-sous-carte d'une k-carte ψ est contenue dans l'image de ψ.

2° Pour que deux sous-cartes (V', ψ'), (V'', ψ'') d'une même carte soient isomorphes, il faut et il suffit que $V' = V''$.

3° Soit ψ une k-carte. Soient ψ' une k'-sous-carte de ψ et ψ'' une k''-sous-carte de ψ'; alors ψ'' est isomorphe à une k''-sous-carte de ψ. Inversement, soient ψ' une k'-sous-carte de ψ et ψ'' une k''-sous-carte de ψ si l'image de ψ'' est contenue dans celle de ψ', et si $k'' \geqq k'$, alors ψ'' est isomorphe à une k''-sous-carte de ψ'.

4° Soit (V, ψ) une carte de F; soit (V', ψ') une k'-sous-carte de (V, ψ) : V' est un ouvert d'une $(k'-k)$-face de $[0, 1[^{n-k}$, qu'on note $H_{\alpha'}$; soient de même (V'', ψ''), k'', $H_{\alpha''}$. On note $H_{\alpha'} + H_{\alpha''} = H_{\alpha'''}$; soit k''' l'entier tel que $k''' - k = \dim H_{\alpha'''}$. Soit V''' l'intersection des images réciproques respectives de V' et V'' par les applications canoniques $V \times H_{\alpha'''} \to V \times H_\alpha$, et $V \times H_{\alpha'''} \to V \times H_{\alpha''}$; V''' est un ouvert de $V \times H_{\alpha'''}$; soit ψ''' l'une quelconque des k'''-sous-cartes de ψ associées à V'''; on dit que ψ''' est *une intersection* de ψ' et ψ''. L'image de ψ''' est l'intersection des images de ψ' et ψ''; il résulte donc de 3° que ψ''' est isomorphe à une k'''-sous-carte de ψ' (et à une k'''-sous-carte de ψ''). Toute sous-carte de ψ qui est isomorphe à la fois à une sous-carte de ψ' et à une sous-carte de ψ'' est isomorphe à une sous-carte de ψ'''.

Cas particulier. — Si $H_{\alpha'} \subset H_{\alpha''}$, alors toute intersection ψ''' de ψ' et ψ'' est une k''-carte; c'est le cas notamment lorsque ψ' est une k-sous-carte de la k-carte ψ.

2.1.3. *Systèmes compatibles de cartes.*

Définitions. — Soient ψ une k-carte, ψ' une k'-carte et ψ'' une k''-carte. Soit x un point de l'intersection des images de ψ' et ψ'' ; on dit que ψ' *et* ψ'' *sont* ψ-*compatibles en* x [ou encore que *le couple* (ψ', ψ'') *est* ψ-*compatible en* x] s'il existe une k'-sous-carte φ' de ψ' et une k''-sous-carte φ'' de ψ'', telles que les images de φ' et φ'' contiennent x, et que φ' et φ'' soient toutes deux isomorphes à des sous-cartes de ψ.

Soit $\mathcal{S}$ une famille de cartes; soient ψ' et ψ'' deux cartes; on dit que ψ' et ψ'' sont $\mathcal{S}$-*compatibles* si pour tout point x de l'intersection des images de ψ' et ψ'', il existe une carte ψ de $\mathcal{S}$ telle que ψ' et ψ'' soient ψ-compatibles en x. On dit que $\mathcal{S}$ est un *système compatible de cartes* si tout couple (ψ', ψ'') de cartes de $\mathcal{S}$ est $\mathcal{S}$-compatible.

Propriétés.

1° Soient ψ une k-carte, ψ' une k'-carte, ψ'' une k''-carte. Si (ψ', ψ'') est ψ-compatible en un point au moins, alors $k \leqq k'$, et $k \leqq k''$. Il en résulte que, si $\mathcal{S}$ est un système compatible, il en est de même (pour tout entier $k \leqq n$) du sous-système $\mathcal{S}_k$ de $\mathcal{S}$ défini comme suit : une k'-carte de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}_k$ pourvu que $k' \leqq k$.

2° Soit $\mathcal{S}$ un système compatible de cartes. Soient φ et φ' deux sous-cartes de cartes de $\mathcal{S}$; alors φ et φ' sont $\mathcal{S}$-compatibles [c'est une conséquence du cas particulier de la propriété 4° de (2.1.2)]. Il en résulte que *tout système obtenu en adjoignant à* $\mathcal{S}$ *certaines de ses sous-cartes, est encore un système compatible.*

3° Soient ψ' et ψ'' deux sous-cartes d'une même carte ψ; soit ψ''' une intersection de ψ' et ψ'' [*cf.* (2.1.2), propriété 4°]. Soient φ_1 et φ_2 deux cartes, et soit x un point de l'intersection des images de φ_1 et φ_2. Si φ_1 et φ_2 sont ψ'-compatibles et ψ''-compatibles en x, elles sont ψ'''-compatibles en x.

2.1.4. *Systèmes de cartes équivalents. Voisinages prismatiques ouverts.*

Définitions. — Soit $\mathcal{S}$ une famille de cartes; on appelle *image* (resp. *âme*) de $\mathcal{S}$ la réunion des images (resp. des âmes) de $\mathcal{S}$.

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux familles de cartes; « $\mathcal{S}'$ *plus fin que* $\mathcal{S}$ » signifie : $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ ont même image et pour tout $\psi' \in \mathcal{S}'$, il existe $\psi \in \mathcal{S}$ tel que ψ' soit isomorphe à une sous-carte de ψ.

La relation « plus fin » est une relation d'ordre. En plus on a le :

Lemme. — *Soient* $\mathcal{S}'$ *et* $\mathcal{S}''$ *deux systèmes compatibles de cartes plus fins qu'un système compatible* $\mathcal{S}$*; il existe un système compatible de cartes plus fin que* $\mathcal{S}'$ *et que* $\mathcal{S}''$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{S}'''$ le système de toutes les sous-cartes de $\mathcal{S}$ qui sont isomorphes à la fois à une sous-carte de $\mathcal{S}'$ et à une sous-carte de $\mathcal{S}''$; soient φ_1 et φ_2 deux cartes de $\mathcal{S}'''$: d'après la propriété 2° de (2.1.3), φ_1 et φ_2

sont à la fois $\mathcal{S}'$-compatibles et $\mathcal{S}''$-compatibles; donc, d'après la propriété 3° de (2.1.3), φ_1 et φ_2 sont $\mathcal{S}'''$-compatibles; donc $\mathcal{S}'''$ est compatible.

Il résulte immédiatement de ce lemme que la relation suivante entre systèmes *compatibles* $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ est une *relation d'équivalence* : « il existe un système compatible de cartes plus fin que $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{S}'$ ».

Définitions. — — Si deux systèmes *compatibles* de cartes vérifient la relation ci-dessus, on dit qu'ils sont *équivalents*.

Soit $\mathcal{S}$ un système compatible de cartes; la classe d'équivalence T de $\mathcal{S}$ pour la relation ci-dessus s'appelle le *voisinage prismatique ouvert* défini par $\mathcal{S}$; l'image de $\mathcal{S}$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{S}$ dans sa classe d'équivalence; elle est appelée *image* de T.

D'autre part, on dit que $\mathcal{S}$ est *saturé* si toute sous-carte de toute carte de $\mathcal{S}$ est isomorphe à une carte de $\mathcal{S}$.

Quel que soit le système compatible $\mathcal{S}$, le système $\tilde{\mathcal{S}}$ de toutes les sous-cartes de $\mathcal{S}$ est compatible [*cf.* (2.1.3), propriété 2°] et saturé [*cf.* (2.1.2), propriété 3°]; il est en plus équivalent à $\mathcal{S}$. Donc *tout voisinage prismatique ouvert T peut être défini par un système compatible saturé* $\tilde{\mathcal{S}}$. L'âme A de $\tilde{\mathcal{S}}$ est la plus grande des âmes de tous les systèmes équivalents à $\mathcal{S}$: c'est l'intersection de l'image de T avec le bord de F; A est appelé *âme* de T, et l'on dit que T est un *voisinage prismatique ouvert de son âme*.

Exemple. — A est le bord de F; T est alors appelé *voisinage prismatique ouvert du bord*.

2.1.5. *t-affinités d'un voisinage prismatique ouvert.*

Définitions. — Soit $t \in]0, 1]$; soit $x = (x_i)$ un point d'un cube; on note tx le point (tx_i). Soit (V, ψ) une k-carte. On appelle *t-affine* de (V, ψ) et l'on note $(V, t\psi)$ (ou simplement $t\psi$), la k-carte

$$V \times [0, 1[^{n-k} \ni (y, z) \to \psi.(y, tz) \in F.$$

Propriétés.

1° *Soit φ une sous-carte d'une carte ψ; pour tout $t \in]0, 1]$*, on a

$$(\text{image de } \varphi) \cap (\text{image de } t\psi) \subset (\text{image de } t\varphi).$$

2° *Soit (V, ψ) une k-carte; soient ψ' et ψ'' deux sous-cartes de ψ; il existe une sous-carte φ de ψ telle que (pour tout $t \in]0, 1]$), $t\psi'$ et $t\psi''$ soient $t\varphi$-compatibles en tout point x commun à leurs images.*

En effet, supposons que ψ' soit une k'-sous-carte de ψ associée à $V' \subset V \times H_{\alpha'}$; soient de même k'' et $V'' \subset V \times H_{\alpha''}$; notons $V \times (H_{\alpha'} \cap H_{\alpha''}) = W$, et soit φ une sous-carte de ψ associée à W; φ est une h-carte, avec $h \leq \inf(k', k'')$; comme en plus l'image de $t\varphi$ contient l'intersection des images de $t\psi'$ et $t\psi''$.

il en résulte [*cf.* (2.1.2), propriété 3°] que $t\psi'$ et $t\psi''$ sont isomorphes à des sous-cartes de $t\varphi$; soit χ' une intersection de $t\varphi$ et $t\varphi'$, et soit de même χ''; d'après le cas particulier de la propriété 4° de (2.1.2), χ' est une k'-sous-carte de $t\psi'$; de même χ'' est une k''-sous-carte de $t\psi''$, d'où le résultat.

3° *Soit $\mathcal{S}$ un système compatible saturé de cartes* [*cf.* (2.1.4)]; *pour tout $t \in]0, 1]$ le système $t\mathcal{S}$ des t-affines de toutes les cartes de $\mathcal{S}$, est un système compatible ayant même âme que $\mathcal{S}$.*

Démonstration. — Soient ψ' une k'-carte de $\mathcal{S}$, et ψ'' une k''-carte de $\mathcal{S}$; soit x un point commun aux images de $t\psi'$ et $t\psi''$; *a fortiori*, x est commun aux images de ψ' et ψ''; il existe donc une carte ψ de $\mathcal{S}$, une k'-sous-carte φ' de ψ' et une k''-sous-carte φ'' de ψ'' telles que x soit commun aux images de φ' et φ'', et que φ' et φ'' soient isomorphes à des sous-cartes de ψ; d'après 1° ci-dessus :

$$x \in (\text{image de } t\varphi') \cap (\text{image de } t\varphi'').$$

D'après 2° ci-dessus, il en résulte qu'il existe une sous-carte φ de ψ telle que $t\varphi'$ et $t\varphi''$ soient $t\varphi$-compatibles en x; $\mathcal{S}$ étant saturé, φ est isomorphe à une carte de $\mathcal{S}$, donc $t\varphi$ à une carte de $t\mathcal{S}$. Donc $t\psi'$ et $t\psi''$ sont $t\mathcal{S}$-compatibles. Il est immédiat que $t\mathcal{S}$ a même âme que $\mathcal{S}$.

4° *Soient $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ deux systèmes compatibles saturés de cartes; si $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ sont équivalents* [*cf.* (2.1.4)], *il en est de même* (*pour tout $t \in]0, 1]$*) *de $t\mathcal{S}'$ et $t\mathcal{S}''$.*

Les propriétés 3° et 4° justifient la

Définition. — Soit $\mathcal{S}$ un système compatible saturé de cartes, d'âme A; soit T le voisinage prismatique ouvert de A défini par $\mathcal{S}$ [*cf.* (2.1.4)]; soit $t \in]0, 1]$; le voisinage prismatique ouvert de A, défini par $t\mathcal{S}$, se note tT, et s'appelle le *t-affine de T.*

2.1.6. *k-cartes et voisinages prismatiques fermés.*

Notations. — Les « k-cartes » [définies en (2.1.1)] seront dans la suite appelées « k-cartes ouvertes », par opposition aux « k-cartes fermées » définies ci-dessous. La dénomination de « k-carte » sera utilisée dans la suite pour désigner aussi bien les k-cartes ouvertes que les k-cartes fermées. La dénomination « système de cartes » signifiera : « système de cartes ouvertes ou système de cartes fermées ».

Définition. — Soient k et V comme en (2.1.1); soit φ une application $V \times [0, 1]^{n-k} \to F$; appelons *intérieur* de φ et notons $\mathring{\varphi}$ la restriction de φ à $V \times [0, 1[^{n-k}$. On dit que (V, φ) est une *k-carte fermée* (sous-entendu : *normalement* fermée) s'il existe une k-carte ouverte $(V, \varphi^\star)$ et $t \in]0, 1[$ tels qu'on ait

$$\mathring{\varphi} = t\varphi^\star \qquad [\text{au sens de } (2.1.5)].$$

Soit $\mathcal{S} = (\varphi_i)$ un système de cartes fermées; appelons *intérieur* de $\mathcal{S}$ et notons $\mathring{\mathcal{S}}$ le système $(\mathring{\varphi}_i)$; $\mathcal{S}$ est dit *compatible* s'il existe un système compatible $\mathcal{S}^*$ de cartes ouvertes et $t \in]0, 1[$ tels que $\mathring{\mathcal{S}} = t\mathcal{S}^*$ [*cf.* (2.1.5)]. $\mathcal{S}$ est dit *saturé* si $\mathring{\mathcal{S}}$ est saturé; l'*âme* de $\mathcal{S}$ est par définition celle de $\mathring{\mathcal{S}}$.

Deux systèmes compatibles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ de cartes fermées sont dits *équivalents* s'il existe deux systèmes compatibles $\mathcal{S}^*$ et $\mathcal{S}'^*$ de cartes ouvertes et $t \in]0, 1[$ tels que $\mathcal{S}^*$ et $\mathcal{S}'^*$ sont équivalents, $\mathring{\mathcal{S}} = t\mathcal{S}^*$, et $\mathring{\mathcal{S}}' = t\mathcal{S}'^*$; $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ ont alors en particulier même image.

Soit $\mathcal{S}$ un système compatible saturé de cartes fermées, d'âme A; la classe d'équivalence de $\mathcal{S}$ pour la relation ci-dessus est par définition le *voisinage prismatique fermé de A* défini par $\mathcal{S}$.

2.1.7. *Systèmes homogènes de cartes.*

Définition. — Soit k un entier tel que $0 \leqq k < n$. Un système uniquement constitué de k-cartes est dit *k-homogène.*

Tout système de cartes $\mathcal{S}$, k-homogène et compatible, a les propriétés suivantes :

1° Soient (V_i, ψ_i) et (V_j, ψ_j) deux cartes de $\mathcal{S}$, A_i et A_j leurs âmes respectives; $A_i \cap A_j$ est ouvert dans A_i et dans A_j; les k-cartes d'âme $A_i \cap A_j$, canoniquement définies par restriction de ψ_i et ψ_j respectivement, sont isomorphes.

2° Soit A' un ouvert de l'âme A de $\mathcal{S}$; $\mathcal{S}$ définit canoniquement (par restriction de chaque carte) un système k-homogène compatible d'âme A'; ce système est appelé *restriction de $\mathcal{S}$ à A'* et noté $\mathcal{S} \mid A'$.

3° Soit λ une fonction $A \to]0, 1]$, de classe C^r. Posons pour tout i :

$$\lambda\psi_i.(x, t) = \psi_i.(x, (\lambda \circ \psi.(x, 0))t).$$

Le système $\lambda\mathcal{S} = \{\lambda\psi_i\}$ est k-homogène et compatible.

2.1.8. *Systèmes de cartes adaptées à un système de cartes d'une sous-variété.*

Définition 1. — Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux systèmes compatibles de cartes ouvertes (ou deux systèmes compatibles de cartes fermées); on dit que *$\mathcal{S}'$ est adapté à $\mathcal{S}$* (ou que *$\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont adaptés l'un à l'autre*) s'il existe deux systèmes compatibles $\tilde{\mathcal{S}}$ et $\tilde{\mathcal{S}}'$ respectivement équivalents à $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ tels que le système $\tilde{\mathcal{S}} \cup \tilde{\mathcal{S}}'$ soit compatible.

Cette relation est réflexive et symétrique, mais non transitive.

Il résulte immédiatement du lemme 2.1.4 que *si deux systèmes compatibles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont adaptés l'un à l'autre, et ont même image, ils sont équivalents.*

Comme la relation « $\mathcal{S}'$ est adapté à $\mathcal{S}$ » ne dépend que des voisinages prismatiques définis par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, on a immédiatement une notion de « système adapté à un voisinage prismatique » et de « voisinages prismatiques adaptés l'un à l'autre ».

DÉFINITION 2. — Soit E une sous-variété de F, de dimension $n' \leqq n$. Soit (V, ψ) une k-carte *ouverte* de F; soit L la k-face de F qui contient l'âme de ψ; on dit que (V, ψ) est *adapté à E* si, pour tout point x commun à E et à l'âme de ψ, k' désignant la dimension locale de $E \cap L$ en x, il existe un voisinage W de x dans L et un isomorphisme de $[0, 1[^{n'-k'}$ sur une face de $[0, 1[^{n-k}$, tels que la composée des deux applications

$$(\psi^{-1}(W \cap E)) \times [0, 1[^{n'-k'} \to V \times [0, 1[^{n-k} \xrightarrow{\psi} F$$

ait pour image l'intersection de E et de l'image de ψ.

Supposons maintenant que (V, ψ) soit une k-carte *fermée* de F; on dit alors que (V, ψ) est *adapté à E* s'il existe une k-carte ouverte (V, ψ^*) adaptée à E et $t \in]0, 1[$ tels que $\mathring{\psi} = t\psi^*$.

Les notions de *système de cartes de F adapté à E* et de *voisinage prismatique* (d'une partie du bord de F) *adapté à E* découlent aussitôt des précédentes. Si une carte (resp. un système de cartes, resp. un voisinage prismatique) sont adaptés à E, ils induisent une carte (resp. un système de cartes, resp. un voisinage prismatique) sur E.

DÉFINITION 3. — Soit E comme ci-dessus; supposons en plus donné un système $\mathcal{S}$ de cartes de E (ou un voisinage prismatique T d'une partie du bord de E dans E). Une carte de F (resp. un système de cartes de F, resp. un voisinage prismatique d'une partie du bord de F) sont dits *adaptés à $\mathcal{S}$* (ou T) s'ils sont adaptés à E et si la carte (resp. le système de cartes, resp. le voisinage prismatique) qu'ils induisent sur E sont adaptés à $\mathcal{S}$ (ou T).

2.2. Théorème d'existence.

2.2.1. THÉORÈME 1. — *Soit r un entier $\geqq 1$. Soit F une variété de classe C^r, de dimension n. Soit E une r-sous-variété fermée de F et soit T un voisinage prismatique fermé du bord de E dans E. Il existe un voisinage prismatique fermé T' du bord de F dans F, adapté à T.*

Le théorème 1 sera démontré en (2.2.3) à l'aide du lemme 2 de (2.2.2). Du théorème 1 résultent immédiatement :

COROLLAIRE 1. — *Soient r, F et E comme ci-dessus. Il existe un voisinage prismatique fermé du bord de F, adapté à E.*

COROLLAIRE 2. — *Soient r, F et E comme ci-dessus. Soit M une sous-variété fermée de E. Il existe un voisinage prismatique fermé T du bord de F, adapté à E, et tel que le voisinage prismatique induit par T sur E soit adapté à M. (T est alors adapté à M.)*

2.2.2. NOTATIONS. — Les notations r, n, F, E, T sont celles du théorème 1. Soit k un entier tel que $0 \leq k < n$, et soit L une k-face de F. On désigne par ∂L l'intersection de L (qui n'est pas nécessairement une variété) avec le $(k-1)$-squelette de F. Soient A et A'' deux ouverts de L tel que $\overline{A''} \subset A$; soit $\mathcal{S}$ un système k-homogène compatible de cartes fermées, d'âme A, adapté à T.

LEMME 1. — *Soit B'' un ouvert de $(L - \partial L)$, assez petit (en un sens indépendant de A et A'').*

1° *Il existe un système $\mathcal{S}'$ de cartes fermées, k-homogène compatible, d'âme $A'' \cup B''$, tel que les restrictions de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ à A'' soient des systèmes équivalents.*

2° *On peut, en plus, choisir $\mathcal{S}'$ adapté à T.*

LEMME 2. — *Il existe un système $\mathcal{S}''$, k-homogène compatible, de cartes fermées, d'âme $A'' \cup (L - \partial L)$, adapté à T, et tel que les restrictions de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}''$ à A'' soient des systèmes équivalents.*

Démonstration du lemme 1.

1° Appelons *convexe* toute k-carte (V, φ) telle que V soit convexe. Il existe un système localement fini de k-cartes convexes dont les âmes recouvrent tout $(L - \partial L)$; on suppose B'' assez petit pour que $\overline{B''}$ soit contenu dans l'âme B d'une telle carte (V, φ).

On va d'abord montrer ceci : soit W la partie de V qui correspond (par φ) à $A \cap B$; *le voisinage prismatique de $A \cap B$ défini par restriction de $\mathcal{S}$ peut être défini par une seule k-carte $\psi : W \times [0, 1]^{n-k} \to F$, ayant en plus mêmes relations d'incidence* [*cf.* II, (1.1.1)] *que la restriction de φ à $W \times [0, 1]^{n-k}$*. En remplaçant éventuellement $\mathcal{S}$ par un système plus fin [*cf.* (2.1.4)] on peut supposer que $\mathcal{S} | A \cap B$ est défini par une famille $(\psi'_i : W'_i \times [0, 1]^{n-k} \to F)$ de cartes de $\mathcal{S}$, telle que W'_i soit connexe pour tout i; on note A'_i l'âme de ψ'_i, et W_i la partie de V qui correspond par φ à A'_i $\left(\text{de sorte que } \bigcup_i W_i = W\right)$. Soit $\psi_i : W_i \times [0, 1]^{n-k} \to F$ la k-carte isomorphe à ψ'_i bien définie par les deux conditions

(1) $$\psi_i | (W_i \times \{0\}) = \varphi | (W_i \times \{0\});$$

(2) il existe $x \in W_i$ tel que $\psi_i | (\{x\} \times [0, 1]^{n-k})$ et $\varphi | (\{x\} \times [0, 1]^{n-k})$ aient mêmes relations d'incidence.

On a supposé W'_i connexe, donc W_i, qui lui est difféomorphe, est aussi connexe; par conséquent la propriété de (2) est vraie *pour tout $x \in W_i$*. Il en résulte, d'après la propriété 1° de (2.1.7), que, pour tout couple (i, j) d'indices, ψ_i et ψ_j coïncident sur $(W_i \cap W_j) \times [0, 1]^{n-k}$; par conséquent la famille (ψ_i) définit une k-carte $\psi : W \times [0, 1]^{n-k} \to F$, d'âme $A \cap B$.

adaptée à $\mathcal{S}$; en plus ψ et $\varphi \mid (W \times [0, 1])^{n-k}$ ont mêmes relations d'incidence.

Ceci établi, soit B' un ouvert de L tel que $\overline{B''} \subset B'$ et $\overline{B'} \subset B$; et soit A' un ouvert de L tel que $\overline{A''} \subset A'$ et $A' \subset A$. Soient λ et μ deux fonctions de classe $C^r : L \to [0, 1]$ telles que, respectivement

(3) $\lambda(x) > 0$ pour tout $x \in L$; $\lambda = 1$ au voisinage de A''; et l'image du système $\lambda \mathcal{S} \mid (A - \overline{A'}) \cap B'$ est contenue dans l'image de φ [*cf.* (**2.1.7**) pour la notation $\lambda\mathcal{S}$].

(4) $\mu = 0$ au voisinage de $\overline{A'}$ et $\mu = 1$ au voisinage de $\overline{B' \cap \complement A}$.

On pose alors, pour tout $y \in [0, 1]^{n-k}$:

$$
\begin{array}{l}
(5_a) \\ \\ (5_b) \\ (5_c)
\end{array}
\quad
\chi.(x, y) = \left\{
\begin{array}{lll}
(1 - \mu(x)) \times \psi.(x, \lambda(x) y) + \mu(x) \times \varphi.(x.y) & & \\
 & \text{pour} & \varphi.(x, 0) \in B' \cap (A - \overline{A'}) \\
\varphi.(x, y) & \text{»} & \varphi.(x, 0) \in \overline{B' \cap \complement A}, \\
\psi.(x, \lambda(x) y) & \text{»} & \varphi.(x, 0) \in \overline{A'} \cap B';
\end{array}
\right.
$$

la structure linéaire considérée en (5_a) étant la structure linéaire transportée par φ de celle de $V \times [0, 1]^{n-k}$; la formule (5_a) a un sens en vertu de (3) d'une part, et de la convexité de V d'autre part. L'application χ est définie et de classe C^r sur $V' \times [0, 1]^{n-k}$, où V' est la partie de V qui correspond par φ à B'.

Soit $x \in V'$, on va montrer maintenant que *la restriction de χ à un voisinage assez petit de $(x, 0)$ dans $V' \times [0, 1]^{n-k}$ est un plongement.* Le seul cas non trivial est celui où $\varphi.(x, 0) \in B' \cap (A - \overline{A'})$, de sorte que, au voisinage de $(x, 0)$, χ soit donné par la formule (5_a). Comme ψ et $\varphi \mid W$ ont mêmes relations d'incidence, la matrice jacobienne de $\varphi^{-1} \circ \psi$ en $(x, 0)$ est une matrice dont les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont tous nuls, et dont les coefficients diagonaux sont $(1, \ldots, 1, \alpha_{k+1}, \ldots \alpha_n)$, où $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ sont strictement positifs. L'espace des matrices de ce type est *convexe*; il en résulte que l'application χ est de rang maximal en $(x, 0)$, et donc sur tout un voisinage de $(x, 0)$. Mais, en plus, (toujours parce que ψ et $\varphi \mid W$ ont mêmes relations d'incidence), χ envoie le bord de $W \times [0, 1[^{n-k}$ dans le bord de F. Il résulte donc du théorème d'invariance des ouverts pour les variétés *topologiques* à bord, que l'image par χ d'un ouvert assez petit de $V' \times [0, 1]^{n-k}$ contenant x est un ouvert de F. La restriction de χ à un voisinage assez petit de $(x, 0)$ est donc un plongement.

On peut donc appliquer le lemme II, (**3.3.1**); d'après ce lemme ([9]), il existe une fonction $\nu : B' \to]0, 1]$, de classe C^r, telle que $\nu\chi$ soit un

---

([9]) En fait, on n'utilise ici ce lemme que dans un cas particulier où sa démonstration se simplifie; en effet, d'après le théorème d'invariance des ouverts, le seul point à établir ici est que, pour ν assez petit, l'application $\nu\chi$ est *injective*.

plongement; on peut en plus supposer que ν est égal à 1 sur $\overline{A'' \cap B'}$ (si ce n'est pas réalisé, on s'y ramène immédiatement); A'' étant ouvert dans L, l'intersection de l'image de $\mathcal{S} \mid A''$ et de L se réduit à A''; donc il suffit que ν soit assez petit sur $B'' \cap \complement A'$ pour que $\nu \mathring{\chi} \mid B''$ soit adapté à $\mathring{\mathcal{S}} \mid A''$ (10).

Si l'on effectue la construction ci-dessus en remplaçant $\mathcal{S}$ par un système $\mathcal{S}^\star$ tel que (pour un certain $t \in]0, 1[$) on ait $\mathcal{S} = t\mathcal{S}^\star$, on aboutit à une carte $\nu^\star \chi^\star$, telle que $t\nu^\star \chi^\star \mid B''$ soit adapté à $\mathcal{S} \mid A''$; le système obtenu en adjoignant $t\nu^\star \chi^\star \mid B''$ à $\mathcal{S} \mid A''$ remplit toutes les conditions voulues pour $\mathcal{S}'$.

2° Puisque E est fermé dans F, $E \cap L$ est fermé dans L, et par conséquent $E \cap (L - \partial L)$ est fermé dans $(L - \partial L)$; on peut donc trouver un système localement fini de k-cartes convexes de F *adaptées à E* dont les âmes recouvrent $(L - \partial L)$. Si B'' est assez petit pour que son adhérence soit contenue dans l'âme d'une telle carte, le système $\mathcal{S}'$ construit par le procédé du 1° est *adapté à E* (11).

Mais on veut en plus que $\mathcal{S}'$ soit adapté à T. Puisque $\mathcal{S}$ est adapté à T, il existe [*cf.* (2.1.6)] $\mathcal{S}^\star$, $T^\star$ et $t \in]0, 1[$ tels que $\mathcal{S} = t\mathcal{S}^\star$, $T = tT^\star$, et que $\mathcal{S}^\star$ soit adapté à $T^\star$. Or toute carte convexe $\overline{\omega}^\star$ de E est induite par une carte convexe de F (12); ont peut donc supposer $\overline{B''}$ contenu dans l'âme B d'une carte $(V, \varphi^\star)$ convexe et induisant sur E une carte convexe adaptée à $T^\star$. On applique à $\mathcal{S}^\star$ et à $(V, \varphi^\star)$ la construction du 1°; on aboutit à une certaine carte $\nu^\star \chi^\star$, d'âme B', vérifiant les conditions suivantes :

(a) $\nu^\star \chi^\star$ est compatible avec $\mathcal{S}^\star \mid A''$.

(b) $E \cap (\text{image de } \nu^\star \chi^\star) = \text{image de } \nu^\star \chi^\star \mid E \cap B'$.

(c) Si $\overline{\omega}^\star$ désigne une carte de E, d'âme $E \cap B'$ adaptée à $T^\star$, il existe une fonction $\xi : E \cap B' \rightarrow]0, 1]$, égale à 1 au voisinage de $E \cap B' \cap A''$, telle que $\nu^\star \chi^\star \mid E \cap B'$ soit isomorphe à $\xi \overline{\omega}^\star$.

Soit alors $t' \in]t, 1[$; la carte $t' \nu^\star \chi^\star \mid E \cap B'$ est isomorphe à $t' \xi \overline{\omega}^\star$; l'affinité de « rapport » $1/\xi$ qui fait passer de $t' \nu^\star \chi^\star$ à $t' \overline{\omega}^\star$ peut être obtenue par une isotopie γ de l'image de $\overline{\omega}^\star$; cette isotopie peut se prolonger en une isotopie γ' de F, induisant l'identité sur l'image de $\mathcal{S}^\star \mid A''$; γ' transforme $\nu^\star \chi^\star$ en une carte $\gamma'(\nu^\star \chi^\star)$ telle que $t[\gamma'(\nu^\star \chi^\star)]$ soit adapté à $\mathcal{S} \mid A''$ et à T.

Démonstration du lemme 2. — Soit (B_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite localement finie d'ouverts de L telle que chaque B_i soit assez petit pour

(10) Notations de (2.1.6).

(11) Ce résultat serait suffisant si l'on n'avait en vue que la démonstration du corollaire 1 du théorème 1 (2.2.1); on notera que ce corollaire est suffisant pour établir le corollaire 1 du théorème 3 (3.3.2), et par conséquent l'existence de tubes normaux à une sous-variété [*cf.* (3.4)].

(12) C'est immédiat en considérant un tube normal à l'image de $\overline{\omega}^\star$; *cf.* note (11).

qu'on puisse lui appliquer le lemme 1 (B_i jouant le rôle de B''), et que

$$\left(\bigcup_{i=1,2,\ldots} B_i\right) \cup A' = (L - \partial L) \cup A'.$$

Soit $(B_{i,t})$ ($i = 1, 2, \ldots; t \in I$) une famille d'ouverts de L telle que

$$\left\{\begin{array}{l} B_{0,0} = A', \qquad B_{0,1} = A; \\ B_{i,1} = B_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots; \\ \bigcup_{i=0,1,\ldots} B_{i,0} = (L - \partial L) \cup A'; \\ \overline{B}_{i,t'} \subset B_{i,t} \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{et pour} \quad 0 \leqq t' < t \leqq 1. \end{array}\right.$$

On pose

$$\bigcup_{0 \leqq i' \leqq i} B_{i',t} = C_{i,t} \qquad \text{pour} \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Le système $\mathcal{S}$ donné a pour âme $A = B_{0,1} = C_{0,1}$. Le 1° du lemme 1 permet de définir de proche en proche, pour tout i, un système compatible $\mathcal{S}_i$ d'âme $C_{i;1/2^i}$ de façon que $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}_{i+1}$ induisent sur $C_{i;1/2^{i+1}}$ des systèmes équivalents. Soit $\mathcal{S}'_i$ le système induit par $\mathcal{S}_i$ sur $C_{i;0}$; le système $\mathcal{S}'$ réunion de tous les $\mathcal{S}'_i$ est compatible, son âme est $(L - \partial L) \cup A'$, et il induit sur $A' = B_{0,0} = C_{0,0}$ un système équivalent à $\mathcal{S} \mid A'$. Il suffit à chaque fois de définir $\mathcal{S}_i$ à l'aide du 2° du lemme 1 pour que $\mathcal{S}'$ soit en plus adapté à T.

2.2.3. *Démonstration du théorème* 1. — Soient $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ des nombres tels que

$$0 < t_{n-1} < \ldots < t_0 = 1.$$

On suppose en plus t_{n-1} assez voisin de 1 pour qu'il existe un voisinage prismatique fermé T^* du bord de E tel que $T = t_{n-1} T^*$.

Il est immédiat qu'il existe un voisinage prismatique fermé du 0-squelette de F adapté à T^*. Il suffit donc de montrer ceci : soit k un entier tel que $0 < k < n$; la notation F_k désignant le k-squelette de F, soit $\mathcal{S}$ un système compatible de cartes fermées d'âme F_{k-1}, adapté à $t_{k-1} T^*$; il existe un système compatible $\mathcal{S}''$ de cartes fermées d'âme F_k, adapté à $t_k T^*$. On procède comme suit : on suppose $\mathcal{S}$ saturé [*cf.* (2.1.4)]; on note $\mathcal{S}_k$ (resp. $\mathcal{S}_{k-1}$) le sous-système de $\mathcal{S}$ formé des k'-cartes telles que $k' \leqq k$ (resp. $k' \leqq k - 1$); on pose $t_k/t_{k-1} = t$; *les systèmes* $t\mathcal{S}_k$ et $t\mathcal{S}_{k-1}$ *sont des systèmes compatibles* [en effet, on a par exemple : $t\mathcal{S}_k = (t\mathcal{S})_k$; $t\mathcal{S}$ est un système compatible d'après la propriété 3° de (2.1.5); donc $(t\mathcal{S})_k$ est un système compatible d'après la propriété 1° de (2.1.3)]. On a

$$\begin{aligned} (\text{image de } t\mathcal{S}_{k-1}) \cap F_{k-1} &= F_{k-1}, \\ \overline{(\text{image de } t\mathcal{S}_{k-1}) \cap F_k} &\subset (\text{image de } \mathcal{S}_k) \cap F_k, \\ (\text{image de } t\mathcal{S}_k) \cap F_k &= (\text{image de } \mathcal{S}_k) \cap F_k. \end{aligned}$$

Soit L une k-face de F; on pose

$$(\text{image de } \mathcal{S}_k) \cap L = A,$$
$$(\text{image de } t\mathcal{S}_{k-1}) \cap L = A''',$$

A et A''' sont des ouverts de L; on a $\partial L \subset A'''$ et $\bar{A}''' \subset A$. Le système induit par $t\mathcal{S}_k$ sur $A - \bar{A}'''$ est *k-homogène*; en plus il est *compatible*. [Soient en effet (V, ψ) et (V', ψ') deux cartes de ce système, soient $(x, y) \in V \times [0, 1[^{n-k}$ et $(x', y') \in V' \times [0, 1[^{n-k}$ tels que $\psi.(x, y) = \psi'.(x', y')$; le système $t\mathcal{S}_k$ étant compatible, il existe une k'-carte φ de $t\mathcal{S}_k$ telle que ψ et ψ' soient φ-compatibles au point $\psi.(x, y)$; ceci entraîne que le point $\psi.(x, 0)$ est dans l'image de φ; comme d'autre part $\psi.(x, 0) \in A - \bar{A}'''$, cela entraîne $k' = k$; donc ψ et ψ' sont par exemple ψ-compatibles au point $\psi.(x, y)$.]

Soient alors A' et A'' des ouverts de L tels que $\bar{A}''' \subset A''$, $\bar{A}'' \subset A'$ et $\bar{A}' \subset A$; appliquons le lemme 2 de (2.2.2) avec $A - \bar{A}'''$ et $A' - \bar{A}''$ dans les rôles respectifs de A et A'; le système $t\mathcal{S}_n \mid A' - \bar{A}''$ est adapté à $t_k T^\star$; il existe donc d'après le lemme cité un système $\mathcal{S}'_L$, d'âme $L - \bar{A}''$, adapté à $t_k T^\star$, et tel que $\mathcal{S}'_L$ et $t\mathcal{S}_k$ induisent sur $A' - A''$ des systèmes équivalents. Soit U_L un voisinage ouvert (dans F) de $(L - A') \cup [\text{image de } t_k T^\star \mid E \cap (L - \bar{A}'')]$; il existe une fonction $\lambda : L - \bar{A}''' \to]0, 1]$, de classe C^r, égale à 1 sur $E \cap (L - \bar{A}''')$ ainsi qu'au voisinage de $\bar{A}'' - \bar{A}'''$, telle que l'image de la restriction à $L - \bar{A}'$ du système $\lambda\mathcal{S}'_L$ soit contenue dans U_L; le système d'âme L défini par $t\mathcal{S}_k$ sur un voisinage assez petit de A'', et $\lambda\mathcal{S}'_L$ sur $L - \bar{A}''$, est un système compatible et adapté à $t_k T^\star$, qu'on note $\mathcal{S}''_L$.

On fait la construction ci-dessus pour toutes les k-faces de F, en choisissant les U_L de façon que leur intersection soit vide; on prend pour $\mathcal{S}''$ le système réunion de tous les $\mathcal{S}''_L$.

3. Applications du théorème 1 : prolongement d'une variété ; plongement dans un espace euclidien ; métriques riemanniennes adaptées ; tubes normaux à une sous-variété.

3.1. Prolongement d'une variété.

3.1.1. Définition. — Soit F une r-variété. Le couple formé par une r-variété $F^\star$ et une application $f : F \to F^\star$, s'appelle un *prolongement* de F si f est un *r-plongement* de F dans l'*intérieur* de $F^\star$ et si l'image de f est une sous-variété *fermée* de $F^\star$.

Proposition 1. — *Toute r-variété F admet un prolongement* $(F^\star, f)$ *tel que* $F^\star$ *soit difféomorphe à* F.

La démonstration est faite en (3.1.3); (3.1.2) donne quelques préliminaires.

3.1.2. Soit ρ un difféomorphisme de $[0, 1[$ sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right[$ qui induise l'identité sur $\left[\frac{2}{3}, 1\right[$. Pour tout entier $p \geqq 0$, on définit un plongement ρ_p de $[0, 1[^p$ dans lui-même en posant

$$\rho_p.(x_1, \ldots, x_p) = (\rho.x_1, \ldots, \rho.x_p).$$

Soit maintenant F une r-variété de dimension n, et soit (V, ψ) une k-carte ouverte de F [*cf.* (2.1.6)]; on définit un plongement ρ_ψ de l'image de ψ dans elle-même, en posant

$$\rho_\psi = \psi \circ ((\text{identité de } V) \times \rho_{n-k}) \circ \psi^{-1}.$$

On a le

LEMME. — *Soit H_α une $(k'-k)$-face de $[0, 1[^{n-k}$ et soit U un ouvert de $V \times H_\alpha$; soit (U, φ) une k'-sous-carte de (V, ψ) associée à U* [*cf.* (2.1.2)]. *Si $k' = k$, ou si U est contenu dans $V \times \left(H_\alpha - \frac{2}{3} H_\alpha\right)$, alors ρ_φ et ρ_ψ coïncident sur l'image de φ.*

DÉMONSTRATION. — Bornons-nous au seul cas non trivial, celui où $k' > k$. Soient H_α^* le supplémentaire canonique de H_α; i l'injection de U dans $V \times H_\alpha$; χ l'isomorphisme de $[0, 1[^{n-k'}$ sur H_α^* qui détermine φ; j l'isomorphisme canonique de $H_\alpha \times H_\alpha^*$ sur $[0, 1[^{n-k}$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
U \times [0, 1[^{n-k'} & \xrightarrow{i \times \chi} & V \times H_\alpha \times H_\alpha^* & \xrightarrow{\text{identité} \times j} & V \times [0, 1[^{n-k} \\
\uparrow {\scriptstyle \text{identité} \times \rho_{n-k'}} & & & & \uparrow {\scriptstyle \text{identité} \times \rho_{n-k}} \\
U \times [0, 1[^{n-k'} & \xrightarrow{i \times \chi} & V \times H_\alpha \times H_\alpha^* & \xrightarrow{\text{identité} \times j} & V \times [0, 1[^{n-k}
\end{array}$$

est commutatif puisque ρ induit l'identité sur $\left[\frac{2}{3}, 1\right[$. D'où le lemme.

3.1.3. — *Démonstration de la proposition* 1. — Soit T un voisinage prismatique ouvert du bord de F [*cf.* (2.1.4)]; et soit $\mathcal{S}$ un système compatible de cartes définissant T et ayant la propriété suivante : pour tout entier k tel que $0 < k \leqq n$, le sous-système $\mathcal{S}_k$ de $\mathcal{S}$ (formé des k'-cartes de $\mathcal{S}$ telles que $0 \leqq k' \leqq k$) est tel que

$$(1) \qquad (\text{image de } \mathcal{S}_k) \cap \left(\text{image de } \frac{2}{3}\, \mathcal{S}_{k-1}\right) = \emptyset.$$

(Un tel système $\mathcal{S}$ se construit facilement en grimpant sur le squelette de F).

Soient ψ' une k'-carte et ψ'' une k''-carte de $\mathcal{S}$; soit x un point commun aux images de ψ' et ψ''; il existe [*cf.* (2.1.3)] une carte ψ de $\mathcal{S}$, et une k'-carte φ' dont l'image contienne x et qui soit isomorphe à la fois à une sous-carte de ψ et à une sous-carte de ψ'. Soient ρ_ψ, $\rho_{\psi'}$, $\rho_{\psi''}$, ρ_φ les plongements définis en (3.1.2); d'après le lemme 3.1.2, ρ_φ et $\rho_{\psi'}$ coïncident en x; d'après (1) ci-dessus et le lemme 3.1.2, ρ_φ et ρ_ψ coïncident en x; donc ρ_ψ et $\rho_{\psi'}$ coïncident en x. De même ρ_ψ et $\rho_{\psi''}$ coïncident en x; donc finalement $\rho_{\psi'}$ et $\rho_{\psi''}$ coïncident en x. Ainsi $\rho_{\psi'}$ et $\rho_{\psi''}$ coïncident en tout point commun à l'intersection de leurs images; on définit donc un *plongement* f de F dans l'intérieur de lui-même de la façon suivante : f est l'identité en dehors de l'image de $\mathcal{S}$, et pour toute carte ψ de $\mathcal{S}$, la restriction de f à l'image de ψ coïncide avec ρ_ψ. L'image de f est fermée dans F, de sorte que, si l'on pose $F^\star = F$, $(F^\star, f)$ est un prolongement de F.

3.2. Régularisation d'une structure C^r (pour $r < +\infty$) et plongement d'une variété dans un espace euclidien.

3.2.1. *Rappel : le théorème de plongement de Whitney.* — Le lemme ci-dessous apporte au théorème de plongement de Whitney (*cf.* WHITNEY [3]) un léger complément qu'on utilisera en (3.2.2) pour étendre le théorème de Whitney au cas des variétés au sens de (1.2.2).

LEMME. — *Soit r un entier ≥ 1. Soient F une r-variété sans bord de dimension n, E une r-sous-variété sans bord de F, U un ouvert de F, U' un ouvert de F tel que $\overline{U'} \subset U$. On suppose donnée sur U une structure C^∞ telle que $E \cap U$ soit une sous-variété C^∞ de U.*

Alors il existe un r-plongement propre $f : F \to R^{2n+1}$ tel que la restriction de f à U' soit de classe C^∞, et que les images de F et de E par f soient des sous-variétés de classe C^∞ de R^{2n+1}.

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du lemme, il existe sur F une structure différentiable de classe C^∞, compatible avec la structure C^r sur F et avec la structure C^∞ sur U', et pour laquelle E soit une sous-variété de classe C^∞.*

Le corollaire est une conséquence immédiate du lemme.

Démonstration du lemme.

(a) Le théorème de plongement de Whitney affirme qu'il existe un r-plongement propre f' de F dans R^{2n+1} tel que l'image F' de F par f' soit une sous-variété de classe C^∞ de R^{2n+1}. A l'aide des procédés classiques de régularisation, la restriction de f' à U peut être approchée arbitrairement près au sens de la topologie $\mathcal{C}^r$ (*cf.* 4.3) par une application h' de classe C^∞ de U dans F', et il résulte du théorème 5 ([13]) [*cf.* II, (2.2.1)] que pour h' assez voisin de $f' | U$, il existe un difféomorphisme f'' de F sur F' qui coïncide avec h' sur U.

(b) Munissons E d'une structure C^∞ compatible avec celle de $E \cap U$ [il résulte immédiatement du (a) qu'une telle structure existe]; E, muni de cette structure, sera noté E'. Soit U'' un ouvert de F tel que $\overline{U'} \subset U''$ et que $\overline{U''}\subset U$. La restriction de f'' à $E-(E\cap\overline{U'})$ peut être approchée arbitrairement près au sens $\mathcal{C}^r$ par une application h'' de classe C^∞ de $E-(E\cap\overline{U'})$ dans F', qui coïncide avec f'' sur $E\cap U''$. D'après le théorème 5 ([13]), si h'' est assez voisin de $f''\,|\,(E-(E\cap\overline{U'}))$ il existe un r-difféomorphisme g de F', induisant l'identité sur $f'(U')$, tel que

$$g\circ(f''\,|\,(E-(E\cap\overline{U'})))=h''.$$

Il suffit alors de poser

$$g\circ f''=f.$$

3.2.2. Théorème 2. — *Soit r un entier $\geqq 1$. Soient F une r-variété et E une r-sous-variété de F. Il existe sur F une structure différentiable de classe C^∞, compatible avec la structure C^r, et pour laquelle E soit une sous-variété de classe C^∞.*

Remarque. — Le théorème 2 justifie la *convention de notations* suivante qu'on utilisera dans la suite : au lieu de « variété de classe C^∞ », « sous-variété de classe C^∞ », on dira simplement : « *variété* », « *sous-variété* ».

Démonstration du théorème 2. — D'après la propriété (5) de (1.3.2), il suffit de faire la démonstration dans chacun des deux cas : E fermé, E ouvert. Or le cas ou E est ouvert se ramène immédiatement au cas où E est vide. On se bornera donc au cas où *E est fermé.*

Soit T un voisinage prismatique ouvert de ∂F dans F, adapté à E; et soit $\mathcal{S}$ un système compatible de cartes définissant T. On suppose $\mathcal{S}$ saturé [*cf.* (2.1.4)]. Pour tout entier k tel que $0\leqq k<n$, on note $\mathcal{S}_k$ le sous-système de $\mathcal{S}$, formé des k'-cartes de $\mathcal{S}$ telles que $0\leqq k'\leqq k$. On va montrer par récurrence sur k : il existe une structure $\mathcal{D}_k$, de classe C^∞, sur l'image de $\frac{1}{2^k}\mathcal{S}_k$, compatible avec la structure C^r, et telle que

$$E\cap\left(\text{image de }\frac{1}{2^k}\mathcal{S}_k\right)\text{ soit une sous-variété de classe }C^\infty\text{ pour }\mathcal{D}_k.$$

C'est clair pour $k=0$; supposons que ce soit démontré pour l'entier $k-1$. Soit L une k-face de F; on pose

$$\left(\text{image de }\frac{1}{2^{k-1}}\mathcal{S}_{k-1}\right)\cap L=A,$$

$$\left(\text{image de }\frac{1}{2^{k}}\mathcal{S}_{k-1}\right)\cap L=A'.$$

D'après le corollaire du lemme 3.2.1 [appliqué avec $(L-\partial L)$, $E\cap(L-\partial L)$, $A\cap(L-\partial L)$ et $A'\cap(L-\partial L)$ dans les rôles respectifs

---

([13]) On n'utilise ici le théorème 5 que dans le cas particulier des variétés sans bord, cas dont la démonstration directe n'utilise pas le présent lemme ni ses conséquences.

de F, E, U et U'] il existe une structure $\mathcal{O}_L$, de classe C^∞, sur $(L - \partial L)$, compatible avec la structure C^r, compatible sur $A' \cap (L - \partial L)$ avec la structure $\mathcal{O}_{k-1}$, et telle que $E \cap (L - \partial L)$ soit une sous-variété de classe C^∞ pour $\mathcal{O}_L$. On prolonge la structure $\mathcal{O}_L$ à l'image de $\frac{1}{2^k}\mathcal{S}_k \mid (L - \partial L)$ de la façon suivante : soit une famille $(\varphi_i : U_i \rightarrow A_i)$ de cartes de $L - \partial L$ définissant la structure $\mathcal{O}_L$; on suppose les A_i assez petits pour qu'il existe, pour tout i, une k-carte $\Psi_i : V_i \times [0, 1[^{n-1} \rightarrow F$, de $\frac{1}{2^k}\mathcal{S}_k$, d'âme A_i : soit

$$\Psi'_i : U_i \times [0, 1[^{n-k} \rightarrow F$$

la k-carte, isomorphe à Ψ_i, définie par

$$\Psi'_i.(x, y) = \Psi_i.(x', y),$$

où x' est défini par $\Psi_i.(x', 0) = \varphi_i.x'$. La famille (Ψ'_i) définit sur l'image W de $\frac{1}{2^k}\mathcal{S}_k \mid (L - \partial L)$ une structure C^∞ qu'on note $\mathcal{O}_W$; $\mathcal{O}_W$ est compatible avec $\mathcal{O}_L$ sur $(L - \partial L)$ et avec $\mathcal{O}_{k-1}$ sur l'intersection de W avec l'image de $\frac{1}{2^k}\mathcal{S}_{k-1} \mid \partial L$; et puisque $\mathcal{S}_k$ est adapté à E [*cf.* (2.1.8)], $E \cap W$ est de classe C^∞ pour $\mathcal{O}_W$. On fait cette construction pour toutes les k-faces de F; soient L et L' deux telles faces, on a

$$W \cap W' \subset \text{image}\left(\frac{1}{2^k}\mathcal{S}_{k-1} \mid \partial L \cap \partial L'\right),$$

de sorte que $\mathcal{O}_W$ et $\mathcal{O}_{W'}$ coïncident sur $W \cap W'$ avec la structure induite par $\mathcal{O}_{k-1}$. D'où, sur la réunion des W relatifs à toutes les k-faces L, une structure C^∞ compatible avec la restriction de $\mathcal{O}_{k-1}$ à l'image de $\frac{1}{2^k}\mathcal{S}_{k-1}$; d'où finalement, une tructure C^∞ sur l'image $\frac{1}{2^k}\mathcal{S}_k$, structure qui a toutes les propriétés voulues pour $\mathcal{O}_k$.

3.2.3. Corollaire du théorème 2. — *Soit r un entier ≥ 1. Soient F une r-variété de dimension n, et E une r-sous-variété de F. Il existe un r-plongement propre $f : F \rightarrow R^{2n+1}$ tel que les images de F et de E par f soient des sous-variétés de classe C^∞ de R^{2n+1}.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{O}$ une structure C^∞ sur F, fournie par le théorème 2, telle que E soit une sous-variéte de classe C^∞ pour $\mathcal{O}$, Soit (F^*, f') un prolongement pour la variété F munie de la structure $\mathcal{O}$, prolongement fourni par la proposition 1 [*cf.* (3.1.1)]. Soit f'' un plongement propre de classe C^∞ de l'intérieur de F dans R^{2n+1}; le plongement $f'' \circ f'$ a les propriétés voulues.

