BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE EYMARD

Sur les applications qui laissent stable l'ensemble des fonctions presque-périodiques

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 207-222
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__207_0>

Bull. Soc. math. France,
89, 1961, p. 207 à 222.

SUR LES APPLICATIONS QUI LAISSENT STABLE L'ENSEMBLE DES FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES ;

PAR PIERRE EYMARD.

(Paris).

Considérons deux groupes G_1, G_2, et soient $A(G_1)$, $A(G_2)$ deux classes de fonctions numériques définies sur G_1 et G_2 respectivement. Le problème se pose de déterminer les applications φ de G_2 dans G_1 qui envoient $A(G_1)$ dans $A(G_2)$, c'est-à-dire telles que, pour toute $f \in A(G_1)$, on ait $f \circ \varphi \in A(G_2)$.

Dans le cas où G_2, G_1 sont abéliens localement compacts, avec pour classe $A(G_i)$ celle des fonctions sur G_i qui sont transformées de Fourier de fonctions sommables sur le groupe dual $\hat{G}_i (i = 1, 2)$, l'étude de cette question a été faite au cours de ces dernières années par A. BEURLING, H. HELSON, W. RUDIN et P. J. COHEN.

Le présent article est consacré à l'examen du problème obtenu en prenant pour classe $A(G_i)$ l'ensemble des *fonctions presque-périodiques* sur le groupe G_i (supposé discret) $(i = 1, 2)$. Pour obtenir des résultats précis, je suis amené à faire des hypothèses sur les groupes G_1 et G_2. Le groupe G_1 est supposé *abélien*, par ailleurs quelconque. En ce qui concerne G_2, une condition nécessaire (théorème 1) assez restrictive sur φ est énoncée sous la seule hypothèse que G_2 est dénombrable, et la caractérisation complète des applications φ est donnée dans les deux cas suivants :

a. G_2 *n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini* (théorème 2);

b. G_2 *admet un nombre fini de générateurs* (théorème 3).

Sous les hypothèses indiquées, je montre qu'il n'y a pas d'autres applications φ de G_2 dans G_1 transformant $A(G_1)$ en $A(G_2)$ que celles qui sont évidentes, fabriquées à partir d'un nombre fini d'homomorphismes et de translations, et que j'appelle « linéaires par morceaux ». L'outil essentiel de la démonstration est un lemme de finitude sur la circonférence (lemme 4). Ces résultats ont été annoncés dans [2].

En terminant cette introduction, je tiens à remercier M. J. DIXMIER, dont les remarques m'ont été précieuses pour la rédaction de ce travail.

I. Préliminaires.

1. Notations et rappel. — Soit G un groupe discret. On désigne par $\mathcal{C}(G)$ l'espace des fonctions définies sur G, à valeurs complexes, bornées, muni de la topologie de la convergence uniforme sur G. Si $a \in G$ et $f \in \mathcal{C}(G)$, on pose $f_a(x) = f(ax)$ pour tout $x \in G$. Soit $A(G)$ l'ensemble des fonctions *presque-périodiques* sur G, c'est-à-dire des $f \in \mathcal{C}(G)$ telles que l'ensemble des f_a, où a parcourt G, soit relativement compact dans $\mathcal{C}(G)$.

On désigne par T le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Si G est abélien, on note $\hat{G}$ le groupe compact dual de G; si $x \in G$, et $\hat{x} \in \hat{G}$, on note $\langle \hat{x}, x \rangle$ la valeur en x du caractère $\hat{x}$.

Suivant [6] (chap. VII), on associe à G un groupe compact $\overline{G}$ et un homomorphisme α de G sur un sous-groupe partout dense de $\overline{G}$, tels qu'une fonction f appartient à $A(G)$ si et seulement s'il existe une fonction continue $\overline{f}$ sur $\overline{G}$ vérifiant $f(x) = \overline{f}\,[\alpha(x)]$ pour tout $x \in G$. Le groupe $\overline{G}$ s'interprète comme spectre de l'algèbre de Banach $A(G)$ et $f \to \overline{f}$ comme la transformation de Gelfand sur cette algèbre. Si, plus particulièrement, G est abélien, $\overline{G}$ s'identifie au groupe de tous les caractères, continus ou non, sur $\hat{G}$, l'homomorphisme α, qui dans ce cas est injectif, associant à chaque $x \in G$ le caractère (continu) qu'il définit sur $\hat{G}$. (*cf.* aussi [3]).