3.2.4. — Une autre application du théorème 2 est la démonstration *pour tout entier* $r \geqq 1$ de la :

Proposition 2. — *Soient F une r-variété de dimension n, K un compact de F, V un voisinage de K dans F. Il existe une r-sous-variété compacte E, de dimension n, de F, telle que $E \subset V$, et que K soit contenu dans l'intérieur (topologique) de E.*

Démonstration. — Grâce au théorème 2, on peut se borner au cas $r = \infty$. Soit φ une fonction de classe C^∞ : $F \to [0, 1]$ égale à 1 sur K, nulle sur $F - V$. D'après un théorème de Sard (*cf.* Sard [1]) qui se généralise immédiatement au cas des r-variétés au sens de (1.2.2), l'ensemble $\mathcal{R}$ des points de $[0, 1]$ qui sont des valeurs régulières pour φ et pour les restrictions de φ à toutes les faces de dimension $\geqq 1$ de F, est dense dans $[0, 1]$. Soit t un point de $\mathcal{R}$, tel en plus que φ ne prenne la valeur t en aucun sommet de F; alors $\varphi^{-1}([t, 1])$ est une sous-variété de F qui satisfait à toutes les conditions voulues.

3.3. Métriques riemanniennes adaptées.

3.3.1. Notations. — F désigne une variété de classe C^∞, de dimension n; ∂F est le bord de F; T est un voisinage prismatique *fermé* de ∂F dans F; E est une sous-variété de F et $\mathcal{M}$ est une métrique riemannienne de classe C^∞ sur F.

Définition 1. — On dit que $\mathcal{M}$ est *adaptée à T* si, pour toute k-carte ψ : $V \times [0, 1]^{n-k} \to F$, compatible avec T, la métrique riemannienne induite par $\mathcal{M}$ sur l'image de ψ est l'image par ψ d'une métrique riemannienne sur $V \times [0, 1]^{n-k}$, produit d'une métrique riemannienne sur V par la métrique *euclidienne* sur $[0, 1]^{n-k}$.

S'il existe un voisinage prismatique fermé de ∂F dans F auquel $\mathcal{M}$ soit adapté, on dit que $\mathcal{M}$ est *adaptée au bord de F*.

Définition 2. — Si, pour toute face L de F telle que $E \not\subset L$, E et L sont orthogonaux en chacun de leurs points communs, on dit que $\mathcal{M}$ est *adaptée à E*.

Une propriété immédiate. — Si $\mathcal{M}$ est adaptée à T, et si T est adapté à E [*cf.* (2.1.8)], alors $\mathcal{M}$ est adaptée à E, et la métrique induite par $\mathcal{M}$ sur E est adaptée au voisinage prismatique induit par T sur E.

3.3.2. Théorème 3. — *Soient F une variété de classe C^∞ et T un voisinage prismatique fermé du bord de F; il existe sur F une métrique riemannienne $\mathcal{M}$, de classe C^∞, adaptée à T.*

Le théorème 3 sera démontré en (3.3.3). En voici deux corollaires :

COROLLAIRE 1. — *Soit F comme ci-dessus, et soit E une sous-variété fermée de F. Il existe sur F une métrique riemannienne $\mathcal{M}$ de classe C^∞, adaptée au bord de F et à E.*

Démonstration du corollaire 1. — D'après le corollaire 1 du théorème 1 [*cf.* (2.2.1)], il existe un voisinage prismatique fermé du bord de F dans F, adapté à E; d'après le théorème 3, il existe $\mathcal{M}$ adaptée à T; $\mathcal{M}$ est alors adaptée à ∂F et à E.

COROLLAIRE 2. — *Soient E et F comme au corollaire* 1; *soit M une sous-variété fermée de E. Il existe sur F une métrique riemannienne $\mathcal{M}$, adaptée au bord de F et à E, qui induise sur E une métrique adaptée au bord de E et à M.*

Démonstration du corollaire 2. — Soit T un voisinage prismatique fermé du bord de F, fourni par le corollaire 2 du théorème 1; soit $\mathcal{M}$ adaptée à T; $\mathcal{M}$ est alors adaptée au bord de F et à E; T induit sur E un voisinage prismatique T' du bord, adapté à M; la métrique $\mathcal{M}'$ induite par $\mathcal{M}$ sur E est adaptée à T', donc à M (*cf.* propriété 3.3.1).

3.3.3. *Démonstration du théorème* 3. — Soit n la dimension de F; soient $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ des nombres tels que $0 < t_{n-1} < \ldots < t_0 = 1$.

Soit $\mathcal{S}$ un système compatible saturé définissant T; on suppose t_{n-1} assez petit pour qu'il existe un système $\mathcal{S}^\star$ tel que $\mathcal{S} = t_{n-1}\mathcal{S}^\star$; pour tout entier k tel que $0 \leqq k < n$, on note $\mathcal{S}_k^\star$ le sous-système de $\mathcal{S}^\star$ formé des k'-cartes telles que $0 \leqq k' \leqq k$. On va construire, pour tout k (tel que $0 \leqq k < n$), une métrique riemannienne $\mathcal{M}_k$, définie sur l'image de $t_k\mathcal{S}_k^\star$, et ayant la propriété suivante : pour toute carte $\varphi^\star : V \times [0, 1]^{n-k} \to F$ de $\mathcal{S}_k^\star$, la métrique riemannienne induite par $\mathcal{M}_k$ sur l'image de $t_k\varphi^\star$ est l'image par $t_k\varphi^\star$ du produit d'une métrique riemannienne sur V par la métrique homothétique dans le rapport t_k/t_{n-1} de la métrique euclidienne sur $[0, 1]^{n-k}$. Une fois obtenue la métrique $\mathcal{M}_{n-1}$, on définit comme suit sur F une métrique $\mathcal{M}$ adaptée à $\mathcal{S}$: sur l'image de $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$ coïncide avec $\mathcal{M}_{n-1}$; sur l'intérieur $(F - \partial F)$ de F, $\mathcal{M}$ coïncide avec un prolongement de la restriction de $\mathcal{M}_{n-1}$ à $(F - \partial F) \cap$ (image de $\mathcal{S}$), l'existence d'un tel prolongement étant assurée par le théorème classique de prolongement d'une métrique riemannienne (*cf.* STEENROD, [1], p. 55 et 58). Comme l'existence d'une métrique $\mathcal{M}_0$ est triviale, on est ramené à ceci : la métrique $\mathcal{M}_{k-1}$ étant donnée (pour un certain entier k tel que $0 < k < n$), construire la métrique $\mathcal{M}_k$.

Soit L une k-face de F; par le procédé utilisé ci-dessus pour définir $\mathcal{M}$, on définit sur L une métrique $\mathcal{M}_L$ qui coïncide avec $\mathcal{M}_{k-1}$ sur $L \cap$ (image de $t_{k-1}\mathcal{S}_{k-1}^\star$). Pour toute carte $\varphi^\star : V \times [0, 1]^{n-k}$ de $\mathcal{S}_k^\star | L$, on munit $V \times [0, 1]^{n-k}$ de la métrique riemannienne produit des deux métriques suivantes : sur V, la métrique image réciproque de $\mathcal{M}_L$ par l'application $\{x \to \varphi^\star.(x, 0)\}$; sur $[0, 1]^{n-k}$, la métrique homothétique dans le rapport t_k/t_{n-1} de la métrique euclidienne; puis on munit l'image de $t_k\varphi^*$ de la métrique image (par $t_k\varphi^*$) de la précédente. On définit ainsi, sur l'image W de $t_k\mathcal{S}_k^* | L$ une métrique $\mathcal{M}_W$ qui coïncide avec $\mathcal{M}_{k-1}$ sur $W \cap$ (image de $t_{k-1}\mathcal{S}_{k-1}^*$). Soit (L_i) la famille des k-faces de F; en opérant comme ci-dessus on obtient pour tout i une métrique $\mathcal{M}_{W_i}$; on définit $\mathcal{M}_k$ par la famille $(\mathcal{M}_{W_i})$ d'une part, et d'autre part, par la restriction de $\mathcal{M}_{k-1}$ à l'intersection des images de $t_{k-1}\mathcal{S}_{k-1}^*$ et $t_k\mathcal{S}_k^*$.

3.3.4. *Propriétés des petites géodésiques d'une métrique adaptée.* — Soit F une variété (de classe C^∞); soit $\mathcal{M}$ une métrique riemannienne (de classe C^∞) adaptée au bord de F [*cf.* (3.3.1), définition 1]. De la définition, il résulte immédiatement :

(a) toute face de F est une sous-variété totalement géodésique ([14]) pour $\mathcal{M}$;

(b) deux faces distinctes quelconques de F sont orthogonales en chacun de leurs points communs.

Grâce au (a) et à la convexité locale des modèles 1.2.1, on peut généraliser au cas des variétés un résultat classique dans le cas des variétés sans bord (*cf.* par exemple DE RHAM, [1], p. 135) :

PROPOSITION 3. — *Soit F une variété riemannienne, de classe C^∞, dont la métrique $\mathcal{M}$ est supposée adaptée à ∂F. Soit λ une fonction continue strictement positive définie sur F; on note W'_λ le sous-espace de $\mathcal{T}(F)$ formé des vecteurs tangents x' qui satisfont à la condition suivante : si x_0 désigne l'origine de x', alors la longueur de x' (pour la métrique définie par prolongement de $\mathcal{M}$) est inférieure ou égale à $\lambda(x_0)$.*

Alors on peut choisir λ de façon à satisfaire aux deux conditions suivantes :

1° *pour tout $x' \in W'_\lambda$ il existe un arc de géodésique unique α, de même origine x_0 que x', tangent à x' en x_0, et de longueur égale à celle de x'.*

2° *En plus, si l'on note x_1 l'extrémité de α, l'application δ :*

$$W'_\lambda \ni x' \to (x_0, x_1) \in F \times F$$

est un difféomorphisme (de classe C^∞) de W'_λ sur le voisinage W_λ de la diagonale de $F \times F$, formé des (x, y) tels que $d(x, y) \leq \lambda(x)$. [$d(x, y)$ étant la *distance géodésique* des points x et y, c'est-à-dire la longueur de la plus petite géodésique les joignant].

3.4. Tubes normaux à une sous-variété.

Soit F une r-variété ($r \geq 1$) de dimension n; soit E une r-sous-variété de F, de dimension $m < n$. Soit $\mathcal{O}$ une structure C^∞ sur F, pour laquelle E

([14]) Conformément à la définition classique, une sous-variété E d'une variété riemannienne F est dite totalement géodésique s'il existe un voisinage W' de la section nulle de l'espace tangent $\mathcal{T}(E)$, tel que pour tout $x' \in W'$, il existe un arc de géodésique de E (pour la métrique induite), de même origine x que x' et de même longueur, tangent en x à x', et qui soit un arc de géodésique de F.

soit une sous-variété de classe C^∞ (*cf.* théorème **2**). D'après la propriété 5° de (**1.3.2**), il existe une sous-variété ouverte F' de F telle que E soit fermée dans F'. Il existe donc une famille (ψ_i) de cartes locales de F' ayant les propriétés suivantes : pour chaque i, la source de ψ_i est un certain $R^n_{(q_i)}$, qu'on note V_i et qu'on identifie à son image par ψ_i (laquelle est un ouvert de F', donc de F); la famille (V_i) est localement finie et recouvre un voisinage de E dans F' (donc dans F); pour chaque i, il existe un système $(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, y_\delta, y_\xi)$ de coordonnées dans R^n (où x_α, x_β, etc., représentent chacun un nombre fini de coordonnées réelles) tel que les équations de V_i soient

(1) $$x_\gamma \geqq 0,$$

(2) $$y_\xi \geqq 0$$

et que celle de $V_i \cap E$ soient (1) et

(3) $$x_\beta \geqq 0,$$

(4) $$y_\delta = 0.$$

On note E_i la partie de $V_i \cap E$ dont les équations dans V_i sont (4) et

(5) $$-1 \leqq x_\alpha \leqq +1,$$

(6) $$0 \leqq x_\beta \leqq +1,$$

(7) $$0 \leqq x_\gamma \leqq +1$$

et l'on suppose que les intérieurs des E_i recouvrent E.

Pour tout i, soit H_i un cube de la partie $\{y = 0\}$ de R^n, assez grand pour que E_i soit contenu dans l'intérieur de H_i (par exemple : $\{-2 \leqq x \leqq +2\}$).

On munit F' d'une métrique riemannienne $\mathcal{M}$, de classe C^∞ pour la structure $\mathcal{O}$, et qui soit adaptée au bord de F' et à E [*cf.* (**3.3.1**)]; $\mathcal{M}$ induit sur V_i une métrique riemannienne qui (V_i étant identifié à une partie fermée de R^n) peut se prolonger en une métrique riemannienne sur R^n, notée $\mathcal{M}_i$.

Sur tout voisinage U_i assez petit de E_i dans R^n, la projection orthogonale pr_i sur H_i (pour la métrique $\mathcal{M}_i$) est bien définie et de classe C^∞ : pour tout $\varepsilon_i > 0$, assez petit, l'ensemble T_{ε_i} des points q de U_i tels que (d désignant la distance géodésique) $d(a, \mathrm{pr}_i.a) \leqq \varepsilon_i$, est une sous-variété (de classe C^∞) de U_i difféomorphe au produit $E_i \times N_i$, avec $N_i = B_{n-m} \cap R^{n-m}_{(k_i)}$, k_i étant la dimension de l'espace des y_δ; mais, grâce au fait que $\mathcal{M}$ est adaptée, T_{ε_i} est (pour ε_i assez petit) une sous-variété de $U_i \cap V_i$, de sorte que T_{ε_i} ne dépend que de E_i, ε_i et de la métrique $\mathcal{M}$ (et non de $\mathcal{M}_i$); ceci justifie, pour T_{ε_i}, la notation $T_{\varepsilon_i}(E_i, F)$, étant entendu que F est munie de $\mathcal{M}$. On définit de même $T_{\lambda_i}(E_i, F)$, pour toute fonction réelle λ_i, strictement positive, de classe C^∞ sur E_i; c'est encore une sous-variété de V_i, difféomorphe à $E_i \times N_i$.

Soit alors λ une fonction réelle strictement positive, de classe C^∞ sur E (pour la stucture induite par $\mathcal{O}$), assez petite au sens $\mathcal{C}^0$; pour tout i, on pose $\lambda \mid E_i = \lambda_i$. La réunion de tous les $T_{\lambda_i}(E, F)$ se note $T_\lambda(E, F)$ et est appelée *tube normal à* E, *de « rayon »* λ, *dans* F (muni de $\mathfrak{M}$). Le tube $T_\lambda(E, F)$ est une sous-variété de F, de classe C^∞ pour $\mathcal{O}$, fermée si E est fermé. La projection orthogonale pr de $T_\lambda(E, F)$ sur E définit sur $T_\lambda(E, F)$ une structure d'espace fibré-différentiable (localement trivial) de base E. Supposons E connexe; la « fibre » N_i de $T_{\lambda_i}(E_i, F)$ est alors, quel que soit i, difféomorphe à $N = B_{n-m} \cap R_{(k)}^{n-m}$, où k est l'entier tel que $k + m$ soit la dimension de la plus petite face de F contenant E; on peut (par exemple à l'aide de la proposition 3) choisir une famille (φ_i) de difféomorphismes : $E_i \times N \to T_{\lambda_i}(E_i, F)$ compatibles avec pr, qui définisse sur $T_\lambda(E, F)$ une structure d'espace fibré de groupe structural le groupe suivant : produit du groupe orthogonal à $(k - m)$ variables par le groupe des permutations de $(n - k)$ variables.

Si E est sans bord relatif (i.e. $\partial E \subset \partial F$), alors $T_\lambda(E, F)$ est un voisinage de E dans F, et s'appelle *voisinage tubulaire normal* de « rayon » λ de E dans F (munie de la métrique $\mathfrak{M}$); les voisinages tubulaires normaux forment alors un système fondamental de voisinages de E dans F.

Plus généralement, soit M une partie de E; pr désignant la projection orthogonale de $T_\lambda(E, F)$ sur E, $\mathrm{pr}^{-1}(M)$ se note $T_\lambda(E, F; M)$ et s'appelle *tube normal à* E, *d'âme* M, *de « rayon »* λ, *dans* F (muni de $\mathfrak{M}$); $T_\lambda(E, F; M)$ est muni d'une structure fibrée induite par celle de $T_\lambda(E, F)$; c'est une sous-variété de $T_\lambda(E, F)$ si M est une sous-variété de F.

Remarque. — On peut généraliser la définition ci-dessus au cas où E est une sous-variété *de codimension* o de F; on doit alors convenir que, pour toute partie M de E, *tout tube normal à* E *dans* F, *d'âme* M, *s'identifie à* M. Ce sont les *prolongements* de E [qu'on définira en II (2.3.1)] qui jouent dans ce cas un rôle analogue à celui joué par les tubes normaux dans les autres cas.

4. Espaces fonctionnels.

4.1. La catégorie $\mathfrak{A}^r$ des espaces fonctionnels.

4.1.1. *Définition de la catégorie* $\mathfrak{A}^r$. — Soit r un entier $\geqq 1$, fini ou non. Soient E, F, E', F' des variétés; on suppose E et E' *non vides*; soient A et A' des parties de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ et $\mathrm{Hom}^r(E', F')$ respectivement.

Soient H une r-variété. Soit r' un entier tel que $1 \leqq r' \leqq r$; une application $\psi : H \to \mathrm{Hom}^r(E, F)$ est dite r'*-permise* si l'application associée : $H \times E \to F$ est r'-différentiable.

Une application $f : A \to A'$ est dite r*-différentiable* si A est vide, ou si, pour tout entier r' tel que $1 \leqq r' \leqq r$, pour toute r-variété H, et pour toute application r'-permise : $H \to A$, l'application composée $f \circ \varphi : H \to A'$, est encore r'-permise.

La catégorie $\mathcal{A}^r$, dont les objets sont les parties des $\mathrm{Hom}^r(E, F)$, (où E et F sont des variétés, E non vide), et dont les morphismes sont les applications r-différentiables, s'appelle *catégorie des espaces r-fonctionnels.*

Soient A et A' deux objets de $\mathcal{A}^r$; on note $\mathrm{Dif}^r(A, A')$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^r}(A, A')$.

Pour $1 \leqq r' \leqq r$, il existe un foncteur naturel de $\mathcal{A}^r$ dans $\mathcal{A}^{r'}$, donnant lieu à des conventions analogues à celles de (1.2.4). Il est immédiat que *pour qu'une application d'un objet de $\mathcal{A}^r$ dans un autre soit r-différentiable, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit r'-différentiable, pour tout r' fini tel que* $1 \leqq r' \leqq r$.

4.1.2. *Propriétés de la catégorie $\mathcal{A}^r$ résultant de* (0.3).

1. Soient A, A', A'' trois objets de $\mathcal{A}^r$. Il y a une *bijection naturelle*

$$\mathrm{Dif}^r(A, A') \times \mathrm{Dif}^r(A, A'') \approx \mathrm{Dif}^r(A, A' \times A'').$$

2. Soient E, E', E'' trois r-variétés. L'application canonique définie par la composition

$$\mathrm{Hom}^r(E, E') \times \mathrm{Hom}^r(E', E'') \to \mathrm{Hom}^r(E, E'')$$

est r-différentiable.

3. On définit un foncteur d'inclusion I de $\mathcal{O}^r$ sur une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}^r$ en associant à toute r-variété E l'objet $\mathrm{Hom}^r(O, E)$ [*cf.* (1.2.2)] de $\mathcal{A}^r$. Le foncteur I est compatible avec les produits sur $\mathcal{O}^r$ et $\mathcal{A}^r$; aux applications r'-permises de E dans un objet A de $\mathcal{A}^r$ correspondent les applications r'-différentiables de $I(E)$ dans A. On *identifie* toute r-variété E à son image par I; les applications r'-permises prennent alors le nom d'*applications r'-différentiables.* On a une *bijection canonique*

$$\mathrm{Dif}^r(A, \mathrm{Hom}^r(E, F)) \approx \mathrm{Hom}^r(A \times E, F) \tag{1}$$

pour tout A de $\mathcal{A}^r$ et tout couple (E, F) de r-variétés. Il en résulte :

(2) *l'application canonique* $\mathrm{Hom}^r(E, F) \times E \to F$ *est r-différentiable.*

4. Soient E, F, H trois r-variétés; soit $A \subset \mathrm{Hom}^r(F, H)$ un objet de $\mathcal{A}^r$. On note $\mathrm{Difhom}^r(E, A)$ la partie de $\mathrm{Hom}^r(E \times F, H)$ canoniquement associée à $\mathrm{Dif}^r(E, A)$; Difhom^r définit [*cf.* (0.3.4)] un foncteur de deux variables contravariant par rapport à la première, covariant par rapport à la seconde, à valeurs dans $\mathcal{A}^r$.

Soit A' un second objet de $\mathcal{A}^r$, il y a une *bijection canonique*

$$\mathrm{Dif}^r(A', \mathrm{Difhom}^r(E, A)) \approx \mathrm{Dif}^r(A' \times E, A). \tag{3}$$

Il en résulte

(4) *l'application canonique* $\mathrm{Difhom}^r(E, A) \times E \to A$ *est r-différentiable.*

4.1.3. — Soient E et F deux r-variétés. Pour qu'une application $f : E \to F$ soit r'-différentiable (avec $1 \leqq r' \leqq r$), il suffit qu'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de E tel que la restriction de f à chacun des U_i soit r'-différentiable. Il en résulte immédiatement le

LEMME. — *Soit H, E, F trois variétés, r et r' deux entiers tels que $1 \leqq r' \leqq r$, et f une application $H \to \mathrm{Hom}^r(E, F)$.*

1° *Si H est réunion d'ouverts U_i tels que toutes les applications $U_i \to \mathrm{Hom}^r(E, F)$ induites par f soient r'-différentiables, alors f est r'-différentiable.*

2° *Si E est réunion d'ouverts V_i; soit l_i l'application r-différentiable canonique*

$$\mathrm{Hom}^r(E, F) \to \mathrm{Hom}^r(V_i, F).$$

Si toutes les applications $l_i \circ f$ sont r'-différentiables, f est r'-différentiable.

4.2. Routes r'-différentiables dans les espaces r-fonctionnels.

DÉFINITION. — Soit A un objet de $\mathcal{A}^r$. Soit f une application du segment $I = [0, 1]$ dans A.

On dit que f est *un chemin r'-différentiable dans A* si f est r'-différentiable.

On dit que f est une *route r'-différentiable dans A*, si l'application f' de R dans A, définie en posant

$$f'.t = \begin{cases} f.0 & \text{pour} \quad t < 0, \\ f.t & \quad » \quad t \in I, \\ f.1 & \quad » \quad t > 1 \end{cases}$$

est r'-différentiable.

Une route r'-différentiable dans A définit canoniquement un élément de $\mathrm{Difhom}^{r'}(I, A)$ et un élément de $\mathrm{Difhom}^{r'}(R, A)$ auxquels on l'identifiera éventuellement.

LEMME 1. — *Soit A un objet de $\mathcal{A}^r$. Soit f un chemin r'-différentiable dans A.*

Soit χ un homéomorphisme de I sur I, indéfiniment dérivable, à dérivée première strictement positive sur $]0, 1[$, et dont toutes les dérivées soient nulles aux points 0 et 1.

Alors l'application $f \circ \chi$ est une route r'-différentiable dans A.

DÉMONSTRATION. — Soit χ' la fonction (indéfiniment dérivable) égale à χ sur I, à 0 pour $t < 0$ et à 1 pour $t > 1$. Il faut montrer la r'-différentiabilité de l'application

$$(1) \qquad R \times E \ni (t, x) \to h.(t, x) \in F,$$

où l'on a posé

$$(f\circ\gamma'_r.t).x = h.(t, x).$$

Il suffit d'après le lemme 4.1.3 de montrer la r-différentiabilité de la restriction de (1) à toute partie de $R\times E$ de la forme $J\times U$, où J est un intervalle et U l'image d'une carte locale de E. Cette r'-différentiabilité est triviale si J ne contient ni 0 ni 1. Supposons par exemple que $J =]-\varepsilon, +\varepsilon[$, avec $0<\varepsilon<1$. On peut prendre ε et U assez petits pour que l'image de $J\times U$ par (1) soit contenue dans l'image V d'une certaine carte locale de F. Les valeurs en un point $(0, x)$ des dérivées partielles de h prises à droite par rapport à t sont :

$$\frac{\partial^q h}{\partial t^q}.(0, x) = 0 \qquad \text{pour} \quad 1\leq|q|\leq r',$$

$$\frac{\partial^{p+q} h}{\partial x^p\,\partial t^q}.(0, x) = 0 \qquad \text{»} \quad 1\leq|p|+|q|\leq r',$$

$$\frac{\partial^p h}{\partial x^p}.(0, x) = \frac{\partial^p(f.0)}{\partial x^p}.x \qquad \text{»} \quad 1\leq|p|\leq r'$$

qui sont bien les valeurs de ces dérivées prises au point $(0, x)$ à gauche par rapport à t.

Lemme 2. — *Soient f_1 et f_2 deux routes r'-différentiables dans un espace r-fonctionnel A. Leur composée f définie par*

$$f.t = f_1.2t \qquad \text{pour} \quad t\leq\frac{1}{2},$$

$$f.t = f_2.(2t-1) \qquad \text{»} \quad t\geq\frac{1}{2}$$

est une route r'-différentiable.

Démonstration. — Il suffit de vérifier la différentiabilité aux points $\left(\frac{1}{2}, x\right)$, ce qui se fait par localisation comme pour le lemme 1.

4.3. Topologie $\mathcal{C}^r$ sur les espaces r-fonctionnels.

La topologie dont on munira dans la suite les espaces $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ n'est pas la topologie C^r; c'est une topologie qu'on notera $\mathcal{C}^r$; elle est plus fine que la topologie C^r, avec laquelle elle ne coïncide (en excluant le cas où F est de dimension 0) que lorsque E est compact.

4.3.1. *Définition de la topologie $\mathcal{C}^r$.* — Soient E et F deux variétés; soit r un entier ≥ 0, fini ou infini.

(a) Lorsque E est *compact*, la topologie $\mathcal{C}^r$ sur $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ est identique à la topologie C^r (laquelle est dans ce cas la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées d'ordre fini $r'\leq r$, sans uniformité sur r' pour r infini; la définition précise se fait, soit à l'aide de recouvrements par des cubes, soit à l'aide de plongements de E et F dans des espaces euclidiens).

(b) Lorsque E est *non compact*, soit (V_i), $i=1, 2, \ldots$, une suite localement finie de sous-variétés compactes (de codimension 0) de E dont les intérieurs (topologiques) recouvrent E. Soit $f \in \mathrm{Hom}^r(E, F)$; soit, pour tout i, $\mathcal{V}'_i$ un voisinage de $f|V_i$ dans $\mathrm{Hom}^r(V_i, F)$ (muni de la topologie $\mathcal{C}^r$); soit $\mathcal{V}_i$ l'image réciproque de $\mathcal{V}'_i$ par l'application canonique

$$\mathrm{Hom}^r(E, F) \to \mathrm{Hom}^r(V_i, F).$$

Soit

$$\bigcap_{i=1,2,\ldots} \mathcal{V}_i = \mathcal{V}. \tag{1}$$

Il est immédiat qu'on définit une topologie τ sur $\mathrm{Hom}^r(\mathrm{E}, F)$ en convenant que pour tout f, le système de tous les $\mathcal{V}$ [définis comme ci-dessus et relatifs à toutes les familles $(\mathcal{V}'_i)$ possibles] constitue un système fondamental de voisinages de f.

La topologie τ ne dépend pas de la suite (V_i) choisie : soit, en effet, $(\tilde{V}_j)$ une suite analogue à (V_i), soit $\tilde{\tau}$ la topologie correspondante; il suffit de montrer que $\tilde{\tau}$ est plus fine que τ. Soit $f \in \mathrm{Hom}^r(E, F)$, et soit $\mathcal{V}$ défini par (1). Pour tout i, il existe une suite $(\tilde{\mathcal{V}}'_{j;i})_{j=1,2,\ldots}$, où $\tilde{\mathcal{V}}'_{j;i}$ est un voisinage de $f|\tilde{V}_j$ dans $\mathrm{Hom}^r(\tilde{V}_j, F)$, telle que si l'on note $\tilde{\mathcal{V}}_{j;i}$ l'image réciproque de $\tilde{\mathcal{V}}'_{j;i}$ par l'application canonique

$$\mathrm{Hom}^r(E, F) \to \mathrm{Hom}^r(\tilde{V}_j, F),$$

on ait

$$\tilde{\mathcal{V}}_{j;i} = \mathrm{Hom}^r(E, F) \qquad \text{pour tout } j \text{ tel que} \quad V_i \cap \tilde{V}_j = \emptyset \tag{2}$$

et

$$\bigcap_j \tilde{\mathcal{V}}_{j;i} \subset \mathcal{V}_i. \tag{3}$$

Soit

$$\bigcap_{i;j} \tilde{\mathcal{V}}_{j;i} = \tilde{\mathcal{V}}.$$

D'après (1) et (3), $\tilde{\mathcal{V}}$ est contenu dans $\mathcal{V}$; mais d'après (2) et le fait que chaque V_i ne rencontre qu'un nombre fini de $\tilde{V}_j$, $\tilde{\mathcal{V}}$ est un $\tilde{\tau}$-voisinage de f.

Par définition, la topologie ainsi construite est la topologie $\mathcal{C}^r$; la notation $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ sera utilisée dans la suite en sous-entendant que cet espace est muni de la topologie $\mathcal{C}^r$. Il est immédiat que pour $0 \leq r' \leq r$, l'injection de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ dans $\mathrm{Hom}^{r'}(E, F)$ est continue.

4.3.2. *Cas particulier : la topologie* $\mathcal{C}^0$. — La topologie $\mathcal{C}^0$ peut être définie pour tout couple (E, F) d'espaces topologiques, non seulement sur l'ensemble $\mathrm{Hom}^0(E, F)$ des applications continues, mais sur l'ensemble $\mathrm{Hom}(E, F)$ de *toutes* les applications de E dans F. Soit $f \in \mathrm{Hom}(E, F)$; les $\mathcal{C}^0$-voisinages de f sont en correspondance biunivoque avec les voisinages de la diagonale de $F \times F$; à un tel voisinage W est associé le voisinage $\mathcal{V}$ de f défini par

$$f' \in \mathcal{V} \iff (f.x, f'.x) \in W \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Dans le cas où la topologie de F est définie par une distance d, un système fondamental de $\mathcal{C}^0$-voisinages de f est constitué par les $\mathcal{V}_\lambda$ définis par

$$f' \in \mathcal{V}_\lambda \iff d(f.x, f'.x) < \lambda.x,$$

où λ décrit l'ensemble des fonctions continues réelles, strictement positives définies sur E.

REMARQUE. — Lorsque E et F sont des variétés, on peut, après plongement de E et F dans des espaces euclidiens, donner de la topologie $\mathcal{C}^r (r > 0)$ une définition analogue à cette définition de $\mathcal{C}^0$.

4.3.3. *Une condition suffisante de continuité.* — Le critère donné par le lemme ci-dessous sera dans la suite d'un emploi fréquent; il résulte immédiatement de la définition de la topologie $\mathcal{C}^r$.

LEMME. — *Soient E, F, $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, des variétés; on suppose E et $\tilde{E}$ non compactes. Soit A une partie de* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$, *où r est un entier ≥ 0; soit $f \in A$ et soit φ une application de A dans* $\mathrm{Hom}^r(\tilde{E}, \tilde{F})$. *Soit (V_i) une suite localement finie de sous-variétés compactes de codimension 0 de E dont les intérieurs recouvrent E; soit $(\tilde{V}_j)$ une suite analogue relative à $\tilde{E}$; on note A_i l'image canonique de A dans* $\mathrm{Hom}^r(V_i, F)$. *S'il existe une application propre $j \to i(j)$ de l'ensemble des entiers positifs dans lui-même, et, pour tout j, une application continue*

$$\varphi_j : \quad A_{i(j)} \to \mathrm{Hom}^r(\tilde{V}_j, \tilde{F})$$

définie au voisinage de $f \mid V_{i(j)}$, telle qu'il y ait commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}^r(\tilde{E}, \tilde{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{i(j)} & \xrightarrow{\varphi_j} & \mathrm{Hom}^r(\tilde{V}_j, \tilde{F}) \end{array}$$

(*dans lequel les applications verticales sont définies par restriction*), *alors l'application φ est continue au voisinage de f.*

4.3.4. *Quelques propriétés de la topologie $\mathcal{C}^r$.*

1. La topologie $\mathcal{C}^r$ est *plus fine* que la topologie C^r; elle est donc *séparée*. Elle est *métrisable* dans le cas où elle coïncide avec la topologie C^r, en particulier lorsque *E est compact*. Lorsque E est non compact et F de dimension > 0, la topologie $\mathcal{C}^r$ sur $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ est *non métrisable*, mais elle est *uniformisable*; supposons la topologie $\mathcal{C}^r$ définie au moyen d'un recouvrement (V_i), et soit, pour tout i, d_i une distance compatible avec la topologie de $\mathrm{Hom}^r(V_i, F)$; les parties $\mathcal{W}_{(\varepsilon_i)}$ de $\mathrm{Hom}^r(E, F) \times \mathrm{Hom}^r(E, F)$ définies par

$$(f, f') \in \mathcal{W}_{(\varepsilon_i)} \iff [d_i(f \mid V_i, f' \mid V_i) \leq \varepsilon_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots]$$

constituent, lorsque (ε_i) décrit l'ensemble des suites réelles strictement positives, un système fondamental d'entourages pour une structure uniforme compatible avec la topologie $\mathcal{C}^r$; pour cette structure uniforme $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ est *complet*.

2. *Soient E et F deux variétés.*

(a) *Pour toute sous-variété fermée H de E, l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}^r(E, F) \to \mathrm{Hom}^r(H, F)$$

est continue.

(b) *Soit (E_i) une famille localement finie de sous-variétés fermées de E dont les intérieurs recouvrent E; la topologie sur* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ *définie à partir de (E_i) par le procédé utilisé en* (4.3.1) *dans le cas où les E_i étaient compacts, est encore la topologie $\mathcal{C}^r$.*

Remarque. — Du (b) on peut évidemment déduire, pour les applications $\mathrm{Hom}^r(E, F) \to \mathrm{Hom}^r(\tilde{E}, \tilde{F})$ un critère de continuité généralisant le lemme 4.3.3.

Démonstration du (a). — Soit (V_i) une famille de compacts de E qui soit « bonne » (c'est-à-dire localement finie, et dont la famille des intérieurs recouvre E); il existe alors une suite partielle extraite de la suite $(V_i \cap H)$ qui soit « bonne » pour H; il suffit alors d'appliquer le critère 4.3.3.

Démonstration du (b). — Soit, pour tout i, $(V_{ij})_{j \in J}$ une « bonne » famille relative à E_i; la famille de tous les V_{ij} (pour tout i et tout j) est « bonne » pour E; le (b) en résulte aussitôt.

3. *Soient E, F, H trois variétés.*

(a) *Si E est compact, alors pour tout $f \in$* $\mathrm{Hom}^r(H \times E, F)$, *l'application $\varphi : H \to$* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ *canoniquement associée à f est continue; en plus, l'application canonique μ :*

$$\mathrm{Hom}^r(H \times E, F) \to \mathrm{Hom}^0(H, \mathrm{Hom}^r(E, F))$$

est continue [*pour la topologie* $\mathcal{C}^0$ *sur* $\mathrm{Hom}^0(H, \mathrm{Hom}^r(E, F))$].

(b) *Si E est non compact*, l'application $\varphi : H \to \mathrm{Hom}^r(E, F)$ associée à f est en général *non continue* (par exemple, l'application $t \to \{x \to t\}$ canoniquement associée à l'application $I \times R \to (t, x) \to t \in I$, n'est pas continue).

Toutefois, l'*application canonique* μ :

$$\mathrm{Hom}^r(H \times E, F) \to \mathrm{Hom}(H, \mathrm{Hom}^r(E, F))$$

est continue pour la topologie $\mathcal{C}^0$ *sur l'ensemble* $\mathrm{Hom}(H, \mathrm{Hom}^r(E, F))$ *de toutes les applications de H dans* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$.

Bornons-nous à montrer le (b) à partir du (a). On se ramène d'abord au cas où H est compact à l'aide de la *remarque* ci-dessus (propriété 2°). Soit alors (V_i) une « bonne » famille de compacts relative à E; soit μ_i l'application canonique

$$\mathrm{Hom}^r(H \times V_i, F) \to \mathrm{Hom}(H, \mathrm{Hom}^r(V_i, F));$$

soit d_i une distance compatible avec la topologie de $\mathrm{Hom}^r(V_i, F)$. Soit $f \in \mathrm{Hom}^r(H \times E, F)$, et soit $\varphi = \mu(f)$; H étant compact, la topologie sur $\mathrm{Hom}(H, \mathrm{Hom}^r(E, F))$ est celle de la convergence uniforme. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage arbitraire de φ dans $\mathrm{Hom}(H, \mathrm{Hom}^r(E, F))$; $\mathcal{V}$ contient d'après la propriété 1° ci-dessus un voisinage de la forme $\bigcap_i \mathcal{V}_i$, où $\mathcal{V}_i$ est l'ensemble des φ' qui vérifient

$$d_i(\varphi \mid V_i, \varphi' \mid V_i) \leqq \varepsilon_i \qquad (\text{avec } \varepsilon_i > 0).$$

Soit $\mathcal{V}'_i$ l'image canonique de $\mathcal{V}_i$ dans $\mathrm{Hom}(H, \mathrm{Hom}^r(V_i, F))$; $\mathcal{V}'_i$ est un voisinage de $\varphi \mid V_i$ dans $\mathrm{Hom}(H, \mathrm{Hom}^r(V_i, F))$, donc d'après le (a), $\mu_i^{-1}(\mathcal{V}'_i)$ est un voisinage de $f \mid V_i$ dans $\mathrm{Hom}^r(H \times V_i, F)$; d'où le (b), car la famille $(H \times V_i)$ est « bonne » pour $H \times V$.

4. *Soient E et F des variétés, et U un ouvert de E; soit r un entier* $\geqq 1$. *Pour tout* $f \in \mathrm{Hom}^r(E, F)$, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* $f \mid U$ *dans* $\mathrm{Hom}^r(U, F)$ *tel que, pour tout* $f' \in \mathcal{V}$, *la fonction* f'' *définie par*

$$\begin{cases} f'' \mid U = f' \mid U, \\ f'' \mid E - U = f \mid E - U \end{cases}$$

soit un élément de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$; *et l'application de* $\mathcal{V}$ *dans* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$, *ainsi définie, est continue.*

Cas particulier. — *Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de l'identité dans le groupe $G^r(U)$ des r-difféomorphismes de U, tel que tout $g \in \mathcal{V}$ puisse se prolonger par l'identité sur E-U, en un r-difféomorphisme de E; et l'application de $\mathcal{V}$ dans le groupe $G^r(E)$, ainsi définie, est continue.*

[Pour la démonstration du 5°, on se ramène par un plongement de F, au cas où $F = R^n$; ce cas se ramène immédiatement à celui où $F = R$ et où f est la fonction nulle; il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de o dans $\mathrm{Hom}^r(U, R)$ tel que, pour tout $f' \in \mathcal{V}$, et tout ordre de dérivation p tel que $0 \leq |p| \leq r$, $|D^p f'.x|$ tende vers o, uniformément sur tout compact, lorsque x tend vers la frontière de U; la fonction f'' obtenue en prolongeant f' par o est alors de classe C^r.]

4.4. Structures linéaires locales sur les espaces fonctionnels.

4.4.1. *Un lemme sur les espaces de sections des fibrés à fibre vectorielle.*

Lemme. — *Soit E une variété fibrée-r-différentiable ($r \geq 1$) sur une variété B, de fibre $F = R^n$, de groupe structural G (ce qui sous-entend que les opérations de G dans F sont linéaires). Soit $\mathcal{S}^r(E)$ l'espace des sections r-différentiables de E.*

1° *$\mathcal{S}^r(E)$ a une structure de module r-différentiable* (15) *sur l'anneau* $\mathrm{Hom}^r(B, R)$ *des fonctions réelles r-différentiables définies sur B.*

2° *La topologie $\mathcal{C}^r$ est localement convexe pour la structure d'espace vectoriel réel de $\mathcal{S}^r(E)$ sous-jacente à la structure de module définie au* 1°. (En plus, si l'on suppose $n \geq 1$, cette topologie est à base de voisinages dénombrable ou non suivant que B est ou non compact).

Démonstration. — 1° La structure vectorielle de F est déterminée par des applications r-différentiables

(1) $R \times F \to F$ (multiplication par un scalaire),

(1') $F \times F \to F$ (addition).

Du fait que G opère dans F en respectant la structure vectorielle, on déduit de (1) et (1') des applications r-différentiables

(2) $$R \times E \to E,$$

(2') $$H \to E$$

compatibles avec les projections de E et H sur B (H est le graphe de la relation d'équivalence déterminée par la projection p de E sur B).

(15) Au sens de (4.1).

L'application (2) et l'application

$$(3) \qquad B \ni x \to (x, x) \in B \times B$$

déterminent d'après la propriété 4° de (0.3.1) une application r-différentiable

$$\mathrm{Hom}^r(B, R) \times \mathrm{Hom}^r(B, E) \to \mathrm{Hom}^r(B, E).$$

D'où une application r-différentiable

$$(4) \qquad \mathrm{Hom}^r(B, R) \times \mathcal{S}^r(E) \to \mathcal{S}^r(E).$$

De même l'application (3) détermine une application r-différentiable

$$\mathrm{Hom}^r(B, E) \times \mathrm{Hom}^r(B, E) \to \mathrm{Hom}^r(B, E \times E)$$

qui envoie $\mathcal{S}^r(E) \times \mathcal{S}^r(E)$ dans $\mathrm{Hom}^r(B, H)$; d'où, en composant avec l'application

$$\mathrm{Hom}^r(B, H) \to \mathrm{Hom}^r(B, E)$$

déterminée par (2'), une application r-différentiable

$$(4') \qquad \mathcal{S}^r(E) \times \mathcal{S}^r(E) \to \mathcal{S}^r(E).$$

Les applications (4) et (4') déterminent la structure de module r-différentiable de $\mathcal{S}^r(E)$ sur $\mathrm{Hom}^r(B, R)$.

2° Soit (K_i) une famille localement finie de sous-variétés de codimension o de B, difféomorphes à des cubes fermés, et dont les intérieurs topologiques recouvrent B; et soit, pour tout i, un difféomorphisme

$$\psi_i : \quad p^{-1}(K_i) \to K_i \times R^n$$

compatible avec la structure fibrée de E. Soit $\mathcal{S}_i^r(E)$ l'image canonique de $\mathcal{S}^r(E)$ dans $\mathrm{Hom}^r(K_i, E)$; ψ_i définit canoniquement un difféomorphisme

$$\psi_i^* : \quad \mathcal{S}_i^r(E) \to \mathrm{Hom}^r(K_i, R^n).$$

Soit, pour $f \in \mathrm{Hom}^r(K_i, R^n)$ et $0 \leqq |q| \leqq r$ [16] :

$$\mu_i^q(f) = \sup_{x \in K_i} |D^p f.x|.$$

La topologie de $\mathrm{Hom}^r(K_i, R^n)$ peut être définie par la famille de semi-normes (μ_i^q), $0 \leqq |q| \leqq r$. Soit (pour $0 \leqq |q| \leqq r$ et $\varepsilon > 0$), $U_{i,q,\varepsilon}$ la partie de $\mathcal{S}^r(E)$ formée des f tels que

$$\mu_i^q(\psi_i^*(f | K_i)) \leqq \varepsilon;$$

([16]) Dans le cas $r = \infty$, il faut remplacer la condition $|q| \leqq r$ par $|q| < r$; ceci vaut pour toute la suite de ce numéro.

un système fondamental de voisinages convexes de la section nulle dans $\mathcal{S}^r(E)$ est formé par tous les

$$\bigcap_i U_{i,q_i,\varepsilon_i} \qquad (\text{pour } |q_i| \leq r \text{ et } \varepsilon_i > 0).$$

Lorsque B est compact, l'indice i ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et la topologie de $\mathcal{S}^r(E)$ peut être définie par la famille de semi-normes

$$\sup_i(\mu_i^q(\psi_i^*(f | K_i))) \qquad (\text{pour } 0 \leq |q| \leq r).$$

4.4.2. *Structure locale de* $\mathrm{Hom}^r(E, R_+)$*-module sur* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$. — Soit F une variété de classe C^∞, de dimension n, munie d'une métrique riemannienne $\mathfrak{M}$, de classe C^∞, adaptée au bord de F [*cf.* (3.3.1)]. En (3.3.4) on a défini (pour toute fonction continue $\lambda : F \to \,]0, \infty[\,$) les variétés W'_λ et W_λ, et défini, lorsque λ est assez petit, un difféomorphisme $\delta : W'_\lambda \to W_\lambda$.

Soit $\tilde{W}'_\lambda$ l'espace analogue à W'_λ, relatif à l'espace $\tilde{\mathcal{E}}(F)$ [*cf.* (1.2.5)] : $\tilde{W}'_\lambda$ est l'ensemble des $x' \in \tilde{\mathcal{E}}(F)$ de longueur $\leq \lambda(x_0)$, où x_0 désigne l'origine de x' ; $\tilde{W}'_\lambda$ est un espace fibré-différentiable, de classe C^∞, de base F, de fibre la n-boule fermée B_n, de groupe structural supposé réduit au groupe orthogonal; W'_λ est une sous-variété fermée de classe C^∞ de $\tilde{W}'_\lambda$ telle que pour tout $x \in F$ la « fibre » de W'_λ située au-dessus de x soit une partie convexe de la fibre correspondante de $\tilde{W}'_\lambda$.

Soit E une variété de classe C^∞, de dimension m, et soit $f \in \mathrm{Hom}^r(E, F)$, où r est un entier ≥ 1. Soient respectivement $\tilde{\mathcal{F}}'_\lambda$, $\mathcal{F}'_\lambda$ et $\mathcal{F}_\lambda$ les « fibrés » images réciproques par f de $\tilde{W}'_\lambda$, W'_λ et W_λ (seul, en général, $\tilde{\mathcal{F}}'_\lambda$ est un vrai fibré) ; $\tilde{\mathcal{F}}'_\varepsilon$ (resp. $\mathcal{F}'_\varepsilon$) est l'ensemble des $(x, x') \in E \times \tilde{\mathcal{E}}(F)$ [resp. $E \times \mathcal{E}(F)$], tels que x' soit d'origine $f.x$ et de longueur $\leq \lambda(x)$; $\mathcal{F}_\lambda$ est l'ensemble des $(x, y) \in E \times F$ tels que $d(f.x, y) \leq \lambda(f.x)$. L'image réciproque du difféomorphisme δ induit un difféomorphisme $\varphi : \mathcal{F}'_\lambda \to \mathcal{F}_\lambda$; et d'autre part, $\mathcal{F}'_\lambda$ est une sous-variété de $\tilde{\mathcal{F}}'_\lambda$.

Soit maintenant $\mathcal{V}_\lambda$ le voisinage de f dans $\mathrm{Hom}^0(E, F)$ [*cf.* (4.3.2)] défini par

$$f' \in \mathcal{V}_\lambda \iff d(f.x, f'.x) \leq \lambda(f.x) \qquad \text{pour tout } x \in F,$$

où d désigne la distance géodésique. A tout $f' \in \mathcal{V}_\lambda$, associons la section h' (de classe C^r) de $\mathcal{F}_\lambda$ définie par

$$h'.x = (x, f'.x).$$

Soit $\mathcal{S}^r(\mathcal{F}_\lambda)$ l'espace des sections r-différentiables de $\mathcal{F}_\lambda$ [notations analogues : $\mathcal{S}^r(\mathcal{F}'_\lambda)$, $\mathcal{S}^r(\tilde{\mathcal{F}}'_\lambda)$] ; l'application

$$\mathcal{V}_\lambda \ni f' \to h' \in \mathcal{S}^r(\mathcal{F}_\lambda)$$

est un isomorphisme à la fois topologique (pour la topologie $\mathcal{C}^r$) et r-différentiable (c'est-à-dire pour la catégorie $\mathcal{A}^r$ [*cf.* (4.1)]); $\mathcal{S}^r(\mathcal{F}_\lambda)$ est canoniquement isomorphe (au point de vue topologiqne et au point de vue r-différentiable) à $\mathcal{S}^r(\mathcal{F}'_\lambda)$, et $\mathcal{S}^r(\mathcal{F}'_\lambda)$ s'identifie canoniquement (aux deux mêmes points de vue) à un sous-espace de $\mathcal{S}^r(\tilde{\mathcal{F}}'_\lambda)$. L'espace $\tilde{\mathcal{F}}'_\lambda$ est fibré-différentiable sur E, la fibre étant la boule B_n, l'espace $\mathcal{S}^r(\tilde{\mathcal{F}}'_\lambda)$ est donc localement isomorphe à l'espace des sections r-différentiables d'un fibré à fibre vectorielle, il est donc muni d'après le lemme 4.4.1 d'une structure de noyau de $\mathrm{Hom}^r(E, R)$-module r-différentiable, et d'une structure sous-jacente de noyau d'espace vectoriel localement convexe. Chaque « fibre » de $\mathcal{F}'_\lambda$ est une partie convexe et contenant o de la fibre correspondante de $\tilde{\mathcal{F}}'_\lambda$; $\mathcal{S}^r(\tilde{\mathcal{F}}'_\lambda)$ induit donc sur $\mathcal{S}^r(\mathcal{F}'_\lambda)$ une structure de noyau de $\mathrm{Hom}^r(E, R_+)$-module r-différentiable, et une structure sous-jacente de noyau de R_+-module; par l'isomorphisme entre $\mathcal{S}^r(\mathcal{F}'_\lambda)$ et $\mathcal{V}_\lambda$, ce dernier espace se trouve muni des structures transportées des précédentes. On a démontré la

Proposition 4. — *Soient E et F deux variétés; soit $f \in \mathrm{Hom}^r(E, F)$ (r entier ≥ 1). Soit $\mathcal{M}$ une métrique riemannienne (de classe C^∞) sur F.*

1° *La métrique $\mathcal{M}$ détermine canoniquement sur $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ au voisinage de f une structure de noyau de $\mathrm{Hom}^r(E, R_+)$-module r-différentiable d'origine f. D'une façon plus précise, il existe un $\mathcal{C}^0$-voisinage $\mathcal{V}$ de f dans $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ et un $\mathcal{C}^0$-voisinage $\mathcal{W}$ de $\mathrm{Hom}^r(E, [0, 1])$ dans $\mathrm{Hom}^r(E, R_+)$ tels que l'addition $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathrm{Hom}^r(E, F)$, et la multiplication $\mathcal{W} \times \mathcal{V} \to \mathrm{Hom}^r(E, F)$ soient définies canoniquement par la donnée de $\mathcal{M}$ et soient r-différentiables; f joue le rôle d'élément zéro.*

2° *En plus, la topologie $\mathcal{C}^r$ sur $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ est localement convexe pour la structure de noyau de R_+-module sous-jacente à la précédente.*

Dans la suite, les structures locales de noyau de $\mathrm{Hom}^r(E, R_+)$-module définies par une métrique $\mathcal{M}$ seront plus brièvement appelées « structures linéaires locales ».

Du 2° de la proposition 4 résulte aussitôt le

Corollaire. — *Les espaces $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ sont localement r-différentiablement contractiles.*

4.4.3. — Relativement à la structure de noyau de module, on a une notion immédiate de *noyau de sous-module*; en voici deux exemples :

1° Soit M une partie de E; le sous-espace de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ formé des applications qui coïncident avec f sur M est muni au voisinage de f d'une structure de noyau de sous-module de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$; on le note $\mathrm{Hom}^r_{f|M}(E, F)$,

[Dans le cas où F est une sous-variété de F, et où f est l'injection de E dans F, on note simplement : $\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$.]

2° Soit r' un entier tel que $1 \leq r' \leq r$; soit $f' \in \mathrm{Hom}^r_{f|M}(E, F)$. La partie de $\mathrm{Hom}^r_{f|M}(E, F)$ formée des f'' qui ont avec f' un contact d'ordre r' le long de M est munie au voisinage de f d'une structure de noyau de sous-module de $\mathrm{Hom}^r_{f|M}(E, F)$.

4.5. Comparaison de la différentiabilité et de la continuité.

4.5.1. — Soient E une variété compacte, F une variété. On a vu [*cf.* (4.3.4), propriété 1] que l'espace $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ est alors *métrisable*. Relativement aux applications continues d'un espace métrisable dans un autre, on démontre immédiatement (par l'absurde) le :

LEMME. — *Soient A et B deux espaces métrisables; soit $f \in A$. Soit φ une application de A dans B. Pour que φ soit continue en f il suffit que, pour toute suite $(f_{1/n})$ tendant vers f pour $n \to \infty$, il existe une suite partielle $(h_{1/n})$ de $(f_{1/n})$ telle que $(h_{1/n})$ tende vers $\varphi(f)$ pour $n \to \infty$.*

4.5.2. LEMME. — *Soient E une variété compacte, F une variété riemannienne, r un entier fini ≥ 1. Soit $f \in \mathrm{Hom}^r(E, F)$. Soit A une partie de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ qui soit localement un noyau de sous-module pour la structure linéaire locale* ([17]) *d'origine f sur $\mathrm{Hom}^r(E, F)$. Soit (f_i), $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite de points de A tendant vers f pour $i \to \infty$. Il existe une suite partielle (h_i) de (f_i) et un chemin r-différentiable ρ dans A tel que*

$$(1) \qquad \rho . 1/i = h_i \quad \text{pour } i \text{ assez grand},$$

$$(2) \qquad \rho . 0 = f.$$

DÉMONSTRATION. — Soit (h_i) une suite quelconque d'éléments de A tendant vers f. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de f dans A qui soit *convexe* pour la structure linéaire locale d'origine f de A. Soit N un entier assez grand pour que $i \geq N$ entraîne $h_i \in \mathcal{V}$. Posons, pour $i \geq N$, et $t \in [1/(i+1), 1/i]$:

$$(3_i) \qquad \psi_i . t = (1+i)(1-it),$$

$$(4_i) \qquad \rho_i = (\chi \circ \psi_i . t)\, h_{i+1} + (1 - \chi \circ \psi_i . t)\, h_i,$$

χ étant la fonction définie en (4.2), et les opérations linéaires de (4_i) étant celles de la structure linéaire locale d'origine f de A. Le système formé par les égalités (4_i) pour $i = 1, 2 \ldots$ définit un chemin ρ à valeurs dans A; ce chemin est continu pour $t = 0$ puisque A est localement convexe; d'autre part il est r-différentiable en tous les points $\{t = 1/i\}$ d'après les lemmes 1 et 2 de (4.2), il est donc *r-différentiable sur* $]0, 1]$.

D'après (4.4.2), si $\mathcal{V}$ est assez petit, $\mathcal{V}$ est isomorphe au sens de la catégorie $\mathfrak{A}^r$[*cf.* (4.1.1)], et au sens de la structure linéaire, à un voisinage $\mathcal{V}'$ de la section zéro dans un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{S}^r(\mathcal{F})$ des sections

([17]) *Cf.* (4.4.2).

de classe C^r d'un certain espace $\mathcal{F}$, fibré-r-différentiable en boules sur E. On peut donc, dans la suite de la démonstration, supposer que F est un fibré-r-différentiable de fibre la boule B_n (ou l'espace R^n), de base E, que f est la section zéro de F, et que A est un sous-espace vectoriel de l'espace des sections de classe C^r de F. Le choix sur E et F d'un système de cartes locales compatible avec la fibration ramène au cas où E est la boule B_m et $F = B_m \times B_n$. Comme r est fini et E compact, la topologie sur A peut être définie par la norme

$$\| f' \| = \sup_{|p| \leqq r;\, x \in E} | D^p f.x - D^p f'.x |.$$

La formule (4_i) s'explicite [en posant $\rho_t.x = \rho'.(x, t)$] par

$$(4'_i) \qquad \begin{cases} \rho'.(x, t) = (\chi \circ \psi_i.t)\,(h_{i+1}.x) + (1 - \chi \circ \psi_i.t)\,(h_i.x) \\ \qquad \text{pour} \quad t \in [1/(i+1),\ 1/i] \quad \text{et} \quad x \in E \end{cases}$$

et il faut montrer que pour un choix convenable de la suite (h_i) extraite de (f_i) l'application $E \times I \to F$ définie par le système $\{(4'_i)\}$ pour $t > 0$, et par (2) pour $t = 0$, dont on sait déjà qu'elle est r-différentiable sur $E \times]0, 1]$, est r-différentiable sur $E \times I$. Comme le chemin ρ, à valeurs dans A, est continu pour $t = 0$, on sait *a priori* que, pour tout p tel que $|p| \leqq r$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial^p \rho'}{\partial x^p}$ tend vers $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}$ lorsque $t \to 0$. Il reste à montrer que chacune des autres dérivées partielles d'ordre $\leqq r$ de ρ' tend uniformément vers une limite finie lorsque $t \to 0$. Dérivons ($4'_i$); pour tout (p, q) tel que $|q| \geqq 1$ et $|p| + |q| \leqq r$, on a ($\chi^{(q)}$ désignant la dérivée d'ordre q de χ) :

$$\frac{\partial^{p+q} \rho'}{\partial x^p\, \partial t^q} = (-1)^q i^q (1+i)^q (\chi^{(q)} \circ \psi_i.t) \left(\frac{\partial^p h_{i+1}}{\partial x^p} - \frac{\partial^p h_i}{\partial x^p} \right),$$

d'où

$$\left| \frac{\partial^{p+q} \rho'}{\partial x^p\, \partial t^q} \right| \leqq (i+1)^{2r} \times \text{Cte} \times (\| h_{i+1} \| + \| h_i \|).$$

Par hypothèse, $\| f_i \| \to 0$ lorsque $i \to \infty$; on peut donc, quel que soit l'entier $s \geqq 0$, choisir la suite (h_i) de façon que

$$n^s \| h_i \| \to 0 \qquad \text{pour} \quad i \to \infty.$$

Si l'on choisit (h_i) de façon que cette condition soit réalisée pour $t = 2r$, alors ρ' est r-différentiable sur $E \times I$.

4.5.3. Théorème 4. — *Soient E, F, $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, quatre variétés (de classe C^∞); on suppose E et $\tilde{E}$ compactes. Soit r un entier $\geqq 1$, fini ou infini. Soit A une partie de* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$*; et soit f un point de A; on suppose qu'il existe une métrique riemannienne $\mathfrak{M}$ sur F telle que A soit un noyau de sous-module pour la structure linéaire locale d'origine f définie par $\mathfrak{M}$ sur*

$\mathrm{Hom}^r(E, F)$. *Alors toute application r-différentiable* φ *de* A *dans* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ *est continue au point* f *pour la topologie* $\mathcal{C}^r$.

DÉMONSTRATION.

(*a*) *Cas où r est fini.* — Soit (f_i) une suite de points de A tendant vers f. Soient (h_i) une suite extraite de (f_i) et ρ un chemin dans A qui vérifient (1) et (2) du lemme 4.5.2. L'application $\varphi \circ \rho$ est r-différentiable, donc elle est $\mathcal{C}^r$-continue d'après (4.3.4), propriété 3; donc la suite (h_i) tend vers $\varphi(f)$ au sens $\mathcal{C}^r$. Et ceci d'après le lemme 4.5.1, prouve que φ est $\mathcal{C}^r$-continue.

(*b*) *Cas* $r = \infty$. — Par hypothèse, φ est ∞-différentiable; donc φ est r'-différentiable pour tout r' fini; donc d'après le (a), φ est $\mathcal{C}^{r'}$-continue pour tout r' fini; donc φ est $\mathcal{C}^\infty$-continue.

4.5.4. *Applications du théorème* 4. — L'utilisation conjointe du théorème 4 et du critère 4.3.3 permet de démontrer la continuité de certaines applications différentiables relatives à des espaces fonctionnels de variétés non compactes: on utilise le critère 4.3.3 pour se ramener au cas d'espaces fonctionnels de variétés compactes, puis on applique le théorème 4; ce procédé sera utilisé plusieurs fois au chapitre II.

Dans les deux exemples ci-dessous, une situation analogue à celle de (4.3.3.) permet également de se ramener à appliquer le théorème 4.

PROPOSITION 4'. — *Dans les hypothèses de la proposition* 4 [*cf.* (4.4.2)], *la structure de noyau de* $\mathrm{Hom}^r(E, R_+)$*-module définie sur* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ *par la métrique* $\mathfrak{M}$, *est compatible avec la topologie* $\mathcal{C}^r$ *sur* $\mathrm{Hom}^r(E, R_+)$ *et sur* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$.

DÉMONSTRATION. — Démontrons par exemple la continuité de l'addition.

Soit (V_i) une famille localement finie de sous-variétés compactes (de codimension o) de E dont les intérieurs recouvrent E. Pour tout $x \in E$, $(f' + f'').x$ ne dépend que de $f'.x$ et $f''.x$; donc la restriction de $f' + f''$ à V_i ne dépend que des restrictions de f' et f'' à V_i. Or, d'après la proposition 4 [*cf.* (4.4.2.)] et le théorème 4, l'application :

$$\mathrm{Hom}^r(V_i, F) \times \mathrm{Hom}^r(V_i, F) \to \mathrm{Hom}^r(V_i, F)$$

définissant l'addition, est continue. Donc $(f' + f'') \mid V_i$ est voisin de $f \mid V_i$ dès que $f' \mid V_i$ et $f'' \mid V_i$ sont voisins de $f \mid V_i$; d'où le résultat.

REMARQUE. — Mis à part le cas où F est de dimension o, la structure de R_+-module [sous-jacente à une structure de noyau de $\mathrm{Hom}^r(E, R_+)$-module sur $\mathrm{Hom}^r(E, F)$] est continue dans le seul cas où E est compact. On peut compléter comme suit le corollaire de la proposition 4 [*cf.* (4.4.2)] :

Corollaire de la proposition 4'. — *Lorsque E est compact*, $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ *est localement continûment contractile.*

Proposition 5. — *Soient E, F, H trois variétés; soit r un entier* $\geqq 1$. *L'application*

$$\mathrm{Hom}^r(E, F) \times \mathrm{Hom}^r(F, H) \to \mathrm{Hom}^r(E, H)$$

canoniquement définie par la composition, est continue (pour la topologie $\mathcal{C}^r$) *en tout point $f = (f_1, f_2)$ tel que f_1 soit une application propre* (*).

Démonstration. — Soit $f = (f_1, f_2)$ comme dans l'énoncé. Soit (W_j) une famille localement finie de sous-variétés compactes (de codimension o) de F dont les intérieurs recouvrent F; soit (V_i) une famille analogue relative à E, telle que, pour tout i, il existe $j(i)$ tel que $f_1(V_i)$ soit contenu dans l'intérieur de $W_{j(i)}$; puisque f_1 est propre, l'application : $i \to j(i)$ est propre (i.e., l'image réciproque de tout ensemble fini est finie). Pour tout i, tout $f' = (f'_1, f'_2)$ suffisamment voisin de f est tel que $(f'_2 \circ f'_1) \mid V_i$ ne dépend que de $f'_1 \mid V_i$ et $f'_2 \mid W_{j(i)}$; or l'application canonique

$$\mathrm{Hom}^r(V_i, W_{j(i)}) \times \mathrm{Hom}^r(W_{j(i)}, H) \to \mathrm{Hom}^r(V_i, H),$$

est continue d'après la propriété 2 de (4.1.2.) et le théorème 4; donc $f'_2 \circ f'_1 \mid V_i$ est voisin de $f_2 \circ f_1 \mid V_i$ dès que $f'_1 \mid V_i$ est voisin de $f_1 \mid V_i$, et $f'_2 \mid W_{j(i)}$ voisin de $f_2 \mid W_{j(i)}$. Pour tout (i, j), on obtient ainsi *une* condition portant sur $f'_1 \mid V_i$, et, puisque l'application : $i \to j(i)$ est propre, *un nombre fini* de conditions portant sur $f'_2 \mid W_j$; d'où le résultat.

CHAPITRE II.

Espaces de plongements.

1. Généralités sur les espaces de plongements ([18]) et les groupes de difféomorphismes.

1.1 Applications ayant mêmes relations d'incidence.

1.1.1. Définitions. — Soient E et F deux variétés, f et f' deux applications de E dans F. On dit que f' *respecte les relations d'incidence de f*, si, pour tout $x \in E$ et toute face F_q de F, $f.x \in F_q$ entraîne $f'.x \in F_q$. Si chacune des applications f, f' respecte les relations d'incidence de l'autre, on dit que f et f' *ont mêmes relations d'incidence.*

(*) Je remercie M. C. Morlet de m'avoir signalé une inexactitude dans un énoncé antérieur de cette proposition.

([18]) Pour la définition et quelques propriétés immédiates des plongements, *cf.* I, (1.3).

([19]) *Cf.* I, (4.4).

NOTATIONS. — Pour toute application f de E dans F, on note $\mathrm{Hom}^r(E, F; f)$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ formé des applications qui ont mêmes relations d'incidence que f. Notation analogue : $\mathrm{Pl}^r(E, F; f)$. En tant que sous-espaces de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$, ces espaces sont munis de la topologie $\mathcal{C}^r$ [*cf.* I, (4.3)].

Deux propriétés immédiates :

1. Pour tout $f \in \mathrm{Pl}^r(E, F)$, f respecte les relations d'incidence de tous les $f' \in \mathrm{Pl}^r(E, F)$ qui sont assez voisins de f. Il en résulte que si $f' \in \mathrm{Pl}^r(E, F)$ est assez voisin de f et respecte les relations d'incidence de f alors $f' \in \mathrm{Pl}^r(E, F; f)$.

2. $\mathrm{Hom}^r(E, F; f)$ est un noyau de sous-module pour toute structure linéaire locale [19] d'origine f sur $\mathrm{Hom}^r(E, F)$.

1.1.2. *Une condition suffisante pour qu'une application soit localement un plongement.*

DÉFINITION. — Soient E et F deux variétés et a un point de E; soit $f \in \mathrm{Hom}^r(E, F)$. Soit H la plus petite face de F qui contienne l'image par f d'au moins un voisinage de a; et soit L la face support de $f.a$ [*cf.* I, (1.3.2), 4°]. On dit que *f est transversal en a au bord de F* si l'image par f de $\tilde{\mathcal{E}}_a(E)$ [*cf.* I, (1.2.5)] et $\tilde{\mathcal{E}}_{f.a}(L)$ engendrent $\tilde{\mathcal{E}}_{f,a}(H)$.

EXEMPLE. — Si f est un plongement, alors, pour tout $a \in E$, f est transversal en a au bord de F.

LEMME. — *Soient E, F, a, f comme dans la définition ci-dessus; on suppose en plus que f est un plongement. Alors, tout* $f' \in \mathrm{Hom}^r(E, F; f)$ [*cf.* (1.1.1)], *qui est de rang maximal en a et transversal en a au bord de F, est un plongement au voisinage de a.*

DÉMONSTRATION. — On identifie E à son image par f; on peut supposer E connexe; le support H de E est alors aussi la plus petite face de F contenant $f'(E)$; d'après la définition de la transversalité, f' est transversal en a au bord de H, de sorte qu'on peut se borner au cas où $H = F$.

Soient n et m les dimensions respectives de F et E. Soient (x, y, z, u) un système de coordonnées dans R^n, et ψ un plongement de la partie $\{u \geqq 0\}$ de R^n sur un voisinage U de a dans F, tels que les équations de l'intersection V de U et E soient

$$\begin{cases} z = 0, \\ y \geqq 0. \end{cases}$$

On pose $f.a = a'$. Le point a' a même indice dans F [*cf.* I, (1.2.3)] que le point a; on considère un système de coordonnées locales de F, d'origine a'; la famille u', formée des coordonnées astreintes à être positives sur F, est en correspondance biunivoque avec la famille u; on peut supposer, par exemple, que $u = (u_l)$ et $u' = (u'_l)$ dependent du même ensemble d'indices, et que pour tout l, et pour tout $b \in U$, on ait

$$(1) \qquad u_l(b) = 0 \Rightarrow u_l(f'(b)) = 0,$$

$$(2) \qquad u_l(b) \geqq 0 \Rightarrow u_l(f'(b)) \geqq 0.$$

Soit $U^\star$ le prolongement local de F défini par ψ (c'est l'espace R^n « collé à E » à l'aide de l'application ψ); soit $V^\star$ la partie de $U^\star$ définie par $\{z = 0\}$. Les coordonnées locales d'origine a' définissent $U'^\star$, analogue à $U^\star$. Si U est assez petit, f' se prolonge en un *plongement* $f'^\star : V^\star \to U'^\star$.

Les équations locales du support L de a' sont $\{u' = 0\}$. Il résulte donc de la transversalité de f' au bord de F qu'on peut compléter u' en un système (x', z', u') de coordonnées locales de $U'^\star$, d'origine a', de façon que les équations locales de l'image $V'^\star$ de $V^\star$ par f' soient $\{z' = 0\}$. Le système (x', u') est donc un système de coordonnées locales d'origine a' sur $V'^\star$; les transportées par f' des coordonnées (x, y, u) constituent aussi un tel système, qu'on note (x'', y'', u''). Mais, d'après (1) et (2) [les dérivées partielles étant prises dans le système (x'', y'', u'')], $\dfrac{\partial u_l}{\partial u''_{l'}}$ est nul ou non suivant que $l' \neq l$ ou $l' = l$. Il en résulte que le système (x'', y'', u') est encore un système de coordonnées locales d'origine a' sur $V'^\star$; ces nouvelles coordonnées s'expriment en fonction de (x', u') par des formules du type

$$(3) \qquad x'' = \varphi(x', u'),$$

$$(4) \qquad y'' = \chi(x', u').$$

Le système (x'', y'', z', u'), où x'' et y'' sont définies respectivement par (3) et (4), est un système de coordonnées locales d'origine a' dans $U'^\star$; dans ce système les équations locales de F sont $\{u' \geqq 0\}$; et celles de $f'(E)$ sont $\{z' = 0;\ y'' \geqq 0;\ u' \geqq 0\}$; donc f' est un plongement au voisinage de a.

1.2. Applications voisines d'un plongement.

PROPOSITION 1. — *Soient E et F deux variétés; soit $f \in \mathrm{Pl}^r(E, F)$ (avec r entier* $\geqq 1$ ou $r = \infty$). *L'espace* $\mathrm{Pl}^r(E, F; f)$ *est ouvert dans* $\mathrm{Hom}^r(E, F; f)$ [notations définies en (1.1.1)].

COROLLAIRE 1. — *Si F est sans bord*, $\mathrm{Pl}^r(E, F)$ *est ouvert dans* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$.

COROLLAIRE 2. — *Toute structure linéaire locale* ([20]) *d'origine f sur* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ *induit une structure linéaire locale d'origine f au $\mathcal{C}^1$-voisinage de f dans* $\mathrm{Pl}^r(E, F; f)$.

Le corollaire 1 est un cas particulier de la proposition 1. Le corollaire 2 se démontre comme suit : toute structure linéaire locale d'origine f sur

([20]) *Cf.* I, (4.4).

$\mathrm{Hom}^r(E, F)$ est induite par une structure analogue sur $\mathrm{Hom}^1(E, F)$; d'après la propriété 2 de (1.1.1), $\mathrm{Hom}^1(E, F; f)$ est un noyau de sous-module pour cette structure; celle-ci induit donc, d'après la proposition 1, une structure linéaire locale au $\mathcal{C}^1$-voisinage de f dans $\mathrm{Pl}^1(E, F; f)$; $\mathrm{Pl}^r(E, F; f)$ est un noyau de sous-module pour cette dernière structure.

La démonstration de la proposition 1 utilise le

LEMME. — *Soit F une variété munie d'une distance d; soit E une sous-variété de F. Pour toute fonction positive ξ définie sur E, et pour toute partie A de E, on pose*

$$\bigcup_{(x,y)\in A\times F;\, d(x,y)\leq \xi(x)} \{y\} = \mathcal{B}(A, \xi).$$

Soient (U_i) et (V_i) deux recouvrements localement finis de E, dépendant du même ensemble d'indices, tels que les U_i et les V_i soient des ouverts relativement compacts, et que, pour tout i, $\overline{V_i}\subset U_i$. Il existe une fonction ξ continue strictement positive définie sur E telle que, pour tout i, on ait

$$d(\mathcal{B}(V_i, \xi), \mathcal{B}(E-U_i, \xi)) > 0. \tag{1}$$

Démonstration du lemme. — On pose, pour tout i,

$$d(V_i, E-U_i) = \delta_i,$$

δ_i est un nombre positif. Pour tout $x\in E$, on pose

$$\inf_{j;\, x\in V_j} \delta_j = \delta(x).$$

La fonction $E\ni x\to \delta(x)$ est localement minorée par une constante positive. On pose d'autre part, pour tout $x\in E$:

$$\bigcup_{j;\, x\notin U_j} \overline{V}_j = P_x$$

et

$$d(x, P_x) = \delta'(x),$$

$\delta'(x)$ est un nombre positif (car P_x est un fermé qui ne contient pas x), et même $\delta'(x)$ est localement minorée par une constante positive [car, pour x' assez voisin de x, $P_{x'}$ est contenu dans P_x, et par conséquent $\delta(x')\geq d(x', P_x)$].

On va montrer que la condition (1) est remplie dès que ξ vérifie

$$\xi(x)\leq \frac{1}{3}\delta(x) \qquad \text{pour tout } x\in E \tag{2}$$

et

$$\xi(x)\leq \frac{1}{3}\delta'(x) \qquad \text{pour tout } x\in E. \tag{3}$$

En effet, d'après (2) :

$$d(\mathcal{B}(V_i, \xi), \mathcal{B}(E - U_i, \xi)) \geqq d(V_i, \mathcal{B}(E - U_i, \xi)) - \frac{1}{3}\delta_i$$

et d'après (3) :

$$d(V_i, \mathcal{B}(E - U_i, \xi)) = \inf_{x \in E - U_i} d(V_i, \mathcal{B}(\{x\}, \xi)) \geqq \frac{2}{3}\delta_i,$$

d'où

$$d(\mathcal{B}(V_i, \xi), \mathcal{B}(E - U_i, \xi)) \geqq \frac{1}{3}\delta_i > 0.$$

Démonstration de la proposition 1. — D'après le lemme 1.1.2, tout élément f' de $\mathrm{Hom}^r(E, F; f)$ assez voisin de f est un plongement local. Il suffit donc [*cf.* I, (1.3.2), propriété 1°] de montrer que tout plongement local assez voisin de f dans $\mathrm{Hom}^r(E, F; f)$ induit un homéomorphisme de E sur son image; on va montrer qu'il en est ainsi dans le cas particulier où E est un cube, puis dans le cas général.

(a) *Cas particulier : E est difféomorphe à un cube fermé.* — Grâce à la convexité du cube, ce cas se ramène au cas où E est un intervalle fermé, pour lequel la démonstration est immédiate.

(b) *Cas général.* — Soit d une distance sur F; soient (U_i) et (V_i) comme dans le lemme ci-dessus ; on suppose en plus que tous les U_i sont difféomorphes au cube $[0, 1]^m$ (où m est la dimension de E). Il résulte du (a) qu'il existe pour tout i un voisinage $\mathcal{V}'_i$ de $f \mid U_i$ dans $\mathrm{Hom}^r(U_i, F; f \mid U_i)$ qui soit formé de plongements; on note $\mathcal{V}_i$ l'image réciproque de $\mathcal{V}'_i$ par l'application canonique

$$\mathrm{Hom}^r(E, F; f) \to \mathrm{Hom}^r(U_i, F; f \mid U_i);$$

on pose

$$\bigcap_i \mathcal{V}_i = \mathcal{V}.$$

Soit ξ la fonction fournie par le lemme; on note $\mathcal{W}$ le $\mathcal{C}^0$-voisinage de f dans $\mathrm{Hom}^r(E, F; f)$ défini par la condition

$$d(f.x, f'.x) \leqq \xi(x) \qquad \text{pour tout } x \in E$$

de sorte que, pour tout $f' \in \mathcal{W}$ et tout i, on ait

$$(4) \qquad d(f'(V_i), f'(E - U_i)) > 0.$$

On pose $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{U}$. Pour $f' \in \mathcal{U}$ et pour tout i, $f'(V_i)$ est ouvert dans $f'(U_i)$; et d'après (4), $f'(U_i)$ est un voisinage de $f'(V_i)$ dans $f'(E)$; donc *l'image par f' de tout ouvert de E est un ouvert de $f'(E)$.*

Notons Δ_E (resp. Δ_F) la diagonale de $E \times E$ (resp. $F \times F$) ; notons encore f' l'application $E \times E' \to F \times F'$ canoniquement définie par f' ; et posons

$$\bigcup_i U_i \times U_i = A \, ; \qquad \bigcup_i V_i \times (E - U_i) = B.$$

On a

$$E \times E = A \cup B.$$

Dès que $f' \in \mathcal{V}$, $f'(A - \Delta_E)$ ne rencontre pas Δ_F; et dès que $f' \in \mathcal{V}'$, $f'(B)$ ne rencontre pas Δ_F; donc tout $f' \in \mathfrak{U}$ est une *injection;* ceci achève la démonstration.

1.3. Étude de l'inverse d'un plongement.

1.3.1. — De la théorie homologique des variétés résulte le

LEMME. — *Soit F une variété (topologique) à bord, de bord ∂F. Soient V et W deux compacts de F tels que V soit intérieur à W. Toute application continue h de W dans F qui envoie $W \cap \partial F$ dans ∂F et qui est assez voisine au sens $\mathcal{C}^0$ de l'injection de W dans F, est telle que $h(W) \supset V$.*

1.3.2. LEMME. — *Soient E et F deux variétés; soit H une sous-variété de F: on note h l'injection de H dans F. Soit A la partie de $\mathrm{Pl}^r(E, F)$ formée des applications f telles que l'image de E par F contienne H.*

1° *L'application j :*

$$A \ni f \to j(f) \in \mathrm{Hom}^r(H, E),$$

où $j(f)$ est déterminé par la condition

$$f \circ j(f) = h,$$

est r-différentiable [au sens de I, (4.1.1)].

2° *Si en plus, E, F et H ont même dimension, et si H est fermée dans F, alors, pour tout $f \in \mathrm{Pl}^r(E, F)$ tel que H soit contenu dans l'intérieur de l'image de E par f, la restriction de j à $A \cap \mathrm{Pl}^r(E, F; f)$ est continue au point f, et prend ses valeurs dans $\mathrm{Pl}^r(H, E)$.*

DÉMONSTRATION. — 1° Soit V une variété; soit r' un entier tel que $1 \leq r' \leq r$; soit k une application r'-différentiable de V dans A; l'application k' (canoniquement associée à k)

$$V \times E \ni (x, y) \to (x, k(x).y) \in V \times F$$

est r'-différentiable; en plus c'est un r'-plongement (vérification immédiate d'après la définition même d'un plongement). L'image de ce plongement contient celle du r-plongement l

$$V \times H \ni (x, y) \to (x, h.y) \in V \times F.$$

Donc d'après I, (1.3.2), propriété 3, il existe une application r-différentiable l' de $V \times H$ dans $V \times E$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & V \times E \arrow[d, "k'"] \\ V \times H \arrow[ur, "l'"] \arrow[r, "l"] & V \times F \end{tikzcd}$$

soit commutatif. De la commutativité de ce diagramme résulte que $p \circ l'$ (où p est la projection $V \times E \to E$) est l'application de $V \times H$ dans E canoniquement associée à $j \circ k$.

2° Soit n la dimension commune de E, F, H. Soit f comme dans l'énoncé; on identifie E à son image par f. Soient (V_i) et (W_i) $(i = 1, 2, \dots)$ deux suites localement finies de sous-variétés compactes de dimension n de E, telles que les intérieurs (relativement à E) des V_i recouvrent E, et que, pour tout i, V_i soit contenu dans l'intérieur (relativement à E) de W_i. Pour tout i, $V_i \cap H$ est compact et contenu dans l'intérieur (relativement à F) de W_i ([21]); il existe donc, d'après la proposition 2 de I [*cf.* I, (3.2.4)] une sous-variété X_i de H qui soit contenue dans l'intérieur (relativement à F) de W_i et qui contienne $V_i \cap H$; la suite des X_i est localement finie et leurs intérieurs recouvrent H. D'après le lemme 1.3.1, pour tout f' assez voisin de f dans $\mathrm{Pl}^r(E, F; f)$, $f'(W_i)$ contient X_i, et ceci pour tout i. L'application qui, à un élément de $\mathrm{Pl}^r(W_i, F; f | W_i)$ assez voisin de $f | W_i$, associe la restriction de son inverse à X_i est r-différentiable d'après le 1°, elle est donc continue d'après le théorème 4 [*cf.* I, (4.5.3)]. Comme l'image canonique de $\mathrm{Pl}^r(E, F; f)$ dans $\mathrm{Pl}^r(W_i, F)$ est dans $\mathrm{Pl}^r(W_i, F; f | W_i)$, la continuité de la restriction de j à $A \cap \mathrm{Pl}^r(E, F; f)$ résulte alors de I, (4.5.4). Le fait que j prenne ses valeurs dans $\mathrm{Pl}^r(H, F)$ résulte immédiatement de I, (1.3.2), propriété 3.

1.4. Groupes de difféomorphismes.

1.4.1. Notations. — Soit F une variété; on note $G^r(F)$ le groupe des r-difféomorphismes de F, muni de la topologie $\mathcal{C}^r$. On note e l'application identique de F. Pour toute partie M de F, on note $G^r_M(F)$ la partie de $G^r(F)$ formée des difféomorphismes qui induisent l'identité sur M.

1.4.2. Proposition 2. — *Soit F une variété; soit M une partie quelconque de F.*

1° *Il existe un $\mathcal{C}^1$-voisinage de e dans* $\mathrm{Hom}^r_M(F, F; e)$ *qui soit formé de difféomorphismes.*

([21]) En effet, V_i est dans l'intérieur relatif de W_i, considéré comme sous-variété de E; donc si $H \cap V_i$ rencontre une face de W_i, celle-ci est contenue dans le bord de E; mais, H étant dans l'intérieur relatif de E considéré comme sous-variété de F, toute face de E rencontrée par H est dans le bord de F.

2° *On peut munir* $G^r_M(F)$ *de structures* $\mathcal{C}^1$*-locales de* Hom^r (F, R_+)*-modules d'origine e qui sont r-différentiables et continues, et pour lesquelles* $G^r_M(F)$ *est localement convexe.*

3° $G^r_M(F)$ *est un groupe r-différentiable.*

4° $G^r_M(F)$ *est un groupe topologique.*

Démonstration. — On peut se borner au cas où M est vide.

1° Soient (V_i) et (W_i) deux suites localement finies de compacts de F, telles que les intérieurs des V_i recouvrent F, et que, pour tout i, V_i soit intérieur à W_i. D'après le lemme 1.3.1, il existe, pour tout i, un voisinage $\mathcal{V}_i$ de e dans Hom$^0(F, F; e)$ déterminé par des conditions ne portant que sur la restriction à W_i, tel que, pour $f \in \mathcal{V}_i$, $f(W_i) \supset V_i$. Soit $\mathcal{V} = \bigcap_i \mathcal{V}_i$; c'est un voisinage de e dans Hom$^0(F, F; e)$ dont tous les éléments sont des surjections. D'après la proposition 1 [*cf.* (1.2)] tout élément de Hom$^r(F, F; e)$ assez voisin de e au sens de $\mathcal{C}^1$ est un plongement ; or un plongement surjectif est un difféomorphisme; d'où le 1°.

Le 2° résulte du 1° et de I (4.5.4), proposition 4'. Le 3° résulte du 1° du lemme 1.3.2 et de I (4.1.2) propriété 2. Le 4° résulte du 2° du lemme 1.3.2 et de I (4.5.4), proposition 5.

1.5. Groupes d'isotopies.

1.5.1. *Définitions et notations.* — Soit F une variété; soit G un gronpe de r-difféomorphismes de F. On appelle *r-isotopie* (sous-entendu : de F) *associée à* G toute route r-différentiable [*cf.* I, (4.2)] d'origine e dans G. Une r-isotopie peut donc être considérée comme un élément de Hom$^r(I \times F, F)$ ou encore de Difhom$^r(I, G)$ [*cf.* I, (4.1.2)]. On notera toujours Γ l'ensemble des r-isotopies associées à un groupe G de r-difféomorphismes [par exemple, au groupe $G^r_M(F)$ est associé $\Gamma^r_M(F)$].

1.5.2. — Soit Γ l'ensemble des r-isotopies associées à un groupe G de r-difféomorphismes d'une variété F; Γ est muni naturellement d'une structure de groupe par l'application

$$\text{Difhom}^r(I, G) \times \text{Difhom}^r(I, G) \to \text{Difhom}^r(I, G)$$

canoniquement associée aux applications

$$I \ni t \to (t, t) \in I \times I$$

et

$$G \times G \ni (g, g') \to g.g'^{-1} \in G.$$

[Autrement dit, pour γ et $\gamma' \in \Gamma$, le produit $\gamma.\gamma'^{-1}$ est défini par

$$(\gamma.\gamma'^{-1})_t.x = \gamma_t \circ (\gamma'_t)^{-1}.x \qquad \text{pour} \quad t \in I \quad \text{et} \quad x \in F.]$$

Il résulte de (0.3.4) que Γ *est un groupe r-différentiable*. On peut retrouver ce résultat [qui étend au cas des isotopies le 3° de la proposition 2, *cf.* (1.4.2)] et étendre de même au cas des isotopies les autres résultats de la proposition 2, en remarquant que le groupe $\Gamma^r(F)$ de toutes les r-isotopies de F s'identifie canoniquement à un sous-groupe du groupe des r-difféomorphismes de $E \times I$ (celui formé par les éléments qui laissent invariante la projection sur I). En particulier, on montre ainsi :

$\Gamma^r(F)$ (*et par conséquent tout groupe* Γ *de r-isotopies de* F) *muni de la topologie* $\mathcal{C}^r$ *des applications* $I \times F$ *dans* F, *est un groupe topologique*. Notons encore e l'élément neutre de Γ (ou *isotopie identique*); *on peut munir* Γ *de structures linéaires* $\mathcal{C}^1$*-locales d'origine e qui sont r-différentiables et continues*.

1.5.3. *Application canonique de* Γ *sur G. Opérations des groupes d'isotopies dans les espaces de plongements.*

Lemme. — *Soient F une variété, M une partie de F, G le groupe des r-difféomorphismes de F qui induisent l'identité sur M,* Γ *le groupe des r-isotopies associées à G. Soit* $\overline{\omega}$ *l'application canonique*

$$\Gamma \ni \gamma \to \gamma_1 \in G.$$

(a) $\overline{\omega}$ *est r-différentiable et continue.*

(b) *Il existe un* $\mathcal{C}^1$*-voisinage* $\mathcal{V}$ *de e dans G tel que* $\overline{\omega}$ *admette au-dessus de* $\mathcal{V}$ *une section r-différentiable et continue.*

Démonstration. — (a) $\overline{\omega}$ est r-différentiable d'après I, (4.1.2), formule (4), et continue d'après I(4.3.4), propriété 2.

(b) D'après le 2° de la proposition 2 [*cf.* (1.4.2)] on peut munir G d'une structure linéaire $\mathcal{C}^1$-locale r-différentiable d'origine e; d'où en particulier, sur un $\mathcal{C}^1$-voisinage $\mathcal{V}$ assez petit de e dans G, une application r-différentiable $\mathcal{V} \times I \ni (g, t) \to tg \in G$. Soit χ la fonction définie en I, (4.2); d'après I, (4.1.2), formule (3), l'application

$$\mathcal{V} \ni g \to \{t \to (\chi . t) g\} \in \Gamma \tag{1}$$

est r-différentiable. Cette application est continue d'après I, (4.5.4), et c'est une section pour $\overline{\omega}$.

Application du (a). — Soient F, G et Γ comme ci-dessus; soit E une variété. Le groupe G opère à gauche dans $\mathrm{Pl}^r(E, F)$, l'application canonique

$$G \times \mathrm{Pl}^r(E, F) \to \mathrm{Pl}^r(E, F) \tag{2}$$

étant définie par composition; elle est r-différentiable d'après I, (4.1.2), propriété 2, et elle est continue d'après I, (4.5.4), proposition 5. Le groupe Γ opère lui aussi à gauche, r-différentiablement et continûment, dans $\mathrm{Pl}^r(E, F)$, l'application canonique

$$(3) \qquad \Gamma \times \mathrm{Pl}^r(E, F) \to \mathrm{Pl}^r(E, F)$$

étant composée de (2) et de l'application ($\overline{\omega} \times$ identité) de $\Gamma \times \mathrm{Pl}^r(E, F)$ dans $G \times \mathrm{Pl}^r(E, F)$.

2. Premier théorème d'isotopie et de prolongement ; premier théorème de fibration.

2.1. Le lemme de prolongement.

2.1.1. *Rappel : la théorie de Whitney sur le prolongemeat des fonctions différentiables* (22). — Soit A un fermé de R^n; soit r un entier ≥ 1 ; soit $f = \{ (f^p) ; p = (p_1, \ldots, p_n), |p| \leq r \}$ un système de fonctions réelles définies sur A. On pose, pour tout p tel que $|p| \leq r$ et pour tout

$$(x, y) \in A \times R^n;$$

$$T_x^p f[y] = \sum_{|p+q| \leq r} \frac{f^{p+q}.x}{q!} (y-x)^q.$$

On dit que f est une *fonction r fois continûment différentiable sur A* (terminologie de Whitney) ou un *champ W-taylorien de classe C^r sur A* (terminologie de Glaeser) si pour tout compact $K \subset A$:

$$\frac{f^p.y - T_x^p f[y]}{|y-x|^{r-p}} \to 0 \quad \text{uniformément pour} \begin{cases} (x, y) \in K \times K, \\ |y-x| \to 0. \end{cases}$$

[Dans le cas où A est une variété au sens de I, (1.1.2), cette définition est équivalente à celle d'une fonction f^0 de classe C^r; et, pour tout p tel que $|p| \leq r$, f^p est la dérivée d'ordre p de f^0.]

Whitney démontre l'existence d'un « recouvrement standard » (J^i) de $R^n - A$ par des cubes ouverts et d'une « partition de l'unité standard » (u^i) subordonnée à (J^i) ayant les propriétés suivantes. Soit x^i une projection du centre de J^i sur A; on pose, quel que soit le champ f :

$$\begin{cases} f^\star.y = f^0.y & \text{pour} \quad y \in A, \\ f^\star.y = \sum_i (u^i.y)\, T_{x^i}^0[y] & \text{pour} \quad y \in R^n - A ; \end{cases}$$

$f^\star$ est une fonction de classe C^r définie sur R^n, telle que, pour tout p tel que $|p| \leq r$, $D^p f^\star$ coïncide avec f^p sur A. On notera que l'application $\{f \to f^\star\}$

(22) *Cf.* Whitney [1] ou Glaeser [1]. Pour les inégalités de Whitney, *cf.* Whitney [2]. Pour un résumé de la théorie, *cf.* Schwartz [2].

est *linéaire*, et que si f est la restriction à A du champ défini par un polynôme de degré $\leq r$, alors f^* est précisément égal à ce polynôme.

Les inégalités de Whitney. — Supposons en plus A *compact*, et *régulier* au sens de Whitney, c'est-à-dire vérifiant la propriété :

$P(A)$. Il existe un nombre μ tel que, quels que soient les points x et y de A assez voisins, on puisse les joindre dans A par un chemin de longueur $L \leq \mu |y-x|$.

WHITNEY montre alors que, pour tout compact K de R^n, il existe une constante C_K telle que, pour tout champ W-taylorien f de classe C^r sur A, et pour tout p tel que $|p| \leq r$:

$$[W] \qquad \sup_{x \in K} |D^p f^*.x| \leq C_K \sup_{x \in A;\, |q| \leq r} |f^q.x|.$$

2.1.2. LEMME DE PROLONGEMENT. — *Soient F une variété, E une sous-variété fermée de F; on note f l'injection de E dans F, et e l'application identique de F. Soit V un voisinage de E dans F; soit r un entier ≥ 1.*

Il existe un $\mathcal{C}^1$-voisinage $\mathcal{V}$ de f dans $\mathrm{Hom}^r(E, F; f)$ *tel que l'application canonique*

$$(1) \qquad \mathrm{Hom}^r_{F-V}(F, F; e) \to \mathrm{Hom}^r(E, F; f)$$

admette au-dessus de $\mathcal{V}$ une section continue s telle que $s(f) = e$.

DÉMONSTRATION. — On commence par énoncer et démontrer un « lemme local ».

ÉNONCÉ DU LEMME LOCAL. — *Soit $(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, y_\delta, y_\zeta)$ un système de coordonnées dans R^n tel que $x = (x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)$ soit un point de R^m. Soit F la partie du cube $[-1, +1]^n$ définie par*

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} (2) & x_\gamma \geq 0, \\ (3) & y_\zeta \geq 0. \end{cases}$$

Soit E la partie de F définie par

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} (4) & x_\beta \geq 0, \\ (5) & y = 0. \end{cases}$$

Soit $\eta \in]0, 1[$; on note ηF (resp. ηE) l'homothétique de F (resp. E) dans le rapport η par rapport à l'origine. Soit f l'injection de E dans F; il existe un C^1-voisinage $\mathcal{V}$ de f dans $\mathrm{Hom}^r(E, F; f)$ *tel que l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}^r_{F-\eta F}(F, F; e) \to \mathrm{Hom}^r_{E-\eta E}(E, F; f)$$

admette au-dessus de $\mathcal{V}$ une section continue s telle que $s(f) = e$.

Démonstration du lemme local. — Soit $f' \in \mathrm{Hom}^r_{E-\eta E}(E, F; f)$; pour $x \in E$, on note $X_{\alpha;f'}.x$, $X_{\beta;f'}.x$, etc., les coordonnées de $f'.x$ dans R^n.

Puisque f' a mêmes relations d'incidence que f, on a $Y_{\zeta;f'}.x = 0$ pour tout $x \in E$; on peut donc prolonger $Y_{\zeta;f'}$ en posant $Y^{\star}_{\zeta;f'}.(x, y) = y_\zeta$.

On pose $E \cup (\overline{F - \eta F}) = A$; A est régulier au sens de Whitney. Le champ défini par les dérivées jusqu'à l'ordre r de $X_{\alpha;f'}$ sur E, et de x_α sur $\overline{F - \eta E}$, est un champ W-taylorien d'ordre r sur A ; d'après (**2.1.1**), ce champ peut se prolonger en celui d'une fonction (de classe C^r) $X^{\star}_{\alpha;f'}$, définie sur F, telle que $X_{\alpha;f} = x_\alpha$ (puisque x_α est un polynôme de degré 1); d'après les inégalités de Whitney, $X_{\alpha;f'}$ dépend continûment de f' au sens C^r ; de cette continuité résulte en particulier que, si f' est assez voisin de f au sens C^0, on aura bien

$$-1 \leqq X^{\star}_{\alpha;f'} \leqq +1.$$

On fait de même avec les $X_{\beta;f'}$ et les $Y_{\delta;g'}$. Pour les coordonnées du type x_γ, il y a une difficulté supplémentaire due à l'inégalité (2). On procède comme suit. Soit x_{γ_1} une telle coordonnée, on considère la restriction à $E \cap \{ x_{\gamma_1} = 0 \}$ du champ défini sur E par $X_{\gamma_1;f'}$; on prolonge ce champ à tout $F \cap \{ x_{\gamma_1} = 0 \}$ en posant $X^{\star}_{\gamma_1;f'} = 0$ pour $x_{\gamma_1} = 0$, et en prolongeant successivement chacune des dérivées partielles $\dfrac{\partial X_{\gamma_1;f'}}{\partial x_{\gamma 1}}, \ldots, \dfrac{\partial^r X_{\gamma_1;f'}}{\partial x^r_{\gamma_1}}$ à l'aide de la formule de Whitney (et toutes les autres dérivées partielles de $X_{\gamma_1;f'}$ par zéro). On obtient ainsi un champ W-taylorien de classe C^r sur $E \cup (F \cap \{ x_{\gamma_1} = 0 \})$; on prolonge ce champ, par la formule de Whitney, en celui d'une fonction $X_{\gamma;f'}$ de classe C^r sur F; pour f' assez voisin de f au sens C^1, $\dfrac{\partial X^{\star}_{\gamma_1;f'}}{\partial x_{\gamma 1}}$ est positif sur tout F; donc $X^{\star}_{\gamma_1;f}$ est positif ou nul sur tout F.

Passage du lemme local au lemme global. — Soient m et n les dimensions respectives de E et F. Puisque E est fermé dans F, il existe une famille localement finie (ψ_i) de cartes cubiques fermées de F ayant les propriétés suivantes :

(a) Pour tout i, la source de ψ_i est définie dans $[-1, +1]^n$ par des équations du type (I) ci-dessus.

(b) Si l'on note F_i l'image de ψ_i, et si l'on pose $F_i \cap E = E_i$, alors $\psi_i^{-1}(E_i)$ est défini par les équations (II) ci-dessus.

(c) Il existe, pour tout i, $\eta_i \in] 0, 1 [$ tel que $\eta_i F_i \subset V$, et que les $\overset{\circ}{\widehat{\eta_i E_i}}$ recouvrent E.

On munit F d'une métrique riemannienne $\mathfrak{M}$ adaptée à ∂F et à E ; d'après (**1.1.1**), propriété **2**, la métrique $\mathfrak{M}$ définit sur $\mathrm{Hom}^r_{F-F}(F, F; e)$ et $\mathrm{Hom}^r(E, F; f)$ des structures linéaires locales d'origines respectives e et f, et l'application canonique (1) est *linéaire* pour ces structures. Soit (λ_i) une partition différentiable de l'unité sur E, subordonnée au recouvrement $\left(\overset{\circ}{\widehat{\eta_i E_i}}\right)$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de f dans $\mathrm{Hom}^r(E, F; f)$; si $\mathcal{V}$ est assez petit au sens C^0, alors $\lambda_i f'$ est défini pour tout $f' \in \mathcal{V}$ et pour tout i; on note $\lambda_i f' \mid E_i = f'_i$; f'_i est un élément de $\mathrm{Hom}^r_{E_i - \eta_i E_i}(E_i, F_i; f_i)$. Le lemme local fournit, pour tout i, un C^1-voisinage $\mathcal{V}_i$ de $f \mid E_i$ dans $\mathrm{Hom}^r_{E_i - \eta_i E_i}(E_i, F_i; f_i)$, et une section $s_i: \mathcal{V}_i \to \mathrm{Hom}^r_{F_i - \eta_i F_i}(F_i, F_i; e_i)$ telle que $s_i(f_i) = e_i$. Si $\mathcal{V}$ est assez petit au sens C^1, alors $f'_i \in \mathcal{V}_i$ pour tout i et tout $f' \in \mathcal{V}$; $s_i(f'_i)$ est alors défini, et se prolonge canoniquement (par l'identité) en un élément de $\mathrm{Hom}^r(F, F; e)$ qu'on note encore $s_i(f'_i)$, qui, d'après la propriété (c) ci-dessus, est dans $\mathrm{Hom}^r_{F-V}(F, F; e)$, et qui dépend continûment (au sens C^r) de f'. Si $\mathcal{V}$ est assez petit au sens C^0, alors la somme localement finie $\sum_i s_i(f'_i)$ est définie, notons-la $s(f')$; chaque somme partielle finie de $s(f')$ dépend continûment de f' d'après la continuité de la structure linéaire locale [*cf.* I, (4.5.4), proposition 4']; et, d'autre part, la restriction de $s(f')$ à F_i ne dépend que de la restriction de f' aux E_j tels que F_j rencontre F_i; donc d'après le critère I. (4.3.3), $s(f')$ dépend continûment de f'. D'après la linéarité de l'application (1), s est bien une section pour cette application; enfin, $s(f) = e$ puisque, pour tout i, $s_i(f_i) = e_i$.

2.2. Le premier théorème d'isotopie et de prolongement et ses corollaires.

2.2.1. Théorème 5. (« *Premier théorème d'isotopie et de prolongement* »). — *Soient F une variété, E une sous-variété fermée de F, f l'injection de E dans F. Soit M un fermé de E. Soit r un entier $\geqq 1$. On note* $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ *l'espace, muni de la topologie $\mathcal{C}^r$, des r-plongements de E dans F qui ont mêmes relations d'incidence que f [cf.* (1.1.1)] *et qui coïncident avec f sur M. Soit V un voisinage de E dans F; on note $\Gamma^r_{(F-V)\cup M}(F)$ le groupe des r-isotopies de F qui induisent l'isotopie identique sur $(F - V) \cup M$; on munit ce groupe de la topologie $\mathcal{C}^r$ des applications de $I \times F$ dans F.*

Il existe un $\mathcal{C}^1$-voisinage $\mathcal{V}$ de f dans $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ *tel que l'application canonique*

$$\varphi: \quad \Gamma^r_{(F-V)\cup M}(F) \ni \gamma \to \gamma . f \in \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$$

admette au-dessus de $\mathcal{V}$ une section continue telle que $s(f) = e$ (isotopie identique).

Remarque. — Le théorème 5 est d'une part un *théorème de prolongement :* pour tout $f' \in \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ assez voisin de f, il existe un difféomorphisme g' de F [induisant l'identité sur $(F - V) \cup M$] qui prolonge f'. D'autre part, c'est un *théorème d'isotopie*, car g' est l'extrémité d'une isotopie γ' de F.

En plus, cette isotopie peut être choisie en fonction continue de f' au $\mathcal{C}^1$-voisinage de f; bien entendu, cela entraîne *a fortiori* que g' peut être choisi en fonction continue de f' au $\mathcal{C}^1$-voisinage de f.

DÉMONSTRATION. — D'après le lemme de prolongement 2.1.2, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}^r_{(F-V)\cup M}(F, F; e) \to \mathrm{Hom}^r_M(E, F; f)$$

a au $\mathcal{C}^1$-voisinage de f une section continue passant par e. D'après le 1° de la proposition 2 [*cf.* (1.4.2)], tout élément de $\mathrm{Hom}^r(F, F; e)$ assez proche de e au sens $\mathcal{C}^1$ est un difféomorphisme : donc l'application canonique

$$G^r_{(F-V)\cup M}(F) \to \mathrm{Pl}\,^r_M\,(E, F; f)$$

a au $\mathcal{C}_1$-voisinage de f une section continue s_1 passant par e. D'après le (b) du lemme 1.5.3, l'application canonique

$$\Gamma^r_{(F-V)\cup M}(F) \to G^r_{(F-V)\cup M}(F)$$

a au $\mathcal{C}^1$-voisinage de e une section continue s_2 passant par l'isotopie identique. L'application composée $s_2 \circ s_1$ est définie au $\mathcal{C}^1$-voisinage de f dans $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$; on pose $s_2 \circ s_1 = s$.

2.2.2. *Quelques conséquences du théorème* 5.

COROLLAIRE 1. — *On conserve les notations et les hypothèses du théorème* 5, *sauf que E n'est plus supposée fermée. L'application canonique* φ *admet alors une section continue s* [*telle que* $s(f) = e$] *au-dessus d'un* $\mathcal{C}^r$*-voisinage de f dans* $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$.

DÉMONSTRATION. — C'est une conséquence immédiate du théorème 5, de la propriété 4 de I, (1.3.2), et de la propriété 5 de I, (4.3.4).

COROLLAIRE 2. (« *Premier théorème de fibration* »). — *Soient F une variété, H une sous-variété de F, E une sous-variété fermée de H. On note h* (*resp. f*) *l'injection de H* (*resp. E*) *dans F. Soit* $\mathrm{Pl}^r(H, F; h)$] [*resp.* $\mathrm{Pl}^r(E, F; f)$] *l'espace, muni de la topologie* $\mathcal{C}^r$, *des r-plongements de H* (*resp. E*) *dans F qui ont mêmes relations d'incidence que h* (*resp. f*). *L'application canonique*

$$\varphi:\quad \mathrm{Pl}^r(H, F; h) \to \mathrm{Pl}^r(E, F; f)$$

est une fibration topologique localement triviale [*en particulier, son image est ouverte et fermée dans* $\mathrm{Pl}^r(E, F; f)$].

DÉMONSTRATION. — L'application φ est continue d'après I, (4.3.4), propriété 2; d'après (1.5.3), le groupe $\Gamma^r(F)$ des r-isotopies de F opère à gauche continûment dans $\mathrm{Pl}^r(\mathrm{H}, F; h)$ et $\mathrm{Pl}^r(E, F; f)$, de façon compatible avec φ. Le corollaire 1 du théorème 5 affirme que l'application canonique

$$\Gamma^r(F) \ni \gamma \to \gamma . f \in \mathrm{Pl}^r(E, F; f)$$

a une section locale continue au voisinage de f; la même propriété a lieu en n'importe quel autre point de $\mathrm{Pl}^r(E, F; f)$. Le corollaire 2 résulte donc du 2° du lemme 2 de (0.4.4).