2. Applications presque-périodiquement-régulières.

DÉFINITION 1. — *Soient G_1, G_2 deux groupes discrets et φ une application de G_2 dans G_1. On dit que φ est presque-périodiquement-régulière (pp-régulière) si, pour toute $f \in A(G_1)$, on a $f \circ \varphi \in A(G_2)$.* On pose

$$f \circ \varphi(x) = f[\varphi(x)].$$

Soient trois groupes G_1, G_2, G_3 et φ une application de G_3 dans G_2, ψ une application de G_2 dans G_1. Si φ et ψ sont pp-régulières, alors l'application composée $\psi \circ \varphi$ est pp-régulière de G_3 dans G_1.

Soient G un groupe et h un élément fixé de G. Les translations $x \to hx$ et $x \to xh$ sont des applications pp-régulières de G sur G.

Soient G_2 et G_1 deux groupes; tout homomorphisme σ de G_2 dans G_1 est une application pp-régulière : cela résulte de l'identité

$$(f \circ \sigma)_a = f_{\sigma a} \circ \sigma \qquad (a \in G_2;\, f \in A(G_1))$$

et de la continuité de l'application $f \to f \circ \sigma$ de $\mathcal{C}(G_1)$ dans $\mathcal{C}(G_2)$. En particulier, soit H un sous-groupe d'un groupe G: la restriction à H d'une $f \in A(G)$ est dans $A(H)$, et si φ est une application pp-régulière de G dans un groupe G_1, la restriction de φ à H est pp-régulière de H dans G_1.

PROPOSITION 1. — *Soient G_1 et G_2 deux groupes discrets, G_1 étant supposé abélien, et φ une application de G_2 dans G_1. Pour que φ soit pp-régulière de G_2 dans G_1, il faut et il suffit qu'elle soit pp-régulière en tant qu'application de G_2 dans G'_1, où G'_1 est le sous-groupe de G_1 engendré par $\varphi(G_2)$.*

DÉMONSTRATION.

a. Soit φ pp-régulière de G_2 dans G'_1, et $f \in A(G_1)$. La restriction de f à G'_1 est dans $A(G'_1)$, donc $f \circ \varphi \in A(G_2)$ et φ est pp-régulière de G_2 dans G_1.

b. Soit φ pp-régulière de G_2 dans G_1, et $\hat{x}'$ un caractère sur G'_1. Si $\hat{x}$ est un caractère sur G_1 prolongeant $\hat{x}'$, $\hat{x}' \circ \varphi = \hat{x} \circ \varphi \in A(G_2)$. Les $\hat{x}'$ formant un ensemble total dans $A(G'_1)$, φ est pp-régulière de G_2 dans G'_1.

REMARQUE. — Cet énoncé n'est pas valable sans hypothèse sur G_1 : par exemple, prendre pour G_1 un groupe n'ayant d'autres fonctions presque-périodiques que les constantes, pour G_2 un sous-groupe cyclique infini de G_1, et pour φ une application non pp-régulière de G_2 dans G_2.

PROPOSITION 2. — *Soient G_2, G_1 deux groupes discrets et φ une application de G_2 dans G_1; soient α_1 (resp. α_2) la représentation canonique de G_1 (resp. G_2) dans le groupe compact associé $\overline{G}_1$ (resp. $\overline{G}_2$); soient K un groupe compact et β un homomorphisme de G_2 dans K. Alors :*

1° *s'il existe une application continue ψ de K dans $\overline{G}_1$ telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi"] & \overline{G}_1 \\ G_2 \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\varphi"'] & G_1 \arrow[u, "\alpha_1"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif, φ est pp-régulière de G_2 dans G_1.