COROLLAIRE 3. — *Soient F une variété, E une r-sous-variété compacte de F; on note f l'injection de E dans F. Soit Γ le groupe de toutes les r-isotopies de F. Les classes d'équivalence définies par les opérations de Γ dans $\mathrm{Pl}^r(E, F; f)$ sont les composantes connexes de cet espace; elles sont en plus connexes par arcs.*

DÉMONSTRATION. — Ces classes d'équivalence sont ouvertes d'après le théorème 5, elles sont donc fermées; en plus, elles sont connexes par arcs : soient en effet $\gamma \in \Gamma$ et $f' \in \mathrm{Pl}^r(E, F; f)$; l'application

$$I \ni t \to \gamma_t \circ f' \in \mathrm{Pl}^r(E, F; f)$$

est différentiable, elle est donc continue d'après I, (4.3.4), propriété 3,

2.2.3. Comme autre application immédiate du théorème 5, signalons l'extension au cas des variétés [au sens de I, (1.2.2)] du lemme I, (3.2.1) et de son corollaire relatifs aux théorèmes de plongement et de régularisation de Whitney.

2.3. — Application au prolongement d'une sous-variété.

2.3.1. DÉFINITIONS. — Soit E une r-sous-variété d'une r-variété F. On appelle *bord relatif* de E et l'on note ∂E_F :

(a) *si E est connexe* : la réunion des faces (de codimension $\geqq 1$) de E qui ne sont pas contenues dans le bord de F;

(b) *en général* : la réunion des bords relatifs des composantes connexes de E.

On appelle *intérieur relatif* de E le complémentaire (dans E) de son bord relatif. On dit qu'une sous-variété $E^\star$ de F est un *prolongement de E dans F*, si $E^\star$ a même dimension que E, et si E est contenu dans l'intérieur relatif de $E^\star$ et fermé dans $E^\star$.

Propriétés immédiates.

1° Le bord relatif d'une sous-variété E de F est un fermé de E; l'intérieur relatif de E est une sous-variété de F sans bord relatif.

2° Une sous-variété sans bord relatif est un prolongement d'elle-même.

3° Soit U un ouvert de F contenant F; tout prolongement de E dans U est un prolongement de E dans F.

4° Si E et un prolongement $E^\star$ de E sont tous deux connexes, ils ont même support dans F.

2.3.2. PROPOSITION 3. — *Soit E une sous-variété d'une variété F; il existe un prolongement $E^\star$ de E dans F.*

On peut en plus choisir $E^\star$ de façon que $\overline{E^\star - E}$ soit l'image d'un voisinage prismatique fermé [cf. I, (2.1.6)] de $\partial E^\star_F$ dans $E^\star$.

REMARQUE. — Soit T un voisinage prismatique fermé de $\partial E^\star_F$ dans E dont l'image est $\overline{E^\star - E}$; T définit canoniquement une projection $\mathrm{pr}^\star$ de $\overline{E^\star - E}$ sur ∂E_F; soit $z \in \overline{E^\star - E}$, soit k le plus petit entier tel qu'il existe une k-carte ψ compatible avec T dont l'image contienne z; si $z = \psi.(x, y)$, on pose $\mathrm{pr}^\star.z = \psi.(x, (1, \ldots, 1))$. La projection $\mathrm{pr}^\star$ est continue et même différentiable par morceaux; elle définit sur $\overline{E^\star - E}$ une structure fibrée généralisée : la fibre située au-dessus d'un point d'indice q dans E est difféomorphe à $[0, 1]^{n-q}$. Pour toute métrique riemannienne sur $E^\star$ adaptée à T [*cf.* I, (3.3.1)], la projection $\mathrm{pr}^\star$ est une projection orthogonale généralisée.

La proposition 3 est une conséquence immédiate du théorème 5 et du lemme suivant [qui sera démontré en (2.3.4) à l'aide du lemme 2.3.3] :

LEMME. — *Soit E une sous-variété d'une variété F; il existe un plongement ρ de E dans E, arbitrairement voisin de l'identité (au sens $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$) et tel que, si E' désigne l'image de E par ρ, $\overline{E - E'}$ est l'image d'un voisinage prismatique fermé de ∂E_F dans E.*

2.3.3. *Fonctions normalement constantes.*

DÉFINITION. — Soit F une variété; soit T un voisinage prismatique *fermé* d'une partie du bord de F [*cf.* I, (2.1.6)]; soit W l'image de T. Une fonction $\lambda : W \to [0, 1]$ est dite *normalement constante* (relativement à T) si, pour toute k-carte (V, ψ) de F compatible avec T, et pour tout $x \in V$, λ est constante sur l'image par ψ de $\{x\} \times [0, 1]^{n-k}$.

Bien que W ne soit pas en général une variété, on a une notion immédiate de fonction de classe C^r sur W, et de topologie $\mathcal{C}^r$ sur les espaces de telles fonctions (on peut définir cette topologie à l'aide d'un recouvrement localement fini de W par des cartes cubiques fermées compatibles avec T). On démontre alors « en grimpant sur les voisinages du squelette de F » [comme en I, (3.2.2), pour la démonstration du théorème 2], le

LEMME. — *Soient F, T, W comme ci-dessus; soit r un entier ≥ 1. Il existe des fonctions de classe C^r sur W, normalement constantes, strictement positives, et arbitrairement voisines de 0 au sens de la topologie $\mathcal{C}^r$.*

2.3.4. *Démonstration du lemme* 2.3.2. — Soit T un voisinage prismatique fermé du bord relatif de E dans F; soit W l'image de T. On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions de classe C^∞ : $W \to [0, 1]$, normalement constantes [*cf.* (2.3.3)]; on va associer à tout $\lambda \in \mathcal{C}$ un plongement ρ_λ de E dans lui-même qui induit l'identité sur $\overline{E - W}$. Soit ρ un difféomorphisme de $[0, 1]$ sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ qui induise l'identité sur $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$; pour tout entier $p \geqq 0$, et pour tout $t \in [0, 1]$ on définit un plongement $\rho_{p;t}$ de $[0, 1]^p$ dans lui-même en posant, pour tout élément $x = (x_i)$ de $[0, 1]^p$:

$$\rho_{p;t}.(x_i) = ((1 - t)\, x_i + t(\rho . x_i)).$$

Puis, pour toute k-carte (V, ψ) de E, et pour toute fonction de classe C^∞, $\mu : V \to [0, 1]$, on définit un plongement $\rho_{\psi;\mu}$ de l'image A de ψ dans elle-même en posant

$$\rho_{\psi;\mu} \circ \psi.(x, y) = \psi.(x, \rho_{m-k;\mu}(x).y)$$

pour tout $(x, y) \in V \times [0, 1]^k$ (m désigne la dimension de E).

On choisit alors un système de cartes $\mathcal{S}$ définissant T et possédant la propriété du systeme $\mathcal{S}$ de I, (3.1.3); pour tout i, on définit la fonction $\mu_i : F_i \to [0, 1]$, en posant

$$\lambda \circ \psi.(x, 0) = \mu_i.(x) \qquad \text{pour} \quad x \in V_i.$$

La famille $(\rho_{\psi_i;\mu_i})$ définit un difféomorphisme ρ_λ de E sur une sous-variété fermée E' de E. Ce difféomorphisme est arbitrairement voisin de l'identité pourvu que λ soit assez petit; d'après le lemme 2.3.3, λ peut être rendu arbitrairement petit en restant positif; et d'autre part, dès que λ est positif, $\overline{E - E'}$ est difféomorphe à W.

2.4. Compléments divers; démonstration directe du théorème d'isotopie dans le cas où E est une sous-variété sans bord relatif.

2.4.1. *Complément au théorème* 3.

Définitions. — Soit E une sous-variété d'une variété F; soit L une partie de F; on pose $L \cap E = M$.

On dit que L est un *tube local normal à E dans F, d'âme M*, s'il existe sur un voisinage V de E dans F une métrique riemannienne (adaptée à ∂F et à E) définissant une projection orthogonale pr de but E, telle que $L \cap V = \mathrm{pr}^{-1}(M)$.

On dit que L est un *E-prolongement de M dans F* s'il existe un prolongement $E^\star$ de E dans F, et s'il existe un voisinage V de E dans F et une projection orthogonale généralisée [*cf.* (2.3.2)] $\mathrm{pr}^\star : V \cap (\overline{E^\star - E}) \to \partial E_F$ tels que $L \cap V = M \cup (\mathrm{pr}^{\star-1}(M \cap \partial E_F))$.

THÉORÈME 5'. — *Soient F une variété, E une sous-variété fermée de F, f l'injection de E dans F, r un entier ≥ 1. Soit $E^\star$ un prolongement de E dans F. Soient M et M' deux fermés de E; soit $M'^\star$ un E-prolongement de M' dans $E^\star$, et soient L et L' deux tubes locaux normaux respectivement à E et $E^\star$ dans F, d'âmes respectives M et $M'^\star$, relatifs à une même métrique riemannienne sur F. On note $\mathrm{Pl}^r_{M;J^r_{M'}}(E, F, f)$ le sous-espace de $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ formé des plongements qui sont r-tangents à f en tout point de M'; notation analogue: $\Gamma^r_{L;J^r_{L'}}(F)$.*

Il existe un $\mathcal{C}^1$-voisinage $\mathcal{V}$ de f dans $\mathrm{Pl}^r_{M;J^r_{M'}}(E, F; f)$ tel que l'application canonique

$$\varphi: \quad \Gamma^r_{L;J^r_{L'}}(F) \to \mathrm{Pl}^r_{M;J^r_{M'}}(E, F; f)$$

admette au-dessus de $\mathcal{V}$ une section continue s telle que $s(f) = e$.

Cas particuliers.

1° $M' = \emptyset$; s est alors une section locale pour l'application canonique

$$\Gamma^r_L(F) \to \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f).$$

2° $M' = M$; s est alors une section locale pour l'application canonique

$$\Gamma^r_{J^r_{L'}}(F) \to \mathrm{Pl}^r_{J^r_{M'}}(E, F; f).$$

Le théorème 5' sera démontré en (2.4.3) et (2.4.4) à l'aide de (2.4.2). Il admet des corollaires analogues aux corollaires 1, 2 et 3 du théorème 5 [*cf.* (2.2.2.)] et renforçant ces derniers; par exemple :

COROLLAIRE 1. — *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 5', sauf que E n'est plus supposée fermée. L'application canonique φ admet alors une section continue s [telle que $s(f) = e$] au-dessus d'un $\mathcal{C}^r$-voisinage de f dans $\mathrm{Pl}^r_{M;J^r_{M'}}(E, F; f)$.*

COROLLAIRE 2 (*Complément au deuxième théorème de fibration*). — *Soient F une variété, H une sous-variété de F, E une sous-variété fermée de H; on note h et f les injections respectives de H et E dans F. Soit $E^\star$ un prolongement de E dans H. Soient M et M' deux fermés de E; soit $M'^\star$ un E-prolongement de M' dans $E^\star$; soient L et L' deux tubes locaux normaux respectivement à E et $E^\star$ dans H, d'âmes respectives M et $M'^\star$, relatifs à une même métrique riemannienne sur H. Les notations $\mathrm{Pl}^r_{L;J^r_{L'}}(,H F; h)$ et $\mathrm{Pl}^r_{M;J^r_{M'}}(E, F; f)$ sont analogues à celles du théorème 5'.*

L'application canonique

$$\psi: \quad \mathrm{Pl}^r_{L;J^r_{L'}}(H, F; h) \to \mathrm{Pl}^r_{M;J^r_{M'}}(E, F; f)$$

est une fibration topologique localement triviale.

Cas particuliers du corollaire 2.

1° $M' = \emptyset$; L étant un tube local normal à E dans H, d'âme M, l'application canonique $\mathrm{Pl}^r_L(H, F; h) \to \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ est une fibration topologique localement triviale.

2° $M' = M$; L' étant un tube local normal à $E^\star$ dans H, d'âme $M'^\star$, l'application canonique $\mathrm{Pl}^r_{J^r_{L'}}(H, F; h) \to \mathrm{Pl}^r_{J^r_{M'}}(E, F; f)$ est une fibration topologique localement triviale.

Démonstration du corollaire 2. — Soient T et T' deux tubes locaux normaux respectivement à E et $E^\star$ *dans* F, d'âmes respectives M et $M'^\star$, relatifs à une même métrique riemannienne sur F, tels que $T \cap H = L$ et $T' \cap H = L'$; le groupe $\Gamma^r_{T; J^r_{T'}}(F)$ opère dans $\mathrm{Pl}^r_{L; J^r_{L'}}(H, F; h)$ et $\mathrm{Pl}^r_{M; J^r_{M'}}(E, F; f)$ de façon compatible avec ψ. On conclut (comme dans la démonstation du corollaire 2 du théorème 5) à l'aide du corollaire 1 du théorème et du 2° du lemme 2 de (0.4.4).

2.4.2. *Un complément au lemme de prolongement.* — On utilisera en (2.4.3) (pour la démonstration du théorème 5') le

LEMME 1 (*Complément au lemme de prolongement*). — *Soient* F, E, f, r, $E^\star$, M', $M'^\star$ *comme au théorème* 5'. *Soit* $\mathrm{Hom}^r_{J^r_{M'^\star}}(E, F; f)$ *le sous-espace de* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ *formé des applications qui sont r-tangentes à* f *en tout point de* M'; *soit de même* $\mathrm{Hom}^r_{J^r_{M'^\star}}(F, F; e)$. *Il existe un* $\mathcal{C}^1$-*voisinage* $\mathcal{V}$ *de* f *dans* $\mathrm{Hom}^r_{J^r_{M'}}(E, F; f)$ *tel que l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}^r_{J^r_{M'^\star}}(F, F; e) \to \mathrm{Hom}^r_{J^r_{M'}}(E, F; f)$$

admette au-dessus de $\mathcal{V}$ *une section continue* s *telle que* $s(f) = e$.

DÉMONSTRATION. — Soient V un voisinage de E dans F, et $\mathrm{pr}^\star$ une projection orthogonale généralisée : $V \cap \left(\overline{E^\star - E}\right) \to \partial E_F$, tels que

$$M'^\star \cap V = M' \cup (\mathrm{pr}^{\star -1}(M' \cap \partial E_F))$$

(*cf.* définition 2.4.1). On choisit un système de cartes locales (ψ_i) comme en (2.1.2) ; pour tout i on note $E^\star \cap F_i = E^\star_i$; $M'^\star \cap E_i = M'^\star_i$; on a pour tout i une projection orthogonale généralisée $\mathrm{pr}^\star_i$ de $\overline{E^\star_i - E_i}$ sur $\partial E_{i_{F_i}}$; on suppose les ψ_i choisis de façon que, pour tout i, $\mathrm{pr}^\star_i$ coïncide avec la restriction de $\mathrm{pr}^\star$ à $\overline{E^\star_i - E_i}$. Soit f'_i comme en (2.1.2); pour faire le prolongement de f'_i à F_i, on considère le W-champ de classe C^r défini par f'_i sur E_i et par l'identité sur $M'^\star_i \cup \left(\overline{F_i - \eta_i F_i}\right)$, et l'on fait le prolongement de Whitney de ce champ comme en (2.1.2). Les inégalités de Whitney sont encore valables (bien qu'on n'ait fait aucune hypothèse de régularité sur M') en vertu du

LEMME 2. — *Soient A_1 et A_2 deux compacts de R^n tels que $A_1 \cup A_2 = A$. On suppose vérifiés $P(A_1)$ [cf. (2.1.2)] et :*

$P(A_1, A_2)$: Il existe un nombre ν tel que tout $x \in A_2$ puisse être joint à A_1 par un chemin de A_2 de longueur $L \leq \nu\, d(x, A_1)$.

Soient alors K un compact de R^n et h un champ W-taylorien de classe C^r sur A_2; il existe une constante C_K telle que l'inégalité $[W]$ de (2.1.2) soit encore vérifiée pour tout p tel que $|p| \leq r$, et pour tout champ W-taylorien f de classe C^r sur A qui induise le champ h sur A_2.

Indications sur la démonstration du lemme 2. — On se ramène, grâce à la linéarité de l'application $\{f \to f^\star\}$ de (2.1.1), au cas où $h = 0$; on doit alors majorer les quantités $|f^p.y - T_x^p f[y]|$; pour x et y dans A_2 ces quantités sont nulles; dans tous les autres cas, x et y peuvent être joints dans A par un chemin de longueur $L \leq \mu\nu\, |y - x|$, où μ est le nombre fourni par $P(A_1)$.

2.4.3. *Démonstration du théorème* 5′ *à partir d'un cas particulier.* — $E^\star$ étant fermé au voisinage de E, on peut supposer $E^\star$ fermé dans F; on peut aussi (en remplaçant au besoin $M'^\star$ par $\overline{M'^\star}$) supposer $M'^\star$ fermé dans $E^\star$. Soient $\mathrm{pr}^\star$ et V (*cf.* définition 2.4.1) tels que

$$M'^\star \cap V = M' \cup (\mathrm{pr}^{\star-1}(M' \cap \partial E_F));$$

on pose $V \cap E^\star = W$. En remplaçant au besoin V par un voisinage plus petit de E dans F, on peut en plus supposer que $\overline{W}$ est contenu dans l'intérieur relatif de $E^\star$, de sorte que $E^\star - W$ soit un voisinage de $\partial E_F^\star$ dans $E^\star$. Puisque $M'^\star \cup (\overline{E^\star - W})$ est encore un E-prolongement de M' dans $E^\star$, le complément au lemme de prolongement [*cf.* (2.4.2)] donne une section $\mathcal{C}_1$-locale (passant par e) :

$$\mathrm{Pl}^r_{M; J^r_{M'}}(E, F; f) \to \mathrm{Pl}^r_{M; J^r_{M'^\star \cup (\overline{E^\star - W})}}(F, F; e)$$

et, *a fortiori*, une section $\mathcal{C}^1$-locale (passant par e) :

$$\mathrm{Pl}^r_{M; J^r_{M'}}(E, F; f) \to \mathrm{Pl}^r_{M \cup (\overline{E^\star - W}); J^r_{M'^\star}}(E^\star, F; f^\star).$$

De sorte qu'on est ramené à appliquer [avec $E^\star$, $M \cup (\overline{E^\star - W})$ et $M'^\star$ dans les rôles respectifs de E, M, M'] le lemme suivant, qui sera démontré en (2.4.4) et qui est un affaiblissement du théorème 5′) :

LEMME. — *Soient F, E, f, r, M, M' comme au théorème 5′; on suppose en plus que M est un voisinage de ∂E_F dans E. Soient L et L' deux tubes locaux normaux à E dans F, d'âmes respectives M et M', relatifs à une même métrique riemannienne sur F.*

Il existe un $\mathcal{C}^1$-voisinage $\mathcal{V}$ de f dans $\mathrm{Pl}^{r'}_{M;J^r_{M'}}(E, F; f)$ tel que l'application canonique

$$\Gamma^{r'}_{L;J^r_{L'}}(F) \to \mathrm{Pl}^{r'}_{M;J^r_{M'}}(E, F; f)$$

admette au-dessus de $\mathcal{V}$ une section continue s telle que $s(f) = e$.

2.4.4. *Démonstration du lemme* 2.4.3. — On va montrer un résultat plus fort que celui annoncé : l'existence d'une section $\mathcal{C}^1$-locale s qui soit continue *et r-différentiable*; la démonstration *n'utilise pas* la théorie du prolongement de Whitney ([23]).

Grâce au (b) du lemme 1.5.3, on peut se borner à démontrer le « théorème de prolongement » associé au théorème 5′, c'est-à-dire celui obtenu en remplaçant dans l'énoncé Γ par G. On choisit comme en (2.1.2) un système de cartes locales (ψ_i), auxquelles on impose les deux conditions supplémentaires suivantes :

(d) pour tout i tel que E_i rencontre ∂E_F, E_i est contenu dans M;

(e) pour tout i, on note $E^\star \cap F_i = E_i^\star$; alors $L \cap F_i$ (resp. $L' \cap F_i$) est l'image réciproque de $M \cap E_i$ (resp. $M'^\star \cap E_i^\star$) par la projection de F sur $E_i^\star$ [définie par $(x, y) \to (x, 0)$].

Soit alors (λ_i), comme en (2.1.2); soit $\mathcal{V}$ un $\mathcal{C}^1$-voisinage de f dans $\mathrm{Pl}^{r'}_{M;J^r_{M'}}(E, F; f)$; pour $f' \in \mathcal{V}$, on pose, comme en (2.1.2) : $\lambda_i f' = f'_i$. Il résulte de la condition (d) ci-dessus que, pour tout i tel que E_i rencontre ∂E_F, f'_i induit l'identité sur E_i; or pour tous les autres i, il n'y a pas dans F_i de coordonnées du type x_β; de sorte que, compte tenu d'une part de (e) ci-dessus, et d'autre part de la différentiabilité des structures linéaires locales, on se ramène en procédant comme en (2.1.2) à démontrer le « lemme local » suivant :

LEMME LOCAL. — *Soit $(x_\alpha, x_\gamma, y_\delta, y_\zeta)$ un système de coordonnées dans R^n tel que $x = (x_\alpha, x_\gamma)$ soit un point de R^m. Soit F la partie du cube $[-1, +1]^n$ définie par*

$$(1) \qquad x_\gamma \geqq 0,$$

$$(2) \qquad y_\zeta \geqq 0.$$

Soit E la partie de F définie par

$$(3) \qquad y = 0.$$

([23]) Dans le cas particulier où E est sans bord relatif, le lemme 2.4.3 se confond avec le théorème 5′ (et entraîne donc en particulier le théorème 5); sa démonstration fournit d'une part une démonstration directe des théorèmes 5 et 5′ dans le cas particulier où E est sans bord relatif; et d'autre part un complément : existence dans ce cas d'une section locale r-différentiable.

Soit N la partie de F définie par

(4) $$x = 0.$$

Soient M et M' deux fermés de E. Pour tout $\eta \in]0, 1[$, il existe un C^1-voisinage $\mathcal{V}$ de f (injection de E dans F) *dans* $\mathrm{Pl}^r_{(E-\eta E)\cup M}(E, F; f)$ *tel que l'application canonique*

$$G^r_{(F-\eta F)\cup(M\times N); J^r_{M'\times N}}(F) \to \mathrm{Pl}^r_{(E-\eta E);\cup M; J^r_{M'}}(E, F; f)$$

admette au-dessus de $\mathcal{V}$ un section r-différentiable et continue s telle que $s(f) = e$.

D'après le théorème 4 [*cf.* I, (4.5.3)] il suffit de montrer l'existence d'une section s qui soit *r-différentiable*; on utilise pour cela les lemmes 1 et 3 ci-dessous; le lemme 2 sert à démontrer le lemme 3.

Lemme 1. — *Les notations sont celles du lemme local; soit en plus $\mathcal{L}'$ le groupe $G^r_{(E-\eta E)\cup M; J^r_{M'}}(E)$; et soit $\mathcal{G}'$ le sous-groupe de $G^r_{(F-\eta F)\cup(M\times N); J^r_{M'\times N}}(F)$ formé des éléments qui laissent y invariant. Il existe un C^1-voisinage $\mathcal{V}'$ de f dans $\mathcal{L}'$ tel que l'application canonique $\mathcal{G}' \to \mathcal{L}'$ admette au-dessus de $\mathcal{V}'$ une section r-différentiable s' telle que $s'(f) = e$.*

Démonstration. — Soit Λ' le groupe de r-isotopies de E associées à $\mathcal{L}'$; soit $\{f' \to \varphi'\}$ la section C^1-locale donnée par le (b) du lemme 1.5.3 pour l'application canonique $\Lambda' \to \mathcal{L}'$. Soit μ une fonction de classe C^∞ : $N \to [0, 1]$, nulle pour $|y| \geqq (1-\eta)$, égale à 1 au voisinage de 0. On pose, pour f' assez voisin de f au sens C^1 :

(1) $$s'(f').(x, y) = (\varphi'_{\mu.y}.x, y).$$

D'après I, (4.4.3), exemple 2, $s'(f')$ est dans $\mathcal{G}'$; et d'autre part l'application (1) est r-différentiable.

Lemme 2. — *Le lemme local est vrai dans le cas particulier où E est un point.*

Démonstration. — Le seul cas non trivial est celui où $M = M' = \emptyset$. Posons $[-1, +1] = K$; *a priori*, F est de la forme $K^n \cap R^n_{(q)}$; par une formule du type (1) ci-dessus on se ramène au cas où $F = K^q$; puis on procède par récurrence sur q [passage des cas 1 et $(q-1)$ au cas q]; on se ramène ainsi au cas $q=1$. On prend alors pour V l'intervalle $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ avec $\varepsilon \in]0, 1[$; on se borne évidemment au cas $r = \infty$; il faut montrer l'existence d'une section locale différentiable σ pour l'application

$$G^\infty_{K-V}(K) \ni g' \to g'.0 \in K.$$

Soit g un élément de $G^{\infty}_{K-V}(K)$ soumis à la seule condition $g.0 \neq 0$; on pose $g.0 = x$; puis, pour tout $x' \in K$, on pose

$$\sigma(x') = \frac{x'}{x} g + \left(1 - \frac{x'}{x}\right) e,$$

$\sigma(x')$ dépend differentiablement de x', et c'est un élément de $G^{\infty}_{K-V}(K)$ dès que $|x'| \leqq |x|$.

Lemme 3. — *Les notations sont celles du lemme local; soit en plus* $\mathcal{L}''$ *(resp.* $\mathcal{G}''$*) le sous-espace de* $\mathrm{Pl}^{r}_{(E-\gamma_1 E)\cup M; J^{r}_{M'}}(E, F; f)$ [*resp.* $G^{r}_{(F-\gamma_1 F)\cup(M\times N); J^{r}_{M'\times N}}(F)$] *formé des plongements qui laissent x invariant. Il existe un* C^0*-voisinage* $\mathcal{V}''$ *de f dans* $\mathcal{L}''$ *tel que l'application canonique* $\mathcal{G}'' \to \mathcal{L}''$ *admette au-dessus de* $\mathcal{V}''$ *une section s'' telle que* $s''(f) = e$.

Démonstration. — Pour $f' \in \mathcal{L}''$, soient $(x, Y_{f'}.x)$ les coordonnées du point $f'.(x, 0)$. Soit $\mathcal{H}$ le groupe $G^{r}_{(N-\gamma_1 N)}(N)$. D'après le lemme 2, il existe une application r-différentiable définie au voisinage de zéro :

$$N \ni y \to \sigma(y) \in \mathcal{H}$$

telle que

$$\sigma(y).0 = y$$

et que

$$\sigma(0) = \text{identité}.$$

Posons, pour f' assez voisin de f au sens C^0 :

$$s''(f').(x, p) = (x, (\sigma(Y_{f'}.x)).y).$$

Il est clair que $s''(f')$ est un prolongement de f' et que $s''(f) = e$; d'autre part, $s''(f')$ est bien un élément de $\mathcal{G}''$. Soit en effet x_0 un point de M'; on a : $Y_{f'}.(x_0, y) = y$ pour tout $y \in N$; il suffit donc de vérifier que les dérivées $\frac{\partial Y_{f'}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^r Y_{f'}}{\partial x^r}$ sont nulles en (x_0, y), ce qui résulte de la formule de dérivation des fonctions composées.

En plus, s'' est r-différentiable ; car l'application canonique $\mathcal{L}'' \times E \to N$ est r-différentiable; par composition avec σ, on obtient une application r-différentiable $\mathcal{L}'' \times E \to \mathrm{Hom}^r(N, N)$, à laquelle est canoniquement associée d'après I, (4.1.2), formule (3), une application r-différentiable

$$(2) \qquad \mathcal{L}'' \to \mathrm{Difhom}^r(E, \mathrm{Hom}^r(N, N)).$$

Or, toujours d'après I, (4.1.2), on a une application r-différentiable canonique

$$(3) \qquad \mathrm{Difhom}^r(E, \mathrm{Hom}^r(N, N)) \to \mathrm{Hom}^r(E \times N, E \times N).$$

L'application s'' est la composée de (2) et (3).

Démonstration du lemme local. — Soit pr la projection de F sur E. Pour $f' \in \mathrm{Pl}^r_{(E-\eta E)\cup M; J^{r'}_{M'}}(E, F; f)$, on pose $\mathrm{pr} \circ f' = l'$; l' est un élément de $\mathrm{Hom}^r_{(E-\eta E)\cup M; J^{r'}_{M'}}(E, E; e)$ qui dépend r-différentiablement et donc continûment de f'; donc, d'après le 1° de la proposition 2 [*cf.* (1.4.2)], lorsque f' est assez voisin de f au sens C^1, l' est dans $\mathcal{L}'$ (notation du lemme 1). Posons $f' \circ l'^{-1} = l''$; l'' est un élément de $\mathrm{Hom}^r_{(E-\eta E)\cup M; J^{r'}_{M'}}(E, F; f)$ qui laisse x invariant et qui dépend r-différentiablement, et donc continûment de f'; donc, d'après la proposition 1 [*cf.* (1.2)], lorsque f' est assez voisin de f au sens C^1, l'' est dans $\mathcal{L}''$. Or on a

$$l'' \circ l' = f'.$$

Lorsque f' est voisin de f au sens C^1, l' et l'' le sont aussi, donc, d'après les lemmes 1 et 3, $s'(l')$ et $s''(l'')$ sont définis; il suffit de poser

$$s'(f') = s''(l'') \circ s'(l').$$

3. Espaces de jets des espaces de plongements. Deuxième théorème d'isotopie et de prolongement ; deuxième théorème de fibration.

3.1. Rappels sur les jets ([24]).

3.1.1. *Définition des jets.* — Soient E et F deux variétés; soient r et r' deux entiers tels que $1 \leq r' \leq r$. Soit M une partie quelconque de E; l'espace des *jets d'ordre r' le long de M des applications r-différentiables de E dans F* est, par définition, l'espace topologique quotient de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ [muni de la topologie $\mathcal{C}^r$; *cf.* I, (4.3)] par la relation d'équivalence suivante : deux éléments f et f' de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ sont équivalents si f et f' ont un contact d'ordre r' en tout point de M (ce qui implique, en particulier, que f et f' coïncident sur M). Cet espace se note $J^{r'}_M \mathrm{Hom}^r(E, F)$; pour toute partie A de $\mathrm{Hom}^r(E, F)$, l'image de A dans $J^{r'}_M \mathrm{Hom}^r(E, F)$ se note $J^{r'}_M A$; pour tout $f \in \mathrm{Hom}^r(E, F)$, l'image de f dans $J^{r'}_M \mathrm{Hom}^r(E, F)$ se note $J^{r'}_M f$ et s'appelle le *r'-jet de f le long de M.*

LEMME. — *Soient E, F, r, r', M comme ci-dessus, soit h un élément de* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$*; soit* $\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$ *la partie de* $\mathrm{Hom}^r(E, F)$ *formée des applications qui coïncident avec h sur M. L'espace* $J^{r'}_M \mathrm{Hom}^r_M(E, F)$ *est homéomorphe au quotient de* $\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$ *par la relation d'équivalence définie par l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}^r_M(E, F) \to J^{r'}_M \mathrm{Hom}^r_M(E, F).$$

([24]) Sur les jets, *cf.* EHRESMANN [1], [2]. Notre définition diffère légèrement de celle d'EHRESMANN, qui introduit les jets comme classes d'équivalence d'applications locales.

(C'est une conséquence immédiate de la définition ci-dessus et de BOURBAKI [1], § 7, n° 22.)

3.1.2. *Cas où M est une sous-variété fermée de codimension positive de E.* — On suppose maintenant que M est une sous-variété fermée, de classe C^∞, de codimension >0, de E, et que E est munie d'une métrique riemannienne de classe C^∞, adaptée au bord de E et à M [*cf.* I, (3.1.3)]. Soit λ une fonction réelle strictement positive, de classe C^∞ sur M; pour λ assez petit au sens $\mathcal{C}^0$, le tube $T_\lambda(M, E)$ (tube normal d'âme M, de « rayon » λ, dans E) a été défini en I, (3.4); on le notera simplement T_λ. C'est une sous-variété de classe C^∞ de E, de sorte que les espaces $\mathrm{Hom}^r(T_\lambda, F)$ et $J_M^{r'}\,\mathrm{Hom}^r(T_\lambda, F)$ sont définis. En plus, tout tube T_λ est une sous-variété fermée de E, de sorte que [compte tenu de I, (4.3.4), propriété 2], pour tout couple (λ, λ') tel que $\lambda' \leqq \lambda$, on a le diagramme commutatif suivant, où toutes les applications sont canoniques et continues :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}^r(E, F) & \to & \mathrm{Hom}^r(T_\lambda, F) & \to & \mathrm{Hom}^r(T_{\lambda'}, F) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
J_M^{r'}\mathrm{Hom}^r(E, F) & \xrightarrow{\alpha} & J_M^{r'}\mathrm{Hom}^r(T_\lambda, F) & \xrightarrow{\beta} & J_M^{r'}\mathrm{Hom}^r(T_{\lambda'}, F).
\end{array}$$

L'application α est *injective*. Quant à l'application β, c'est un *homéomorphisme* en vertu du lemme suivant (de démonstration immédiate) :

LEMME. — *Avec les notations ci-dessus, il existe un difféomorphisme de T_λ sur $T_{\lambda'}$ qui induise l'identité sur $T_{\lambda'/2}$.*

3.2. Jets (le long de l'âme) des applications d'un tube dans une variété sans bord.

Soient E et F deux variétés, M une sous-variété fermée de classe C^∞ de E; on suppose que *F est sans bord.* On suppose en plus choisi un plongement f (resp. h) de classe C^∞ de E (resp. M) dans F ([25]). On identifie M à son image par h et l'on note $\mathrm{Hom}_M^r(E, F)$ l'espace $\mathrm{Hom}_{h|M}^r(E, F)$. On note T_λ le tube normal à M dans la variété E (munie d'une certaine métrique riemannienne adaptée), de « rayon » λ.

3.2.1. *Premier cas particulier.* — $F = R^n$; E est la boule fermée B_m (avec $m \leqq n$), ou plus généralement $E = B_m \cap R_{(p)}^m$ [avec $p \leqq m$; *cf.* I, (1.2.1)]; $M = O$ (variété ponctuelle définie par l'origine de R^n). Dans ce cas les valeurs à l'origine des dérivées partielles définissent une application canonique continue

(1) $$\mathrm{Hom}_O^r(E, F) \to L_{n,m}^{r'}$$

([25]) Il résulte immédiatement du théorème 2 [*cf.* I, (3.2.2)] que dans les hypothèses plus générales suivantes : « E, F, M, f et h sont de classe C^r avec $r \geqq 1$ », on peut munir E et F de structures C^∞ compatibles avec leurs structures C^r respectives, de façon que les hypothèses ci-dessus sur M, f et h soient vérifiées.

où $L^{r'}_{n,m}$ désigne l'espace de systèmes de m polynômes formels d'ordre r' (séries formelles si $r' = \infty$) à n variables sans terme constant. L'application (1) définit sur $\mathrm{Hom}^r_O(E, F)$ la même relation d'équivalence que l'application canonique

$$(2) \qquad \mathrm{Hom}^r_O(E, F) \to J^{r'}_O \mathrm{Hom}^r(E, F),$$

l'application (1) se factorise par conséquent en

$$\mathrm{Hom}^r_O(E, F) \to J^{r'}_O \mathrm{Hom}^r_O(E, F) \to L^{r'}_{n,m}$$

et l'application de droite est *injective*.

Dans le cas où r' *est fini*, les fonctions polynômes fournissent une section globale continue pour l'application (1). Dans le cas où r' *est infini*, on sait (*cf.* Hermann [1] ou Schwartz [3] que l'application (1)est surjective, et l'on montre sans difficulté (*cf.* Cerf [2]) l'existence de sections locales continues pour cette application. Il en résulte que, dans l'un et l'autre cas, *l'espace* $J^{r'}_O \mathrm{Hom}^r_O(E, F)$ *est canoniquement homéomorphe à* $L^{r'}_{n,m}$; *et l'application* (2) *a des sections locales continues au voisinage de tout point de* $J^{r'}_O \mathrm{Hom}^r_O(E, F)$.

En plus, les espaces $\mathrm{Hom}^r_O(E, F)$ et $L^{r'}_{n,m}$ sont munis naturellement de structures vectorielles réelles, pour lesquelles l'application (1) est linéaire. L'espace $J^{r'}_O \mathrm{Hom}^r_O(E, F)$ est donc muni d'une structure vectorielle réelle, quotient de celle de $\mathrm{Hom}^r_O(E, F)$, et qui s'identifie à celle de $L^{r'}_{n,m}$.

Soit $L^{r'}_n$ le groupe des r'-jets inversibles ou « r'-jets d'isotropie à n variables » [ce sont ceux dont l'image canonique dans $L^1_{n,n}$ s'identifie à un élément de $GL(n)$, c'est-à-dire à une matrice carrée non dégénérée]. Le groupe $L^{r'}_n$ opère *à gauche* continûment dans $L^{r'}_{n,m}$ par passage au quotient de l'application

$$\mathrm{Hom}^r_O(E, F) \times \mathrm{Hom}'^r_O(F, F) \ni (f, g) \to g \circ f \in \mathrm{Hom}^r_O(E, F)$$

[où $\mathrm{Hom}'^r_O(F, F)$ est le sous-espace de $\mathrm{Hom}^r_O(F, F)$ formé des applications qui sont de rang maximal en O]. De même, $L^{r'}_m$ opère *à droite* continûment dans $L^{r'}_{n,m}$. *Les opérations de* $L^{r'}_m$ *laissent invariante la structure vectorielle de* $L^{r'}_{n,m}$. *Il n'en est pas de même* (*pour* $r' > 1$) *de celles de* $L^{r'}_n$; *par contre, les opérations de l'image canonique du groupe linéaire* $GL(n)$ *dans* $L^{r'}_n$ [image qu'on identifie à $GL(n)$] *laissent invariante la structure vectorielle de* $L^{r'}_{n,m}$.

Soit φ (resp. ψ) un difféomorphisme de E (resp. F) conservant O; soit h (resp. k) l'image canonique de φ (resp. ψ) dans $L^{r'}_m$ (resp. $L^{r'}_n$). Soit $f \in \mathrm{Hom}^r_O(E, F)$ et soit j l'image canonique de f dans $L^{r'}_{n,m}$. Par rapport aux systèmes de coordonnées définis par φ et ψ [26], le r'-jet de f en o est représenté par l'élément $k.j.h^{-1}$ de $L^{r'}_{n,m}$.

---

[26] Les nouvelles coordonnées d'un point x de E (resp. y de F) sont les anciennes coordonnées de $\varphi(x)$ [resp. $\varphi(y)$].

3.2.2. *Deuxième cas particulier.* — $F = R^n$; E est la partie de R^m $(m \leq n)$ définie dans le système (x, y), où $x = (x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)$ représente p coordonnées et où $y = (y_\delta, y_\zeta)$ en représente $(m - p)$, par le système

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} -1 \leq x_\alpha \leq +1, \\ -1 \leq x_\beta \leq +1, \\ \;\;\, 0 \leq x_\gamma \leq +1; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} d(y, 0) \leq 1 & (d \text{ désigne la distance } \textit{euclidienne}), \\ 0 \leq y_\zeta \end{cases}$$

et M est défini par le système [(I′), (II′)], où (I′) se déduit de (I) en rajoutant $0 \leq x_\beta$; et où (II′) est $y = 0$.

On note N la partie de R^{m-p} définie par (II); $M \times N$ s'identifie canoniquement à une partie de E. D'où une application canonique

$$\mathrm{Hom}^r_M(E, F) \to \mathrm{Hom}^r_{M \times O}(M \times N, F)$$

et, par composition avec l'application

$$\mathrm{Hom}^r_{M \times O}(M \times N, F) \ni f' \to \{ x \to [y \to (f'(x, y) - (x, 0))] \} \in \mathrm{Dif}^r(M, \mathrm{Hom}^r_O(N, F))$$

une application continue

$$(1) \qquad \mathrm{Hom}^r_M(E, F) \to \mathrm{Dif}^r(M, \mathrm{Hom}^r_O(N, F)).$$

Appelons $\mathrm{Dif}^r(M, L^{r'}_{n, m-p})$ l'espace des applications

$$M \ni x \to s(x) \in L^{r'}_{n, m-p}$$

qui sont *r-différentiables* au sens suivant : pour tout k tel que $1 \leq k \leq r'$, les coefficients de la composante d'ordre k de $s(x)$ sont fonctions $(r - k)$ fois continûment différentiables de x. On a alors une application canonique

$$(2) \qquad \mathrm{Dif}^r(M, \mathrm{Hom}^r_O(N, F)) \to \mathrm{Dif}^r(M, L^{r'}_{n, m-p}).$$

L'application (2) est *continue* si l'on munit $\mathrm{Dif}^r(M, L^{r'}_{n, m-p})$ de la topologie suivante : topologie C^{r-k} des applications de M dans la composante d'ordre k de $L^{r'}_{n, m-p}$, ceci pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq r'$. L'application composée de (1) et (2) :

$$(3) \qquad \mathrm{Hom}^r_M(E, F) \to \mathrm{Dif}^r(M, L^{r'}_{n, m-p})$$

est donc *continue*. En plus, cette application est *injective*, car toutes les dérivées partielles de f' le long de M peuvent se calculer, par dérivation, à partir des dérivées normales $\dfrac{\partial^{r'} f'}{\partial y^{r'}}$.

Lorsque $r=\infty$, et que r' est *fini*, on définit une *section globale* pour l'application (3) en associant à tout élément de $L^{r'}_{n,m-p}$ la *fonction polynôme* dont il est le développement à l'origine. Lorsque r est *fini*, et que M est de dimension ≥ 1, cette méthode simple de construction d'une section pour l'application (3) tombe en défaut. Par contre, on peut obtenir une telle section à l'aide de la formule de prolongement de Whitney; soit (u^i) une « partition de l'unité standard » [27] de Whitney sur E-M, et soit (x^i) la famille de points de M associée à (u^i); on associe à l'élément $\{x \rightarrow s(x)\}$ de $\mathrm{Dif}^r(M, L^{r'}_{n,m-p})$ (qui définit canoniquement un « champ W-taylorien » de classe C^r), l'élément W_s défini par

$$(4) \qquad W_s.(x, y) = \sum_i ((s(x^i))[y]) \times u^i(x, y)$$

de $\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$. Il résulte des inégalités de Whitney [*cf.* (2.1.1)] que la section ainsi construite est continue. Cette section a en outre la propriété de « ne pas trop augmenter les supports »; d'une façon précise, elle vérifie la condition suivante :

(Q) *Soit $M^\star$ la partie de E définie par le système* [(I), (II')]; *soient M' et M'' deux sous-variétés fermées de $M^\star$ telles que M'' soit contenu dans l'intérieur de M', et M' dans celui de M (il s'agit d'intérieurs topologiques de parties de $M^\star$). Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $s(x)$ est nul pour tout $x \in \overline{M - M''}$, alors la restriction de W_s à $\overline{M^\star - M'} \times \varepsilon N$ est l'application $(x, y) \rightarrow (x, 0)$.*

Dans le cas où r' est infini, on montrera (CERF [2]) que l'application (3) a, au-dessus de tout point de $\mathrm{Dif}^r(M, L^{r'}_{n,m-p})$, des sections locales continues et conservant les supports [ce qui est une condition plus forte que (Q)].

En résumé : *dans tous les cas, l'application* (3) *est continue, surjective, et a, au voisinage de tout point de* $\mathrm{Dif}^{r'}(M, L^{r'}_{n,m-p})$ *des sections locales continues vérifiant la condition* (Q).

Il en résulte que $J^{r'}_M \mathrm{Hom}^r_M(E, F)$ *est canoniquement homéomorphe à* $\mathrm{Dif}^r(M, L^{r'}_{n,m-p})$ *et que l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}^r_M(E, F) \rightarrow J^{r'}_M \mathrm{Hom}^r_M(E, F)$$

a des sections locales continues au voisinage de tout point de $J^{r'}_M \mathrm{Hom}^r_M(E, F)$.

3.2.3. *Cas général.*

Choix d'un système de cartes locales. — Soit $E^\star$ un prolongement de E dans F [*cf.* (2.3.1)]; soit $M^\star$ un prolongement de M dans $E^\star$; on suppose que $M^\star$ et $E^\star$ sont des variétés sans bord. Comme M est fermé dans $M^\star$, on

[27] *Cf.* (2.1.1).

peut trouver une famille localement finie (ψ_i) de cartes locales de $M^\star$ (de source R^p), et, pour chaque i, un cube K_i de R^p tel que les $\psi_i | K_i$ définissent un système de cartes locales cubiques de M. On munit E d'une métrique riemannienne adaptée à M et au bord de E, et l'on prolonge cette métrique à $E^\star$; on considère un tube ouvert $T^\star$, normal à $M^\star$ dans $E^\star$; on note T la partie de $T^\star$ qui est au-dessus de M. Puis on considère un tube ouvert $T'^\star$, normal à $T^\star$ dans F (pour une métrique riemannienne arbitraire sur F). On prolonge chaque ψ_i en un plongement χ_i de $R^p \times R^{m-p}$ dans $T^\star$, de manière que la famille (χ_i) soit une famille de cartes locales de $T^\star$, compatibles avec la fibration de $T^\star$ sur M. Puis on prolonge, de manière analogue, chaque χ_i en un plongement φ_i de $R^p \times R^{m-p} \times R^{n-m}$ dans $T'^\star$; chaque φ_i définit sur son image un système de coordonnées locales (x, y, z), et il existe (pour chaque i) des décompositions du type $x = (x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)$ et $y = (y_\delta, y_\zeta)$ telles que, si l'on note T_i la partie de $\varphi_i(R^n)$ définie par $z = 0$ et par (I) et (II) de (3.2.2), et M_i la partie de E_i définie par (I′) et (II′) de (3.2.2), les $\mathring{T}_i$ recouvrent T et les $\mathring{M}_i$ recouvrent M. Il en résulte que, dans l'intersection des images de deux cartes φ_i et φ_j, les formules de passages des coordonnées (x, y, z) aux coordonnées (X, Y, Z) (définies par φ_j) sont en particulier telles que

(1) $$z = 0 \quad \text{équivaut à} \quad Z = 0,$$
(2) $$X \text{ n'est fonction que de } x.$$

Définition du fibré $\mathcal{E}^{r'}$. — C'est le fibré de base M, de fibre $L^{r'}_{n,m-p}$, défini comme suit. On considère les produits $M_i \times L^{r'}_{n,m-p}$; soit $a \in M_i \cap M_j$; on note $\varphi_i^{-1}(a) = a_i$; on note τ_{a_i} la translation de R^n définie par a_i. On pose

$$\tau_{-a_j} \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i \circ \tau_{a_i} = \theta_a,$$

θ_a est un difféomorphisme local d'un ouvert de R^n, laissant fixe O; d'après (1) et (2) ci-dessus, si l'on considère la décomposition canonique $R^n \approx R^p \times R^{m-p} \times R^{n-m}$, θ_a induit un difféomorphisme local ν_a d'un ouvert de R^{m-p} (canoniquement identifié à $O \times R^{m-p} \times O$), laissant fixe O. On note h_a (resp. k_a) l'image canonique de θ_a (resp. ν_a) dans $L^{r'}_n$ (resp. $L^{r'}_{m-p}$). On identifie alors l'élément (a, s) de $M_i \times L^{r'}_{n,m-p}$ à l'élément $(a, h_a . s . k_a^{-1})$ de $M_j \times L^{r'}_{n,m-p}$.

L'espace fibré $\mathcal{E}^{r'}$, ainsi défini, est muni *a priori* du groupe structural $L^{r'}_n \times L^{r'}_{m-p}$; mais on peut réduire ce groupe à $GL(n) \times L^{r'}_{m-p}$; à toute telle réduction est canoniquement associée [d'après (3.2.1)] une structure d'*espace fibré à fibre vectorielle* sur $\mathcal{E}^{r'}$; mais cette structure dépend de la façon dont a été faite la réduction du groupe structural.

Soit $\mathcal{S}^r(\mathcal{E}^{r'})$ l'espace des sections r-différentiables de $\mathcal{E}^r$ [c'est-à-dire des sections qui sont r-différentiables au sens de (3.2.2) dans chaque système de coordonnées locales]. On munit $\mathcal{S}^r(\mathcal{E}^{r'})$ de la topologie $\mathcal{C}^r$; celle-ci se définit à l'aide des topologies des $\mathrm{Dif}^r(M_i, \mathrm{Hom}_O^r(N_i, R^n))$ comme la topologie $\mathcal{C}^r$ a été définie en I, (4.3.1) à l'aide de la topologie C^r. Il résulte de (3.2.2) que, pour tout tube T_λ, assez petit, d'âme M dans E, il existe une application canonique continue

$$(3) \qquad \mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F) \to \mathcal{S}^r(\mathcal{E}^{r'}).$$

Cette application définit sur $\mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F)$ la même relation d'équivalence que l'application canonique $\mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F) \to J_M^{r'} \mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F)$. Soit f_0 la projection de T_λ sur M; on sait [*cf.* I, (4.4) et I, (4.5.4)] que la métrique riemannienne $\mathfrak{M}$ sur F définit sur un $\mathcal{C}^0$-voisinage assez petit de f_0, une structure r-différentiable et continue de noyau de $\mathrm{Hom}^r(T_\lambda, R)$-module [donc de noyau de $\mathrm{Hom}^r(M, R)$-module]. Cette structure peut être définie comme suit. Pour tout $a \in M$, la métrique $\mathfrak{M}$ définit canoniquement un difféomorphisme δ_a d'un voisinage de a dans F sur un voisinage de zéro dans l'espace $\mathcal{T}_a(F)$ (espace tangent en a à F); soit $\varphi'_{i;a}$ le difféomorphisme $R^n \to \mathcal{T}_a(F)$ canoniquement défini par φ_i; on pose

$$\varphi'^{-1}_{i;a} \circ \delta_a \circ \varphi_i \circ \tau_{a_i} = \mu_{i;a};$$

$\mu_{i;a}$ est un difféomorphisme local de R^n, conservant O. Soit N_i la fibre de T_λ au-dessus des points de M_i [c'est-à-dire la partie de R^{m-p} définie par le système (II) de (3.2.2)]. Comme en (3.2.2), on a une application canonique (définie ici au voisinage de f_0) :

$$\mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F) \to \mathrm{Dif}^r(M_i, \mathrm{Hom}_O^r(N_i, R^n)).$$

Soit $\{a \to f'_{i;a}\}$ l'image de f' par cette application; la structure linéaire sur $\mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F)$ est définie par la famille d'applications

$$\mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F) \ni f' \to \{a \to \mu_{i;a} \circ f'_{i;a}\} \in \mathrm{Dif}^r(M_i, \mathrm{Hom}_O^r(N_i, R^n)).$$

Notons $l_{i;a}$ l'image canonique de $\mu_{i;a}$ dans $L_n^{r'}$; pour tout i, introduisons, dans $M_i \times L_{n,m-p}^{r'}$, les nouvelles coordonnées $(a, \tilde{s})$ définies par $\tilde{s} = l_{i;a}.s$, $M_i \times L_{n,m-p}^{r'}$ et $M_j \times L_{n,m-p}^{r'}$ étant munis de ces nouvelles coordonnées, au point $(a, \tilde{s})$ de $M_i \times L_{n,m-p}^{r'}$ correspond le point $(a, l_{j;a}.h_a.l_{i;a}^{-1}.\tilde{s}.k_a^{-1})$ de $M_j \times L_{n,m-p}^{r'}$; or $l_{j;a}.h_a.l_{i;a}^{-1}$ est l'image canonique, dans $L_n^{r'}$, de

$$\mu_{j;a} \circ \theta_a \circ \mu_{i;a}^{-1} = \varphi'^{-1}_{j;a} \circ \varphi'_{i;a}$$

c'est donc un élément de $GL(n)$; *pour la structure linéaire définie sur* $\mathcal{S}^r(\mathcal{E}^{r'})$ *par ce mode de réduction du groupe structural, l'application* (3) *est linéaire.*

Soient alors, pour tout i, M_i^*, M'_i et M''_i définis [dans le système de coordonnées (x, y, z)] comme M^*, M' et M'' dans l'énoncé de la propriété (Q) de (3.2.2)]; on choisit les M''_i de façon que leurs intérieurs recouvrent M. Soit (μ_i) une partition différentiable de l'unité sur M, subordonnée au recouvrement (M_i''). Soit s' un élément de $\mathcal{S}^r(\mathcal{E}^{r'})$; posons, pour s'' assez voisin de s', et pour tout i : $\mu_i s'' = s_i''$; s_i'' s'identifie canoniquement à un élément de $\mathrm{Dif}^r(M_i, L_{n,m-p}^{r'})$ à support dans M_i''. D'après (3.2.2) il existe un nombre ε_i positif, tel qu'on puisse associer continûment à s_i'' un élément f_i'' de $\mathrm{Hom}_{M_i}^{r}(T_{\varepsilon_i}(M_i, E), F)$ à « support » dans M_i'; soit λ' une fonction strictement positive de classe C^∞ sur M, majorée sur tout M_i par ε_i; alors f_i'' définit canoniquement un élément (encore noté f_i'') de $\mathrm{Hom}_M^r(T_{\lambda'}, F)$, à « support » dans M_i'. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de s' dans $\mathcal{S}^r(\mathcal{E}^{r'})$ et une fonction $\lambda'' \leq \lambda'$ telle que la somme $\sum_i f_i'' \mid T_{\lambda''}$ soit définie pour $s'' \in \mathcal{V}$; cette somme est un élément de $\mathrm{Hom}_M^r(T_{\lambda''}, F)$, qu'on note f''; soit ρ un difféomorphisme de T_λ sur $T_{\lambda''}$, fourni par le lemme 3.1.2; $f'' \circ \rho$ est un élément de $\mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F)$ qui dépend continûment de s'' pour $s'' \in \mathcal{V}$; $f'' \circ \rho$ coïncide avec f'' au voisinage de M; et il résulte de la linéarité de l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_M^r(T_{\lambda''}, F) \to \mathcal{S}^r(\mathcal{E}^{r'})$$

que l'image de f'' dans $\mathcal{S}^r(\mathcal{E}^{r'})$ est s''.