2° *si φ est pp-régulière de G_2 dans G_1, il existe une application continue $\overline{\varphi}$ et une seule de $\overline{G}_2$ dans $\overline{G}_1$, telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \overline{G_2} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \overline{G_1} \\ G_2 \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[r, "\varphi"'] & G_1 \arrow[u, "\alpha_1"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

DÉMONSTRATION.

1° Soit $f \in A(G_1)$ et $\overline{f}$ la fonction continue sur $\overline{G}_1$ telle que $f = \overline{f} \circ \alpha_1$. Pour tout $x \in G_2$, on a

$$f \circ \varphi(x) = \overline{f}[\alpha_1 \circ \varphi(x)] = \overline{f}[\psi \circ \beta(x)] = \overline{f} \circ \psi[\beta(x)].$$

L'homomorphisme β est une application pp-régulière de G_2 dans K. Étant continue sur K, $\overline{f} \circ \psi \in A(K)$. Donc $\overline{f} \circ \psi \circ \beta = f \circ \varphi \in A(G_2)$.

2° $f \to f \circ \varphi$ est un homomorphisme continu de l'algèbre de Banach $A(G_1)$ dans l'algèbre de Banach $A(G_2)$. Par transformation de Gelfand on obtient une application continue $\overline{\varphi}$ du spectre $\overline{G}_2$ de $A(G_2)$ dans le spectre $\overline{G}_1$ de $A(G_1)$ telle que, pour toute $f \in A(G_1)$, on ait $\overline{f \circ \varphi}(\bar{x}) = \overline{f} \circ \overline{\varphi}(\bar{x})$ pour tout $\bar{x} \in \overline{G}_2$. Alors, pour tout $y \in G_2$:

$$\overline{f}\,[\alpha_1 \circ \varphi(y)] = f \circ \varphi(y) = \overline{f \circ \varphi}\,[\alpha_2(y)] = \overline{f}\,[\overline{\varphi} \circ \alpha_2(y)]$$

Les $\overline{f}$ séparant $\overline{G}_1$, on a $\alpha_1 \circ \varphi = \overline{\varphi} \circ \alpha_2$. Enfin $\overline{\varphi}$ est unique, car $\alpha_2(G_2)$ est dense dans $\overline{G}_2$.

3. Applications linéaires par morceaux. — Dans toute la suite, si G est un groupe, on désignera par $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des sous-groupes distingués et d'indice fini dans G.

Proposition 3. — *Soit, sur un groupe G, f une fonction presque-périodique ne prenant qu'un nombre fini de valeurs distinctes. Alors il existe un sous-groupe $H \in \mathcal{F}(G)$ tel que f soit constante sur chaque classe de G modulo H.*

Démonstration.

1° Observons d'abord que, dans un groupe compact $\overline{G}$, tout ensemble U ouvert et fermé est réunion de classes modulo un certain sous-groupe $\overline{K} \in \mathcal{F}(\overline{G})$. En effet, si $x \in U$, $x^{-1}U$ est ouvert et fermé, et contient l'unité de $\overline{G}$; cet ensemble contient un sous-groupe ouvert ([4], p. 54), donc d'indice fini, et par conséquent $x^{-1}U$ contient même un $L_x \in \mathcal{F}(\overline{G})$; ainsi tout $x \in U$ appartient à une classe xL_x modulo L_x, classe elle-même contenue dans U; la famille des xL_x forme un recouvrement ouvert de U, dont on peut extraire un recouvrement fini : U est réunion des $x_iL_{x_i}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$; le sous-groupe $\overline{K} = \bigcap_{i=1}^{n} L_{x_i}$ répond à la question.

2° Prenons pour $\overline{G}$ le groupe compact associé à G, soit α l'homomorphisme canonique de G dans $\overline{G}$ et soit $\overline{f}$ la fonction continue sur $\overline{G}$ telle que $f(x) = \overline{f}\,[\alpha(x)]$ sur G. La fonction $\overline{f}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes sur $\alpha(G)$, donc sur $\overline{G}$, car $\alpha(G)$ est dense dans $\overline{G}$. Soient U_1, $U_2, \ldots, U_p$ les parties de $\overline{G}$ sur lesquelles sont prises les différentes valeurs de $\overline{f}$. Chaque U_j est ouvert et fermé dans $\overline{G}$, donc réunion de classes modulo un $\overline{K_j} \in \mathcal{F}(\overline{G})$. Posons $\overline{H} = \bigcap_{j=1}^{p} \overline{K}_j$; $\overline{f}$ est constante sur chaque classe de $\overline{G}$ modulo $\overline{H}$. Le sous-groupe $H = \alpha^{-1}(\overline{H})$ remplit la condition exigée.