On en déduit, comme en (3.2.1) et (3.2.2) :

L'application canonique

$$J_M^{r'} \mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F) \to \mathcal{S}^r(\mathcal{E}^{r'})$$

est un homéomorphisme, et l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F) \to J_M^{r'} \mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F)$$

a des sections locales continues au voisinage de tout point de $J_M^{r'} \mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F)$.

3.3. Jets (le long de l'âme) des plongements d'un tube dans une variété.

Les hypothèses sur E, F, M, h, r et r' sont celles de (3.2), à ceci près que F est maintenant une variété arbitraire. Le lemme 3.3.1 est indépendant de ce qui précède; il est utilisé pour démontrer le lemme 2 de (3.3.2). En (3.3.2) on se ramène (grâce à un prolongement de F) à l'étude de certains sous-espaces des espaces considérés en (3.2.3) dans le cas où F était sans bord. Le principal résultat du paragraphe est la proposition 4, énoncée en (3.3.3) et dont la démonstration [à partir des lemmes 1 et 2 de (3.3.2)] est immédiate.

3.3.1. Lemme. — *Soit* $f' \in \mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F; f)$; *si, pour tout* $x \in M$, *la restriction de* f' *à un voisinage assez petit de* x *dans* E *est un plongement, alors il existe* λ' (fonction réelle de classe C^∞, définie sur M, strictement positive et plus petite que λ) *tel que* $f' \mid T_{\lambda'}$ *soit un plongement.*

Démonstration. — Soient (U_i) et (V_i) deux recouvrements localement finis de M dépendant du même ensemble d'indices, tels que les U_i et les V_i

soient des ouverts relativement compacts, et que, pour tout i, $\overline{V}_i \subset U_i$. On choisit en plus (U_i) assez fin pour que, pour toute fonction λ' assez petite au sens $\mathcal{C}^0$, la condition suivante soit remplie :

$$(1) \qquad f' \mid T_{\lambda'}(U_i, E) \quad \text{est un plongement quel que soit } i.$$

Il suffit alors d'après I, (1.3.2), propriété 1, de montrer ceci : si λ' est assez petit au sens $\mathcal{C}^0$, f' induit un homéomorphisme de $T_{\lambda'}$ sur son image.

Munissons F d'une distance d, et appliquons le lemme 1.2 (avec M dans le rôle de E); soit ξ la fonction fournie par ce lemme. Pour tout $x \in M$, notons $\rho(x)$ le diamètre de l'image par f' du tube $T_{\lambda'}(M, E; \{x\})$; si la condition suivante est remplie :

$$(2) \qquad \rho(x) \leqq \xi(x) \qquad \text{pour tout } x \in M,$$

alors on a pour tout i [avec une notation de (1.2)] :

$$d(f'(T_{\lambda'}(V_i, E)), f'(T_{\lambda'}(M - U_i, E))) \geqq d(\mathcal{B}(V_i, \xi), \mathcal{B}(E - U_i, \xi))$$

et le nombre de droite est strictement positif d'après le lemme 1.2. On choisit λ' assez petit au sens $\mathcal{C}^0$ pour que (1) et (2) soient vérifiés; la démonstration s'achève comme celle de la proposition 1 de (1.2).

3.3.2. *Choix d'un système de cartes locales.* — Soit F^* un prolongement de F [*cf.* I, (3.1.1)]; soient E^* un prolongement de E dans F^* et M^* un prolongement de M dans E^*. On considère un système (φ_i) de cartes locales de F^*, obtenu par le procédé du début de (3.2.3) (appliqué avec F^* dans le rôle de F, et pour une métrique riemannienne sur F^* obtenue par prolongement d'une métrique de F, adaptée au bord de F et à E). Pour chaque φ_i, il existe alors des décompositions $x = (x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, x_\xi)$; $y = (y_\delta, y_\zeta, y_\eta)$ et $z = (z_\mu, z_\nu)$ telles que les équations locales de F soient

$$(\text{III}) \qquad \begin{cases} x_\xi \geqq 0, \\ y_\eta \geqq 0, \\ z_\nu \geqq 0. \end{cases}$$

Les équations de T_i et M_i [notations de (3.2.3)] s'expriment de la même façon qu'en (3.2.3), à ceci près qu'il faut rajouter, à chaque fois, le système (III).

Résumé de la situation. — D'après (3.2), l'espace $J_M^{r'} \operatorname{Hom}_M^r(T_\lambda, F^*)$ est canoniquement homéomorphe à un certain espace $\mathcal{S}^*$ de sections d'un fibré à fibre vectorielle. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Pl}_M^r(T_\lambda, F; f) & \xrightarrow{k_1} & J_M^{r'} \operatorname{Pl}_M^r(T_\lambda, F; f) \\
\downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle j_1} \\
\operatorname{Hom}_M^r(T_\lambda, F; f) & \xrightarrow{k_2} & J_M^{r'} \operatorname{Hom}_M^r(T_\lambda, F; f) \\
\downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle j_2} \\
\operatorname{Hom}_M^r(T_\lambda, F^*) & \xrightarrow{k_3} & J_M^{r'} \operatorname{Hom}_M^r(T_\lambda, F^*) \approx \mathcal{S}^*
\end{array}$$

Toutes les applications de ce diagramme sont continues; i_1, i_2 et j_1 sont des applications d'inclusion topologique; j_2 est injective; k_1 et k_2 sont surjectives; k_3 est l'application canonique d'un espace sur un espace quotient. On rappelle en plus que l'image de i_1 est un ouvert [*cf.* (1.2), proposition 1].

On note $\mathcal{J}_1$ (resp. $\mathcal{J}_2$) l'image de j_1 (resp. j_2) dans $\mathcal{S}^\star$. On rappelle qu'à tout élément s de $\mathcal{S}^\star$ et à toute carte locale φ_i est associée canoniquement une application $M_i \ni x \to s(x)$, où $s(x)$ est un système de n polynômes d'ordre r' en y; ces polynômes ou « composantes de $s(x)$ » sont notés $s_1(x), \ldots, s_n(x)$.

Lemme 1. — *Tout élément s de $\mathcal{J}_2$ vérifie dans toute carte locale les conditions suivantes :*

(1) *pour toute composante x_u de x_ξ, $s_u(x)$ est identiquement nul pour tout x tel que $x_u = 0$;*

(2) *pour toute composante y_ν de y_η, $s_\nu(x)$ est, quel que soit x, divisible par y_ν;*

(3) *pour toute composante z_ω de z_ν, $s_\omega(x)$ est, quel que soit x, identiquement nul.*

Si, en plus, s est dans $\mathcal{J}_1$, alors les conditions suivantes sont vérifiées dans toute carte locale :

(4) *$s(x)$ est de rang maximal [c'est-à-dire $(m-p)$] pour tout $x \in M_i$;*

(5) $\dfrac{\partial s_\nu(x)}{\partial y_\nu}[0] > 0$ *pour tout $x \in M_i$ et pour tout ν tel qu'en (2).*

Démonstration. — Soit $f' \in \mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F^\star)$; on se place dans un système de coordonnées locales, et on note $X_{\alpha;f'}.(x, y)$, etc., ou encore $(X_{\alpha;f'}(x)).y$ les coordonnées du point $f'.(x, y)$; on note s l'image canonique de f' dans $\mathcal{S}^\star$.

Cas où $f' \in \mathrm{Hom}_M^r(T_\lambda, F; f)$. — Supposons que, pour un certain x tel que $x_u = 0$, le polynôme $s_u(x)$ ne soit pas nul; alors $X_{u;f'}(x)$ prendrait une valeur non nulle en un point au moins de la fibre de T_λ située au-dessus de x; la relation d'incidence $\{x_u = 0\}$, vérifiée sur cette fibre, ne serait pas conservée par f'; ceci est impossible, d'où (1). De manière analogue, la conservation de la relation d'incidence $\{y_\nu = 0\}$ [resp. $\{z_\omega = 0\}$] entraîne (2) [resp. (3)]. On notera que (2) entraîne en particulier :

$$(6) \qquad \frac{\partial s_\nu^{\nu'}(x)}{\partial y_{\nu'}}[0] = 0 \qquad \text{pour tout } \nu' \neq \nu.$$

Cas où $f' \in \mathrm{Pl}_M^r(T_\lambda, F; f)$. — Alors f' est de rang maximal en tout point; d'autre part, le fait que f' induise l'identité sur M entraîne que la matrice $\dfrac{\partial X_{f'}}{\partial x}.(x, 0)$ est la matrice unité pour tout $x \in M$; d'où (4).

Soit y_ν une composante de y_η; supposons que pour un certain x, on ait $\dfrac{\partial s_\nu(x)}{\partial y_\nu}[0] = 0$; la transversalité de f' au bord de F en $(x, 0)$ [*cf.* (1.1.2)] ne peut alors être réalisée que si $Y_{\nu;f'}$ est nul au voisinage de $(x, 0)$, et ceci est en contradiction avec le fait que f' ait mêmes relations d'incidence que f; donc la valeur en o de $\dfrac{\partial s_\nu(x)}{\partial y_\nu}$ est différente de o pour tout x; si cette valeur était négative, $Y_{\nu;f'}$ prendrait une valeur négative en un point au moins de T_λ, de sorte que l'image de f' ne serait pas contenue dans F; ceci est impossible, d'où (5).

LEMME 2. — *Sur la partie* $\tilde{\mathcal{S}}^\star$ *de* $\mathcal{S}^\star$ *définie par les conditions* (1), (2), (3), (4) *et* (5) *du lemme* 1, *il existe, au voisinage de tout point, une section locale continue à valeurs dans* $\mathrm{Pl}^{r'}_M(T_\lambda, F; f)$.

DÉMONSTRATION. — Soit $s' \in \tilde{\mathcal{S}}^\star$; soit $\tilde{\mathcal{V}}$ un voisinage de s' dans $\tilde{\mathcal{S}}^\star$; on note $\tilde{\mathcal{V}}_i$ l'espace des restrictions à M_i des éléments s'' de $\tilde{\mathcal{V}}$. La famille de fonctions (μ_i) étant définie comme en (3.2.3), on pose $\mu_i s'' = s''_i$. Soit f''_i l'élément de $\mathrm{Hom}^{r'}_M(M_i \times \varepsilon_i N_i, F^\star)$ associé à s''_i par la méthode de (3.2.3) (utilisation d'une section de Whitney); on définit comme suit l'élément $\tilde{f}''_i$ de $\mathrm{Hom}^{r'}_M(M_i \times \varepsilon_i N_i, F^\star)$: toutes les composantes (notées $\tilde{X}_{\alpha;s''_i}$, etc.) de $\tilde{f}''_i$ sont égales aux composantes correspondantes de f''_i (notées $X_{\alpha;s''_i}$, etc.), sauf pour les coordonnées du type x_u (composantes de x_ξ); pour celles-ci on pose

$$(7) \qquad \tilde{X}_{u;s''_i}.(x, y) = X_{u;s''_i}.(x, y) - X_{u;s''_i}.(\varpi_u.x, y),$$

où $\varpi_u.x$ est la projection de x sur $\{x_u = 0\}$. On définit bien ainsi, *au-dessus de* $\tilde{\mathcal{V}}_i$ (supposé assez petit), une section continue pour l'application canonique

$$\mathrm{Hom}^{r'}_{M_i}(M_i \times \varepsilon_i N_i, F^\star) \to \mathrm{Dif}^{r}(M_i, L^{r'}_{n, m-p})$$

[car, d'une part, $\tilde{X}_{u;s''_i}.(x, 0) = x_u$; et d'autre part, d'après la condition (1) du lemme 1, toutes les dérivées d'ordre $\leqq r'$ de $X_{u;s''_i}.(\varpi_u.x, y)$ par rapport à y sont nulles sur M_i; de sorte que $\tilde{f}''_i$ a même jet le long de M_i que f''_i]. D'autre part, cette section vérifie la condition (Q) de (3.2.3). Il en résulte [*cf.* (3.2.3)] qu'il existe (si $\tilde{\mathcal{V}}$ est assez petit) un tube $T_{\lambda'}$ tel que pour $s'' \in \tilde{\mathcal{V}}$, la somme $f'' = \sum_i f''_i \mid T_{\lambda'}$ soit définie; $\tilde{f}''$ est un élément de $\mathrm{Hom}^{r'}_M(T_{\lambda'}, F^\star)$; l'application $s'' \to \tilde{f}''$ est une section continue au-dessus de $\tilde{\mathcal{V}}$ pour l'application canonique k'_3 :

$$\mathrm{Hom}^{r'}_M(T_{\lambda'}, F^\star) \to \mathcal{S}^\star.$$

On note en particulier $\tilde{f}'$ l'image de s' par cette section; pour chaque système de coordonnées locales, on note $\tilde{X}_{\alpha;s''}$, etc., les composantes de $\tilde{f}''$.

Ceci posé, la démonstration se fait en deux étapes :

(a) *Il existe* $\lambda'' \leqq \lambda'$ *tel que, si* $\tilde{\mathcal{V}}$ *est assez petit,* $\tilde{f}'' \mid T_{\lambda''}$ *soit, pour tout* $s'' \in \tilde{\mathcal{V}}$, *un élément de* $\mathrm{Hom}^{r'}_M(T_{\lambda''}, F; f)$.

Il faut vérifier dans tout système de coordonnées locales que, pour tout $(x, y) \in T_{\lambda''}$ et pour toute composante x_u de x_ξ, $\tilde{X}_{u;s''}.(x, y)$ est nul (resp. > 0), si et seulement si x_u est nul (resp. > 0). La même propriété est à vérifier pour les $\tilde{Y}_{v;s''}$ (pour toute composante y_v de y_η) et pour les $Z_{w;s''}$ (pour toute composante z_w de z_ν). Pour les $Z_{w;s''}$ il n'y a pas de difficulté : d'après la condition (3) du lemme 1, on peut les prendre tous nuls (il est inutile pour eux d'utiliser une section de Whitney).

De (7) résulte que, pour tout i, $\tilde{X}_{u;s''_i}$ est nul pour $x_u = 0$; il en est donc de même de $\tilde{X}_{u;s''}$. Soit, pour tout i, M'_i un cube fermé contenu dans l'intérieur de M_i; on suppose les M'_i choisis de façon que $(\mathring{M}'_i)$ soit un recouvrement de M. Soit $x \in M'_i$; si x_u est > 0 en x, il en est de même de $\tilde{X}_{u;s''}$ (puisque en ce point $\tilde{X}_{u;s''} = x_u$); il existe donc un voisinage W_x de x dans E tel que si $\tilde{\mathfrak{V}}_i$ est assez petit, alors $\tilde{X}_{u;s''}$ est > 0 sur W_x. Supposons maintenant que x_u soit nul en x; on a vu qu'alors $\tilde{X}_{u;s''}$ est nul en x; mais puisque $\tilde{f}''$ laisse fixe tout point de M, $\dfrac{\partial \tilde{X}_{u;s''}}{\partial x_u}$ est égal à 1 en tout point de M_i; il existe donc un voisinage W_x de x dans E tel que, si $\tilde{\mathfrak{V}}_i$ est assez petit, alors $\dfrac{\partial \tilde{X}_{u;s''}}{\partial x_u}$ est > 0 sur W_x; si l'on a pris pour W_x un cube d'arêtes parallèles aux axes de coordonnées, alors $\tilde{X}_{u;s''}$ est > 0 sur $W_x \cap \{x_u > 0\}$. De sorte que, si $\tilde{\mathfrak{V}}_i$ est assez petit, il existe $\varepsilon''_i > 0$ tel que $\tilde{X}_{u;s''}$ soit > 0 en tout point de $M'_i \times \varepsilon''_i N_i$ tel que x_u soit > 0. Donc, si λ'' est tel que, pour tout i : $\lambda'' | M'_i \leqq \varepsilon''_i$, alors il existe $\tilde{\mathfrak{V}}$ tel que, pour tout $s'' \in \tilde{\mathfrak{V}}$, $\tilde{X}_{u;s''}$ soit > 0 sur $T_{\lambda''}$, dès que x_u est > 0.

La nullité de $\tilde{Y}_{v;s''}$ pour $y_v = 0$ résulte immédiatement de la condition (2) du lemme 1, et de la formule de Whitney [*cf.* (3.2.2), formule (4)]. D'après la condition (5) du lemme 1 et d'après (6) ci-dessus, pour tout $x \in M'_i$, $\dfrac{\partial \tilde{Y}_{v;s''}}{\partial y_v}$ est > 0 en x, et toutes les autres dérivées partielles d'ordre 1 de $\tilde{Y}_{v;s''}$ sont nulles en x; il en résulte que, si $\tilde{\mathfrak{V}}$ est assez petit, il existe un voisinage W_x de x dans E tel que, pour $s'' \in \tilde{\mathfrak{V}}$, $\tilde{Y}_{v;s''}$ soit > 0 sur W_x dès que y_v est > 0; on continue comme ci-dessus.

(b) *Fin de la démonstration.* — D'après la condition (4) du lemme 1, tout $\tilde{f}''$ est de rang maximal en tout point de M; et d'après la condition (5) $\tilde{f}''$ est, en tout point de M, transversal au bord de F. Ceci est vrai, en particulier pour $\tilde{f}'$, donc, d'après le lemme 3.3.1, il existe $\lambda''' \leqq \lambda''$ tel que $\tilde{f}' | T_{\lambda'''}$ soit un plongement; mais alors, puisque f'' dépend continûment de s'', il résulte de la proposition 1 [*cf.* (1.2)], que si $\tilde{\mathfrak{V}}$ est assez petit, $\tilde{f}'' | T_{\lambda'''}$ est un plongement pour tout $s'' \in \tilde{\mathfrak{V}}$. Comme en (3.2.3), on se ramène à l'aide du lemme 3.1.2 au cas où $\lambda''' = \lambda$.

3.3.3. Proposition 4. — *Soient F une variété, E une sous-variété de F, M une sous-variété fermée de codimension >0 de E; soit f l'injection de E dans F; on note T_λ le tube de « rayon » λ normal à M dans E (munie d'une métrique riemannienne adaptée). Soit F^* un prolongement de F.*

1° *$J^{r'}_M \mathrm{Hom}^r_M(T_\lambda, F^*)$ est canoniquement homéomorphe à un espace $\mathcal{S}^*$ de sections d'un fibré à fibre vectorielle.*

2° *L'image canonique $\mathcal{J}_2$ de $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(T_\lambda, F; f)$ dans $\mathcal{S}^*$ est caractérisée par les conditions* (1) *à* (5) *du lemme* 1 *de* (3.3.2).

3° *Soit Q l'espace topologique quotient de* $\mathrm{Pl}^r_M(T_\lambda, F; f)$ *par la relation d'équivalence définie par l'application canonique*

$$k_1 : \quad \mathrm{Pl}^r_M(T_\lambda, F; f) \to J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(T_\lambda, F; f).$$

Les espaces $\mathcal{J}_2$, Q et $J^{r'}_M$ $\mathrm{Pl}^r_M(T_\lambda, F; f)$ sont canoniquement homéomorphes.

4° *L'application k_1 a des sections locales continues au voisinage de tout point de $J^{r'}_M$ $\mathrm{Pl}^r_M(T_\lambda, F; f)$.*

5° *$J^{r'}_M$ $\mathrm{Pl}^r_M(T_\lambda, F; f)$ est ouvert dans $J^{r'}_M$ $\mathrm{Hom}^r_M(T_\lambda, F; f)$.*

Démonstration. — Le 1° est le rappel d'un résultat de (3.2.3). Le 2° résulte immédiatement des lemmes 1 et 2 de (3.3.2).

Démonstration du 3°. — L'application k_1 se factorise par l'intermédiaire de Q; on a donc le diagramme commutatif d'applications canoniques continues

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pl}^r_M(T_\lambda, F; f) \arrow[d] \arrow[dr, "k_1"] & & \\
Q \arrow[r] & J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(T_\lambda, F; f) \arrow[r] & \mathcal{J}_2
\end{tikzcd}$$

les deux applications de la deuxième ligne sont bijectives; d'après le lemme 2 de (3.3.2) elles sont en plus ouvertes, ce sont donc des homéomorphismes.

Le 4° résulte immédiatement du 3° et du lemme 2 de (3.3.2).

Démonstration du 5°. — Il suffit de montrer que $\mathcal{J}_2$ est ouvert dans l'image canonique $\mathcal{J}_1$ de $J^{r'}_M$ $\mathrm{Hom}^r_M(T_\lambda, F; f)$ dans $\mathcal{S}^*$; d'après le 2°, cela revient à montrer que si s est un élément de $\mathcal{S}^*$ qui vérifie les conditions (1) à (5) du lemme 1 de (3.3.2), tout $s' \in \mathcal{J}_1$ qui est assez voisin de s les vérifie encore; or, d'une part, d'après le lemme 1 de (3.3.2), s' vérifie les conditions (1), (2) et (3); et d'autre part, les parties de $\mathcal{S}^*$ sur lesquelles sont respectivement vérifiées les conditions (4) et (5) sont des *ouverts* de $\mathcal{S}^*$.

3.4. Deuxième théorème d'isotopie et de prolongement; deuxième théorème de fibration.

3.4.1. *Opérations des groupes d'isotopies dans les espaces de jets.* — Soient r et r' deux entiers tels que $1 \leqq r' \leqq r$. Soient F une variété, E une r-sous-variété de F, M une r-sous-variété de E. Soit Γ un groupe de r-isotopies de F [*cf.* (1.5)]; on sait que si l'on munit Γ de la topologie $\mathcal{C}^r$ des applications de $I \times F$ dans F, alors Γ opère à gauche continûment dans $\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$ (muni de la topologie $\mathcal{C}^r$). Ces opérations sont compatibles avec l'application canonique

$$(1) \qquad \mathrm{Hom}^r_M(E, F) \to J^{r'}_M \,\mathrm{Hom}^r_M(E, F),$$

or d'après le lemme 3.1.1, $J^{r'}_M \,\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$ s'identifie au quotient de $\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$ par la relation d'équivalence définie par (1); donc, par passage au quotient, Γ opère à gauche continûment dans $J^{r'}_M \,\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$. D'autre part, $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ est stable pour les opérations de Γ dans $\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$ [notation définie en (1.1.1)]; donc $J^{r'}_M \,\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ est stable pour les opérations de Γ dans $J^{r'}_M \,\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$. Donc Γ *opère à gauche continûment dans* $J^{r'}_M \,\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$.

3.4.2. **Théorème 6** (« *Deuxième théorème d'isotopie et de prolongement* »). — *Soient r et r' deux entiers tels que $1 \leq r' \leq r$. Soient E et F deux variétés et f un r-plongement de E dans F; soit M une r-sous-variété fermée de codimension positive de E; soit V un voisinage de $f(M)$ dans F. On note j le r'-jet de f le long de M; on note Γ le groupe des r-isotopies de F qui induisent l'identité sur $(F - V) \cup f(M)$; on note $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ l'espace des r-plongements de E dans F qui coïncident avec f sur M et qui ont mêmes relations d'incidence que f.*

Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de j dans $J^{r'}_M \,\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ tel que l'application canonique

$$\psi: \quad \Gamma \ni \gamma \to \gamma . j \in J^{r'}_M \,\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$$

admette au-dessus de $\mathcal{V}$ une section continue s telle que $s(j) = e$.

Démonstration. — On peut se borner au cas où f est de classe C^∞; on identifie alors E à son image par f. On munit E d'une métrique riemannienne adaptée; soit T un tube normal à M dans E, contenu dans V. On a le diagramme commutatif suivant (où toutes les applications sont canoniques) :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & J^{r'}_M \,\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f) \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathrm{Pl}^r_M(T, F; f \mid T) \arrow[r, "J"] & J^{r'}_M \,\mathrm{Pl}^r_M(T, F; f \mid T)
\end{tikzcd}$$

D'après le 4° de la proposition 4 [*cf.* (3.3.3)], l'application J admet au voisinage de $\alpha . j$ une section continue s_1 telle que $s_1(\alpha . j) = f \mid T$. D'après le corollaire 1 du théorème 5 [*cf.* (2.2.2)], l'application φ admet au voisinage de $f \mid T$ une section continue s_2 telle que $s_2(f \mid T) = e$. L'application $s_2 \circ s_1 \circ \alpha$ est définie au voisinage de f dans $J^{r'}_M \,\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$. Posons $s_2 \circ s_1 \circ \alpha = s$. On a bien $s(j) = e$; et s est une section pour ψ puisque l'application α est injective [*cf.* (3.1.2)].

COROLLAIRE 1. — *Soient r, r', F, E, M, f comme au théorème* 6. *Soit H une r-sous-variété fermée de E telle que $H \cap M$ soit une sous-variété de H.*

1° *L'application canonique*

$$\mathrm{Pl}^r_M(E,\ F;\ f) \to J^{r'}_{H\cap M}\mathrm{Pl}^r_{H\cap M}(H,\ F;\ f\,|\,H) \tag{3}$$

est une fibration localement triviale.

2° *Si en plus H contient un tube normal à M dans E, alors $J^{r'}_M\mathrm{Pl}^r_M(E,\ F;\ f)$ s'identifie canoniquement à un sous-espace; ouvert et fermé de*

$$J^{r'}_M\mathrm{Pl}^r_M(H,\ F;\ f\,|\,H).$$

3° $J^{r'}_M\mathrm{Pl}^r_M(E,\ F;\ f)$ *est ouvert dans* $J^{r'}_M\,\mathrm{Hom}^r_M(E,\ F;\ f)$.

Cas particulier du 1° (« *Deuxième théorème de fibration* »). — *L'application canonique*

$$\mathrm{Pl}^r_M(E,\ F;\ f) \to J^{r'}_M\mathrm{Pl}^r_M(E,\ F;\ f)$$

est une fibration topologique localement triviale.

Démonstration du corollaire.

1° Soit Γ le groupe de toutes les r-isotopies de F induisant l'identité sur M. Soit $j' \in J^{r'}_{H\cap M}\mathrm{Pl}^r_{H\cap M}(H,\ F;\ f\,|\,H)$, et soit $f' \in \mathrm{Pl}^r_{H\cap M}(H,\ F;\ f\,|\,H)$ tel que j' soit le r'-jet de f' le long de $H\cap M$. D'après le théorème 6 (appliqué avec H, $H\cap M$ et f' dans les rôles respectifs de E, M et f), l'application canonique $\Gamma \ni \gamma \to \gamma . j' \in J^{r'}_{H\cap M}\mathrm{Pl}^r_{H\cap M}(H,\ F;\ f\,|\,H)$ a une section continue au voisinage de j'. Comme ceci a lieu *pour tout* $j' \in J^{r'}_{H\cap M}\mathrm{Pl}^r_{H\cap M}(H, F; f\,|\,H)$; comme d'autre part Γ opère dans $\mathrm{Pl}^r_M(E, F;\ f)$ et dans $J^{r'}_{H\cap M}\mathrm{Pl}^r_{H\cap M}(H, F; f\,|\,H)$ de manière compatible avec l'application continue (3), le 1° résulte du 2° du lemme 2 de (0.4.4).

2° L'hypothèse supplémentaire faite sur H entraîne que l'application canonique

$$J^{r'}_M\mathrm{Pl}^r_M(E,\ F;\ f) \to J^{r'}_M\mathrm{Pl}^r_M(H,\ F;\ f\,|\,H)$$

est injective; le 2° résulte alors du 1°.

3° Le 2° est vrai, en particulier lorsque H est un tube normal à M dans E; or dans ce cas $J^{r'}_M\mathrm{Pl}^r_M(H,\ F;\ f\,|\,H)$ est ouvert dans $J^{r'}_M\mathrm{Hom}^r_M(H,\ F;\ f\,|\,H)$ d'après le 5° de la proposition 4 [*cf.* 3.3.3)]. D'où le 3°.

COROLLAIRE 2. — *Soient r, r', F, E, M, f, V, Γ comme au théorème* 6. *On suppose en plus M compact. Les classes d'équivalence définies par les opérations de Γ dans $J^{r'}_M\mathrm{Pl}^r_M(E,\ F;\ f)$ sont alors les composantes connexes de cet espace (en particulier elles sont indépendantes de V). En plus elles sont connexes par arcs.*

DÉMONSTRATION. — Ces classes d'équivalence sont ouvertes d'après le théorème **6**; elles sont donc fermées. On va montrer qu'elles sont connexes (et même connexes par arcs). Soit $\gamma \in \Gamma$, et soient j et j' deux éléments de $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ tels que $\gamma . j = j'$. Soit T un tube normal à M dans E; d'après le 2° du corollaire 1, pour montrer que le chemin

$$I \ni t \to \gamma_t . j \in J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$$

est continu, il suffit de montrer que son image dans $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(T, F; f|T)$ est un chemin continu; or T est compact, donc d'après la propriété 3 de I, (4.3.4), γ détermine un chemin continu dans $\mathrm{Pl}^r_M(T, F; f|T)$; l'image de ce chemin dans $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(T, F; f|T)$ est un chemin continu.

3.4.3. *Généralisation du théorème* 6 *à des espaces de plongements n'ayant pas même restriction à M.* — Soient r', r, F, E, M, f, j, V et Γ comme dans l'énoncé du théorème 6; soit Γ' le groupe des r-isotopies de F qui induisent l'identité sur $(F - V)$; le groupe Γ' opère continûment dans $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r(E, F; f)$ et dans $\mathrm{Pl}^r(M, F; f|M)$ de façon compatible avec l'application canonique (continue) du premier espace dans le second; or, d'après le théorème 5, $\mathrm{Pl}^r(M, F; f|M)$ est localement rétractile sur $F|M$ par les opérations de Γ'; il résulte donc du 1° du lemme 2 de (0.4.4) que $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r(E, F; f)$ est, en j, localement rétractile sur $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ par les opérations de Γ'; il résulte donc du théorème 6 et du lemme 1 de (0.4.4) :

THÉORÈME 6'. — *Soient r', r, F, E, f, j, V, Γ, Γ' ci-dessus définis. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de j dans $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r(E, F, f)$ et une application continue*

$$\mathcal{V} \ni j' \to \gamma(j') \in \Gamma'$$

telle que

(1) $$\gamma(j').j' = j,$$

(2) $$j' \in \mathcal{V} \cap J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f) \quad \textit{entraîne} \quad \gamma(j') \in \Gamma,$$

(3) $$\gamma(j) = e \qquad (\textit{isotopie identique de } F).$$

On en déduit [comme en (3.4.2)] le

COROLLAIRE.

1° *L'application canonique*

$$\mathrm{Pl}^r(E, F; f) \to J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r(E, F; f)$$

est une fibration topologique localement triviale.

2° $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r(E, F; f)$ *est ouvert dans* $J^{r'}_M \mathrm{Hom}^r(E, F; f)$.

3.4.4. *Compléments.*

THÉORÈME 6''. — *Soient r, r', E, F, f, M, j comme au théorème* 6'. *Soit en plus, M' un fermé de M. Soit L un tube local normal à M dans E, d'âme M'. On note $\mathrm{Pl}^r_{M;J^r_L}(E, F, f)$ le sous-espace de $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ formé des plongements qui sont r-tangents à f en tout point de L.*

1° *Les espaces* $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_{M;J^r_L}(E,\ F;\ f)$ *et* $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_{M\cup L}(E,\ F;\ f)$ *sont canoniquement isomorphes au sous-espace* $\mathcal{J}(E)$ *de* $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(E,\ F;\ f)$ *formé des jets qui ont même image que* j *dans* $J^{r'}_{M'} \mathrm{Pl}^r_M(E,\ F;\ f)$.

2° *Il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* j *dans* $\mathcal{J}(E)$ *tel que l'application canonique*

$$\psi :\ \Gamma^r_{M;J^r_L} \to \mathcal{J}(E)$$

admette au-dessus de $\mathcal{V}$ *une section continue* s *telle que* $s(j) = e$.

Démonstration. — On a la suite d'applications canoniques

$$\Gamma^r_{M;J^r_L}(F) \to J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_{M;J^r_L}(\mathrm{E},\ F;\ f) \to J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_{M\cup L}(E,\ F;\ f) \to \mathcal{J}(E).$$

Les deux applications de droite sont des injections topologiques ; donc le 2° entraîne le 1°. [Car on aura une propriété analogue au 2° au voisinage de tout point j' de $\mathcal{J}(E)$ pour l'application

$$\Gamma^r_{M;J^r_L}(F) \ni \gamma \to \gamma . j' \in \mathcal{J}(E).]$$

Démontrons le 2°. Il existe, par définition de L, un voisinage V de M dans E et une métrique riemannienne sur V définissant une projection orthogonale pr de but E telle que

$$(1) \qquad V \cap L = \mathrm{pr}^{-1}(M).$$

Soient $M^\star$ un prolongement de M dans V et $M'^\star$ un M-prolongement de M' dans $M^\star$. Soient $T^\star$ un tube normal à $M^\star$ dans V, et T, T', $T'^\star$ les parties de T qui sont respectivement au-dessus de M, M', $M'^\star$. Soit $\tilde T$ le tube d'âme M et de rayon moitié de celui de T; soit de même $\tilde T'$.

$T^\star$ est un prolongement de $\tilde T$ dans E, et $T'^\star$ est un $\tilde T$-prolongement de $\tilde T'$ dans $T^\star$; or, d'après (1) : $T^\star \cap L \subset T' \subset T'^\star$. Donc

(2) L est contenu dans un $\tilde T$-prolongement de $\tilde T'$ dans E.

Soit $\mathcal{J}(\tilde T)$ le sous-espace de $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(\tilde T,\ F;\ f \mid \tilde T)$ formé des jets qui ont même image dans $J^{r'}_{M'} \mathrm{Pl}^r_M(\tilde T,\ F;\ f \mid \tilde T)$ que le jet de $f \mid \tilde T$. On a le diagramme commutatif d'applications canoniques

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^r_{M;J^r_L}(F) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{J}(E) \arrow[dd, "\alpha"] \\
\mathrm{Pl}^r_{M;J^r_L}(E,\ F;\ f) \arrow[d, "\varphi'"] & \\
\mathrm{Pl}^r_{M;J^r_{\tilde T'}}(\tilde T,\ F;\ f \mid \tilde T) \arrow[r, "J"] & \mathcal{J}(\tilde T)
\end{tikzcd}$$

L'application J admet an voisinage de $\alpha.j$ une section continue s_1 telle que $s_1(\alpha.j)=f|\tilde{T}$ ([28]). D'après (2) et le corollaire 2 du théorème 5' [*cf.* (2.4.1)], l'application φ' admet au voisinage de $f|\tilde{T}$ une section continue s_2 telle que $s_2(f|\tilde{T})=f$. D'après le théorème 5', l'application φ admet au voisinage de f une section continue s_3 telle que $s_3(f)=e$. On pose (au voisinage de j) : $s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ \alpha = s$. On termine comme pour la démonstration du théorème 6 [*cf.* (3.4.2)].

Corollaire (*Complément au deuxième théorème de fibration*). — *Soient F une variété, E une sous-variété de F, M une sous-variété fermée de codimension positive de E. Soient r et r' deux entiers tels que $1 \leqq r' \leqq r$. On note f l'injection de E dans F.*

Soit L un tube local normal à M dans E, dont l'âme est un fermé de M. Les applications canoniques

$$\chi : \quad \mathrm{Pl}^r_{M\cup L}(E, F; f) \to J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_{M\cup L}(E, F; f),$$
$$\chi' : \quad \mathrm{Pl}^r_{M;J^r_L}(E, F; f) \to J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_{M;J^r_L}(E, F; f)$$

sont des fibrations topologiques localement triviales.

Démonstration. — Montrons-le par exemple pour χ. Le groupe $\Gamma^r_{M\cup L}(F)$ opère dans $\mathrm{Pl}^r_{M\cup L}(E, F; f)$ et dans $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_{M\cup L}(E, F; f)$ de façon compatible avec χ. Or le groupe $\Gamma^r_{M;J^r_L}(F)$ est un sous-groupe de $\Gamma^r_{M\cup L}(F)$; le corollaire résulte donc immédiatement du théorème 6'' et du 2° du lemme 2 de (0.4.4).

4. Théorème d'isotopie locale. Applications.

4.1. Préliminaires.

4.1.1. *Dilatations.* — Soit E une variété, soit M une sous-variété de codimension > 0 de E; soit $\mathfrak{M}$ une métrique riemannienne définie sur E au voisinage de M, adaptée au bord de E et à M; soit pr la projection orthogonale de E sur M, définie au voisinage de M. Soit x un point de E assez voisin de M et n'appartenant pas à M; pour $t \in R_+$ (et assez petit) on note $\rho_t x$ le point de la géodésique normale à M issue de x, défini par

$$d(\rho_t.x, M) = t.d(x, M)$$

(d désignant la distance géodésique). Soit μ une fonction de classe C^∞, définie sur M et à valeurs dans $]0, \infty[$; lorsqu'il est défini, le point $\rho_{\mu(x)}.x$ se note $\rho_\mu.x$. L'application ρ_μ, définie au voisinage de E, est appelée *dilatation* de rapport μ, d'axe M, dans E (muni de $\mathfrak{M}$).

([28]) Cela résulte d'un complément au 3° de la proposition 4 [*cf.* (3.3.3)] ; ce complément est analogue à celui du lemme de prolongement [*cf.* lemme 1 de (2.4.2)] ; sa démonstration se fait à l'aide du lemme 2 de (2.4.2).

Soit T_λ un tube normal à M dans E; si T_λ est assez petit (i. e., si λ est assez petit au sens $\mathcal{C}^0$), ρ_μ induit un difféomorphisme de T_λ sur $T_{\lambda\mu}$. En particulier, si $\mu \leqq 1$, ρ_μ est défini sur tout tube T_λ.

4.1.2. *Tubes F-intérieurs.* — On suppose maintenant donnée une variété F, une sous-variété *fermée* E de F et une sous-variété *fermée* M de E, de codimension > 0; $\mathcal{M}$ est une métrique riemannienne sur E, adaptée au bord de E et à M.

Lemme. — *Soit T_λ un tube normal à M dans E. Il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :*

(a) *Pour tout prolongement E^* de E dans F* [*cf.* (2.3.1)], *et pour toute métrique $\mathcal{M}^*$, adaptée au bord de E^*, prolongeant $\mathcal{M}$ à E^*, il existe un tube T_Λ normal à M dans E^*, tel que $\Lambda(x) > \lambda(x)$ pour tout $x \in E$.*

(b) *Pour toute fonction μ définie sur M, à valeurs dans* $]0, 1]$, *de classe C^∞, la dilatation $\rho_\mu \mid T_\lambda$ a mêmes relations d'incidence* (*en tant qu'application de T_λ dans F*) *que l'injection de T_λ dans F.*

(c) *Pour tout μ comme en* (b), *il existe une isotopie de F qui induise sur T_λ la dilatation ρ_μ.*

Définition. — Un tube T_λ, normal à M dans E, qui vérifie l'une des trois conditions équivalentes ci-dessus, est dit *F-intérieur*.

D'après (a) et (c), on a immédiatement le

Corollaire. — *Tout tube normal à M dans E, suffisamment petit, est F-intérieur. Soient T_λ et $T_{\lambda'}$, deux tubes F-intérieurs; la dilatation $\rho_{\lambda'/\lambda} \mid T_\lambda$* (*qui envoie T_λ sur $T_{\lambda'}$*) *peut se prolonger en une isotopie de F.*

Démonstration du lemme. — Il est clair que (c) entraîne (b).

(b) *entraîne* (a). — Soit D la « surface latérale » de T_λ, c'est-à-dire l'ensemble des points a de T_λ qui vérifient $d(a, M) = \lambda(\mathrm{pr}.a)$; si m est la dimension de E, D est de dimension $(m-1)$. Il existe donc, pour tout $a \in D$, un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_{m-1}, y)$ d'origine a dans E^*, telles que $y = 0$ sur D et $y \leqq 0$ sur T_λ. D'après l'hypothèse, y ne peut être astreint à aucune inégalité au voisinage de a dans F; E étant dans l'intérieur relatif de E^*, il en résulte qu'au voisinage de a *dans* E^*, y n'est astreint à aucune inégalité. Par hypothèse, $\mathcal{M}^*$ est adapté au bord de E^*; et d'autre part, $\mathcal{M}^*$ est adapté à D (car il en est ainsi de $\mathcal{M}$, que $\mathcal{M}^*$ prolonge); tout voisinage ouvert assez petit V de a dans D admet donc (pour la métrique $\mathcal{M}^*$) un tube normal difféomorphe à $V \times [-1, +1]$; or les géodésiques normales à M issues des points de D sont normales à D; il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que les géodésiques normales à M issues des points de V puissent être prolongées d'une longueur ε hors de T_λ; d'où (a)

(a) *entraîne* (c). — Soit E^* un prolongement de E dans F, et soit $\mathcal{M}^*$ une métrique riemannienne adaptée au bord de E^* et prolongeant $\mathcal{M}$ [il existe une telle métrique d'après le théorème 3, *cf.* I, (3.3.2)]; soit $\mathcal{M}^\star$ un prolongement de M dans $E^\star$. Soit Λ comme en (a) et μ comme en (b); on peut se borner au cas où μ est à valeurs dans $]0, 1[$ (le cas général s'y ramène : on compose, si nécessaire, deux isotopies). Soit $\lambda^\star$ (resp. $\Lambda^\star$, resp. $\mu^\star$) un prolongement de λ (resp. Λ, resp. μ); en remplaçant éventuellement $M^\star$ par un prolongement plus petit, on peut supposer que les tubes $T_{\lambda^\star}$ et $T_{\Lambda^\star}$ (normaux à $M^\star$ dans $E^\star$) existent, que $\Lambda^\star(x) > \lambda^\star(x)$ pour tout $x \in E^\star$, et que $\mu^\star$ est à valeurs dans $]0, 1]$. Soient (U_i) et (U'_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ deux suites *localement finies dans* F d'ouverts relativement compacts de M; on suppose que M est contenu dans la réunion des U'_i, et que, pour tout i, $\overline{U'_i}$ est contenu dans l'intérieur relatif (par rapport à F) de U_i; soit (ν_i) une famille de fonctions de classe C^∞ sur $M^\star$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que ν_i soit à support dans U'_i et que $\sum_i \nu_i(x) = 1$ pour tout $x \in M$; on pose pour tout i :

$$(\mu^\star)^{\nu_i} = \mu_i,$$

on a alors

$$\prod_i \mu_i(x) = \mu(x) \qquad \text{pour tout } x \in M;$$

il en résulte que le « composé localement fini » (et d'ailleurs commutatif) $\bigcirc_i \rho_{\mu_i}$ défini sur $T_{\lambda^\star}$, coïncide sur T_λ avec ρ_μ. Soit V_i l'image réciproque de U_i par la projection de $T_{\Lambda^\star}$ sur $M^\star$; on suppose U_i assez petit pour que V_i soit un fibré trivial; soient (x, y) des coordonnées dans V_i, compatibles avec la fibration. On prolonge ρ_{μ_i} en une isotopie γ_i de $E^\star$, qui induit l'identité sur $(E^\star - V_i)$, en posant pour $(x, y) \in V_i$ et $t \in [0, 1]$:

$$\gamma_{i;t}.(x, y) = (x, (1 + t.(\mu_i(x) - 1).\overline{\omega}(|y|))y)$$

[$|y|$ désigne la distance géodésique de (x, y) à M; $\overline{\omega}_x$ est la fonction $\overline{\omega}_{\lambda^\star(x),\Lambda^\star(x)}$, où la notation $\overline{\omega}_{a,b}$ désigne, pour tout couple de nombres tel que $0 < a < b$, une fonction réelle de classe C^∞, égale à 1 sur $[0, a]$, à 0 sur $[b, \infty[$, et décroissante sur $[a, b]$; on suppose en plus que $\overline{\omega}_{a.b}$ dépend différentiablement du couple (a, b); une telle famille s'obtient en transformant linéairement la fonction χ de I, (4.2)].

Soit $\mathcal{M}'$ une métrique riemannienne sur F, adaptée à $E^\star$; soit T' un tube normal à $E^\star$ dans F; soit pr$'$ la projection orthogonale de T' sur E; soit W_i l'image réciproque de V_i par pr$'$. Si les U_i ont été choisis assez petits, W_i est un fibré trivial (de base V_i), et γ_i peut se prolonger en une isotopie de F (encore notée γ_i), à support dans W_i, par le procédé de (2.4.4), formule (1). L'isotopie γ_i ainsi construite laisse pr $\circ$ pr$'$ invariant; comme en plus la suite (U_i) est localement finie *dans* F, le « composé localement fini » $\gamma = \bigcirc_i \gamma_i$ est défini, et est une isotopie de F; cette isotopie induit ρ_μ sur T_λ.

4.1.3. *Tubes F-géodésiques.* — Soient F, E et M comme en (4.1.2); on note f l'injection de E dans F. Soit $\mathfrak{M}$ une métrique riemannienne sur F, adaptée au bord de F et à E, et qui induise sur E une métrique adaptée au bord de E et à M; il résulte du corollaire 2 du théorème 3 [*cf.* I, (3.3.2)] qu'une telle métrique existe, et qu'elle est adaptée à M. On munit E de la métrique induite par $\mathfrak{M}$; soit T un tube normal à M dans E. Il existe un difféomorphisme canonique de T sur un voisinage W de la section nulle dans l'espace normal à M dans E. Or W s'identifie à une sous-variété de l'espace normal à M dans F; il existe donc (si T est assez petit) un difféomorphisme canonique de W sur une sous-variété de F, notée L. Il existe donc un difféomorphisme canonique de T sur L, on le note l; L s'appelle le *tube géodésique* (sous-entendu : *F-géodésique*) associé à T. En tant qu'application de T dans F, l a même jet d'ordre 1 le long de M et (si T est assez petit) mêmes relations d'incidence que l'injection $f \mid T$.

4.2. Le théorème d'isotopie locale.

(4.2.1). — Soient F une variété, E une sous-variété fermée de E, f l'injection de E dans F, M une sous-variété fermée de E, $\mathfrak{M}$ une métrique riemannienne sur F, adaptée à ∂F et à E, et induisant sur E une métrique adaptée à ∂E et à M; on munit E de la métrique induite par $\mathfrak{M}$.

Soit r un entier $\geqq 1$; on note $\mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(E, F; f)$ le sous-espace de $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ formé des plongements qui ont même jet d'ordre 1 le long de M que f.

Soit $\mu \in \mathrm{Hom}^\infty(M,]0, 1])$; on note ρ_μ et σ_μ les dilatations de rapport μ, d'axe M, de E et F respectivement [elles sont définies au voisinage de M; *cf.* 4.1.1)].

Soit $f' \in \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$; soit T un tube normal à M dans E; lorsqu'elle est définie, l'application $\sigma_\mu^{-1} \circ f' \circ (\rho_\mu \mid T)$ se note $f'_\mu \mid T$.

Proposition 5. — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, soit $\mathcal{K}$ une partie compacte de $\mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(E, F; f)$.*

1° *Si T est assez petit, $f'_\mu \mid T$ est défini pour tout $f' \in \mathcal{K}$ et pour tout $\mu \in \mathrm{Hom}^\infty(M,]0, 1])$ et est un élément de $\mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f \mid T)$; l'application*

$$\mathcal{K} \times \mathrm{Hom}^\infty(M,]0, 1]) \ni (f', \mu) \to f'_\mu \mid T \in \mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f \mid T)$$

est r-différentiable et $\mathcal{C}^r$-continue.

2° *On suppose T assez petit pour que le tube F-géodésique L associé à T existe, et l'on note l le difféomorphisme canonique de T sur L.*

On suppose vérifiée l'une des deux hypothèses suivantes :

(a) *M est réduit à un point;*

(b) $r \geqq 2$.

Alors, pour tout $\mathcal{C}^1$-voisinage $\mathcal{V}$ de l dans $\mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f\,|\,T)$, *il existe un $\mathcal{C}^1$-voisinage $\mathcal{W}$ de* o *dans* $\mathrm{Hom}^r(M, [0, 1])$ *tel que, pour tout $f' \in \mathcal{K}$ et pour tout $\mu \in \mathcal{W} \cap \mathrm{Hom}^r(M, [0, 1])$, on ait $f'_\mu \mid T \in \mathcal{V}$.*

Démonstration. — Soit $\tilde{T}$ un tube normal à M dans E, suffisamment petit; soit $\tilde{L}$ le tube F-géodésique associé à $\tilde{T}$; soit $\tilde{f}$ l'injection de $\tilde{L}$ dans F. Soit T un tube normal à M dans E, tel que $T \subset \tilde{T}$; soit l le difféomorphisme canonique de T sur son tube F-géodésique associé L; soit $\mathcal{K}'$ l'image canonique de $\mathcal{K}$ dans $\mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f\,|\,T)$. L'application

$$(1) \qquad \mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f\,|\,T) \ni f' \to f' \circ l^{-1} \in \mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(L, F; \tilde{f}\,|\,\mathrm{L})$$

est un isomorphisme (r-différentiable et topologique). Il en résulte qu'*il suffit de démontrer le lemme dans le cas particulier où $E = \tilde{L}$.*

Soit en effet $\mathcal{K}''$ l'image de $\mathcal{K}'$ par l'application (1); pour $f'' \in \mathcal{K}''$, notons f' l'image réciproque de f'' par (1). Supposons que $f''_\mu \,|\, L$ existe, alors

$$\begin{aligned} f''_\mu \circ l &= \sigma_\mu^{-1} \circ f'' \circ \sigma_\mu \circ l = \sigma_\mu^{-1} \circ f' \circ l^{-1} \circ \sigma_\mu \circ l \\ &= \sigma_\mu^{-1} \circ f' \circ \rho_\mu \mid T \end{aligned}$$

existe également, de sorte que $f'_\mu \mid T$ existe et qu'on a

$$(2) \qquad f'_\mu \mid T = (f''_\mu \mid L) \circ l.$$

Le 1° et le 2° du lemme, dans le cas de E, se déduisent donc respectivement du 1° et du 2° dans le cas de $\tilde{L}$.

On est donc ramené au cas où $E = \tilde{L}$. On construit dans ce cas [par le procédé de (3.2.3)] une famille localement finie (φ_i) de cartes locales de F_i ayant les propriétés suivantes : si F_i désigne l'image de φ_i, la réunion des F_i est un voisinage de M dans F; dans F_i, φ_i définit des coordonnées (x, y, z) soumises à des inégalités que nous ne rappelons pas (et qui sont invariantes par les transformations que nous considérons ici) et vérifiant en plus

$$(3) \qquad |y| \leqq \varepsilon_i$$

et

$$(4) \qquad |z| \leqq \varepsilon_i$$

(ε_i étant un certain nombre positif, et $|y|$ désignant la distance euclidienne de y à o).