Proposition 4. — *Soient G_2, G_1 deux groupes, G_1 étant supposé abélien, et $H \in \mathcal{F}(G_2)$. Pour une application φ de G_2 dans G_1, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(P_1) *pour tout $y \in H$, l'application $x \to \varphi(yx) - \varphi(x)$ de G_2 dans G_1 est constante sur chaque classe de G_2 modulo H;*

(P_2) *si l'on choisit des représentants $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des classes de G_2 modulo H, il existe pour chaque $i = 1, 2, \ldots, p$;*

a. un homomorphisme σ_i de H dans G_1;

b. un $h_i \in G_1$,

tels que : $x = yx_i$, $y \in H$ entraînent $\varphi(x) = h_i + \sigma_i(y)$.

Démonstration.

1° Supposons (P_1). Posons $h_i = \varphi(x_i)$ et $\sigma_i(y) = \varphi(yx_i) - \varphi(x_i)$. Il résulte immédiatement de (P_1) que σ_i est un homomorphisme sur H, donc (P_2).

2° Supposons (P_2). Soient $y \in H$ fixé et z variable dans H. Alors

$$\varphi(yzx_i) - \varphi(zx_i) = h_i + \sigma_i(yz) - [h_i + \sigma_i(z)] = \sigma_i(y)$$

ne dépend pas de z, donc (P_1).

Définition 2. — Soit φ une application d'un groupe G_2 dans un groupe *abélien* G_1 telle qu'il existe un $H \in \mathcal{F}(G_2)$ de sorte que φ remplisse les conditions équivalentes (P_1) et (P_2). On dit que φ *est linéaire par morceaux*, et que *H lui est associé.*

Alors tout $K \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que $K \subset H$ est associé à φ ; c'est évident d'après (P_1).

Lemme 1. — *Soient φ une application de G_2 dans G_1 et $L \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que la restriction de φ à toute classe de G_2 modulo L soit translatée à droite d'une application linéaire par morceaux de L dans G_1. Alors φ est linéaire par morceaux.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe des représentants $s_1, s_2, \ldots, s_m$ de G_2 modulo L et des applications linéaires par morceaux φ_i de L dans G_1 telles que, si $x = ys_i$ et $y \in L$, on ait $\varphi(x) = \varphi_i(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Soit $H \in \mathcal{F}(G_2)$ un sous-groupe associé à toutes les φ_i. Il est clair que φ et H satisfont à (P_1).

Lemme 2. — *Soient G_1, G_2 deux groupes discrets; on suppose $\mathcal{F}(G_2)$ dénombrable et G_1 abélien. Pour qu'une application φ de G_2 dans G_1 soit linéaire par morceaux, il faut et il suffit que, quel que soit $\hat{x} \in \hat{G}_1$, l'application $\hat{x} \circ \varphi$ de G_2 dans T soit linéaire par morceaux.*

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire d'après (P_1). La condition est suffisante : pour tout $L \in \mathcal{F}(G_2)$, définissons l'ensemble $E(L) \subset \hat{G}_1$ par :

$$\hat{x} \in E(L)$$

si et seulement si L est associé à l'application linéaire par morceaux $\hat{x} \circ \varphi$. Par hypothèse $\hat{G}_1$ est réunion des $E(L)$ quand L parcourt $\mathcal{F}(G_2)$. D'autre part, chaque $E(L)$ est *fermé* dans $\hat{G}_1$: en effet, d'après (P_1), $\hat{x} \in E(L)$ si et seulement si, pour tout y fixé $\in L$, l'application

$$x \to \langle \hat{x}, \varphi(yx) - \varphi(x) \rangle$$

de G_2 dans T est constante sur chaque classe modulo L; fixons une telle classe $x_i L$ et un $y \in L$; la fonction