L'intersection E_i de F_i et de E est définie (outre certaines inégalités) par

$$(5) \qquad z = 0$$

et l'intersection M_i de F_i et de M est définie dans E_i par

$$(6) \qquad y = 0.$$

Sur F_i, la métrique induite par $\mathfrak{M}$ est le produit de la métrique induite par $\mathfrak{M}$ sur M_i et de la métrique euclidienne sur l'espace des (y, z); de sorte que, pour $(x, y, z) \in F_i$ et pour t assez petit, on a

$$\rho_t.(x, y, z) = (x, ty, tz).$$

Soit (M'_i) un recouvrement ouvert de M tel que, pour tout i, $\overline{M}'_i \subset M_i$; soit E'_i la partie de E_i qui est au-dessus de M'_i; il suffit de démontrer le lemme dans le cas où M'_i, E'_i, F_i jouent les rôles respectifs de M, E, F; *on se place désormais dans ce cas.*

Soit $f' \in \mathcal{K}$, on note $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$ (quand elles sont définies) les coordonnées du point $f'.(x, y, 0)$. Posons

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} X(x, y) = x + \xi(x, y), \\ Y(x, y) = y + \eta(x, y). \end{cases}$$

Les coordonnées du point $f'_\mu.(x, y, 0)$, lorsqu'elles sont définies, sont

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} X_\mu(x, y) = x + \xi(x, \mu(x)y), \\ Y_\mu(x, y) = y + \dfrac{1}{\mu(x)}\eta(x, \mu(x)y), \\ Z_\mu(x, y) = \dfrac{1}{\mu(x)} Z(x, \mu(x)y). \end{cases}$$

Les fonctions $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}, \dfrac{\partial\xi}{\partial y}, \dfrac{\partial\eta}{\partial x}, \dfrac{\partial\eta}{\partial y}, \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \dfrac{\partial Z}{\partial y}$ sont de classe C^{r-1} (donc au moins continues et nulles pour $y = 0$. L'image canonique de $\mathcal{K}$ par chacune des applications $\left\{f' \to \left|\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right|\right\}$, $\left\{f' \to \left|\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right|\right\}$, etc., est compacte pour la topologie C^0. Il existe donc une fonction α, réelle positive, continue, définie pour $t \geqq 0$ et nulle pour $t = 0$, telle que

$$\text{(9)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(x, y)\right| \leqq \alpha(|y|) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left|\dfrac{\partial Z}{\partial y}(x, y)\right| \leqq \alpha(|y|) \end{array}\right\} \quad \text{pour tout } f' \in \mathcal{K} \text{ et pour tout } (x, y) \in E'_i.$$

Par intégration, on en déduit qu'il existe une fonction β, réelle positive, continue, croissante, définie pour $t \geqq 0$ et $o(t)$ pour $t = 0$, telle que

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} |\xi(x, y)| \leqq \beta(|y|), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ |Z(x, y)| \leqq \beta(|y|). \end{cases}$$

Il résulte donc de (8) que

$$(11)\quad \begin{cases} |X_\mu(x, y) - x| \leq \sup\limits_{t\in \mathrm{I}} \beta(|ty|), \\ |Y_\mu(x, y) - y| \leq |y| \sup\limits_{t\in \mathrm{I}} \dfrac{\beta(|ty|)}{|ty|}, \\ |Z_\mu(x, y)| \leq |y| \sup\limits_{t\in \mathrm{I}} \dfrac{\beta(|ty|)}{|ty|}. \end{cases}$$

Des formules (11) il résulte que, dès que $|y|$ est assez petit, $X_\mu(x, y)$ est un point de M_i; et d'autre part, que $Y_\mu(x, y)$ et $Z_\mu(x, y)$ vérifient, dès que $|y|$ est assez petit, les inégalités (3) et (4); f'_μ est donc défini, sur tout tube T assez petit, pour tout $f' \in \mathcal{K}$ et pour tout $\mu \in \mathrm{Hom}^\infty(M,]0, 1])$; on montre sans difficulté, par les procédés habituels, que $f'_\mu \mid T$ dépend r-différentiablement de f' et de μ. Enfin, comme sur tout voisinage assez petit de M dans F, σ_μ respecte les relations d'incidence, $f'_\mu \mid T$ est bien un élément de $\mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f \mid T)$; ceci achève la démonstration du 1°.

Des formules (8) et (10), et du fait que β est $o(t)$ pour $t = 0$, résulte immédiatement que $f'_\mu \mid T$ tend vers $f \mid T$ au sens C^0 (uniformément pour $f' \in \mathcal{K}$) lorsque $\mu \to 0$ au sens C^0. Pour démontrer le résultat analogue relatif à la topologie C^1, dérivons (8) :

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_\mu}{\partial x}(x, y) = 1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x, \mu(x)y) + y\dfrac{du}{dx}(x)\dfrac{\partial \xi}{\partial y}(x, \mu(x)y), \\ \dfrac{\partial X_\mu}{\partial y}(x, y) = \mu(x)\dfrac{\partial \eta}{\partial y}(x, \mu(x)y); \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial Y_\mu}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{\mu(x)}\dfrac{\partial \eta}{dx}\mu((x, x)y) \\ \qquad + y\dfrac{1}{\mu(x)}\dfrac{d\mu}{dx}(x)\dfrac{\partial \eta}{\partial y}(x, \mu(x)y) \\ \qquad - \dfrac{1}{\mu^2(x)}\dfrac{d\mu}{dx}(x)\,\eta(x, \mu(x)y), \\ \dfrac{\partial Y_\mu}{\partial y}(x, y) = 1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial y}(x, \mu(x)y); \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial Z_\mu}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{\mu(x)}\dfrac{\partial Z}{\partial x}(x, \mu(x)y) \\ \qquad + y\dfrac{1}{\mu(x)}\dfrac{d\mu}{dx}(x)\dfrac{\partial Z}{\partial y}(x, \mu(x)y) \\ \qquad - \dfrac{1}{\mu^2(x)}\dfrac{d\mu}{dx}(x)\,Z(x, \mu(x)y), \\ \dfrac{\partial Z_\mu}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial Z}{\partial y}(x, \mu(x)y). \end{cases}$$

Il résulte donc de (9) que, lorsque $\mu \to 0$ au sens C^1, $\dfrac{\partial X_\mu}{\partial x} \to 1$, $\dfrac{\partial X_\mu}{\partial y} \to 0$, $\dfrac{\partial Y_\mu}{\partial y} \to 1$ et $\dfrac{\partial Z_\mu}{\partial y} \to 0$, uniformément pour $f' \in \mathcal{K}$. Ceci achève la démonstration du 2° dans l'hypothèse (a) (M réduit à un point).

Supposons maintenant $r \geqq 2$; alors $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y}$ existent et sont nuls sur M'_i; il en résulte (comme ci-dessus) qu'il existe une fonction γ, réelle positive, continue, définie pour $t \geqq 0$ et $o(t)$ pour $t = 0$, telle que

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\frac{\partial \eta}{\partial y}(x, y)\right| \leqq \gamma(|y|) \\ &\left|\frac{\partial Z}{\partial y}(x, y)\right| \leqq \gamma(|y|) \end{aligned}\right. \qquad \text{pour tout } f' \in \mathcal{K} \text{ et pour tout } (x, y) \in E'_i .$$

Par intégration, on en déduit qu'il existe une fonction δ, réelle positive, continue, définie pour $t \geqq 0$ et $o(t^2)$ pour $t = 0$, telle que

$$\left\{\begin{aligned} &|\eta(x, y)| \leqq \delta(|y|) \\ &|Z(x, y)| \leqq \delta(|y|) \end{aligned}\right. \qquad \text{pour tout } f' \in \mathcal{K} \text{ et pour tout } (x, y) \in E'_i$$

et ceci, compte tenu de (13) et (14), achève la démonstration du 2° dans l'hypothèse (b).

Corollaire. — *Les hypothèses et notations sont celles de la proposition 5; on suppose en plus M compact. Soit $\mathcal{K}$ un compact de* $\mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(E, F; f)$. *Soit T un tube normal à M dans E, suffisamment petit, soit l le difféomorphisme canonique de T sur le tube F-géodésique associé; soit $\mathcal{K}'$ l'image canonique de $\mathcal{K}$ dans* $\mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f\,|\,T)$; *pour tout C^1-voisinage $\mathcal{V}$ de l dans* $\mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f\,|\,T)$, *il existe une application continue*

(1) $$\mathcal{K}' \times [0, 1] \to \mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f\,|\,T)$$

telle que

(2) *la restriction de* (1) *à* $\mathcal{K}' \times \{0\}$ *est l'identité*

et

(3) *l'image par* (1) *de* $\mathcal{K}' \times \{1\}$ *est dans* $\mathcal{V}$.

Démonstration. — D'après la proposition 5, si T est assez petit, $f'_\mu \,|\, T$ existe pour tout $f' \in \mathcal{K}$ et pour tout $\mu \in \mathrm{Hom}^\infty(M,]0, 1])$; et il existe un C^1-voisinage $\mathcal{W}$ de 0 dans $\mathrm{Hom}^\infty(M, [0, 1])$ tel que, pour tout

$$\mu \in \mathcal{W} \cap \mathrm{Hom}^\infty(M,]0, 1]),$$

on ait $f'_\mu \,|\, T \in \mathcal{V}$. Puisque M est compact, $\mathcal{W}$ contient une fonction constante strictement positive, soit μ. L'application

$$\mathcal{K}' \times [0, 1] \ni (f', t) \to f'_{1+(\mu-1)t} \,|\, T$$

vérifie (2) et (3), et est continue d'après le 1° de la proposition 5 et la compacité de M.

4.2.2 THÉORÈME 7. — *Soient F une variété, E une sous-variété fermée de F, f l'injection de E dans F, M une sous-variété compacte de codimension > 0 de E. Soit r un entier ≥ 2 (dans le cas où M est réduit à un point, il suffit de supposer $r \geq 1$); soit r' un entier tel que $1 \leq r' \leq r$; on note $\mathrm{Pl}^r_{J^{r'}_M}(E, F; f)$ le sous-espace de $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ formé des plongements qui ont même r'-jet le long de M que f. Soit V un voisinage de M dans F; soit $\Gamma_{r'}$ le groupe des r-isotopies de F qui induisent l'identité sur $(F - V) \cup M$ et qui ont même r'-jet le long de M que l'identité.*

Soit $\mathcal{K}$ un compact de $\mathrm{Pl}^r_{J^{r'}_M}(E, F; f)$; soit T un tube normal à M dans E (pour une métrique riemannienne $\mathfrak{M}'$ sur E, adaptée à ∂E et à M); on suppose T suffisamment petit. Il existe une application continue

$$\mathcal{K} \ni f' \rightarrow \gamma(f') \in \Gamma_{r'}$$

telle que

(1) *pour tout $f' \in \mathcal{K}$, l'extrémité $\gamma_1(f')$ de $\gamma(f')$ coïncide avec f' sur T;*

(2) *$\gamma(f') = e$ (isotopie identique) pour tout $f' \in \mathcal{K}$ qui coïncide avec f sur T.*

La démonstration du théorème 7 utilise le

LEMME. — *Soit F, E, f, M, r, $\mathfrak{M}'$, T comme ci-dessus. On peut munir F d'une métrique riemannienne $\mathfrak{M}$ (adaptée à ∂F et à E, et induisant sur E une métrique adaptée à ∂E et à M), telle que T s'identifie canoniquement (au moyen de l'application identique $f \mid T$) au tube F-géodésique associé [au sens de (4.1.3)].*

Démonstration du lemme. — Soit $\mathfrak{M}''$ une métrique riemannienne sur F, adaptée à ∂F et à E, et induisant sur E la métrique $\mathfrak{M}'$ [une telle métrique existe d'après le théorème 3, *cf.* I, (3.3.2)]. On suppose T assez petit pour que le tube F-géodésique associé L existe, et l'on note l le difféomorphisme canonique de T sur L. Soit $\mathcal{V}$ un C^1-voisinage arbitraire de l dans $\mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f \mid T)$; d'après le corollaire 4.2.1, il existe une application continue

$$[0, 1] \ni t \rightarrow f_t \in \mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f \mid T),$$

telle que $f_0 = f \mid T$ et $f_1 \in \mathcal{V}$. D'après le théorème 5 [*cf.* (2.2.1)], l'application canonique

$$(3) \qquad \Gamma^r_{(F-T) \cup M}(F) \ni \gamma \rightarrow \gamma . f \mid T \in \mathrm{Pl}^r_{J^1_M}(T, F; f \mid T)$$

est une fibration localement triviale; en particulier, tout chemin continu dans la base dont une extrémité se relève dans $\Gamma^r_{(F-T) \cup M}(F)$, se relève en entier;

il existe donc $\gamma_1 \in \Gamma^r{}_{(F-V)\cup M}(F)$ tel que $\gamma_1 . f \mid T = f_1$. Toujours d'après le théorème 5, si $\mathcal{V}$ a été choisi assez petit, il existe $\gamma_2 \in \Gamma^r{}_{(F-V)\cup M}(F)$ tel que $\gamma_2 . f_1 = l$; on a donc $\gamma_2 \circ \gamma_1 . f \mid T = l$. La métrique riemannienne $\mathfrak{M}$, transportée de $\mathfrak{M}''$ par le difféomorphisme extrémité de $(\gamma_2 \circ \gamma_1)^{-1}$, a la propriété voulue.

Démonstration du théorème 7. — On note $\mathcal{K}'$ l'image canonique de $\mathcal{K}$ dans $\mathrm{Pl}^r_{J^{r'}_M}(T, F; f \mid T)$. On munit F d'une métrique riemannienne $\mathfrak{M}$ fournie par le lemme ci-dessus; soit σ une dilatation de F, d'âme M, de rapport $\leqq 1$, relative à la métrique $\mathfrak{M}$; soit ρ la restriction de σ à T; un calcul immédiat montre que $\mathrm{Pl}^r_{J^{r'}_M}(T, F; f \mid T)$ est stable pour l'application $f' \to \sigma^{-1} \circ f' \circ \rho$. Il existe donc d'après le corollaire 4.2.1 une application continue

$$\mathcal{K}' \times [0, 1] \ni (f', t) \to h_t . f' \in \mathrm{Pl}^r_{J^{r'}_M}(T, F; f \mid T)$$

telle que h_0 soit l'identité et que l'image de $\mathcal{K}'$ par h_1 soit contenue dans un C^1-voisinage arbitraire $\mathcal{V}$ de $f \mid T$.

D'autre part il résulte [29] du cas particulier 1° du théorème 5' [*cf.* (2.4.1)] que, si $\mathcal{V}$ est assez petit, l'application canonique

$$\Gamma_{r'} \ni \gamma \to \gamma . f \mid T \in \mathrm{Pl}^r_{J^{r'}_M}(T, F; f \mid T) \tag{4}$$

admet au-dessus de $\mathcal{V}$ une section continue s telle que $s(f \mid T) = e$.

Il en résulte d'une part que (4) est une fibration topologique localement triviale (car des sections telles que s existent au voisinage de tout point de la base). D'autre part la section s permet de relever l'application h_1 en une application $\mathcal{K}' \to \Gamma_{r'}$; d'après le théorème de relèvement des homotopies pour les compacts (*cf.* par exemple Steenrod [1], p. 54), il en résulte que l'application h_0 peut aussi se relever dans $\Gamma_{r'}$; autrement dit, il existe pour l'application (4) une section continue s' *au-dessus de* $\mathcal{K}'$; dans le cas ou $\mathcal{K}'$ contient $f \mid T$, on peut (en translatant au besoin s') supposer en plus que $s'(f \mid T) = e$. En composant s' avec l'application canonique $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, on obtient une application $\mathcal{K} \to \Gamma_{r'}$ qui a toutes les propriétés voulues.

4.2.3. *Conséquences du théorème* 7.

Définition. Soient F une variété, E une sous-variété de F, M une sous-variété de E, r un entier $\geqq 1$; soit Γ un groupe de r-isotopies de F. Soient f'

---

[29] En effet, soit T' un tube normal à E dans F, d'âme M; le théorème cité fournit une section locale $\mathrm{Pl}^r_M(T, F; f \mid T) \to G^r_{(F-V)\cup T'}(F)$ dont la restriction à $\mathrm{Pl}^r_{J^{r'}_M}(T, F; f \mid T)$ va nécessairement dans $G^r_{(F-V); J^{r'}_M}(F)$; d'autre part la section locale construite au (*b*) du lemme 1.5.3 pour l'application canonique $\Gamma^r(F) \to G^r(F)$, envoie $G^r_{(F-V); J^{r'}_M}(F)$ dans $\Gamma^r_{(F-V); J^{r'}_M}(F)$; la section s de (4) s'obtient par composition.

et f'' deux éléments de $\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$; s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma . f''$ et f' coïncident sur tout un voisinage de M dans E, on dit que f' et f'' sont *localement* Γ*-isotopes*.

La relation « f' et f'' sont localement Γ-isotopes » est une relation d'équivalence dans $\mathrm{Hom}^r_M(E, F)$; elle induit une relation d'équivalence dans $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$.

Ceci posé, une conséquence immédiate du théorème 7 est le

COROLLAIRE 1. — *Soient E, F, M, f, r, r', V, $\Gamma_{r'}$ comme dans l'énoncé du théorème 7; on suppose en plus que M est sans bord relatif dans E. Soient f' et f'' deux éléments de* $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$. *Si f' et f'' sont tangents d'ordre r' le long de M, f' et f'' sont localement $\Gamma_{r'}$-isotopes.*

COROLLAIRE 2 (*Théorème d'isotopie locale*). — *Soit F une variété, E une sous-variété fermée de F, M une sous-variété compacte, de codimension > 0, sans bord relatif, de E; on note f l'injection de E dans F. Soit r un entier ≥ 2 (si M est réduit à un point, $r \geq 1$ suffit). Soit V un voisinage de M dans F; soit Γ le groupe des r-isotopies de F qui induisent l'identité sur $(F - V) \cup M$.*

Soient f' et f'' deux éléments de $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ *pour que f' et f'' soient localement Γ-isotopes, il faut et il suffit que leurs jets d'ordre 1 le long de M soient dans la même composante connexe de* $J^1_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$.

REMARQUE. — Ce résultat peut encore s'exprimer ainsi : *les classes d'équivalence définies dans* $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ *par la relation de Γ-isotopie locale sont en correspondance biunivoque* (*canonique*) *avec les composantes connexes de* $J^1_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ (en particulier, elles sont indépendantes de V).

Démonstration du corollaire 2. — Il est immédiat que la condition est nécessaire. En effet, s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma . f''$ et f' coïncident au voisinage de M, alors $\gamma . f''$ et f' ont *a fortiori* même 1-jet le long de M, autrement dit $\gamma . J^1_M f'' = J^1_M f'$; donc $J^1_M f''$ et $J^1_M f'$ sont dans la même composante connexe de $J^1_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ [*cf.* (3.4.2), corollaire 2; on utilise la partie de ce corollaire qui s'établit sans l'aide du théorème 6].

Inversement, supposons que $J^1_M f'$ et $J^1_M f''$ soient dans la même composante connexe de $J^1_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$; d'après le corollaire 2 de (3.4.2), il existe alors $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma . f''$ et f' soient tangents d'ordre 1 le long de M. D'après le corollaire 1, $\gamma . f''$ et f' sont donc localement Γ_1-isotopes, donc *a fortiori* localement Γ-isotopes; donc f' et f'' sont localement Γ-isotopes.

COROLLAIRE 3. — *Soient E, F, M, f, r, r', $\mathfrak{M}'$ comme dans l'énoncé du théorème 7. Soit T un tube normal à M dans E; on suppose que T est F-intérieur* [*cf.* (4.1.2)]. *Alors, pour tout* $f' \in \mathrm{Pl}^r_{f|T}(E, F; f)$, *et pour tout $i \geq 0$, l'application canonique*

$$(1) \qquad \pi_i(\mathrm{Pl}^r_{f|T}(E, F; f); f') \to \pi_i(\mathrm{Pl}^r_{f^{r'}_M}(E, F; f); f')$$

est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. — Pour tout T_λ, normal à M dans E, l'espace $\mathrm{Pl}^r_{f|T_\lambda}(E, F; f)$ sera noté A_λ; l'espace $\mathrm{Pl}^r_{J'_M}(E, F; f)$ sera noté B; pour tout (λ, λ') tel que $\lambda' \leq \lambda$, on a $A_\lambda \subset A_{\lambda'} \subset B$. Voici deux résultats préliminaires :

(a) Pour tout couple $(T_\lambda, T_{\lambda'})$ de tubes normaux à M dans E, F-intérieurs, tels que $\lambda' \leq \lambda$, il existe une application continue φ :

$$A_{\lambda'} \times I \ni (f', t) \to \varphi_t(f') \in A_{\lambda'}$$

telle que

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = \text{identité}, \\ &\varphi_1(A_{\lambda'}) \subset A_\lambda, \\ &\left.\begin{aligned} &\varphi_t(A_\lambda) \subset A_\lambda \\ &\varphi_t(f) = f \end{aligned}\right\} \text{ pour tout } t \in I. \end{aligned}$$

(b) Soit K un compact de B; pour tout tube $T_{\lambda'}$ normal à M dans E, suffisamment petit, il existe une application continue ψ_K :

$$K \times I \ni (f', t) \to \psi_{K;t}(f') \in A_{\lambda'},$$

telle que

$$\begin{aligned} &\psi_{K;0} = \text{identité}, \\ &\psi_{K;1}(K) \subset A_{\lambda'}, \\ &\psi_{K;t} \text{ induit l'identité sur } A_{\lambda'} \cap K, \text{ pour tout } t \in I. \end{aligned}$$

Démonstration de (a). — Soit γ une isotopie de F prolongeant la dilatation $\rho_{\lambda/\lambda'}$ de $T_{\lambda'}$ (une telle isotopie existe d'après le lemme 4.2.2); M étant compact, on peut supposer que γ est à support compact. On pose alors

$$\varphi_t(f') = (\gamma_t)^{-1} \circ f' \circ \gamma_t \qquad \text{pour} \quad (f', t) \in A_\lambda \times I.$$

Démonstration de (b). — Soit V un voisinage compact de M dans F, et soit Γ_1 comme dans l'énoncé du théorème 7; d'après ce théorème (et compte tenu de son corollaire 1), il existe une application continue

$$K \ni f' \to \gamma(f') \in \Gamma_1,$$

telle que

$$\begin{aligned} &\gamma(f') . f' \mid T_{\lambda'} = f \mid T_{\lambda'}, \\ &\gamma(f') = e \qquad \text{pour tout } f' \text{ tel que} \quad f' \mid T_{\lambda'} = f \mid T_{\lambda'}. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\psi_{K;t}(f') = (\gamma(f'))_t . f'.$$

Application à la démonstration du corollaire 3. — De (a) et (b) résulte, en premier lieu, que pour tout λ, tout point de B est origine d'un chemin continu d'extrémité dans A_λ. L'application canonique

$$\pi_0(A_\lambda) \to \pi_0(B)$$

est donc un isomorphisme. Il suffit donc de démontrer que, pour tout λ, et pour tout $i \geqq 1$, l'application canonique

$$\pi_i(A_\lambda; f) \to \pi_i(B; f) \tag{2}$$

est un isomorphisme. Supposons donc λ donné; pour tout compact K de B, le (b) fournit un λ'; on peut supposer $\lambda' \leqq \lambda$; le (b) donne une déformation de K dans B, qui laisse fixe $K \cap A_{\lambda'}$, donc *a fortiori* $K \cap A_\lambda$, et qui envoie K dans $A_{\lambda'}$; puis le (a) donne une déformation de $A_{\lambda'}$ dans lui-même, qui induit une déformation de A_λ dans lui-même, qui laisse fixe f, et qui envoie $A_{\lambda'}$ dans A_λ. La composée de ces deux déformations a donc les propriétés suivantes : elle induit une déformation de $K \cap A_\lambda$ dans A_λ, elle laisse fixe f, elle envoie K dans A_λ; d'où le résultat recherché.

COROLLAIRE 4. — *Soient E, F, M, f, r comme dans l'énoncé du théorème 7; on suppose en plus que M est une sous-variété de E sans bord relatif, et que, pour une métrique $\mathfrak{M}$ convenable, E s'identifie à un tube normal à M dans E et F-intérieur.*

1° *Soit Γ le groupe des r-isotopies de F qui induisent l'identité sur M. Pour que deux éléments f' et f'' de $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ soient Γ-isotopes, il faut et il suffit que leurs jets d'ordre 1 le long de M soient dans la même composante connexe de $J^1_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$.*

2° *Pour tout entier r' tel que $1 \leqq r' \leqq r$, pour tout $f' \in \mathrm{Pl}^r_{J^{r'}_M}(E, F; f)$ et pour tout $i \geqq 0$, on a*

$$\pi_i\Big(\mathrm{Pl}^r_{J^{r'}_M}(E, F; f); f'\Big) = 0.$$

DÉMONSTRATION.

1° La condition est évidemment nécessaire (*cf.* corollaire 2). Elle est suffisante : en effet, d'après le corollaire 2, si $J^1_M f'$ et $J^1_M f''$ sont dans la même composante connexe de $J^1_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$, alors f' et f'' sont localement Γ-isotopes. On peut donc supposer qu'il existe un tube T, normal à M dans E, tel que $f' \mid T = f'' \mid T$; soit ρ_μ la dilatation qui envoie E sur T. On note E', T', $\mathfrak{M}'$, ρ'_μ les transportés respectifs par f' de E, T, $\mathfrak{M}$ (en tant que métrique sur E), et ρ_μ; on a $\rho'_\mu = f' \circ \rho_\mu \circ f'^{-1}$. D'après (b) du lemme 4.1.2, E s'identifie à un tube F-intérieur pour $\mathfrak{M}'$. Comme on a $f' \circ \rho_\mu = f'' \circ \rho_\mu$, il suffit de montrer que f' et $f' \circ \rho_\mu$ sont Γ-isotopes; cela résulte du corollaire 4.1.2, puisque $f' \circ \rho_\mu = \rho'_\mu \circ f'$.

2° Il suffit d'appliquer le corollaire 3, avec $T = E$.

5. Application des théorèmes généraux à quelques cas particuliers.

5.1. Plongements avec point fixe, plongements des boules.

NOTATIONS. — F désigne une variété de dimension n, E une sous-variété fermée de dimension m de F, et O un point de E; r et r' sont deux entiers tels que $1 \leqq r' \leqq r$; l'injection de E dans F est notée f. On note B_m la boule fermée de dimension m.

3.1.1. *Étude de l'espace* $J_O^{r'}\,\mathrm{Pl}_O^r\,(E, F; f)$.

Premier cas particulier. — $E = B_m \cap R^m_{(p)}$ [avec $0 \leqq p \leqq m$; *cf.* I, (1.2.1)]; $F = R^n$; O est l'origine. D'après (3.2.1), l'espace $J_O^{r'}\,\mathrm{Pl}_O^r\,(E, F; f)$ est alors indépendant de p; il est homéomorphe au produit d'un espace contractile et de la variété de Stiefel $V_{m,n-m}$ (espace des systèmes de m vecteurs orthonormaux d'origine O de R^n); lorsque $m < n$, ou lorsque $m = n = 0$, cet espace est connexe; lorsque $m = n \geqq 1$, cet espace a deux composantes connexes (caractérisées par l'orientation).

Deuxième cas particulier. — $E = B_m \cap R^m_{(p)}$; $F = R^n_{(q)}$ (avec $p \leqq q \leqq n$); O est l'origine. On se borne au cas où E n'est contenu dans aucune face de codimension > 0 de F, ce qui entraîne $(m-p) \geqq (n-q)$. L'espace $J_O^{r'}\,\mathrm{Pl}_O^r\,(E, F; f)$ est alors homéomorphe au produit d'un espace contractile et de $J_O^{r'}\,\mathrm{Pl}_O^r\,(B_{q-n+m}, R^q)$, donc, d'après le premier cas particulier, au produit d'un espace contractile et de la variété de Stiefel $V_{q-n+m,\, n-m}$; en particulier, $J_O^{r'}\,\mathrm{Pl}_O^r\,(E, F; f)$ est *connexe* lorsque $m < n$, ou lorsque $m = n$ et $q = 0$; il a deux composantes connexes [chacune homéomorphe au produit d'un espace contractile et de $SO(q+1)$] lorsque $m = n$ et $q \geqq 1$.

Cas général. — Il se ramène immédiatement au cas où E n'est contenu dans aucune face de codimension > 0 de F. Du deuxième cas particulier et du 2° du corollaire 1 de (3.4.2), résulte alors le :

LEMME. — *Avec les notations ci-dessus, soit q l'indice de O dans F* [*cf.* I, (1.2.3)].

(a) *Si $m < n$, $J_O^{r'}\,\mathrm{Pl}_O^r\,(E, F; f)$ est homéomorphe au produit d'un espace contractile et de la variété de Stiefel $V_{q-n+m,\, n-m}$.*

(b) *Si $m = n$, soit $\mathrm{Pl}_{O,+}^r(E, F; f)$ le sous-espace de $\mathrm{Pl}_O^r\,(E, F; f)$ formé des plongements qui laissent fixe l'orientation en O; $J_O^{r'}\,\mathrm{Pl}_{O,+}^r(E, F; f)$ est homéomorphe au produit d'un espace contractile et du groupe $SO(q+1)$. Si O est un sommet de F* (i. e., $q = 0$), *tout élément de* $\mathrm{Pl}_O^r\,(E, F; f)$ *laisse nécessairement fixe l'orientation en O.*

3.1.2. *Difféomorphisme laissant fixe un point.* — Soit F une variété de dimension n; soit O un point de F, d'indice q. Soit G_0^r le groupe des r-difféomorphismes de F qui ont mêmes relations d'incidence que l'identité et qui laissent fixes O et l'orientation en O; G_0^r est une partie ouverte, fermée et non vide de l'espace $\mathrm{Pl}_{O,+}^r(F, F; f)$ (ces deux espaces coïncident lorsque F est compact); donc $J_O^{r'}\,G_0^r$ *est homéomorphe au produit d'un espace contractile et de* $SO(q+1)$. Soit maintenant T un voisinage tubulaire de O, fermé et F-intérieur [*cf.* (4.1.2)], difféomorphe à $B_n \cap R^n_{(q)}$. On note $G_{r'}^r$ (resp. G_T^r) le sous-groupe de G_0^r formé des difféomorphismes qui sont tangents d'ordre r' à l'identité en O (resp. qui induisent l'identité sur T). Il résulte du corollaire 3 de (4.2.3) :

L'application canonique $\pi_i(G_T^r) \to \pi_i(G_T^{r'})$ *est un isomorphisme pour tout* $i \geqq 0$ (*et pour tout* r' *tel que* $1 \leqq r' \leqq r$).

Cas particulier. — F est la sphère S_n, O est le pôle nord, et T l'hémisphère nord fermé; G_T^r est alors difféomorphe au groupe des r-difféomorphismes de la boule fermée B_n qui sont r-tangents à l'identité le long du bord.

5.1.3. *Isotopie locale avec point fixe.* — De (5.1.1) et du théorème d'isotopie locale [corollaire 2 de (4.2.3)] résulte la

PROPOSITION 6. — *Soit F une variété, E une sous-variété fermée de F, O un point de E, V un voisinage de O dans F; on note f l'injection de E dans F, et Γ le groupe des r-isotopies de F ($r \geqq 1$) qui induisent l'identité sur* $(F - V) \cup \{O\}$. *Soient f' et f'' deux éléments de* $\mathrm{Pl}_O^r(E, F; f)$.

(a) *si* $\dim E < \dim F$, *f' et f'' sont toujours localement Γ-isotopes.*

(b) *si* $\dim E = \dim F$, *pour que f' et f'' soient localement Γ-isotopes, il faut et il suffit qu'il aient même orientation en O;* (*cette condition est nécessairement remplie lorsque O est un sommet de F*).

5.1.4. *Plongements des boules : théorème d'isotopie* ([30]). — On suppose maintenant que F est une variété *connexe*; du lemme 2 de (2.4.4) résulte immédiatement le

LEMME. — *Soient O' et O'' deux points de l'intérieur de F; il existe une isotopie γ de F telle que $\gamma . O'' = O'$. Si en plus on se donne une composante connexe de l'espace des chemins joignant O'' à O' dans F, on peut choisir γ de manière que le chemin décrit par O'' au cours de l'isotopie soit dans cette composante.*

Soit alors B_m la boule fermée de dimension m ($m \leqq n$); soient f' et f'' deux plongements de B_m dans l'intérieur de F; on note $f' . O = O'$ et $f'' . O = O''$. Si $O' = O''$, il résulte du corollaire 4 de (4.2.3) que, si f' et f'' sont localement isotopes en O', ils sont aussi isotopes. Dans le cas général, le lemme ci-dessus montre qu'il existe une isotopie γ de F telle que $\gamma . f''$ et f' coïncident en O; en plus, si F est non orientable, on peut choisir γ de manière que $\gamma . f''$ et f' aient même orientation en O; par contre, lorsque F est orientable, f' et f'' ne peuvent être isotopes que s'ils ont même orientation. On a démontré :

PROPOSITION 7. — *Soit F une variété connexe de dimension n; soit r un entier $\geqq 1$; soient f' et f'' deux r-plongements de B_m (m entier $\leqq n$) dans l'intérieur de F. Si $m < n$, ou si F est non orientable, f' et f'' sont toujours r-isotopes sur F. Si $m = n$, et si F est orientable, la condition nécessaire et suffisante pour que f' et f'' soient r-isotopes sur F est qu'ils aient même orientation.*

([30]) Pour une démonstration directe, *cf.* R. S. PALAIS, [2].

COROLLAIRE 1. — *Soient F, n, m, r comme ci-dessus. Soit E une r-sous-variété de l'intérieur de F, difféomorphe à la boule B_m. Soit f' un r-plongement de E dans l'intérieur de F. Si $m < n$; ou si $m = n$ et F est non orientable; ou si $m = n$, F est orientable et f' respecte l'orientation, alors f' peut se prolonger en un r-difféomorphisme de F.*

COROLLAIRE 2. — *Soient F, n, m, r comme ci-dessus. Soient F' et F'' deux r-plongements de la boule B_m dans l'intérieur de F; soient E' et E'' les images respectives de B_m par f' et f''; $\overline{F - E'}$ et $\overline{F - E''}$ sont difféomorphes.*

Cas particulier. — Soit f' un plongement de la boule B_m dans l'intérieur d'elle-même, soit E' l'image de B_m par f'; $\overline{B_m - E'}$ est difféomorphe à la couronne $\left\{ 1 \leqq \sum x_i^2 \leqq 2 \right\}$ de R^m.

COROLLAIRE 3. — *Soit F une variété connexe de dimension n; on suppose ou bien F non orientable ou bien F orientée. Soit r un entier $\geqq 1$; soit $G^r_{J^r_{\partial F}}(F)$ le groupe des r-difféomorphismes de F qui sont r-tangents à l'identité le long du bord; il existe un homomorphisme canonique*

$$\pi_i\left(G^r_{J^r_{S_{n-1}}}(B_n)\right) \to \pi_i\left(G^r_{J^r_{\partial F}}(F)\right)$$

(les points de base pour les groupes d'homotopie étant pris à l'élément neutre).

COROLLAIRE 4 (MILNOR). — *Soit G^r le groupe des r-difféomorphismes ($r \geqq 1$) de la sphère S_n qui conservent l'orientation. Le groupe $\pi_0(G^r)$ (groupe d'homotopie de dimension 0 de G^r) est abélien.*

Démonstration du corollaire 4. — Soient H et O l'hémisphère nord fermé et le pôle nord de S_n; soient H' et O' l'hémisphère sud fermé et le pôle sud. Soient g et g' deux éléments de G^r. D'après la proposition 7, il existe g^* (resp. g'^*) qui soit dans la même composante connexe de G^r que g (resp. g') et qui induise l'identité sur H (resp. H'). On a donc

$$g^* \circ g'^* = g'^* \circ g^*.$$

Donc les éléments de $\pi_0(G^r)$ définis respectivement par g et g' commutent pour la loi de groupe de $\pi_0(G^r)$.

5.1.5. *Espaces de plongements des boules : groupes d'homotopie.* — Du 2° du corollaire 4 de (4.2.3) résulte la

PROPOSITION 8. — *Soit F une variété sans bord de dimension n; soient r et r' deux entiers tels que $1 \leqq r' \leqq r$; soit m un entier $\leqq n$; soit f un r-plongement de B_m dans F. L'espace des r-plongements de B_m dans F qui sont r'-tangents à f en O, est acyclique en toute dimension.*

De (5.1.1) et du théorème 6′ [*cf.* (3.4.3)] résulte alors immédiatement le

COROLLAIRE. — *Soient F, n, m, r comme ci-dessus. L'espace des r-plongements de B_m dans F, et l'espace des systèmes de m vecteurs linéairement indépendants (de même origine) tangents à F, ont leurs groupes d'homotopie canoniquement isomorphes en toute dimension.*

5.2. Cas où la variété M des points fixes est une face compacte de codimension 1 de E située dans le bord de F.

5.2.1. *Contractilité de l'espace $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$. Conséquences diverses.* — Soient F une variété, E une sous-variété fermée de F, f l'injection de E dans F. Soit M une *face compacte de codimension* 1 de E, qui soit une *sous-variété de E*, et qui soit *dans le bord de F*. Soit T un voisinage tubulaire fermé de M dans E. Soient r et r' deux entiers tels que $1 \leqq r' \leqq r$. D'après le 2° de la proposition 4 [*cf.* (3.3.3)], l'espace $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(T, F; f \mid T)$ est un sous-espace de l'espace des sections différentiables d'un certain fibré $\mathcal{S}^*$ à fibre vectorielle, de base M; ce sous-espace est défini par des conditions du type suivant : rencontrer chaque fibre de $\mathcal{S}^*$ en un point situé dans un certain *convexe* de cette fibre. Il en résulte que l'espace $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(T, F; f \mid T)$ est contractile et *a fortiori connexe*. Il résulte donc du 2° du corollaire 1 de (3.4.2) : l'*espace $J^{r'}_M \mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ est contractile.*

Il résulte alors immédiatement du deuxième théorème de fibration [corollaire 1 du théorème 6, *cf.* (3.4.2)] et du corollaire 2 de (4.2.3) la

PROPOSITION 9. — *Soient F, E, M, f comme ci-dessus.*

1° *On suppose $r \geqq 1$; soit $\mathrm{Pl}^r_{J^r_M}(E, F; f)$ le sous-espace de $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$ formé des plongements qui sont r-tangents à f le long de M. L'application canonique*

$$\pi_i(\mathrm{Pl}^r_{J^r_M}(E, F; f)) \to \pi_i(\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f))$$

est un isomorphisme pour tout $i \geqq 0$.

2° *On suppose $r \geqq 2$; soient f' et f'' deux éléments de $\mathrm{Pl}^r_M(E, F; f)$; il existe une r-isotopie γ de F, induisant l'identité sur M, telle que $\gamma . f''$ et f' coïncident au voisinage de M.*

COROLLAIRE 1. — *Soient F, E, M, f comme ci-dessus; soit T un voisinage tubulaire fermé F-intérieur [cf. (4.1.2)] de M dans E; soit r un entier $\geqq 2$.*

1° *$\mathrm{Pl}^r_{J^r_M}(T, F; f \mid T)$ et $\mathrm{Pl}^r_M(T, F; f \mid T)$ sont acycliques en toute dimension.*

2° *Soient f' et f'' deux éléments de $\mathrm{Pl}^r_M(T, F; f \mid T)$; il existe une r-isotopie γ de F, induisant l'identité sur M, telle que $\gamma . f'' = f'$. En particulier, tout $f' \in \mathrm{Pl}^r_M(T, F; f \mid T)$ est isotope à f, et peut par conséquent se prolonger en un difféomorphisme de E.*

[Le corollaire 1 est une conséquence immédiate de la proposition et de (4.2.2), corollaire 5.]

COROLLAIRE 2. — *Soit r un entier $\geqq 1$. Soit F une variété dont le bord ∂F est compact. On suppose que M est réunion de faces de codimension 1 de F (par exemple, M est une telle face, ou encore $M = \partial F$); on note G_M^r $\left(\text{resp. } G_{J_M^r}^r\right)$ le groupe des r-difféomorphismes de F qui induisent l'identité sur M (resp. qui sont r-tangents à l'identité le long de M); l'application canonique*

$$\pi_i\left(G_{J_M^r}^r\right) \to \pi_i(G_M^r)$$

est un isomorphisme pour tout $i \geqq 0$.

Démonstration du corollaire 2. — Soit M' (resp. M'') une réunion de faces (resp. une face) de codimension 1 de F. Soit G' (resp. G'') le groupe des r-difféomorphismes de F qui induisent l'identité sur M et qui sont r-tangents à l'identité le long de M' (resp. $M' \cup M''$). Il suffit de montrer que l'application canonique $\pi_i(G'') \to \pi_i(G')$ est un isomorphisme pour tout $i \geqq 0$, ce qui résulte du complément au deuxième théorème de fibration [*cf.* (3.3.4), corollaire du théorème 6].

5.2.2. *Application : décomposition régulière d'une variété; recollement régulier de deux variétés.*

DÉFINITION 1. — Soit F une variété [au sens de I, (1.2.2)]. Soient F_i et F_j deux sous-variétés fermées de codimension 0 de F. On dit que le couple (F_i, F_j) est une *décomposition régulière* de F si :

(*a*) $F = F_i \cup F_j$.

(*b*) $F_i \cap F_j$ est une sous-variété de codimension 1 de F.

PROPOSITION 10. — *Soient F_i et F_j deux variétés de même dimension, soit E_i (resp. E_j) une face de codimension 1 de F_i (resp. F_j) qui soit une sous-variété compacte de F_i (resp. F_j); soit f un difféomorphisme $E_i \to E_j$.*

Il existe une variété F, une décomposition régulière $(\tilde{F}_i, \tilde{F}_j)$ de F et un couple de difféomorphismes

$$f_i : \quad F_i \to \tilde{F}_i; \qquad f_j : \quad F_j \to \tilde{F}_j$$

tels que $f_i | E_i$ (resp. $f_j | E_j$) soit un difféomorphisme de E_i (resp. E_j) sur $\tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j$, et que

$$f_j^{-1} \circ f_i | E_i = f. \tag{1}$$

En plus, pour tout système $(F', \tilde{F}'_i, \tilde{F}'_j, f'_i, f'_j)$ ayant les propriétés ci-dessus, il existe un difféomorphisme de F sur F' compatible avec les décompositions $(\tilde{F}_i, \tilde{F}_j)$ et $(\tilde{F}'_i, \tilde{F}'_j)$.

DÉFINITION 2. — Avec les notations ci-dessus, on dit que F est la variété (définie à un difféomorphisme près) obtenue par *recollement régulier de F et F_j suivant E_i et E_j à l'aide de f.*

Démonstration de la proposition **10**.

(*a*) *Existence.* — Soit F l'espace topologique obtenu par recollement de F_i et F_j suivant E_i et E_j à l'aide de f; on a un homéomorphisme canonique f_i de F_i sur un fermé $\tilde{F}_i$ de F; on a de même f_j et $\tilde{F}_j$; on a bien (1). Soit h_i un difféomorphisme de $E_i \times [0, 1]$ sur un voisinage tubulaire T_i de E_i dans F_i; soit de même h_j; on munit F d'une structure différentiable comme suit : sur $\tilde{F}_i$(resp. $\tilde{F}_j$), c'est celle transportée par f_i(resp. f_j); au voisinage de $\tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j$, c'est la structure transportée par l'homéomorphisme θ de $E_i \times [-1, +1]$ dans F, défini comme suit :

$$\theta.(x, t) = \begin{cases} h_i.(x, t) & \text{pour} \quad x \in E_i \quad \text{et} \quad t \in [0, 1], \\ h_j.(f(x), -t) & \text{pour} \quad x \in E_i \quad \text{et} \quad t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

(b) *Unicité.* — Soient F, $\tilde{F}_i$, etc. et F', $\tilde{F}'_i$, etc. deux recollements réguliers de F_i et F_j suivant E_i et E_j à l'aide de f; posons $f'_i \circ f_i^{-1} = \varphi_i$; φ_i est un difféomorphisme de $\tilde{F}_i$ sur $\tilde{F}'_i$; soit de même φ_j; φ_i et φ_j coïncident sur $\tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j$. Soit T un voisinage tubulaire fermé et F-intérieur de $\tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j$ dans F; $T \cap \tilde{F}_i$ est noté T_i; soient de même T_j, T', T'_i, T'_j. La restriction de φ_i à $\tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j$ se prolonge canoniquement en un difféomorphisme $\theta : T \to T'$. D'après le 2° du corollaire 1 de la proposition 9, $\varphi_i^{-1} \circ \theta \mid T_i$ peut se prolonger en un difféomorphisme de $\tilde{F}_i$; soit g_i un tel difféomorphisme, soit de même g_j; $\varphi_i \circ g_i$ (resp. $\varphi_j \circ g_j$) coïncide avec θ sur T_i(resp. T_j); $\varphi_i \circ g_i$ et $\varphi_j \circ g_j$ définissent donc un difféomorphisme de F sur F', compatible avec les décompositions $(\tilde{F}_i, \tilde{F}_j)$ et $(\tilde{F}'_i, \tilde{F}'_j)$.

Cas particuliers.

1° (THOM) F_i et F_j sont deux variétés à bord compact; E_i est le bord de F_i, E_j celui de F_j, et f est un difféomorphisme de E_i sur E_j.

2° F_i et F_j sont orientables; F est alors orientable. D'une façon plus précise, supposons F_i et E_j orientées; F_i(resp. F_j) induit une orientation sur E_i(resp. E_j); si f est un difféomorphisme de E_i sur E_j inversant les orientations, il existe sur F une orientation compatible avec f_i et f_j.

Application : Somme de Seifert de deux variétés orientées connexes de même dimension ([31]). On suppose F_i et F_j *orientées, connexes, de dimension n.* Soit h_i(resp. h_j) un plongement de la boule fermée B_n dans l'intérieur de F_i(resp. F_j); on suppose que h_i conserve l'orientation et h_j l'inverse.

([31]) *Cf.* SEIFERT et THRELFALL [1], p. 218, exercice 3, où la somme est définie dans le cadre des variétés *combinatoires; cf.* aussi MILNOR [2].

Soit $F_i^\star$ la variété orientée $\overline{F_i - h_i(B_n)}$, soit $E_i^\star$ son bord; soient de même $F_j^\star$ et $E_j^\star$; la restriction de $h_j \circ h_i^{-1}$ à $E_i^\star$ est un difféomorphisme de $E_i^\star$ sur $F_j^\star$, inversant les orientations. Soit F la variété obtenue par recollement régulier de $F_i^\star$ et $F_j^\star$ suivant $E_i^\star$ et $E_j^\star$ à l'aide de $h_j \circ h_i^{-1}$. D'après la proposition 7 et le cas particulier 2° ci-dessus de la proposition 10, F est bien déterminée à un difféomorphisme près (conservant l'orientation) par la donnée de F_i et F_j (orientées). La variété F est appelée *somme* de F_i et F_j; on la note $F_i \# F_j$. Il est immédiat que la somme est *associative et commutative*.

5.3. Application aux groupes de difféomorphismes des sphères et des boules.

5.3.1. *Décomposition du groupe des difféomorphismes de S_n.* — Soit r un entier $\geqq 1$; on note G le groupe des r-difféomorphismes de S_n respectant l'orientation. Soit O le pôle nord de S_n; on note G_0 (resp. G_1) le sous-groupe de G formé des difféomorphismes qui laissent fixe O (resp. qui laissent fixe O et sont 1-tangents à l'identité en O). Les groupes G, G_0 et G_1 sont munis de la topologie C^r. On suppose S_n plongée dans R^{n+1}, de manière que le groupe de ses rotations s'identifie à $SO(n+1)$.

Les groupes G, G_0, G_1 et $SO(n+1)$ sont dans la situation algébrique suivante :

(1) G_1 est un sous-groupe distingué de G_0,

(2) $$G = SO(n+1).G_0,$$

(3) $$SO(n+1) \cap G_1 = \{e\}.$$

Le groupe $SO(n+1) \times G_1$ opère à gauche continûment dans G de la manière suivante :

$$((y, z), x) \to y.x.z^{-1}.$$

Il résulte de (1), (2) et (3) que ces opérations sont simplement transitives sur chaque classe, et par conséquent déterminent sur G une structure d'espace fibré principal (au sens du Séminaire Cartan [1], exposé 6).

Le groupe $SO(n+1) \cap G_0$ s'identifie canoniquement à $SO(n)$. On note α (resp. β, resp. δ, resp. ζ) les projections canoniques de $SO(n+1) \times G_0$ sur G_0 [resp. de G_0 sur G_0/G_1, resp. de G_0 sur $G_0/SO(n)$, resp. de G_0/G_1 sur $(G_0/G_1)/SO(n)$] [les notations $G_0/SO(n)$ et $(G_0/G_1)/SO(n)$ désignent des espaces homogènes de classes *à droite*]; on note γ l'application

$$SO(n+1) \times G_0 \ni (x, y) \to x.y \in G.$$

Soient α' et β' les applications bien déterminées par la condition de rendre commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} SO(n+1) \times G_0 & \xrightarrow{\alpha} & G_0 & \xrightarrow{\beta} & (G_0/G_1) \\ \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\zeta} \\ G & \xrightarrow{\alpha'} & G_0/SO(n) & \xrightarrow{\beta'} & (G_0/G_1)/SO(n) \end{array}$$

Les applications α' et β' sont surjectives, et $\beta' \circ \alpha'$ détermine dans G la même relation d'équivalence que les opérations de $SO(n+1) \times G_1$; la base de l'espace fibré principal G s'identifie donc à $(G_0/G_1)/SO(n)$. Or G_0/G_1 est canoniquement isomorphe à $J_O^1 G$; et d'après (5.1.1) et (5.1.2), $J_O^1 G_0$ est isomorphe au groupe linéaire $GL^+(n)$. Ce dernier isomorphisme peut être réalisé en prenant les n premières coordonnées de R^{n+1} comme coordonnées locales sur S_n au voisinage de O; il est alors compatible avec l'injection de $SO(n)$ dans G_0/G_1 et dans $GL^+(n)$, de sorte que $(G_0/G_1)/SO(n)$ est isomorphe à $R^{n(n+1)/2}$ (*cf.* STEENROD [1], p. 57).

L'espace fibré principal G a donc une base contractile; or il est localement trivial [en effet, les applications ζ, α, et β sont des fibrations, cette dernière d'après le deuxième théorème de fibration, *cf.* (3.4.2), corollaire 1; donc $\beta' \circ \alpha'$ a des sections locales au voisinage de tout point de sa base, ce qui entraîne sa trivialité locale]; donc il est trivial (*cf.* par exemple Séminaire Cartan [1], exposé 8).

On a donc démontré la :

PROPOSITION 11. — *Soit r un entier $\geqq 1$; soit $G^r(S_n)$ le groupe des r-difféomorphismes de la sphère S_n conservant l'orientation; soit $G_1^r(S_n)$ le sous-groupe de $G^r(S_n)$ formé des difféomorphismes qui laissent fixe un point de S_n et qui sont tangents d'ordre 1 à l'identité en ce point; ces groupes sont munis de la topologie C^r. Il existe un homéomorphisme de $G^r(S_n)$ sur le produit $SO(n+1) \times G_1^r(S_n) \times R^{n(n+1)/2}$, compatible avec l'injection canonique de $SO(n+1) \times G_1^r(S_n)$ dans $G^r(S_n)$.*

REMARQUE. — D'après le cas particulier de (5.1.2) et le corollaire 2 de (5.2.1), le groupe $G_1^r(S_n)$ a mêmes groupes d'homotopie que le groupe $G_{S_{n-1}}^r(B_n)$ des r-difféomorphismes de la boule B_n qui induisent l'identité sur le bord. Il résulte donc en particulier de la proposition 11 qu'on a, pour tout $i \geqq 0$, des isomorphismes

$$\pi_i(G^r(S_n)) \approx \pi_i(SO(n+1)) + \pi_i(G_{S_{n-1}}^r(\mathrm{B}_n)).$$

MILNOR a montré en [1] que le groupe G^∞ relatif à la sphère S_6 n'est pas connexe par arcs différentiables, d'où il résulte immédiatement que $\pi_0(G^\infty)$ n'est pas nul. Donc le groupe $G_{S_5}^r(B_6)$ n'est pas connexe.

5.3.2. *Groupes de difféomorphismes des boules et des variétés étoilées.*

DÉFINITION. — Soit F une variété de dimension n. On dit que F est *différentiablement étoilée* s'il existe un plongement f de F dans R^n, tel que l'image $\tilde{F}$ de F par f soit étoilée par rapport à l'un au moins de ses points intérieurs.

Exemples. — Les cubes, les cylindres, les demi-boules sont des variétés différentiablement étoilées; le produit de deux variétés différentiablement étoilées est différentiablement étoilé.