$$F(\hat{x}, x) = \langle \hat{x}, \varphi(yx) - \varphi(x) \rangle$$

est continue en $\hat{x}$ sur $\hat{G}_1$ et constante, pour chaque $\hat{x}$ fixé $\in E(L)$, quand x parcourt $x_i L$: elle est donc constante, pour chaque $\hat{x}$ fixé $\in \overline{E(L)}$, quand x parcourt $x_i L$, ce qui prouve que $E(L)$ est fermé. Comme $\mathcal{F}(G_2)$ est dénombrable, il existe au moins un $H \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que $E(H)$ soit d'intérieur non vide ; alors $\hat{G}_1$ est recouvert par un nombre fini de translatés de $E(H)$: $\hat{G}_1 = \bigcup_{i=1}^{p} [\hat{x}_i + E(H)]$. Pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$, soit $H_{\hat{x}_i}$ un sous-groupe appartenant à $\mathcal{F}(G_2)$ et associé à $\hat{x}_i \circ \varphi$. Posons $K = H \cap H_{\hat{x}_i} \cap \ldots \cap H_{\hat{x}_p}$. On a $K \in \mathcal{F}(G_2)$.

Soient $y \in K$ et $\hat{x} \in \hat{G}_1$. On a $\hat{x} = \hat{x}_i + \hat{x}'$ pour un $i = 1, 2, \ldots, p$ au moins, et $\hat{x}' \in E(H)$. L'application

$$x \to \langle \hat{x}, \varphi(yx) - \varphi(x) \rangle = \langle \hat{x}_i, \varphi(yx) - \varphi(x) \rangle \langle \hat{x}', \varphi(yx) - \varphi(x) \rangle$$

de G_2 dans T est constante sur chaque classe de G_2 modulo K, car le premier facteur est constant sur chaque classe modulo $H_{\hat{x}_i}$, le second sur chaque classe modulo H. Ainsi K est associé à *toutes* les applications $\hat{x} \circ \varphi$. Les $\hat{x}$ séparant G_1, l'application $x \to \varphi(yx) - \varphi(x)$ de G_2 dans G_1 est constante sur chaque classe de G_2 modulo K : φ est linéaire par morceaux.

Lemme 3. — *Soient G_2 un groupe à génération finie et G_1 un groupe abélien. Pour qu'une application φ de G_2 dans G_1 soit linéaire par morceaux, il suffit qu'elle satisfasse à la condition* :

(P_3) *pour tout $y \in G_2$, il existe un $H_y \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que l'application $x \to \varphi(yx) - \varphi(x)$ soit constante sur chaque classe de G_2 modulo H_y.*

Démonstration. — Posons $\theta(y; x) = \varphi(yx) - \varphi(x)$. Quels que soient $x, y, z \in G_2$, on a

$$\theta(zy; x) = \theta(z; yx) + \theta(y; x).$$

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des générateurs de G_2, et $H = \bigcap_{i=1}^{n} H_{y_i}$. On a

$H \in \mathcal{F}(G_2)$. Soit $y = y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \ldots y_{\alpha_q}$, où $\alpha_j = 1, 2, \ldots,$ ou n, un élément de G_2. On a

$$\theta(y; x) = \theta(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2} \ldots y_{\alpha_q} x) + \theta(y_{\alpha_2}; y_{\alpha_3} \ldots y_{\alpha_q} x) + \ldots + \theta(y_{\alpha_q}; x).$$

Pour y fixé, chacun des θ intervenant au second membre est translaté par rapport à x d'un $\theta(y_i; x)$, donc constant sur chaque classe de G_2 modulo H_{y_i}, donc constant sur chaque classe de G_2 modulo H. Par suite, leur somme $\theta(y; x)$ est constante sur chaque classe de G_2 modulo H et φ est linéaire par morceaux.