LEMME. — *Soit F une variété compacte différentiablement étoilée de dimension n; on choisit une orientation sur F; soit r un entier $\geqq 1$. Soit $G^r_{\partial F}(F)$ $\left[resp. G^r_{J^r_{\partial F}}(F)\right]$ le groupe des r-difféomorphismes de F qui induisent l'identité sur ∂F [resp. qui sont r-tangents à l'identité le long de ∂F]; pour tout $i \geqq 0$, les groupes $\pi_i(G^r_{\partial F}(F))$, $\pi_i\left(G_{J^r_{\partial F}}(F)\right)$, $\pi_i(G^r_{S_{n-1}}(B_n))$ et $\pi_i\left(G^r_{J^r_{S_{n-1}}}(B_n)\right)$ sont canoniquement isomorphes.*

DÉMONSTRATION. — Notons simplement $G_r(F)$ le groupe $G^r_{J^r_{\partial F}}(F)$. D'après le corollaire 2 de (5.2.1), il suffit de montrer que $\pi_i(G_r(F))$ et $\pi_i(G_r(B_n))$ sont canoniquement isomorphes. Or d'après le corollaire 3 de (5.1.4), il existe, pour tout i, un homomorphisme canonique $\pi_i(G_r(B_n)) \to \pi_i(G_r(F))$. Identifions F à une sous-variété compacte de R^n étoilée par rapport à l'origine; soit F' l'homothétique de F dans le rapport $\lambda (0 < \lambda < 1)$; $G_r(F')$ s'envoie canoniquement dans $G_r(F)$ [à tout $g \in G_r(F')$ on associe son prolongement par l'identité sur $F - F'$]; cette application est une homotopie-équivalence comme le montre la rétraction d'Alexander [*cf.* III, (3.2.2)]. Supposons λ assez petit pour qu'il existe une boule B' de centre O telle que $F' \subset B' \subset F$; soit B une boule de centre O telle que $F \subset B$; pour tout i, les composées de deux en deux des applications canoniques

$$\pi_i(G_r(F')) \to \pi_i(G_r(B')) \to \pi_i(G_r(F)) \to \pi_i(G_r(B))$$

sont des isomorphismes; d'où le résultat.

Cas de la dimension 3 : conjecture de Smale. — La conjecture de Smale peut s'énoncer : *pour tout entier $r \geqq 1$ le groupe $G^r_{S_2}(B_3)$ (groupe des r-difféomorphismes de la boule fermée B_3 qui induisent l'identité sur la sphère-bord) est acyclique en toute dimension.*

Il résulte d'une part du 1° de la proposition 11 [*cf.* (5.3.1)], et d'autre part du lemme ci-dessus, que l'exactitude de la conjecture de Smale entraînerait les deux conséquences suivantes :

CONSÉQUENCE 1. — *L'homomorphisme canonique*

$$\pi_i(SO(4)) \to \pi_i(G^r(S_3))$$

est un isomorphisme pour tout $i \geqq 0$ (et pour tout entier $r \geqq 1$).

CONSÉQUENCE 2. — *Soit r un entier $\geqq 1$. Soit F une variété compacte différentiablement étoilée de dimension 3; le groupe $G^r_{J^r_{\partial F}}(F)$ des r-difféomorphismes de F qui sont r-tangents à l'identité en tout point du bord, est acyclique en toute dimension.*

CHAPITRE III.

GROUPES D'AUTOMORPHISMES ET GROUPES DE DIFFÉOMORPHISMES DES VARIÉTÉS COMPACTES DE DIMENSION 3.

1. Généralités sur les complexes singuliers cubiques d'une paires d'espaces topologiques.

1.1. Définitions et propriétés immédiates.

1.1.1. *Notations.* — Soit A un espace topologique; pour tout entier $n \geqq 0$, on note $\Sigma_n(A)$ l'espace des n-cubes singuliers à valeurs dans A, muni de la topologie de la convergence compacte (ou topologie C^0).

Pour tout couple (n, p) d'entiers $\geqq 0$, on a un homéomorphisme canonique

$$\Sigma_{n+p}(A) \approx \Sigma_p(\Sigma_n(A)). \tag{1}$$

De même, on note $\dot{\Sigma}_n(A)$ l'espace (muni de la topologie C^0) des applications continues du bord ∂I^n de I^n dans A.

1.1.2. *Définition.* — On dira qu'un couple (A, B) d'espaces topologiques est une *paire topologique* si :

1° l'ensemble support de B est une partie de l'ensemble support de A;

2° la topologie de B est *plus fine* que la topologie induite par A.

NOTATIONS. — Soit (A, B) une paire topologique; pour tout entier $n \geqq 0$, on note $\Sigma_n(A, B)$ l'espace suivant: *en tant qu'ensemble*, c'est la partie de $\Sigma_n(A)$ formée des n-cubes singuliers dont l'image canonique dans $\dot{\Sigma}_n(A)$ est un élément de $\dot{\Sigma}_n(B)$.

La topologie est la suivante : topologie la moins fine qui rende continue chacune des deux applications canoniques

$$\Sigma_n(A, B) \to \Sigma_n(A),$$
$$\Sigma_n(A, B) \to \dot{\Sigma}_n(B).$$

Pour tout n, le couple $(\Sigma_n(A, B), \Sigma_n(B))$ est une paire topologique et pour tout (n, p) on a un *homéomorphisme canonique*

$$\Sigma_{n+p}(A, B) \approx \Sigma_p(\Sigma_n(A, B), \Sigma_n(B)). \tag{2}$$

1.1.3. *Équivalence homotopique de A et B.* — Soit (A, B) une paire topologique. On dit que A et B sont *homotopiquement équivalents* si l'homomorphisme canonique

$$\pi_0(B) \to \pi_0(A)$$

est bijectif, ainsi que l'homomorphisme canonique

$$\pi_n(B;\, b) \to \pi_n(A;\, b)$$

pour tout $b \in B$ et pour tout $n \geqq 1$.

Pour que A et B soient homotopiquement équivalents, il est *nécessaire et suffisant* que, pour tout entier $n \geqq 0$, et tout $a \in \Sigma_n(A,\, B)$, il existe un élément α de $\Sigma_{n+1}(A)$ dont a soit une face, et dont toutes les autres faces soient des éléments de $\Sigma_n(B)$.

Une condition *suffisante* pour que A et B soient homotopiquement équivalents est que, pour tout entier $n \geqq 0$, la condition suivante soit satisfaite :

($\mathcal{E}_n$) *Pour tout $a \in \Sigma_n(A,\, B)$, il existe $\alpha \in \Sigma_1(\Sigma_n(A,\, B))$ tel que* :

1° *α ait pour origine a;*

2° *la restriction de α à $]0,\, 1]$ soit une application continue de $]0,\, 1]$ dans $\Sigma_n(B)$.*

1.2. Une condition suffisante d'équivalence dans le cas d'une paire métrisable.

1.2.1. Définition 1. — Une paire topologique $(A,\, B)$ est dite métrisable si A et B sont des espaces métrisables.

[Noter que si $(A,\, B)$ est une paire métrisable, alors $\Sigma_n(A)$, $\Sigma_n(A,\, B)$, etc., sont des espaces métrisables.]

Définition 2. — Soit $(A,\, B)$ une paire topologique; soit $a \in A$. On dit que B est *dense dans A en a*, si a est adhérent à B (au sens de la topologie de A).

Soit n un entier $\geqq 0$, on dit que *B est n-localement connexe dans A en a* si, pour tout voisinage U de a dans A, il existe un voisinage V de a dans A tel que, si l'on munit $U \cap B$ et $V \cap B$ de la topologie *forte* (celle induite par B), pour tout élément β de $\dot{\Sigma}_{n+1}(V \cap B)$, il existe un élément γ de $\Sigma_{n+1}(U \cap B)$ tel que le bord $\dot{\gamma}$ de γ (i. e. la restriction de γ à ∂I^{n+1}) soit β.

Si (pour un entier $n \geqq 0$) B est n-localement connexe dans A pour tout $a \in A$, on dit que B est n-localement connexe dans A.

Dans le cas où $B = A$, on dit simplement « A est n-localement connexe en a ». Pour $n = 0$, on retrouve la notion de locale connexion par arcs.

On utilisera l'abréviation n-l.c. pour « n-localement connexe ».

Lemme. — *Soient $(A,\, B)$ une paire métrisable, d une distance compatible avec la topologie de A, K un compact de A, n un entier $\geqq 0$. Si, pour tout $a \in K$, B est n-l.c. dans A en a, alors cette propriété a lieu uniformément pour $a \in K$ au sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que*

$$\begin{cases} a \in K, \\ \beta \in \dot{\Sigma}_{n+1}(B), \\ d(a,\, \beta.\sigma) \leqq \eta \qquad \text{pour tout } \sigma \in \partial I^{n+1} \end{cases}$$

entraîne l'existence de $\gamma \in \Sigma_{n+1}(B)$ *tel que*

$$\begin{cases} d(a, \gamma.\sigma) \leqq \varepsilon & \text{pour tout } \sigma \in I^{n+1}, \\ \beta \text{ est le bord } \gamma. \end{cases}$$

Démonstration. — Soit $a \in A$; supposons B n-l.c. dans A en a; à tout $\varepsilon > 0$ est alors associé un certain $\eta > 0$ qu'on peut, en plus, choisir plus petit que ε, tel qu'une certaine propriété $P(a, \varepsilon, \eta)$ ait lieu; mais $P(a', 2\varepsilon, \eta/2)$ a alors lieu pour tout a' tel que $d(a, a') \leqq \eta/2$. Il en résulte que, si B est n-l.c. dans A en a pour tout $a \in K$, à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer $\zeta > 0$ tel que $P(a, 2\varepsilon, \zeta)$ ait lieu pour tout $a \in K$.

1.2.2. Proposition 1. — *Soit* (A, B) *une paire métrisable. Si*

1° *B est dense en A,*

2° *pour tout entier $n' \geqq 0$, B est n'-localement connexe dans A,*

3° *pour tout couple (n, n') d'entiers $\geqq 0$, $\Sigma_n(B)$ est n'-localement connexe,*

alors A et B sont homotopiquement équivalents.

La démonstration utilise les deux lemmes suivants :

Lemme 1. — *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ une paire métrisable. Si $\mathcal{B}$ est dense et* 0-*l.c. dans $\mathcal{A}$, alors, pour tout $a \in \mathcal{A}$, il existe un chemin continu d'origine a dans $\mathcal{A}$, dont la restriction à* $]0, 1]$ *soit continue pour $\mathcal{B}$.*

Lemme 2. — *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ une paire métrisable.*

1° *Si $\mathcal{B}$ est dense et* 0-*l.c. dans $\mathcal{A}$, alors $\Sigma_1(\mathcal{B})$ est dense dans $\Sigma_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

2° *Soit n un entier $\geqq 0$, si $\mathcal{B}$ est n-l.c. dans $\mathcal{A}$ et $(n+1)$-l.c. dans $\mathcal{A}$ et si $\mathcal{B}$ est n-l.c., alors $\Sigma_1(\mathcal{B})$ est n-l.c. dans $\Sigma_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Démonstration de la proposition 1 *à partir des lemmes* 1 *et* 2. — D'après (1.1.3) et le lemme 1, il suffit de montrer que pour tout entier $n \geqq 0$, $\Sigma_n(B)$ est dense et 0-l.c. dans $\Sigma_n(A, B)$. Ce qu'on va montrer en fait, c'est que, pour tout couple (n, n') d'entiers $\geqq 0$, $\Sigma_n(B)$ est dense et n'-l.c. dans $\Sigma_n(A, B)$. On le montre par récurrence sur n. D'après les hypothèses 1° et 2° de la proposition, c'est vrai pour $n = 0$. Supposons que ce soit vrai pour un certain $n \geqq 0$; posons $\Sigma_n(A, B) = \mathcal{A}$, $\Sigma_n(B) = \mathcal{B}$; d'après l'hypothèse 3° de la proposition et le lemme 2, il en résulte que $\Sigma_1(\mathcal{B})$ est dense et n'-l.c. dans $\Sigma_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ pour tout $n' \geqq 0$. Or, d'après (1.1.1), formule (1), et (1.1.2), formule (2), on a des homéomorphismes canoniques

$$\Sigma_1(\mathcal{B}) \approx \Sigma_{n+1}(B),$$
$$\Sigma_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \approx \Sigma_{n+1}(A, B);$$

d'où la proposition.

1.2.3. *Démonstration du lemme* 1. — Soit $a \in \mathcal{A}$; soit (U_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite fondamentale de voisinages ouverts emboîtés de a dans $\mathcal{A}$. Il existe une suite (V_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ de voisinages ouverts emboîtés de a dans $\mathcal{A}$ tels que tout couple de points de $\mathcal{B} \cap V_i$ puisse être joint par un chemin $\mathcal{B}$-continu restant dans $\mathcal{B} \cap U_i$. Or, $\mathcal{B}$ étant dense dans $\mathcal{A}$, il existe une suite (b_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ telle que $b_i \in \mathcal{B} \cap V_i$.

Il existe alors, pour tout i, une application $\mathcal{B}$-continue γ_i:

$$\left[\frac{1}{1+i}, \frac{1}{i}\right] \to \mathcal{B} \cap U_i$$

telle que

$$\begin{cases} \gamma_i \cdot \dfrac{1}{1+i} = b_{i+1}, \\ \gamma_i \cdot \dfrac{1}{i} = b_i \end{cases}$$

Le chemin γ défini par

$$\begin{cases} \gamma . 0 = a \\ \gamma . t = \gamma_i . t \qquad \text{pour tout } t \in \left[\dfrac{1}{1+i}, \dfrac{1}{i}\right] \end{cases}$$

satisfait aux conditions voulues.

1.2.4. *Démonstration du lemme* 2. — Soit d une distance sur $\mathcal{A}$ compatible avec la topologie.

Démonstration du 1°. — Soit $\alpha \in \Sigma_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$; soit $\varepsilon > 0$. D'après le fait que $\mathcal{B}$ est 0-l.c. dans $\mathcal{A}$ et le lemme 1.2.1, il existe $\eta > 0$ (on choisira en plus $\eta < \varepsilon$) tel que, pour tout $t \in I$ et tout couple (b, b') de points de $\mathcal{B}$ tels que

$$d(\alpha . t, b) \quad \text{et} \quad d(\alpha . t, b') \leqq \eta,$$

il existe un chemin $\mathcal{B}$-continu joignant b à b' et restant à une distance de $\alpha . t$ moindre que $\varepsilon/2$. Soit p un entier positif, assez grand pour que

$$(1) \qquad d(\alpha . t', \alpha . t'') \leqq \eta/2$$

dès que

$$|t' - t''| \leqq 1/p.$$

D'après le fait que $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{A}$, il existe pour tout $i = 0, 1, \ldots, p$ un point $b_i \in \mathcal{B}$ tel qu'en posant $t_i = i/p$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$ on ait

$$d(\alpha . t_i, b_i) \leqq \eta/2.$$

Il résulte alors de (1) :

$$d(\alpha . t_i, b_{i+1}) \leqq \eta.$$

Il existe donc (pour tout $i = 0, \ldots, p-1$) une application continue β_i: $[t_i, t_{i+1}] \to \mathcal{B}$, telle que

$$(2) \qquad \beta_i . t_i = b_i, \qquad \beta_i . t_{i+1} = b_{i+1};$$

$$(3) \qquad d(\alpha . t_i, \beta_i . t) \leqq \varepsilon/2 \qquad \text{pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}].$$

De (1) et (3) résulte

$$(4) \qquad d(\alpha . t, \beta_i . t) \leqq \varepsilon \qquad \text{pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Le chemin β défini par

$$(5) \qquad \beta . t = \beta_i . t \qquad \text{pour} \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \qquad (i = 0, \ldots, p-1)$$

vérifie d'après (4) :

$$d(\alpha, \beta) \leqq \varepsilon.$$

Si, en plus, on a choisi b_0 en $\alpha . 0$ et b_p en $\alpha . 1$, comme β vérifie d'après (2) et (5)

$$\beta . 0 = b_0 \qquad \text{et} \qquad \beta . 1 = b_p,$$

β sera arbitrairement voisin de α au sens de $\Sigma_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Démonstration du 2°. — Soit encore $\alpha \in \Sigma_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$; soit $\varepsilon > 0$. D'après le fait que $\mathcal{B}$ est $(n+1)$-l.c. dans $\mathcal{A}$ et le lemme 1.2.1, il existe $\eta > 0$ (on choisira en plus $\eta \leqq \varepsilon$) tel que

$$\begin{cases} t \in I, & \beta \in \dot{\Sigma}_{n+2}(\mathcal{B}); \\ d(\alpha . t, \beta . \sigma) \leqq \eta & \text{pour tout } \sigma \in \partial I^{n+2} \end{cases}$$

entraîne l'existence de $\gamma \in \Sigma_{n+2}(\mathcal{B})$ tel que ($\dot{\gamma}$ désignant le bord de γ)

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{\gamma} = \beta, \\ d(\alpha . t, \gamma . \sigma) \leqq \varepsilon/2 & \text{pour tout } \sigma \in I^{n+2}. \end{cases}$$

D'après le fait que $\mathcal{B}$ est n-l.c. dans $\mathcal{A}$ et le lemme 1.2.1, il existe $\zeta > 0$ (on choisira $\zeta \leqq \eta$) tel que

$$\begin{cases} t \in I, & b \in \dot{\Sigma}_{n+1}(\mathcal{B}); \\ d(\alpha . t, b . s) \leqq \zeta & \text{pour tout } s \in \partial I^{n+1} \end{cases}$$

entraîne l'existence de $c \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{B})$ tel que

$$(2) \qquad \begin{cases} \dot{c} = b, \\ d(\alpha . t, c . s) \leqq \eta/2 & \text{pour tout } s \in I^{n+1}. \end{cases}$$

Soit alors $\beta \in \dot{\Sigma}_{n+1}(\Sigma_1(\mathcal{B})) \approx \Sigma_1(\dot{\Sigma}_{n+1}(\mathcal{B}))$ tel que

$$(3) \qquad d(\alpha . t, \beta . (t, s)) \leqq \zeta/2 \qquad \text{pour tout } (t, s) \in I \times \partial I^{n+1}.$$

Soit p un entier positif, assez grand pour que

$$(4) \qquad d(\alpha.t', \alpha.t'') \leqq \eta/2,$$

dès que

$$|t' - t''| \leqq 1/p.$$

Posons $t_i = i/p$ (pour $i = 0, 1, \ldots, p$) ; pour chaque t_i, soit b_i l'application

$$I^{n+1} \ni s \to \beta.(t_i, s) \in \mathcal{B}.$$

D'après (3) et (2), il existe $c_i \in \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}(\mathcal{B})$ tel que

$$(5) \qquad \begin{cases} \dot{c}_i = b_i, \\ d(\alpha.t_i, c_i.s) \leqq \eta/2 \qquad \text{pour tout } s \in I^{n+1}. \end{cases}$$

Pour tout $i = 0, 1, \ldots, p - i$, la donnée de c_i, c_{i+1} et de la restriction de β à $[t_i, t_{i+1}]$ détermine canoniquement un élément de $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+2}(\mathcal{B})$, qu'on note β_i. D'après (4) et (5) :

$$d(\alpha.t_i, c_{i+1}.s) \leqq d(\alpha.t_i, \alpha.t_{i+1}) + d(\alpha.t_{i+1}, c_{i+1}.s) \leqq \eta.$$

D'après (4) et (3), pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$d(\alpha.t_i, \beta.(t, s)) \leqq d(\alpha.t_i, \alpha.t) + d(\alpha.t, \beta.(t, s)) \leqq \eta.$$

Il en résulte que β_i vérifie

$$d(\alpha.t_i, \beta_i.\sigma) \leqq \eta \qquad \text{pour tout } \sigma \in \partial I^{n+2},$$

et par conséquent, d'après (1), il existe $\gamma_i \in \boldsymbol{\Sigma}_{n+2}(\mathcal{B})$ tel que $\dot{\gamma}_i = \beta_i$ et que

$$d(\alpha.t_i, \gamma_i.\sigma) \leqq \varepsilon/2 \qquad \text{pour tout } \sigma \in I^{n+2}.$$

Il existe donc une application continue

$$[t_i, t_{i+1}] \ni t \to \gamma_{i,t} \in \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}(\mathcal{B})$$

telle que

$$(6) \qquad \begin{cases} \gamma_{i,t_i} = c_i, \qquad \gamma_{i,t_{i+1}} = c_{i+1}; \\ \gamma_{i,t}.s = \beta.(t, s) \qquad \text{pour tout } (t, s) \in [t_i, t_{i+1}] \times \partial I^{n+1}, \\ d(\alpha.t_i, \gamma_{i,t}.s) \leqq \varepsilon/2 \qquad \text{pour tout } (t, s) \in [t_i, t_{i+1}] \times I^{n+1}, \end{cases}$$

et par conséquent, d'après (4) :

$$(7) \qquad d(\alpha.t, \gamma_{i,t}.s) \leqq \qquad \text{pour tout } (t, s) \in [t_i, t_{i+1}] \times I^{n+1}.$$

L'élément γ de $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\Sigma}_1(\mathcal{B})) \approx \boldsymbol{\Sigma}_1(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}(\mathcal{B}))$ défini par

$$(8) \qquad \gamma.(t, s) = \gamma_{i,t}.s \qquad \text{pour} \begin{cases} s \in I^{n+1}, \\ t \in [t_i, t_{i+1}] \qquad (i = 0, \ldots, p - 1), \end{cases}$$

vérifie d'après (6) et (7)

$$\begin{cases} \gamma.(t, s) = \beta.(t, s) & \text{pour} \quad (t, s) \in I \times \partial I^{n+1}, \\ d(\alpha.t, \gamma.(t, s)) \leqq \varepsilon & \text{pour} \quad (t, s) \in I \times I^{n+1}. \end{cases}$$

Si, en plus, β est voisin de α au sens de $\dot{\Sigma}_{n+1}(\Sigma_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$, cela signifie que $\beta.(0, s)$ et $\beta.(1, s)$ sont, uniformément pour $s \in I^{n+1}$, respectivement voisins de $\alpha.0$ et $\alpha.1$. Comme $\mathcal{B}$ est n-l.c., on peut donc choisir γ_0 et γ_p tels que $\gamma_0.s$ et $\gamma_p.s$ soient, uniformément pour tout $s \in I^{n+1}$, respectivement voisins de $\alpha.0$ et $\alpha.1$.

D'après (8), γ sera alors voisin de α au sens de $\Sigma_{n+1}(\Sigma_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$.

2. Paires d'espaces homogènes. Condition de relèvement des petits cubes.

2.1 Définition et premières propriétés.

2.1.1. Définition 1. — Soient G un groupe topologique, H un sous-groupe de G muni d'une topologie (compatible avec sa structure de groupe) plus fine que celle induite par G; on dit alors que (G, H) est une *paire de groupes topologiques*.

Définition 2. — Soit (G, H) une paire de groupes topologiques; on dit que (G_0, H_0) est une *sous-paire* de (G, H) si G_0 est un sous-groupe de G, et si H_0 est le groupe $H \cap G_0$, muni de la topologie induite par H.

On a immédiatement le

Lemme. — *Soit (G, H) une paire de groupes topologiques, (G_0, H_0) une sous-paire; soit A (resp. B) l'espace homogène des classes à gauche G/G_0 (resp. H/H_0); soit p (resp. q) la projection canonique de G (resp. H) sur A (resp. B). Il existe une application de B dans A canoniquement définie par la condition de rendre commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{q} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{p} & A \end{array}$$

Cette application est injective et continue.

Ce lemme justifie la

Définition 3. — Soient (G, H) une paire de groupes topologiques, (G_0, H_0) une sous-paire, A (resp. B) l'espace homogène des classes à gauche G/G_0 (resp. H/H_0). On dit que (A, B) (muni de l'injection définie au lemme) est la *paire homogène* (de classes à gauche) $(G, H)/(G_0, H_0)$.

Dans la suite, on supposera toujours en outre que G_0 *est fermé* dans G, alors H_0 est fermé dans H, et A et B sont séparés; si, en plus, G et H sont métrisables, A et B le sont aussi.

2.1.2. — Soit $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ une paire homogène. Soit e l'élément neutre de G; on note encore e l'image de e dans A par p. On note $\Omega_n(G)$ le sous-espace de $\Sigma_n(G)$ [*cf.* (1.1.1)] formé des applications du cube I^n dans G qui envoient l'origine O de I^n en e.

Définitions analogues pour $\Omega_n(H)$, $\Omega_n(A)$, $\Omega_n(B)$, $\Omega_n(G)$, etc., $\Omega_n(G,H)$ etc.

Lemme. — *Avec les notations ci-dessus, on suppose H_0 dense dans G_0. Soit n un entier $\geqq 0$; pour que B soit n-l. c. en e,* [*cf.* (1.2.1), *définition* 2], *il suffit que la condition suivante soit remplie : pour tout voisinage U de e dans A, il existe un voisinage V de e dans A, tel que, si l'on munit $U \cap B$ et $V \cap B$ de la topologie forte, pour tout élément β de $\dot{\Omega}_{n+1}(V \cap B)$ il existe un élément γ de $\Omega_{n+1}(U \cap B)$ tel que $\dot{\gamma} = \beta$.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{U} = p^{-1}(U)$; c'est un voisinage de e dans G; soit $\mathfrak{U}'$ un voisinage de e dans G, tel que

$$(1) \qquad \mathfrak{U}'^2 \subset \mathfrak{U}.$$

Notons $p(\mathfrak{U}') = U'$; soit V un voisinage de e dans A, que la condition du lemme permet d'associer à U'; on choisit V tel que $V \subset U'$; soit $\mathfrak{V} = p^{-1}(V)$; soit $\mathfrak{W}$ un voisinage *ouvert symétrique* de e dans G tel que

$$(2) \qquad \mathfrak{W}^2 \subset \mathfrak{V}.$$

Notons $p(\mathfrak{W}) = W$; soit $\beta \in \dot{\Sigma}_{n+1}(W \cap B)$; notons $\beta.o = b$.

Puisque $b \in B$, il existe h tel que

$$(3) \qquad h \in H \cap p^{-1}(\{b\})$$

et puisque H_0 est dense dans G_0, et que $b \in W$, on peut en plus imposer à h d'être un élément de $\mathfrak{W}$; puisque $\mathfrak{W}$ est symétrique, il en résulte $h^{-1} \in \mathfrak{W}$, et par conséquent, d'après (2) :

$$h^{-1}.\beta \in \dot{\Sigma}_{n+1}(V)$$

et même, d'après (3) :

$$h^{-1}.\beta \in \dot{\Omega}_{n+1}(V \cap B).$$

Il existe donc $\gamma' \in \Omega_{n+1}(U' \cap B)$ tel que $\dot{\gamma}' = h^{-1}.\beta$; posons $h.\gamma' = \gamma$. D'après (1), $\gamma \in \Omega_{n+1}(U \cap B)$; et d'autre part $\dot{\gamma} = \beta$.

2.1.3. Lemme. — *Soit $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ une paire homogène On suppose H dense dans G. Pour tout entier $n \geqq 0$, si B est n-l. c. dans A en e, alors B est n-l. c. dans A* [*cf.* (1.2.1)].

DÉMONSTRATION. — Soit $a \in A$; soit U' un voisinage de a dans A. Soit $g \in p^{-1}(a)$; notons

$$g^{-1}.U' = U; \qquad p^{-1}(U) = \mathfrak{U}.$$

Soit $\mathfrak{V}$ un voisinage de e dans G, tel que

$$(1) \qquad \mathfrak{V}^2 \subset \mathfrak{U}.$$

Notons $p(\mathfrak{V}) = V$; c'est un voisinage de e dans A. Soit W un voisinage de e dans A, associé à V du fait que B est *n-l. c.* dans A en e. Notons $p^{-1}(W) = \mathfrak{W}$. D'après l'hypothèse « H dense dans G », il existe $h \in H$ tel que

$$(2) \qquad g^{-1}.h \in \mathfrak{V},$$

$$(3) \qquad h^{-1}.g \in \mathfrak{W}.$$

D'après (1) et (2) :

$$g^{-1}.h.V \subset U$$

et par conséquent :

$$(4) \qquad h.V \subset g.U = U'.$$

D'après (3) :

$$h^{-1}.a \in W,$$

donc : *$h.W$ est un voisinage de a dans A;* le lemme en résulte, compte tenu de (4), puisque tout élément de $\dot{\Sigma}_{n+1}(B \cap (h.W))$ est bord d'un élément de $\Sigma_{n+1}(B \cap (h.V))$.

2.2. Relèvement des petits cubes dans une paire homogène.

En (2.2.1), on définit ce qu'on entend par « relèvement des petits cubes », et en (2.2.2), on démontre quelques propriétés immédiates relatives à cette notion. En (2.2.4), on donne une condition suffisante pour le relèvement des petits cubes. En vue d'applications ultérieures, cette condition est donnée sous une forme plus forte que celle où nous aurons effectivement à l'utiliser : elle se réfère à la notion de *presque locale connexion par arcs* [définie et étudiée en (2.2.3)], alors que dans tous les cas où nous utiliserons (2.2.4), la *locale connexion par arcs* sera en fait vérifiée. En (2.2.5), on donne un lemme qui est l'analogue d'une conséquence immédiate de la suite exacte d'homotopie classique des espaces fibrés.

2.2.1. — Soit $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ une paire homogène. On note H' l'espace H muni de la topologie faible. On note $\Sigma'_n(H)$ l'espace $\Sigma_n(H)$ muni de la topologie faible, i. e. induite par $\Sigma_n(H')$. Définitions analogues pour H'_0, B', $\Sigma'_n(H_0)$, $\Sigma'_n(B)$.

Pour tout couple (n, p) d'entiers $\geqq 0$, on a un homéomorphisme canonique

$$(1) \qquad \Sigma'_p(\Sigma_n(B)) \approx \Sigma'_{n+p}(B).$$

[En effet, $\Sigma'_p(\Sigma_n(B))$ s'identifie en tant qu'ensemble à $\Sigma_{n+p}(B)$ et sa topologie est celle de $\Sigma_p(\Sigma'_n(B))$, c'est-à-dire de $\Sigma_p(\Sigma_n(B'))$, donc, d'après la formule (1) de (1.1.1), celle de $\Sigma_{n+p}(B')$.]

A l'application $q : H \to B$ est canoniquement associée, pour tout entier $n \geqq 0$, une application continue q_n :

$$\Sigma_n(H) \to \Sigma_n(B).$$

Notons encore e l'élément de $\Sigma_n(B)$ canoniquement défini par e; le « noyau » de q_n [c'est-à-dire $q_n^{-1}(\{e\})$] n'est autre que $\Sigma_n(H_0)$, de sorte qu'à q_n est canoniquement associée une application continue $\overline{q}_n$:

$$\Sigma_n(H)/\Sigma_n(H_0) \to \Sigma_n(B).$$

En général, l'application q_n n'est ni surjective, ni ouverte. Si le triple (H, B, q) est un fibré au sens de SERRE, l'application q_n est surjective. En plus, on a le

LEMME. — *Si le triple (H, B, q) est un fibré localement trivial, alors, pour tout entier $n \geqq 0$:*

1° *Le triple $(\Sigma_n(H), \Sigma_n(B), q_n)$ est un fibré localement trivial.*

2° *L'application $\overline{q}_n$ est un homéomorphisme.*

Démonstration du lemme. — Le 2° est une conséquence immédiate du 1°. Pour le 1° il suffit de montrer l'existence de sections au voisinage de tout point de $\Sigma_n(B)$; par translation, on se ramène à montrer l'existence de sections au voisinage de e; or, l'existence *dans* (H, B, q) d'une section au voisinage de e permet de relever continûment les éléments de $\Sigma_n(B)$ qui sont assez voisins de e, car ceux-ci ne sont autres que les cubes singuliers de B dont l'image est dans un voisinage assez petit de e.

A l'application q_n est canoniquement associée une application q'_n :

$$\Sigma'_n(H) \to \Sigma'_n(B)$$

qui, au point de vue ensembliste, ne diffère pas de q_n, et qui est *continue* [car elle est induite par l'application canonique $\Sigma_n(H') \to \Sigma_n(B')$]. Il en résulte que l'application $\overline{q}'_n$:

$$\Sigma'_n(H)/\Sigma'_n(H_0) \to \Sigma'_n(B)$$

canoniquement associée à q'_n (et qui, au point de vue ensembliste, ne diffère pas de $\overline{q}_n$) est *continue*. L'application q'_n (et l'application $\overline{q}'_n$) sont surjectives dès que (H, B, q) est un fibré au sens de SERRE. Mais, même lorsque (H, B, q) est un fibré localement trivial, l'application q'_n n'est en général pas ouverte. Ceci conduit à poser la

DÉFINITION. — Soit $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ une paire homogène. Soit n un entier $\geqq 0$; si l'application canonique q'_n :

$$\Sigma'_n(H) \to \Sigma'_n(B)$$

est ouverte, on dit que (A, B) *vérifie en e le relèvement des petits n-cubes.*

La condition « (A, B) vérifie en e le relèvement des petits n-cubes » peut donc s'expliciter comme suit : Soit $\mathcal{U}$ un voisinage arbitraire de e dans H', il existe un voisinage U de e dans B' tel que, si l'on munit U et $\mathcal{U}$ de la topologie forte (i. e., celle induite respectivement par H et B), tout élément de $\Sigma_n(U)$ soit l'image par q_n d'au moins un élément de $\Sigma_n(\mathcal{U})$

2.2.2. *Quelques propriétés immédiates relatives au relèvement des petits cubes.*

[Les notations A, B, G, H, etc., sont celles de (2.2.1)].

PROPRIÉTÉ 1. — *Si (A, B) vérifie en e le relèvement des petits n-cubes (pour un certain entier $n \geqq 0$), et si le fibré (H, B, q) est localement trivial, alors l'application $\overline{q}'_n$:*

$$\Sigma'_n(H)/\Sigma'_n(H_0) \to \Sigma'_n(B)$$

est un homéomorphisme. Inversement, si $\overline{q}'_n$ est un homéomorphisme, la paire (A, B) vérifie en e le relèvement des petits n-cubes.

[Ce sont des conséquences immédiates de (2.2.1).]

PROPRIÉTÉ 2. — *Si H_0 est dense dans G_0, alors l'application canonique $\overline{q}'$: $H'/H'_0 \to B'$ est un homéomorphisme* [et par conséquent, d'après la propriété 1, (A, B) *vérifie en e le relèvement des petits* o-*cubes*].

DÉMONSTRATION. — L'application canonique $q' : H' \to B'$ est surjective; il faut montrer qu'elle est ouverte. Or, H_0 étant dense dans G_0, pour tout $b \in B$, $H \cap q^{-1}(\{b\})$ est dense dans $q^{-1}(\{b\})$. Donc, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de G, on a

$$p(\mathcal{U} \cap H') = p(\mathcal{U}) \cap B'$$

Donc $p(\mathcal{U} \cap H')$ est ouvert, ce qu'il fallait montrer.

PROPRIÉTÉ 3. — Soient n et n' deux entiers tels que $n \geqq n' \geqq 0$. Si (A, B) vérifie en e le relèvement des petits n-cubes, *a fortiori* (A, B) vérifie en e celui des petits n'-cubes.

PROPRIÉTÉ 4. — Si (A, B) vérifie en e le relèvement des petits p-cubes, alors pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de e dans H', il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de e dans H' et un voisinage V de e dans B' tels que, pour tout couple (n, n') d'entiers $\geqq 0$ tels que $(n + n') = p$, et tout $\alpha \in \Sigma_p(V)$ tel que la restriction de α à $I^n \times \{o\}$ se relève en un élément β de $\Sigma_n(\mathcal{V})$, il existe un relèvement γ de α dans $\Sigma_p(\mathcal{U})$ qui prolonge β ($\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et V sont munis de la topologie forte).

Démonstration — On choisit $\mathcal{V}$ symétrique et tel que $\mathcal{V}^3 \subset \mathcal{U}$; à $\mathcal{V}$, la propriété de relèvement des petits p-cubes associe un certain V; il existe $\gamma' \in \Sigma_p(\mathcal{V})$ qui relève α; on pose, pour $(\sigma, \sigma') \in I^n \times I^{n'}$:

$$\gamma.(\sigma, \sigma') = (\gamma'.(\sigma, \sigma')).(\gamma'.(\sigma, o))^{-1}.(\beta.(\sigma, o)).$$

2.2.3. — Soit (A, B) une paire topologique.

Définition. — Soit $a \in A$. On dit que *B est presque localement connexe par arcs dans A en a*, si, pour tout voisinage U de a dans A il existe un voisinage V de a dans A tel que tout couple (b, b') de points de $V \cap B$ puisse être joint par un chemin β de $U \cap B$, continu pour la topologie faible, et « presque continu » pour la topologie forte au sens suivant : il existe $\theta \in [o, 1]$ tel que β soit continu sur $[o, \theta[$ et $[\theta, 1]$.

On utilise l'abréviation p. l. c. a. pour : presque localement connexe par arcs.

Conséquences de cette définition.

1. — *Soient (A, B) une paire topologique et n un entier $\geq o$. Si B est p. l. c. a dans A en a, alors $\Sigma_n(B)$ est p. l. c. a. dans $\Sigma_n(A)$ au point de $\Sigma_n(A)$ canoniquement défini par a.*

[En effet, notons encore a le point de $\Sigma_n(A)$ canoniquement défini par a; soit V un voisinage de a dans A, et soit $\mathcal{V} = \Sigma_n(V)$; les $\mathcal{V}$ forment un système fondamental de voisinages de a dans $\Sigma_n(A)$. Notons, d'autre part $\lambda\sigma$ pour $(\lambda \in I)$, l'homothétique dans le rapport λ du point σ de I^n. Pour tout $b \in \mathcal{V} \cap \Sigma_n(B)$, on définit un chemin fortement continu $\beta : \lambda \to \lambda b$, dans $\mathcal{V} \cap \Sigma_n(B)$, en posant

$$\lambda b.\sigma = b.\lambda\sigma \qquad \text{pour} \quad \lambda \in I \quad \text{et} \quad \sigma \in I^n.$$

L'extrémité de ce chemin est b, et son origine est un cube ponctuel b_0. Soit b' un autre point de $\mathcal{V} \cap \Sigma_n(B)$; on obtient de même un chemin β', d'origine b'_0. Si V est assez petit, l'hypothèse « B est p. l. c. a. dans A en a » fournit un chemin β_0 joignant b_0 à b'_0 dans le sous-espace de $\Sigma_n(B)$ formé des cubes ponctuels. En composant les chemins β, β_0 et β', on obtient un chemin joignant b à b' et ayant les propriétés voulues.]

2. *Cas des paires de groupes.* — Soit (G, H) une paire de groupes topologiques. On peut alors, dans la condition de presque locale connexion par arcs, remplacer la condition « $\theta \in [o, 1]$ » par $\theta = 1$.

[En effet, soit β un « petit » chemin joignant b à b' et correspondant à un certain $\theta \in [0, 1]$; posons

$$\beta'_t = \beta_{\theta t} \cdot \beta_\theta^{-1} \cdot \beta_{\theta + t(1-\theta)} \qquad \text{pour} \quad t \in [0, 1].$$

Le chemin β' ainsi défini est encore « petit », et est continu sauf pour $t = 1$.]

2.2.4. *Une condition suffisante pour le relèvement des petits cubes.*

PROPOSITION 2. — *Soit $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ une paire homogène; supposons que :*

1° *(H, B, q) soit un fibré localement trivial.*

2° *H_0 soit dense dans G_0.*

3° *H_0 soit en e presque localement connexe par arcs dans G_0.*

Alors, pour tout entier $n \geqq 0$, (A, B) vérifie en e le relèvement des petits n-cubes.

DÉMONSTRATION. — D'après l'hypothèse 2° et la propriété 2 de (2.2.2), (A, B) vérifie en e le relèvement des petits i-cubes pour $i = 0$; supposons qu'il en soit ainsi pour $0 \leqq i \leqq k$, où k est un certain entier $\geqq 0$. Posons [*cf.* début de (2.2.1)] :

$$\Sigma_k(B) = \mathcal{B}, \qquad \Sigma_k(H) = \mathcal{H}, \qquad \Sigma_k(H_0) = \mathcal{H}_0;$$
$$\Sigma'_k(B) = \mathcal{B}', \qquad \Sigma'_k(H) = \mathcal{H}', \qquad \Sigma'_k(H_0) = \mathcal{H}'_0.$$

D'après l'hypothèse 1° et le 1° du lemme 2.2.1, $\mathcal{H}$ est fibré localement trivial sur $\mathcal{B}$; donc, d'après l'hypothèse de récurrence et la propriété 1 de (2.2.2), l'application canonique

$$\mathcal{H}'/\mathcal{H}'_0 \to \mathcal{B}'$$

est un homéomorphisme. Comme il en est de même, d'après le 2° du lemme 2.2.1, de l'application canonique

$$\mathcal{H}/\mathcal{H}_0 \to \mathcal{B},$$

$(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ s'identifie canoniquement à la paire homogène $(\mathcal{H}', \mathcal{H})/(\mathcal{H}'_0, \mathcal{H}_0)$. Cette paire homogène vérifie l'hypothèse 1° de la proposition 2; elle en vérifie aussi l'hypothèse 2°, puisque $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}$, et par conséquent $\mathcal{H}'_0$ et $\mathcal{H}_0$, coïncident au point de vue ensembliste; et l'hypothèse 3°, d'après (2.2.2), conséquence 1 [car, H_0 étant, en e, p. l. c. a. dans G_0, l'est *a fortiori* dans H'_0, donc $\Sigma_k(H_0)$ l'est dans $\Sigma_k(H'_0)$, donc *a fortiori* dans $\Sigma'_k(H_0)$]. Or, on a déjà vu qu'une paire homogène qui vérifie les hypothèses de la proposition 2, vérifie en e le relèvement des petits 0-cubes. La paire $(\mathcal{B}' \ \mathcal{B})$ vérifie donc les hypothèses du lemme ci-dessous. Donc, d'après ce lemme, $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ vérifie en e le relèvement des petits 1-cubes; donc d'après la propriété 1 de (2.2.2), l'application canonique

$$\Sigma'_1(\mathcal{H})/\Sigma'_1(\mathcal{H}_0) \to \Sigma'_1(\mathcal{B})$$

est un homéomorphisme. Mais d'après la formule (1) de (2.2.1), $\Sigma'_1(\mathcal{H})$ est canoniquement homéomorphe à $\Sigma'_{k+1}(H)$, etc. Donc, l'application canonique

$$\Sigma'_{k+1}(H)/\Sigma'_{k+1}(H_0) \to \Sigma'_{k+1}(B)$$

est un homéomorphisme, ce qui, d'après la propriété 1 de (2.2.2), prouve que la paire (A, B) vérifie en e le relèvement des petits $(k+1)$-cubes. De sorte que tout revient à démontrer le

LEMME. — *Soit* $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ *une paire homogène vérifiant les conditions* 1° *et* 3° *de la proposition* 2, *ainsi que la condition :*

(2′) (A, B) *vérifie en e la condition de relèvement des petits* 0*-cubes.*

Alors (A, B) *vérifie en e la condition de relèvement des petits* 1*-cubes (i. e. des petits chemins).*

Démonstration du lemme.

(a) On va d'abord montrer que les fibres de $(H, \mathcal{B}, p)$ voisines de $p^{-1}(e)$ sont « *uniformément p. l. c. a.* » au sens suivant : *pour tout voisinage* $\mathcal{U}$ *de e dans* H', *il existe un voisinage* V *de e dans* B' *et un voisinage* $\mathcal{V}$ *de e dans* H' *tels que*

(1) $$b \in V$$

et

(2) $$h \quad et \quad h' \in p^{-1}(b) \cap \mathcal{V}$$

entraîne l'existence d'un chemin ζ *dans* $p^{-1}(b) \cap \mathcal{U}$ *(continu pour la topologie faible, continu sur* $[0, 1[$ *pour la topologie forte) tel que*

$$\zeta_0 = h \qquad et \qquad \zeta_1 = h'.$$

En effet, soit $\mathcal{W}$ un voisinage symétrique arbitraire de e dans H'. D'après la condition (2′), on peut choisir V pour que (1) entraîne l'existence de

(3) $$k \in p^{-1}(b) \cap \mathcal{W}.$$

De (2) et (3) résulte

(4) $$k^{-1}.h \quad \text{et} \quad k^{-1}.h' \in H_0 \cap (\mathcal{W}.\mathcal{V}).$$

Si $\mathcal{X}$ est un voisinage arbitraire de e dans H'_0, on peut choisir $\mathcal{W}$ et $\mathcal{V}$ pour que (4) entraîne l'existence d'un chemin δ dans $\mathcal{X}$, d'origine $k^{-1}.h$, d'extrémité $k^{-1}.h'$, continu pour la topologie faible, continu sur $[0, 1[$ pour la topologie forte. Posons

$$k.\delta_t = \zeta_t \qquad \text{pour} \quad t \in [0, 1].$$

On a bien

$$k.\delta_0 = h, \qquad k.\delta_1 = h',$$

$$k.\delta_t \in p^{-1}(b) \cap (\mathcal{W}.\mathcal{X}) \qquad \text{pour tout } t \in I,$$

il suffit donc de choisir $\mathcal{W}$ et $\mathcal{X}$ tels que $\mathcal{W}.\mathcal{X} \subset \mathcal{U}$.

(b) Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de e dans H'; soient V et $\mathcal{V}$ donnés par le (a). La condition (2') permet d'associer à $\mathcal{V}$ un voisinage $\mathcal{W}$ de e dans B' tel que tout $b \in W$ se relève dans $\mathcal{V}$. Soit U un voisinage *ouvert* de e dans B' tel que $U \subset V \cap W$; munissons U de la topologie forte.

Soit $\alpha \in \Sigma_1(U)$; pour tout $t \in I$, il existe un relèvement de $\alpha.t$ dans $\mathcal{V}$; on peut supposer $\mathcal{V}$ *ouvert*; il résulte alors de la condition 1° qu'il existe un entier q assez grand pour qu'en posant $t_i = i/q$ pour $i = 0, 1, \ldots, q$, il existe pour $i = 0, 1, \ldots, q-1$ une application

$$[t_i, t_{i+1}] \ni t \to \gamma_{i,t} \in \mathcal{V}$$

qui soit un relèvement de la restriction de α à $[t_i, t_{i+1}]$. Posons

$$\gamma_{0;t_1} = h, \qquad \gamma_{1;t_1} = h'$$

et soit ζ donné par le (a). Soit $\lambda \in]0, 1]$; posons

$$\gamma_{0;t} \cdot \gamma_{0;t_1}^{-1} \cdot \zeta_{\lambda q t} = \gamma'_{0;t} \qquad \text{pour } t \in [0, t_1]. \tag{5}$$

L'application $[0, t_1] \ni t \to \gamma'_{0;t}$ est encore un relèvement de la restriction de α à $[0, t_1]$, et vérifie

$$\gamma'_{0;0} = \gamma_{0;0}. \tag{6}$$

$$\gamma'_{0;t_1} = \zeta_\lambda. \tag{7}$$

On pose alors

$$\gamma_{1;t} \cdot \gamma_{1;t}^{-1} \cdot \zeta_\lambda = \gamma'_{1;t} \qquad \text{pour} \quad t \in [t_1, t_2], \tag{8}$$

ce qui définit un relèvement de la restriction de α à $[t_1, t_2]$ vérifiant

$$\gamma'_{1;t_1} = \zeta_\lambda. \tag{9}$$

De (7) et (9) résulte qu'on définit un relèvement continu γ de la restriction de α à $[0, t_2]$ en posant

$$\gamma_t = \begin{cases} \gamma'_{0;t} & \text{pour} \quad t \in [0, t_1], \\ \gamma'_{1;t} & \text{pour} \quad t \in [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Pour tout $t \in [0, t_1]$ on a, d'après (5) :

$$\gamma_t \in \mathcal{V}^2 . \mathcal{U}$$

et, en choisissant λ assez voisin de 1, on a, d'après (8), pour tout $t \in [t_1, t_2]$

$$\gamma_t \in \mathcal{V},$$

de sorte qu'en répétant ce procédé, on obtient de proche en proche un relèvement de α, continu sur tout $[0, 1]$, et contenu dans $\mathcal{V}^2 . \mathcal{U}$.

2.2.5. *Un lemme « de suite exacte ».*

LEMME. — *Soit $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ une paire homogène telle que pour tout entier $n \geq 0$:*

(a_n) *(A, B) vérifie en e le relèvement des petits n-cubes.*

(b_n) *H_0 soit n-l. c. dans G_0 en e.*

(c_n) *Pour tout voisinage U de e dans A, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de e dans G tel que (si l'on munit $U \cap B$ et $\mathcal{U} \cap H$ de la topologie forte), pour tout élément β de $\dot{\Sigma}_{n+1}(\mathcal{U} \cap H)$, il existe un élément γ de $\Sigma_{n+1}(U \cap B)$ tel que $\dot{\gamma} = p \circ \beta$.*

Alors pour tout entier $n \geqq 0$:

1° *B est n-l. c. dans A en e.*

2° *H est n-l. c. dans G en e.*

Démonstration. — Elle suit pas à pas celle de la suite exacte classique d'homotopie pour un espace fibré au sens de Serre.

On choisit une application continue $f: I^n \to \partial I^{n+1}$, envoyant ∂I^n en O, et dont la restriction à $I^n - \partial I^n$ soit un homéomorphisme.

1° *Preuve de : B est n-l. c. dans A en e pour tout entier $n \geqq 1$* (Pour $n = 0$, la démonstration est un peu plus simple). — Soit U un voisinage de e dans A; (c_n) lui associe un voisinage $\mathcal{U}$ de e dans G; à $\mathcal{U} \cap G_0$, (b_{n-1}) associe un voisinage $\mathcal{V}_0$ de e dans G_0, donc un voisinage $\mathcal{V}$ de e dans G tel que $\mathcal{V} \cap G_0 = \mathcal{V}_0$; on choisit en plus $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Enfin, à $\mathcal{V}$, (a_n) associe un voisinage V de e dans A. On munit $U \cap B$, $\mathcal{U} \cap H$, etc., de la topologie forte.

Soit $\alpha \in \dot{\Omega}_{n+1}(V \cap B)$ [*cf.* (2.1.2)]; soit $\alpha \circ f = \alpha'$; α' est un élément de $\Sigma_n(V \cap B)$ dont le bord est en e. Il existe donc, d'après (a_n), $\beta' \in \Sigma_n(\mathcal{V} \cap H)$ tel que $p \circ \beta' = \alpha'$; $\dot{\beta}'$ est nécessairement un élément de $\dot{\Sigma}_n(\mathcal{V}_0 \cap H_0)$; il existe donc, d'après (b_{n-1}), $\beta'' \in \Sigma_n(\mathcal{U} \cap H_0)$ tel que $\dot{\beta}'' = \dot{\beta}'$; par conséquent β' et β'' définissent un élément β de $\dot{\Sigma}_{n+1}(\mathcal{U} \cap H)$, et, d'après ($c_n$), il existe $\gamma' \in \Sigma_{n+1}(U \cap B)$ tel que $\dot{\gamma} = p \circ \beta$; or $p \circ \beta$ et α ont même image et sont homotopes sur cette image; il existe donc $\gamma \in \Sigma_{n+1}(U \cap B)$, tel que $\dot{\gamma} = \alpha$; et ceci est suffisant d'après le lemme 2.1.2.

2° *Preuve de : H est n-l. c. dans G en e pour tout entier $n \geqq 0$.* — Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de e dans G; à $\mathcal{U} \cap G_0$, (b_n) associe (*cf.* 1°) des voisinages $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{V}$ de e dans G_0 et G respectivement; on choisit $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$; d'après ($a_{n+1}$) et la propriété 4 de (2.2.2), à $\mathcal{V}$ sont associés un voisinage $\mathcal{W}$ de e dans G et un voisinage U de e dans A; à U est associé d'après le 1° un voisinage V de e dans A. On note $\mathcal{W} \cap p^{-1}(V) = \mathcal{X}$; on munit $U \cap B$, $V \cap B$, $\mathcal{U} \cap$ H, etc. de la topologie forte.

Soit $\alpha \in \dot{\Omega}_{n+1}(\mathcal{X} \cap H)$; il existe, d'après le 1°, $\beta \in \Omega_{n+1}(U \cap B)$ tel que $\dot{\beta} = p \circ \alpha$. Soit $\alpha \circ f = \alpha'$; il existe $\beta' \in \Omega_{n+1}(U \cap B)$, tel que β' ait même image que β, soit homotope à β sur cette image, que

$$\beta'.\sigma = p \circ \alpha'.\sigma \qquad \text{pour tout } \sigma \in (I^n \times \{0\})$$

et

$$\beta'.\sigma = e \qquad \text{pour tout } \sigma \in \partial I^{n+1} - (I^n \times \{o\}).$$

D'après (a_{n+1}) et la propriété 4 de (2.2.2), il existe donc $\gamma' \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{V} \cap H)$ qui relève β' et prolonge α'; γ' définit un chemin γ dans $\dot{\Omega}_{n+1}(\mathcal{V} \cap H)$ d'origine $\gamma_0 = \alpha$, d'extrémité γ_1 dans $\dot{\Omega}_{n+1}(\mathcal{V}_0 \cap H_0)$; il existe, d'après (b_n), un élément δ de $\Omega_{n+1}(\mathcal{U} \cap H_0)$ tel que $\dot{\delta} = \gamma'_1$; γ' et δ définissent un élément γ de $\Omega_{n+1}(\mathcal{U} \cap H)$ tel que $\dot{\gamma} = \alpha$.