PROPOSITION 5. — *Soient G_2 et G_1 deux groupes, G_1 étant supposé abélien. Toute application φ linéaire par morceaux de G_2 dans G_1 est pp-régulière.*

DÉMONSTRATION. — Adoptons les notations de (P_2) dans la proposition 4. Soit $f \in A(G_1)$. Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, p$, définissons sur G_2 la fonction

$$g_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin H x_i, \\ f[h_i + \sigma_i(y)] & \text{si} \quad x = y x_i, \quad \text{avec} \quad y \in H. \end{cases}$$

La fonction $y \to f[h_i + \sigma_i(y)]$ appartient à $A(H)$, d'où résulte, H étant un sous-groupe d'indice fini de G_2, que $g_i \in A(G_2)$. Or on a $f \circ \varphi(x) = \sum_{i=1}^{p} g_i(x)$, donc $f \circ \varphi \in A(G_2)$.

L'objet principal de ce travail est d'établir, sous certaines hypothèses sur G_2, une réciproque de la proposition 5. La difficulté se concentrera en un lemme de finitude que nous démontrons dans la section suivante.

II. Un lemme de finitude.

On désigne par T l'ensemble des nombres complexes de module 1.

LEMME 4. — *Soit $s = (n_1, n_2, \ldots, n_q, \ldots)$ une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que, si $\nu(n)$ désigne le nombre d'entiers $\leq n$ qui appartiennent à s, on ait $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, \nu(n)/n \neq 0$. Si $\varepsilon > 0$, soit $Z(\varepsilon)$ l'ensemble des $z \in T$ tels que, pour tout $n_q \in s$, on ait*

$$|1 - z^{n_q}| \leq \varepsilon.$$

Alors $Z(\varepsilon)$ est fini dès que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 > 0$ est un nombre indépendant de la suite s.

DÉMONSTRATION.

1° Munissons T de sa topologie usuelle d'espace compact. Remarquons d'abord que, pour démontrer le lemme, il suffit d'établir l'assertion suivante :

(α) *il existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *indépendant de* s *tel que le point* $z = 1$ *soit isolé dans* Z $(2\varepsilon_0)$.

En effet, supposons (α) vraie. Alors tout point de $Z(\varepsilon_0)$ est isolé dans $Z(\varepsilon_0)$: s'il en était autrement, il existerait un $z \in Z(\varepsilon_0)$ et une suite infinie de points $z_p = z \exp(i\theta_p) \in Z(\varepsilon_0)$ et tels que $\lim\limits_{p \to \infty} \theta_p = 0$; alors des inégalités

$$|1 - z^{n_q} \exp(in_q \theta_p)| \leqq \varepsilon_0 \qquad \text{et} \qquad |1 - z^{n_q}| \leqq \varepsilon_0$$
$$(n_q \in s;\ p \text{ entier} \geqq 1)$$

résulterait que, pour tout $n_q \in s$ et tout $p \geqq 1$,

$$|1 - \exp(in_q \theta_p)| \leqq 2\varepsilon_0;$$

les $\exp(i\theta_p)$ formeraient une suite infinie de nombres appartenant à $Z(2\varepsilon_0)$ et tendant vers 1, ce qui contredit (α).

Par conséquent, si (α) est vraie, $Z(\varepsilon_0)$ est un ensemble fermé dans T dont tous les points sont isolés, c'est-à-dire un ensemble *fini*. Pour $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$, il en est de même de $Z(\varepsilon) \subset Z(\varepsilon_0)$.

2° Nous démontrons (α) par l'absurde. Posons $\eta = 2 \operatorname{Arc} \sin \varepsilon_0$ et $\rho = \dfrac{2\pi}{\eta} - 2$. Si le point $z = 1$ n'est pas isolé dans $Z(2\varepsilon_0)$, il existe une suite infinie d'angles θ_p (p entier $\geqq 1$) telle que les $\exp(i\theta_p) \in Z(2\varepsilon_0)$ et telle que $\lim\limits_{p \to \infty} \theta_p = 0$. De plus il est loisible de supposer que $0 < \theta_p$ quel que soit p, et que la suite θ_p décroît assez rapidement pour les besoins de la démonstration : posons

$$k_p = \text{partie entière de } \eta/\theta_p;$$

On supposera qu'on a, pour tout $p \geqq 1$,

$$k_{p+1} > B\rho k_p, \tag{2}$$

où $B > 1$ est une constante dont on précisera le choix ultérieurement. Pour chaque entier $p \geqq 1$, appelons :

s_p, la suite de *tous* les entiers $q \geqq 1$ tels que $|1 - \exp(iq\theta_p)| \leqq 2\varepsilon_0$;

t_p, la suite d'entiers $s_1 \cap s_2 \cap \ldots \cap s_p$;

$\nu_p(n)$, le nombre d'entiers $\leqq n$ qui appartiennent à t_p.