Corolaire. — *Soit* $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ *une paire homogène, supposons que :*

1° (H, B, q) *soit un fibré localement trivial.*

2° H_0 *soit dense dans* G_0.

3° H_0 *soit n-l. c. dans* G_0 *en e pour tout entier* $n \geqq o$.

Alors, il y a équivalence entre la propriété : H est n-l. c. dans G en e pour tout entier $n \geqq o$, *et la propriété analogue relative à la paire* (A, B).

Démonstration. — Les hypothèses 1° et 2° du corollaire coïncident respectivement avec les hypothèses 1° et 2° de la proposition 2 [*cf.* (2.2.4)], et l'hypothèse 3° du corollaire est plus forte que l'hypothèse 3° de la proposition 2 (puisque o-l. c. est plus fort que p. l. c. a). Donc, d'après la proposition 2, la paire (A, B) vérifie en e le relèvement des petits n-cubes pour tout entier $n \geqq o$, autrement dit (A, B) vérifie, pour tout n, la condition (a_n) du lemme de suite exacte. D'autre part, l'hypothèse 3° du corollaire n'est autre que « (b_n) pour tout n ». Enfin, chacune des hypothèses : « H est n-l. c. dans G en e pour tout entier $n \geqq o$ », et « B est n-l. c. dans A en e pour tout entier $n \geqq o$ », est plus forte que l'hypothèse « (c_n) pour tout n ». Le corollaire résulte donc du lemme de suite exacte.

3. Application à la comparaison des groupes d'homotopie du groupe des automorphismes (continus) et du groupe des difféomorphismes d'une variété compacte de dimension 3.

3.1. Préliminaires.

3.1.1. *Décomposition régulière d'une variété compacte. Notion de hauteur.* — Soit F une variété compacte, de dimension n, de classe C^∞ [variété est pris au sens de *I*, (1.2.2)]. La définition 1 ci-dessous est un rappel de *II*, (5.2.2.).

Définition 1. — Soient F_i et F_j deux sous-variétés fermées (de classe C^∞) de dimension n de F. On dit que F_i et F_j définissent une *décomposition régulière* de F si :

(*a*) $F = F_i \cup F_j$;

(*b*) $F_i \cap F_j$ est une sous-variété E de F, de dimension $(n - 1)$.

Définition 2. — On dit que F est de *hauteur* 1, si F est différentiablement étoilée [*cf.* II, (5.3.2)]. On dit que F est de *hauteur* $\leqq p$, s'il existe une décomposition régulière (F_i, F_j) de F telle que F_i et F_j soient de hauteur $\leqq (p-1)$.

Lemme. — *Soit F une variété compacte; soit (F_i) une famille finie de sous-variétés compactes, de codimension* o, *de hauteur finie, de F. On suppose que :*

1° *pour tout couple (i, i') d'indices distincts, $F_i \cup F_{i'}$ est une sous-variété de F dont (F_i, F_i') est une décomposition régulière;*

2° *pour tout triple, (i, i', i'') d'indices distincts, $F_i \cap F_{i'} \cap F_{i''} = \emptyset$.*

Alors F est de hauteur finie.

Ce lemme, dont la démonstration est immédiate, sert à établir la

Proposition 3. — *Toute variété F compacte, de dimension $\leqq 3$ est de hauteur finie.*

Démonstration. — On se borne au cas où F est de dimension 3. On munit F d'une triangulation différentiable [32], notée $\mathfrak{T}$; la démonstration va consister à effectuer sur $\mathfrak{T}$ une construction qui est l'analogue « différentiable » du classique diagramme de Heegaard (*cf.* Seifert et Threlfall, [1], p. 219).

On munit F d'une métrique riemannienne adaptée au bord [*cf.* *I*, (3.3.1)], et l'on désigne par d la distance géodésique. Soit (F_i), (F_j), (F_k) et (F_l) la famille des faces de dimension o, 1, 2 et 3 de $\mathfrak{T}$.

On entoure chaque F_i d'un voisinage tubulaire B_i de rayon ρ_i (on notera que B_i n'est difféomorphe à une boule que si F_i est intérieur à F; mais dans tous les cas B_i est de hauteur 1). On choisit les ρ_i assez petits pour que, pour tout i, B_i ne rencontre, parmi les faces de $\mathfrak{T}$, que celles qui sont adjacentes à F_i, et pour que le bord ∂B_i de B_i rencontre transversalement celles de ces faces qui sont de codimension $\geqq 1$; on suppose, en plus, que, pour $i' \neq i$, $B_i \cap B_{i'} = \emptyset$.

Soit F_j une 1-face, soient F_i et $F_{i'}$ ses extrémités; on « rapetisse » un peu F_j, c'est-à-dire qu'on choisit sur F_j un point M tel que $0 < d(F_i, M) < \rho_i$ et un point analogue M'. Soit T_j un tube normal à MM' dans F, de rayon ρ_j assez petit; T_j est difféomorphe à un « cylindre », produit de I par une 2-variété de hauteur 1. On munit T_j d'un système de coordonnées (x, y, z) d'origine O sur MM' et à l'extérieur de B_i et $B_{i'}$, d'axe Oz suivant MM' et dirigé vers M. On note (r, θ, z) les coordonnées cylindriques associées à (x, y, z); si ρ_j a été choisi assez petit, on peut supposer que r est la distance géodésique à MM', que les plans $z = \text{Cte}$ sont les plans géodésiques normaux

[32] Comme dans le cas des variétés au sens habituel, la possibilité de munir F d'une telle triangulation se démontre à l'aide du théorème de plongement dans un espace euclidien.

à MM', et que les intersections avec T_j des 2-faces de $\mathfrak{T}$ adjacentes à F_j sont des morceaux de plans (c'est-à-dire vérifient $\theta = \mathrm{Cte}$). On suppose en plus que T_j ne rencontre pas les faces de $\mathfrak{T}$ non adjacentes à F_j. Soit a la cote du point où MM' perce B_i; soient b et c deux nombres tels que $a < b < c$, assez voisins de a pour que, pour tout $z_0 \in [b, c]$, le plan $z = z_0$ coupe B_i suivant une 2-variété de hauteur 1 intérieure à T_j, et coupe transversalement ∂B_i (il existe effectivement deux tels nombres b et c, pourvu que ρ_i ait été choisi assez petit). Soit $r = \varphi(z, \theta)$ l'équation de ∂B_i, valable pour $z \in [b, c]$; soit χ une fonction de classe $C^\infty : \mathbf{R} \to [0, 1]$ nulle pour $z \leqq b$, égale à 1 pour $z \geqq c$, et telle que

$$(1) \qquad \frac{d\chi}{dz} . z \geqq 0 \qquad \text{pour tout } z \in \mathbf{R}.$$

On définit de manière analogue (relativement à $B_{i'}$) : a', b', c', φ' et χ'. Soit σ_j un nombre > 0 tel que

$$(2) \qquad \sigma_j < \inf_\theta \varphi(b, \theta)$$

et que

$$(2') \qquad \sigma_j < \inf_\theta \varphi'(b', \theta).$$

On pose

$$(3) \qquad \psi(z, \theta) = (1 - \chi(z))\, \sigma_j + \chi(z)\, \varphi(z, \theta) \qquad \text{pour} \quad b \leqq z \leqq c$$

et l'on définit $\psi'(z, \theta)$ de manière analogue. On définit alors

$$B_{i;j} \quad \text{par} \quad B_{i;j} = B_i - (T_j \cap \{ z < c \}),$$
$$B_{i';j} \quad \text{par} \quad B_{i';j} = B_{i'} - (T_j \cap \{ z > c' \})$$

et Z_j comme étant la partie de T_j vérifiant

$$(4) \qquad \begin{cases} r \leqq \psi(z, \theta) & \text{pour} \quad b \leqq z \leqq c \\ r \leqq \psi'(z, \theta) & \text{»} \quad c' \leqq z \leqq b'; \end{cases}$$

$$(5) \qquad r \leqq \sigma_j \qquad \text{»} \quad b' \leqq z \leqq b;$$

Z_j est de hauteur 1 (c'est un cylindre); $B_{i;j}$ est de hauteur 1 si ρ_i est assez petit et c assez voisin de a; $Z_j \cup B_{i;j}$ est une variété dont $(Z_j, B_{i;j})$ est une décomposition régulière; résultats analogues pour $B_{i';j}$ et $(Z_j, B_{i';j})$.

On fait cette construction successivement pour tout j, en choisissant des T_j tels que $T_j \cap T_{j'} = \emptyset$ pour $j' \neq j$ et $T_j \cap B_i = \emptyset$ pour $F_i \not\subset F_j$. On obtient ainsi une famille $(\tilde{B}_i)$ est une famille (Z_j); les $\tilde{B}_i$ et les Z_j sont tous de longueur 1; soit W leur réunion : W est de hauteur finie d'après le lemme.

Soit $W^* = \overline{F - W}$; pour toute 3-face F_l, soit $F_l^* = F_l \cap W^*$. On va montrer (pour un choix convenable de W) que la décomposition (F_l^*) de W^* satisfait aux conditions du lemme; il en résultera que $W^\star$ sera de hauteur finie, ce qui achèvera la démonstration. Or la décomposition $(F_l^\star)$ satisfait à la condition 2° du lemme; elle satisfera aussi à la condition 1° si :

(a) le bord relatif [33] ∂W_F de W coupe transversalement les 2-faces de $\mathfrak{C}$ qu'il rencontre.

Il restera en plus à vérifier que pour tout l, $F_l^\star$ est de hauteur finie. Or les $F_l^\star$ seront tous *de hauteur* 1 s'il existe pour tout l un point P_l dans l'intérieur de $F_l^\star$, tel que :

(b) pour tout l, $\partial W_F \cap F_l$ coupe transversalement les demi-droites de la structure affine de F_l issues de P_l.

On procède en fait comme suit : on choisit *a priori*, pour tout l, un point P_l dans l'intérieur de F_l; puis on choisit W de façon que (a) et (b) soient réalisés. Or, soit V' la partie de ∂W_F formée des points qui *appartiennent* à la partie d'un Z_j définie par l'inéquation (4); et soit $V'' = \partial W_F - V'$. Il suffit que W soit assez petit pour que (a) et (b) soient vérifiés en tout point de V''; il reste à s'arranger pour qu'il en soit ainsi en tout point de V'.

Reprenons le système de coordonnées locales (x, y, z) introduit dans Z_j, et posons

$$\Phi(x, y, z) = r - \varphi(z, \theta),$$
$$\Psi(x, y, z) = r - \psi(z, \theta).$$

Soit $\vec{Q}(x, y, z)$ un champ de vecteurs dans la partie $\{b \leqq z \leqq c\}$ de Z_j ; soient (ξ, η, ζ) les composantes de $\vec{Q}$. Il résulte immédiatement de (3) que

$$(6) \qquad \vec{Q}.\overrightarrow{\text{grad}\,\Psi} = (1-\chi)\frac{\xi x + \eta y}{r} - (\varphi - \sigma_j)\frac{d\chi}{dz}\zeta + \chi\vec{Q}.\overrightarrow{\text{grad}\,\Phi}.$$

— Si l'on prend $\xi = x$, $\eta = y$ et $\zeta = 0$, (6) donne

$$\vec{Q}.\overrightarrow{\text{grad}\,\Psi} = (1-\chi)\,r + \chi\vec{Q}.\overrightarrow{\text{grad}\,\Phi},$$

or $\vec{Q}.\overrightarrow{\text{grad}\,\Phi}$ est >0, puisque (a) a lieu aux points de V''; donc $\vec{Q}.\overrightarrow{\text{grad}\,\Psi} > 0$; donc (a) a lieu aux points de V'.

— Si l'on prend pour $\vec{Q}$ (dans la partie $\{b \leqq z \leqq c\}$ de $Z_j \cap F_l$) un champ en chaque point porté par la demi-droite (au sens de F_l) joignant ce point à P_l et dirigé vers P_l, alors $\vec{Q}.\overrightarrow{\text{grad}\,\Phi}$ est >0, puisque (b) a lieu aux points de V''; si W a été choisi assez petit, ζ est <0, donc d'après (1) et (2) on a $-(\varphi - \sigma_j)\dfrac{d\chi}{dz}\cdot\zeta > 0$; enfin, on peut choisir [34] le système de coor-

---

[33] *Cf.* I, (2.3.1).

[34] Par exemple en s'arrangeant pour que le vecteur $\vec{Q}(0, 0, b)$ soit dans le plan bissecteur des deux 2-faces de F_l qui passent par F.

données (x, y, z) de façon que $\xi x + \eta y > 0$; de sorte que finalement $\vec{Q}.\overrightarrow{\mathrm{grad}\,\Psi} > 0$, ce qui entraîne (b) aux points de V'.

3.1.2. *La paire homogène associée à une décomposition régulière d'une variété compacte.* — Soit F une variété compacte ; soit (F_i, F_j) une décomposition régulière de F, on note

$$F_i \cap F_j = E.$$

On note G le groupe des *automorphismes de la structure topologique* de F qui induisent l'identité sur le bord ∂F de F. On note G_0 le sous-groupe de G formé des automorphismes qui induisent l'identité sur E.

Les groupes G et G_0 sont munis de la topologie C^0, qui en fait des groupes topologiques (*cf.* Bourbaki, *Topologie générale*, chap. X, § 2, exercice 17), en plus ces groupes sont évidemment métrisables.

Soit r un entier ≥ 1 ; on note H le groupe des r-difféomorphismes de F qui sont r-tangents à l'identité en tout point de ∂F; on note H_0 le sous-groupe de H, formé des difféomorphismes qui induisent l'identité sur E. Les groupes H et H_0 sont munis de la topologie C^r; ce sont des groupes topologiques métrisables [*cf.* II, (1.4.2) et I, (4.3.4)].

(G, H) est une paire de groupes métrisables ; (G_0, H_0) en est une sous-paire fermée; on note (A, B) la paire homogène (de classes à gauche) quotient [*cf.* (2.1.1)] : c'est une paire métrisable.

Soit $\mathcal{B}$ l'espace, muni de la topologie C^r, des r-plongements de E dans F qui sont r-tangents à l'identité le long de ∂E. L'application canonique $H \to \mathcal{B}$ est continue ; elle est constante sur les classes à gauche de $H \bmod H_0$; elle se factorise donc en la suite d'applications continues

$$H \xrightarrow{q} B \to \mathcal{B}.$$

Mais d'après le corollaire 2 du théorème 5' [*cf.* II, (2.4.1)], l'application canonique $H \to \mathcal{B}$ est une fibration localement triviale.

Il en résulte le :

Lemme 1. — *Avec les notations ci-dessus :*

1° *L'application canonique $B \to \mathcal{B}$ est un homéomorphisme de B sur un ouvert de $\mathcal{B}$.*

2° *Le triple (H, B, q) est un fibré localement trivial.*

Notons d'autre part G_i le groupe analogue à G, relatif à F_i ; on définit de même H_i, G_j, H_j. On a le :

Lemme 2. — *Soit n un entier ≥ 0. Si (avec les notations ci-dessus) H_i et H_j sont n-l.c. dans G_i et G_j respectivement en leur élément neutre, alors H_0 est n-l.c. dans G_0 en e.*

DÉMONSTRATION. — Soit L le sous-groupe de H_0 formé des difféomorphismes dont le r-jet le long de E est celui de l'identité. D'après l'appendice au chapitre III, quel que soit l'entier $n \geqq 0$, et quel que soit le voisinage faible de e dans H_0, il existe un voisinage faible V de e dans H_0 tel que [si l'on munit U et V de la topologie forte], pour tout $\alpha \in \dot{\Sigma}_{n+1}(V)$ il existe $\beta \in \Sigma_1(\dot{\Sigma}_{n+1}(U))$ tel que

$$\beta_0 = \alpha, \qquad \beta_1 \in \dot{\Sigma}_{n+1}(U \cap L).$$

Or L s'identifie canoniquement au groupe produit $H_i \times H_j$, et il résulte immédiatement de l'hypothèse que $H_i \times H_j$ est, pour tout n, n-l.c. dans $G_i \times G_j$, c'est-à-dire dans G_0. Donc, si U est assez petit, β_1 est le bord d'un petit élément γ de $\Sigma_{n+1}(L)$; β et γ définissent un petit élément δ de $\Sigma_{n+1}(H_0)$ tel que $\dot{\delta} = \alpha$.

3.1.3. *Rappel de résultats fondamentaux de la théorie des variétés de dimension* 3.

THÉORÈME (CAIRNS-MOÏSE-BING). — *Soit F une variété différentiable compacte de dimension* 3. *Soit (F_i, F_j) une décomposition régulière de F. Soient G, G_0, H, H_0, A, B, les espaces définis en* (3.1.2); *soit B' l'espace B muni de la topologie induite par A. Alors :*

1° *H est dense dans G, H_0 est dense dans G_0.*

2° *B' s'identifie canoniquement à un sous-espace ouvert de l'espace, muni de la topologie C^0, des r-plongements : $E \to F$ qui sont r-tangents à l'identité le long de ∂E.*

3° *A s'identifie canoniquement à un sous-espace ouvert de l'espace (muni de la topologie C^0) de « bons » homéomorphismes* ([35]) *de E dans F qui induisent l'identité sur ∂E.*

Indications sur la démonstration. — On munit F d'une triangulation différentiable. La possibilité d'approcher à ε près un homéomorphisme d'une 3-variété compacte triangulée dans une autre telle variété, par un homéomorphisme semi-linéaire, est démontrée par MOÏSE (*cf.* [1], théorème 2) dans le cas des variétés sans bord; dans le cas des variétés à bord, le résultat analogue est dû à BING (*cf.* [1], théorème 3, ou [2]). La possibilité d'approcher à ε près, par un difféomorphisme, un homéomorphisme semi-linéaire d'une 3-variété différentiable différentiablement triangulée dans une autre telle variété, est établie par CAIRNS (*cf.* [1], [2]).

Le 1° résulte de la conjonction de ces résultats.

([35]) Un homéomorphisme f de E dans F qui induit l'identité sur ∂E est dit *bon* s'il existe un voisinage tubulaire V de E dans F (d'ailleurs nécessairement homéomorphe au produit $E \times I$) tel que F se prolonge en un homéomorphisme $V \to F$, qui envoie $V \cap \partial F$ dans ∂F.

Démonstration du 2°. — Soit $\mathcal{B}'$ l'espace, muni de la topologie C^0, des r-plongements de E dans F qui sont r-tangents à l'identité le long de ∂E; le groupe H' opère à droite continûment (par composition) dans $\mathcal{B}'$, et, en particulier, l'application canonique $H' \to \mathcal{B}'$ (qui à tout $g \in H'$ associe sa restriction à E) est continue; comme cette application est constante sur chacune des classes à gauche de H' mod H'_0 elle se factorise en la suite d'applications continues

$$H' \to B' \to \mathcal{B}'.$$

Tout revient donc à démontrer que l'application $H' \to \mathcal{B}'$ est ouverte, et il suffit pour cela de montrer qu'elle est ouverte en e, c'est-à-dire : *pour tout $f' \in \mathcal{B}'$ assez voisin de l'injection f de E dans F, il existe $g \in H'$, voisin de e, tel que $g.f' = f$.* La démonstration de ce résultat est assez longue, et comme elle suit pas à pas celle du lemme 4 de Moïse [1], nous ne la donnerons pas ici.

Démonstration du 3°. — Soit $\mathcal{A}$ l'espace (muni de la topologie C^0) des bons homéomorphismes de E dans F qui induisent l'identité sur ∂E; le groupe G opère à droite continûment dans $\mathcal{A}$, et, comme ci-dessus, l'application canonique de G dans $\mathcal{A}$ se factorise en la suite d'applications continues :

$$G \to A \to \mathcal{A},$$

et tout revient à montrer que l'application $G \to \mathcal{A}$ est ouverte en e; compte tenu du 2°, il suffit pour cela de montrer que : *pour tout $f \in \mathcal{A}$, il existe $g \in G$, arbitrairement voisin de e, tel que $g.f \in \mathcal{B}'$.* Ce résultat est essentiellement contenu ([36]) dans le théorème 5 de Moïse [1].

3.2. Le théorème principal et ses conséquences.

3.2.1. — Théorème 8. — *Soit F une variété compacte de classe C^∞ de dimension 3. Soit r un entier ≥ 1. Si la conjecture de* Smale ([37]) *est exacte, alors :*

1° *Soit G le groupe (muni de la topologie C^0) des automorphismes de la structure topologique de F qui induisent l'identité sur le bord ∂F. Soit H le groupe (muni de la topologie C^r) des r-difféomorphismes de F qui sont r-tangents à l'identité le long du bord. Alors H est n-localement connexe dans G en e pour tout entier $n \geq 0$.*

2° *Soit (F_i, F_j) une décomposition régulière de F; soit $F_i \cap F_j = E$; soit (A, B) la paire homogène associée* [*cf.* (3.1.2)]. *Alors B est n-localement connexe dans A en e, pour tout entier $n \geq 0$.*

([36]) Soit en effet V un voisinage tubulaire de E dans F; le théorème de Moïse affirme (dans le cas où E est sans bord) que f peut se prolonger en un homéomorphisme de V dans F dont la restriction au complémentaire de tout voisinage de E soit « semi-linéaire ».

([37]) *Cf.* II, (5.3.2).

Le théorème 8 sera démontré en (3.2.2). En voici quelques corollaires, tous vrais *sous réserve de l'exactitude de la conjecture de* SMALE.

COROLLAIRE 1.

1° *Soient F, G, H comme dans lé théorème* 8. *Alors G et H sont homotopiquement équivalents.*

2° *On suppose en plus F orientable; on note G^+ et H^+ les sous-groupes respectifs de G et H, formés des automorphismes conservant l'orientation. Alors G^+ et H^+ sont homotopiquement équivalents.*

Démonstration du corollaire 1. — D'après le 1° du théorème 3.1.3, H est dense dans G. Donc, d'après le lemme 2.1.3 et le 1° du théorème 8, H est n'-l.c. dans G pour tout entier $n' \geqq 0$, en tout point de G. D'autre part, il résulte de la contractilité locale de H [*cf.* II, (1.4.2)] que $\Sigma_n(H)$ est n'-l.c. en e pour tout couple (n, n') d'entiers $\geqq 0$; il résulte du lemme 3 de (2.1.3) que cette propriété a lieu en tout point de H. Le 1° résulte donc de la proposition 1 [*cf.* (1.2.2)] appliquée à la paire métrisable (G, H).

Démonstration du 2°. — G^+ est ouvert dans G, et $H^+ = H \cap G^+$, donc la densité de H dans G entraîne celle de H^+ dans G^+; de même, la propriété « H est n'-l.c. dans G en e pour tout entier $n' \geqq 0$ », entraîne la propriété analogue pour la paire (G^+, H^+). La démonstration se fait ensuite comme celle du 1°.

COROLLAIRE 2 (« Hypothèse de FELDBAU pour $n = 3$ »; *cf.* Introduction).— *Soit G^+ le groupe (muni de ta topologie C^0) des automorphismes de la sphère S_3 qui conservent l'orientation. L'homomorphisme canonique*

$$\pi_i(SO(4)) \rightarrow \pi_i(G^+)$$

est bijectif pour tout $i \geqq 0$.

Démonstration du corollaire 2. — C'est une conséquence immédiate du 2° du corollaire 1 (dans le cas où F est la sphère S_3) et de la conjecture de SMALE [*cf.* III, (5.3.1), conséquence 1].

COROLLAIRE 3. — *Soient $F = F_i \cup F_j$, $E = F_i \cap F_j$, G, H, A, B comme dans le théorème* 8.

1° *A et B sont homotopiquement équivalents.*

2° *Les images canoniques de G et H dans l'espace des homéomorphismes de E dans F, munies respectivement des topologies C_0 et C^r, sont des espaces homotopiquement équivalents.*

Démonstration du corollaire 3. — La densité de H dans G entraîne celle de B dans A. Le 1° se démontre ensuite comme le 1° du corollaire 1, sauf qu'on utilise le 2° du théorème 8 au lieu du 1°. Le 2° du présent corollaire résulte immédiatement du 1°, compte tenu du 3° du théorème 3.1.3, et du lemme 1 de (3.1.2).

COROLLAIRE 4. — *Les notations étant celles du théorème* 8, *l'application canonique de G dans l'espace des homéomorphismes de E dans F définit une quasi-fibration* ([38]) *au sens de* DOLD *et* THOM [1].

Démonstration du corollaire 4. — D'après le 3° du corollaire 3.1.3, il suffit de montrer que le triple (G, A, p) est un quasi-fibré, et, pour cela, que l'image par p du complexe singulier cubique de G, et le complexe singulier cubique de A, sont homotopiquement équivalents. Or cela résulte du 1° du corollaire 3, puisque, d'après le 2° du lemme 1 de (3.1.2), tout élément de $\Sigma_n(B)$ est l'image par p d'un élément de $\Sigma_n(G)$.

COROLLAIRE 5. — *Soient F, G, H comme dans le théorème* 8. *Soit G^* un sous-groupe de G tel que $H \subset G^*$. Alors H est n-localement connexe dans G^* en e, pour tout entier $n \geqq 0$, et G, G^* et H sont homotopiquement équivalents.*

(La démonstration de ce corollaire, qui s'applique en particulier au cas où G^* est le groupe des automorphismes semi-linéaires d'une triangulation de F, est immédiate : le fait que H est n-l.c. dans G en e pour tout entier $n \geqq 0$, entraîne la même propriété pour la paire (G^*, H); de même, H est dense dans G^*; la suite de la démonstration est la même que celle du corollaire 1.)

3.2.2. *Démonstration du théorème* 8.

Plan. — En partant de cas particuliers simples, on s'élève par étapes jusqu'au cas général à l'aide de décompositions régulières. La démonstration utilise trois lemmes : le lemme 1, par l'intermédiaire duquel intervient la conjecture de SMALE; ce lemme permet le démarrage de la démonstration; les lemmes 2 et 3, par l'intermédiaire desquels interviennent la plupart des résultats du § 2 et de (3.1); ces lemmes sont ceux qui permettent à chaque fois de passer d'un cas particulier au suivant.

LEMME 1. — *Si F est une 3-variété compacte différentiablement étoilée, alors H est n-l.c. dans G pour tout entier $n \geqq 0$.*

Démonstration du lemme 1. — Soit O un point intérieur de F, et $\{\mathcal{H}_\lambda\}$ la famille d'homothéties de centre O de F [*cf.* II, (5.3.2)]. Rappelons que la *rétraction d'Alexander* de G (*cf.* ALEXANDER [1]) est l'application $G \times I \ni (f, \lambda) \to \mathcal{A}_\lambda(f) \in G$ définie par $\mathcal{A}_0(f) = e$, et, pour $\lambda \in]0, 1]$:

$$(\mathcal{A}_\lambda(f)).x = \begin{cases} \mathcal{H}_\lambda \circ f \circ \mathcal{H}_{1/\lambda}.x & \text{pour } x \in \mathcal{H}_\lambda(F), \\ x & \text{pour } x \notin \mathcal{H}_\lambda(F). \end{cases}$$

([38]) On peut montrer, à l'aide de procédés plus fins que ceux utilisés ici, et ne s'appuyant pas sur la conjecture de SMALE, que cette application définit même une fibration au sens de SERRE.

La rétraction d'Alexander induit une application continue

$$(1) \qquad H\times[0,\ 1[\ \ni (f,\lambda) \to \mathcal{A}_{1-\lambda}(f) \in H$$

et par conséquent pour tout entier $n \geq 1$ une application continue

$$(2) \qquad \Sigma_n(H)\times[0,\ 1[\ \ni (\beta,\lambda) \to \mathcal{A}_{1-\lambda}(\beta) \in \Sigma_n(H).$$

Au cours de la déformation (1), la distance (au sens de la convergence uniforme) de $\mathcal{A}_\lambda(f)$ à l'origine e de H *décroît* et tend vers zéro uniformément en f; il en est donc de même pour la déformation (2). Soit U une ε-boule (au sens de la distance de la convergence uniforme) de centre e dans H; on munit U de la topologie forte. Soit $\alpha \in \dot{\Sigma}_n(U)$; d'après la conjecture de Smale [*cf.* II, (5.3.2), conséquence 2] il existe $\beta \in \Sigma_n(H)$ tel que $\dot{\beta} = \alpha$. Pour λ_0 assez voisin de 1, $\mathcal{A}_{1-\lambda_0}(\beta) \in \Sigma_n(U)$; mais en plus le cylindre γ :

$$\partial I^n \times [0,\ \lambda_0] \ni (\sigma,\lambda) \to \mathcal{A}_{1-\lambda}(\alpha.\sigma)$$

a son image contenue dans U; $\mathcal{A}_{1-\lambda_0}(\beta)$ et γ définissent un élément β' de $\Sigma_n(U)$ tel que $\dot{\beta}' = \alpha$.

Lemme 2. — *Soient F, F_i, F_j, G, H, A et B comme dans l'énoncé du théorème* 8; *soient G_i, H_i* (resp. G_j, H_j) *les groupes analogues à G, H et relatifs à F_i* (resp. F_j). *Si, pour tout entier $n \geq 0$, H_i et H_j sont n-l.c. dans G_i et G_j respectivement en leur élément neutre, alors il y a équivalence entre : H est n-l.c. dans G en e pour tout entier $n \geq 0$, et la propriété analogue relative à la paire $(A,\ B)$.*

Démonstration du lemme 2. — La paire $(A,\ B)$ vérifie les conditions du corollaire 2.2.4 : la condition 1 d'après le 2° du lemme 1 de (3.1.2); la condition 2 d'après le 1° du théorème 3.1.3; la condition 3 d'après le lemme 2 de (3.1.2); d'où le lemme 2.

Lemme 3. — *Les notations étant celles du théorème* 8, *soit V un voisinage tubulaire de E dans F difféomorphe à $E\times[-1,\ +1]$; on identifie V à $E\times[-1,\ +1]$ de façon que E s'identifie à $E\times\{0\}$. Soit $V_i = E\times[0,\ 1]$ et $V_j = E\times[-1,\ 0]$; $(V_i,\ V_j)$ est une décomposition régulière de V; à cette décomposition est associée* [*cf.* (3.1.2)] *une paire topologique qu'on note $(\tilde{A},\ \tilde{B})$. Alors B et $\tilde{B}$ sont localement isomorphes au sens suivant : il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de e dans B et une bijection (d'ailleurs canonique) de $\mathcal{V}$ sur un voisinage $\tilde{\mathcal{V}}$ de e dans $\tilde{B}$ qui soit un homéomorphisme pour la topologie forte et pour la topologie faible.*

[Le lemme 3 est une conséquence immédiate du 1° du lemme 1 de (3.1.2) et du 2° du théorème 3.1.3. On notera que, compte tenu du 3° de ce théorème, on peut même affirmer que les *paires $(A,\ B)$ et $(\tilde{A},\ \tilde{B})$ sont localement isomorphes;* mais nous n'utiliserons pas ce résultat dans la suite.]

Premier cas particulier du théorème 8 : *F est un cylindre dont la base est étoilée.*

LEMME α. — *Soit E une variété compacte de dimension* 2, *différentiablement étoilée, soit $F = E \times [1 -, +1]$; soient $F_i = E \times [0, 1]$ et $F_j = E \times [-1, 0]$; soient G, H, A, B comme dans le théorème* 8. *Alors*

1° *H est n-l.c. dans G en e pour tout entier $n \geqq 0$.*

2° *B est n-l.c. dans A en e pour tout entier $n \geqq 0$.*

Démonstration du lemme α. — Le 1° est un cas particulier du lemme 1. D'après ce même lemme, si G_i, H_i (resp. G_j, H_j) désignent les groupes analogues à G, H et relatifs à F_i (resp. F_j), H_i et H_j sont n-l.c. dans G_i et G_j respectivement en leur élément neutre, ceci pour tout entier $n \geqq 0$; le 2° résulte donc du 1° et du lemme 2.

Deuxième cas particulier du théorème 8 : *F est un cylindre dont la base est une couronne circulaire.*

LEMME β. — *Soit E une variété difféomorphe au produit $S_1 \times [0, 1]$* (où S_1 désigne la sphère de dimension 1)*; soient F, F_i, F_j, G, H, A, B comme au lemme α. Les conclusions* 1° *et* 2° *de ce lemme subsistent.*

Démonstration du lemme β. — Soit (E_i, E_j) la décomposition régulière de E canoniquement définie par une décomposition régulière de S_1 en deux hémisphères. On note

$$E_i \times [-1, +1] = F_i^\star; \qquad E_j \times [-1, +1] = F_j^\star; \qquad F_i^\star \cap F_j^\star = E^\star;$$

$(F_i^\star, F_j^\star)$ est une décomposition régulière de F. Soit $V^\star$ un voisinage tubulaire de $E^\star$ dans F, difféomorphe au produit $E^\star \times [-1, +1]$; on définit $V_i^\star$, $V_j^\star$, $A^\star$, $B^\star$, $\tilde{A}^\star$, $\tilde{B}^\star$ de façon analogue à celle du lemme 3. En particulier, $\tilde{A}^\star$ et $\tilde{B}^\star$ sont relatifs à la décomposition $(V_i^\star, V_j^\star)$ de $V^\star$. Or $E^\star$ est difféomorphe à la somme (disjointe) de deux carrés. Donc, d'après le 2° du lemme α, $\tilde{B}^\star$ est n-l.c. dans $\tilde{A}^\star$ en e pour tout entier $n \geqq 0$. D'après le lemme 3, il en résulte que $B^\star$ est n-l.c. dans $A^\star$ en $e^\star$ pout tout entier $n \geqq 0$. D'autre part, $F_i^\star$ et $F_j^\star$ sont tous deux difféomorphes au cube; donc $H_i^\star$ est, pour tout n, n-l.c. dans $G_i^\star$ en son élément neutre, et de même $H_j^\star$ dans $G_j^\star$. Donc, d'après le lemme 2, H est n-l.c. dans G en e pour tout entier $n \geqq 0$: c'est le 1°. Puisque F_i et F_j sont tous deux difféomorphes à F, le 2° résulte du 1° et du lemme 2.

Troisième cas particulier du théorème 8 : *F est un cylindre quelconque.*

LEMME γ. — *Soit E une variété compacte de dimension* 2 ; *soient F, F_i, F_j, G, H, A, B comme aux lemmes α et β. Les conclusions* 1° *et* 2° *du lemme α subsistent.*

Démonstration du lemme γ. — On procède par récurrence sur la hauteur de E, ce qui est légitime d'après la proposition 3 [*cf.* (3.1.1)]. Le lemme α n'est autre que le lemme γ dans le cas particulier où E est de hauteur 1. Supposons le lemme γ démontré pour tout E de hauteur $\leqq (p-1)$ et démontrons-le pour E de hauteur $\leqq p$. Soit (E_i, E_j) une décomposition régulière de E telle que E_i et E_j soient tous deux de hauteur $\leqq (p-1)$. On définit $F_i^\star$, $F_j^\star$, $E^\star$, $V^\star$, etc. comme dans la démonstration du lemme β Comme $E_i \cap E_j$ est difféomorphe à la somme d'un nombre fini de segments et de cercles, $E^\star$ est difféomorphe à la somme d'un nombre fini de carrés et de couronnes circulaires. Donc, d'après le 2° des lemmes α et β, $\tilde{B}^\star$ est n-l.c. dans $\tilde{A}^\star$ en $e^\star$ pour tout entier $n \geqq 0$. La suite de la démonstration est analogue à celle du lemme β, sauf qu'ici c'est l'hypothèse de récurrence qui entraîne que $H_i^\star$ (resp. $H_j^\star$) est, pour tout entier $n \geqq 0$, n-l.c. dans $G_i^\star$ (resp. $G_j^\star$) en son élément neutre.

Cas général.

Démonstration du 1°. — On procède par récurrence sur la hauteur de F, ce qui est légitime d'après la proposition 3 [*cf.* (3.1.1)]. Le cas où cette hauteur est 1 est résolu par le lemme 1. Supposons le résultat établi pour tout F de hauteur $\leqq (p-1)$, et soit F de hauteur $\leqq p$. Soit (F_i, F_j) une décomposition régulière de F telle que F_i et F_j soient tous deux de hauteur $\leqq (p-1)$; soit $E = F_i \cap F_j$ et soient V, V_i, V_j, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ comme au lemme 3. D'après le 2° du lemme γ, $\tilde{B}$ est n-l.c. dans $\tilde{A}$ en e pour tout entier $n \geqq 0$. D'après le lemme 3, il en est de même pour la paire (A, B). Or, d'après l'hypothèse de récurrence, H_i (resp. H_j) est n-l.c. dans G_i (resp. G_j) en son élément neutre. D'où le résultat, d'après le lemme 2.

Démonstration du 2°. — Soit cette fois (F_i, F_j) une décomposition régulière quelconque de F. D'après le 1°, H (resp. H_i, resp. H_j) est, pour tout entier $n \geqq 0$, n-l.c. dans G (resp. G_i, resp. G_j) en son élément neutre. Il suffit donc d'appliquer le lemme 2.

Appendice au chapitre III.

LEMME. — *Soit F une variété compacte; soient F_1 et F_2 deux sous-variétés de F définissant une décomposition régulière* [*cf.* (3.1.1)] *de F. On note $F_1 \cap F_2 = E$.*

Soit r un entier $\geqq 1$, soit H le groupe des r-difféomorphismes de F qui sont r-tangents à l'identité en tout point de ∂F et qui induisent l'identité sur E. Soit L le sous-groupe de H formé des difféomorphismes qui, en plus, sont r-tangents à l'identité en tout point de E.

Soit K un espace compact arbitraire, et soit f une application continue $K \to H$. Il existe une homotopie $h : K \times I \to H$ telle que $h_0 = f$, et que *l'image de K par h_1 soit dans L ; en plus, h peut être choisie arbitrairement petite au sens de la topologie faible sur H* [i. e. si d est une distance sur H compatible avec cette topologie, h peut être choisi de manière que

$$\sup_{\sigma\in k;\, t\in I} d(f.\sigma,\, h_t.\sigma)$$

soit arbitrairement petit].

DÉMONSTRATION. — Soit T un voisinage tubulaire de E dans F, difféomorphe à $E\times[-1, +1]$, on identifie T à $E\times[-1, +1]$, de manière que E s'identifie à $E\times\{0\}$. Soit $\sigma\in K$ et soit $(x, y)\in E\times[-1, +1]$, tels que $(f.\sigma).(x, y)\in T$; on note $X_{\sigma;\,y}.x$ et $Y_{\sigma;\,x}.y$ les projections sur E et $[-1, +1]$ respectivement du point $(f.\sigma).(x, y)$. Il existe un voisinage symétrique J de 0 dans $[-1, +1]$ tel que les applications

$$\begin{cases} K\times J \ni (\sigma, y) \to X_{\sigma;\,y}\in \operatorname{Hom}^r(E, E), \\ K\times E \ni (\sigma, x) \to Y_{\sigma;\,y}\in \operatorname{Hom}^r(J, [-1, +1]) \end{cases}$$

soient définies ; elles sont alors continues d'après I, (4.3.4), propriété 3, et BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. X, § 2, proposition 9.

Ceci posé, la démonstration se fait en deux temps :

1° *Cas particulier : il existe $\eta>0$, tel que $X_{\sigma;\,y}.x=x$ pour tout $y\in[-\eta, +\eta]$, tout $x\in E$ et tout $\sigma\in K$.* — Pour tout $(\sigma, x)\in K\times E$, on a

$$\frac{dY_{\sigma;\,y}}{dy}\cdot 0>0.$$

Il existe donc $\zeta>0$ et $\nu\in[0, 1]$ tels que, pour tout $(\sigma, x)\in K\times E$, on ait

$$(1)\qquad \frac{dY_{\sigma;\,x}}{dy}\cdot y\geqq \nu \qquad \text{pour tout } y\in[-2\zeta, 2\zeta]$$

et par conséquent

$$(2)\qquad (Y_{\sigma;\,x}.y-\nu y) \text{ est du signe de } y, \text{ pour } y\in[-\zeta, \zeta].$$

Soit φ un difféomorphisme symétrique de J, de classe C^∞, tel que

$$\varphi.y=\begin{cases} y & \text{pour}\quad |y|\leqq \nu\zeta/2, \\ \nu y & \quad\text{»}\quad\quad |y|\geqq\zeta \end{cases}$$

et que

$$(3)\qquad \frac{d^2\varphi}{dy^2}\quad \text{a un seul zéro dans }]\nu\zeta/2, \zeta[.$$

Soit $\overline{\omega}$ la fonction définie par

$$(4)\qquad \overline{\omega}.y = \begin{cases} 1 & \text{pour } |y| \leqq \nu\zeta/2 \\ \dfrac{\varphi.y - \nu y}{y - \nu y} & \text{»} \quad \nu\zeta/2 \leqq |y| \leqq \zeta, \\ 0 & \text{»} \quad \zeta \leqq |y|, \end{cases}$$

$\overline{\omega}$ est une fonction continue et paire, telle que

$$(5)\qquad \varphi.y = y(\overline{\omega}.y) + \nu y(1 - \overline{\omega}.y).$$

Notons $\dfrac{\varphi.y}{y} = \psi.y$; on a

$$\frac{d\overline{\omega}}{dy} = \frac{1}{1-\nu}\,\frac{d\psi}{dy}.$$

Or $\dfrac{d\psi}{dy}$ s'annule aux extrémités de l'intervalle $[\nu\zeta/2, \zeta]$ et d'après (3) garde un signe constant dans $]\nu\zeta/2, \zeta[$; donc nécessairement :

$$(6)\qquad \frac{d\overline{\omega}}{dy}\cdot y < 0 \qquad \text{pour} \quad y \in\,]\nu\zeta/2, \zeta[,$$

ce qui entraîne d'après (4) :

$$(7)\qquad \overline{\omega}.y > 0 \qquad \text{pour tout } y \in J.$$

Soit χ la fonction définie en I, (4.2), posons

$$Y'_{\sigma;\,t;\,x}.y = (\chi.t)\,(\overline{\omega}.y)y + (1 - (\chi.t)(\overline{\omega}.y))(Y_{\sigma;\,x}.y) \qquad \text{pour} \begin{cases} \sigma \in K, \\ t \in I, \\ x \in E, \\ y \in [-2\zeta, 2\zeta]. \end{cases}$$

Dérivons

$$\frac{dY'_{\sigma;\,t;\,x}}{dy}\cdot y = \quad (\chi.t)\left((\overline{\omega}.y) + y\left(\frac{d\overline{\omega}}{dy}\cdot y\right)\right)$$
$$- (\chi.t)\left(\frac{d\overline{\omega}}{dy}\cdot y\right)(Y_{\sigma;\,x}.y) + (1 - (\chi.t)(\overline{\omega}.y))\left(\frac{dY_{\sigma;\,x}}{dy}\cdot y\right).$$

Bornons-nous par exemple à l'intervalle $[\nu\zeta/2, \zeta]$; on a alors, d'après (2) et (6) d'une part, (1) et (7) d'autre part

$$\frac{dY'_{\sigma;\,t;\,x}}{dy}\cdot y \geqq (\chi.t)\left((\overline{\omega}.y) + y\left(\frac{d\overline{\omega}}{dy}\cdot y\right)\right) - (\chi.t)\left(\frac{d\overline{\omega}}{dy}\cdot y\right)\nu y$$
$$+ (1 - (\chi.t)(\overline{\omega}.y))\,\nu = (\chi.t)\left(\frac{d\varphi}{dy}\cdot y\right) + (1 - (\chi.t))\,\nu > 0.$$

Il en résulte que pour tout $(\sigma, t) \in K \times I$, on définit un élément $h_t.\sigma$ de H en posant, pour tout $x \in E$:

$$(h_t.\sigma).(x, y) = \begin{cases} (x, Y_{\sigma;\, t;\, x}.y) & \text{pour } |y| \leqq 2\zeta, \\ (f.\sigma).(x, y) & \text{pour } |y| \geqq \zeta \end{cases}$$

(étant entendu qu'en plus $h_t.\sigma$ coïncide avec $f.\sigma$ en dehors de $E \times J$).

L'application

$$K \times I \ni (\sigma, t) \to h_t.\sigma \in H$$

est visiblement r-différentiable, elle est donc continue (pour la topologie forte).

D'autre part, pour $|y| \leqq \nu\zeta/2$, $(h_1.\sigma).(x, y) = (x, y)$; donc *a fortiori* $h_1.\sigma \in L$.

Enfin, on a

$$\sup_{\sigma \in K,\, t \in J} d(f.\sigma, h_t.\sigma) \leqq \sup_{|y| \leqq \zeta,\, x \in E,\, \sigma \in K} |Y_{\sigma;\, x}.y|$$

qui peut être rendu arbitrairement petit, puisque ζ est arbitrairement petit.

2° *Le cas général se ramène au* 1°. — Pour tout $y \in J$, $X_{\sigma;\, y}$ est une application r-différentiable de E dans E qui est r-tangente le long de ∂E à l'application identique e de E; et l'application $K \ni \sigma \to X_{\sigma;\, y}$ dépend continûment de y au sens C^0. Comme l'application $\sigma \to X_{\sigma;\, 0}$ est l'application constante définie par e, il résulte du 1° de la proposition 2 de II [*cf.* II, (1.4.2)] que si $\eta > 0$ est assez petit, alors $X_{\sigma;\, y}$ est un r-difféomorphisme de E pour tout $\sigma \in K$ et tout $y \in [-\eta, \eta]$.

Soit $\overline{\omega}$ une fonction paire de classe C^∞, définie sur R, à valeurs dans $[0, 1]$, nulle sauf sur $]-\eta, +\eta[$, égale à 1 sur $[-\eta/2, \eta/2]$.

Soit χ la fonction déjà utilisée au 1°. Posons

$$((X_{\sigma;\, (\chi.t)(\overline{\omega}.y)\, y}.x), y) = g_{\sigma;\, t}.(x, y) \qquad \text{pour} \begin{cases} \sigma \in K, \\ t \in I, \\ x \in E, \\ y \in J. \end{cases}$$

Posons ensuite, pour tout $(\sigma, t) \in K \times I$:

$$h_t.\sigma = \begin{cases} (f.\sigma) \circ (g_{\sigma;\, t})^{-1} & \text{sur } E \times J, \\ f.\sigma & \text{sur } F - (E \times J). \end{cases}$$

Pour tout (σ, t), $h_t.\sigma$ est un élément de H qui vérifie la condition du 1°, ($\eta/2$ jouant ici le rôle du η du 1°); $h_t.\sigma$ dépend continûment de (σ, t) au sens C^r. Enfin, il suffit de prendre η assez petit pour que $h_t.\sigma$ soit [uniformément en (σ, t)] arbitrairement voisin de $f.\sigma$ au sens C^0.

BIBLIOGRAPHIE.

ALEXANDER (J. W.) :

[1] On the deformation of an *n* cell, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 9, 1923, p. 406-407.

BING (R. H.) :

[1] Locally tame sets are tame, *Annals of Math.*, Series 2, t. 59, 1954, p. 145-158.

[2] Approximating surfaces with polyhedral ones, *Annals of Math.*, Series 2, t. 65, 1957, p. 456-483.

BOURBAKI (Nicolas) :

[1] *Topologie générale*, Fascicule de résultats. — Paris, Hermann, 1953 (*Act. scient. et ind.*, 1196; *Éléments de Mathématique*, 16)

CAIRNS (Stewart S.) :

[1] Homeomorphisms between topological manifolds and analytic manifolds, *Ann. of Math.*, Series 2, t. 41, 1940, p. 796-808.

[2] Triangulated manifolds and differentiable manifolds, *Lectures in topology*, p. 143-157. — Ann. Arbor, University of Michigan, 1941.

CERF (Jean) :

[1] Groupes d'automorphismes et groupes de difféomorphismes des variétés compactes de dimension 3, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 319-329 (Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique, 89, 1958, Lille : Topologie algébrique et Géométrie différentielle).

[2] Quelques propriétés des applications différentiables (à paraître).

DOLD (A.) und THOM (R.) :

[1] Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte, *Annals of Math.*, Series 2, t. 67, 1958, p. 239-281.

EHRESMANN (Charles) :

[1] Les prolongements d'une variété différentiable, 1 : Calcul des jets, prolongement principal, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 233, 1951, p. 598-600.

[2] Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie, *Centre national de la Recherche scientifique : Géométrie différentielle*, p. 97-110. Paris, C. N. R. S., 1953 (Colloques internationaux du C. N. R. S., t. 52, 1953, Strasbourg).

EILENBERG (S) and STEENROD (Norman) :

[1] *Foundations of algebraic topology*. — Princeton, Princeton University Press, 1952 (*Princeton mathematical Series*, 15).

FELDBAU (J.) [sous le nom de Jacques LABOUREUR) :

[1] Propriétés topologiques du groupe des automorphismes de la sphère S^n, *Bull. Soc. math. France*, t. 71, 1943, p. 206-211.

GLAESER (Georges) :

[1] Étude de quelques algèbres tayloriennes, *J. Anal. math.*, *Jérusalem*, t. 6, 1958, p. 1-124.

GROTHENDIECK (Alexander) :

[1] Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku math. J.*, Series 2, t. 9, 1957, p. 119-221.

HAMSTROM (M. E.) and DYER (E.) :

[1] Regular mapping and the space of homeomorphisms on a 2-manifold, *Duke math. J.*, t. 25, 1958, p. 521-531.

HERMANN (Robert) :

[1] Une remarque sur les jets d'ordre infini, *Colloque de Topologie de Strasbourg*, 1954-1955, 2 pages.

KNESER (Hellmuth) :

[1] Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen, *Math. Z.*, t. 25, 1926, p. 362-372.

MILNOR (John) :

[1] On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Annals of Math.*, Series 2, t. 64, 1956, p. 399-405.

[2] *Differentiable manifolds which are homotopy spheres.* — Princeton, Princeton University Press, 1959 (multigraphié).

MOÏSE (Edwin L.) :

[1] Affine structure in 3-manifolds, V : The triangulation theorem and Hauptvermutung, *Annals of Math.*, Series 2, 1952, p. 96-114.

PALAIS (Richards) :

[1] Natural operation differential forms, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 92, 1959, p. 125-141

[2] Extending diffeomorphisms, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 11, 1960, p. 274-277.

DE RHAM (Georges) :

[1] *Variétés différentiables*, — Paris, Hermann, 1955 (*Act. scient. et ind.*, 1222, *Publ. Inst. math. Univ. Nancago*, 3).

SARD (Arthur) :

[1] The measure of the critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 48, 1942, p. 883-890.

SCHWARTZ (Laurent) :

[1] *Théorie des distributions*, t. 1. — Paris, Hermann, 1950 (*Act. scient. et ind.*, 1091; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 9).

[2] Les théorèmes de Whitney sur les fonctions différentiables, *Séminaire Bourbaki*, t 3, 1950-1951, nº 43, 9 pages.

[3] Division par une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe, *Summa Bras. Math.*, t. 3, 1955, p. 181-209.

SEIFERT (H.) und THRELFALL (W.) :

[1] *Lehrbuch der Topologie.* — Leipzig, B. G. Teubner, 1934.

SÉMINAIRE H. CARTAN :

[1] 2e édition : *Topologie algébrique*, t. 1, 1948-1949. — Paris, Secrétariat mathématique, 1955.

SMALE (S.) :

[1] The classification of immersions of spheres in euclidean spaces, *Annals of Math.*, Series 2, t. 69, 1959, p. 327-344,

STEENROD (Norman) :

[1] *The topology of fibre bundles.* — Princeton, Princeton University Press, 1951 (*Princeton mathematical Series*, 14).

THOM (René) :

[1] Quelques propriétés globales des variétés differentiables, *Comment. Math. Helvet.* t. 28. 1954, p. 17-86.

WHITNEY (H.) :

[1] Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 36, 1934, p. 63-89.

[2] On the extension of differentiable functions, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 50, 1944, p. 76-81.

[3] Differentiable manifolds, *Annals of Math.*, Series 2, t. 37, 1936, p. 645-680.

INDEX DES NOTATIONS.

INDEX TERMINOLOGIQUE.

(Manuscrit reçu le 31 mai 1960,
remanié le 3 décembre 1960.)

Jen Cerf,
M. Conf, Fac. Sc. Lille,
23 *bis*, rue Denfert-Rochereau,
Boulogne (Seine).