En étudiant la structure des t_p, et par une estimation de $\nu_p(n)$, on va démontrer l'assertion suivante :

(β) *On peut choisir* ρ (*autrement dit* ε_0) *et* B *de sorte que, pour tout entier* $p \geqq 1$, *il existe un entier* N_p *et un nombre* λ_p *tels que*

$$\begin{cases} \nu_p(n)/n \leqq \lambda_p & \textit{dès que} \quad n > N_p; \\ \qquad \textit{et} & \lim\limits_{p \to \infty} \lambda_p = 0. \end{cases}$$

(β) entraîne (α). En effet soit s une suite remplissant la condition du lemme 4. Il est clair que, pour tout $p \geqq 1$, $s \subset t_p$, et donc $\nu(n) \leqq \nu_p(n)$. Alors de (β) résulte que $\lim\limits_{n \to \infty} \nu(n)/n = 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur s, d'où (α).

3° *Démonstration de l'assertion* (β) :

a. p étant fixé, la suite s_p est réunion de « sections » d'entiers consécutifs appartenant à s_p, ces « sections » étant séparées par des « lacunes » d'entiers consécutifs n'appartenant pas à s_p. Soit σ_p le nombre d'éléments d'une section; ce nombre est variable avec la section considérée, mais, excepté la première section (qui a k_p éléments), on a

$$2k_p \leqq \sigma_p \leqq 2k_p + 2. \tag{2}$$

Soit σ'_p le nombre d'éléments d'une lacune, nombre variable avec la lacune considérée; des inégalités

$$(2\pi - 2\eta)/\theta_p - 1 \leqq \sigma'_p \leqq (2\pi - 2\eta)/\theta_p + 1,$$

on tire

$$\rho k_p - 1 \leqq \sigma'_p \leqq \rho k_p + \rho + 1$$

et *a fortiori*,

$$(\rho - 1)\, k_p \leqq \sigma'_p \leqq (\rho + 1)\, k_p, \tag{3}$$

pourvu que $k_1 \geqq \rho + 1$, ce qu'il est loisible de supposer. Désormais $\rho > 1$.

b. Pour étudier la suite t_p, introduisons les notations suivantes : soient

$T_p(n)$ l'ensemble des entiers $\leqq n$ qui appartiennent à s_p et sont $> k_p$; $\tau_p(n)$ leur nombre;

$T_{p-1,\,p}(n)$ l'ensemble des entiers $\leqq n$ qui appartiennent à $s_p \cap s_{p-1}$ et sont $> k_p$; $\tau_{p-1,\,p}(n)$ leur nombre, etc.;

$T_{1,\,2,\,\ldots,\,p-1,\,p}(n)$ l'ensemble des entiers $\leqq n$ qui appartiennent à $s_p \cap s_{p-1} \cap \ldots \cap s_1 = t_p$ et sont $> k_p$; $\tau_{1,\,2,\ldots,\,p-1,\,p}(n)$ leur nombre.

Les inégalités (2) et (3) montrent que, dès que $n > k_p$, on a

$$\tau_p(n) \leqq \frac{2k_p + 2}{(\rho - 1)\, k_p}(n - k_p) \leqq \frac{3(n - k_p)}{\rho - 1}. \tag{4}$$

Pour tout entier $j = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$, l'ensemble $T_{p-j,\ldots,p}(n)$ est une suite d'entiers formée d'un certain nombre α_j de « sections pleines » de s_{p-j} et d'un certain nombre β_j de « morceaux de sections » de s_{p-j}, qui sont les ensembles d'entiers consécutifs appartenant à s_{p-j}, supérieur à k_p et ne figurant pas dans des « lacunes » de $s_p, s_{p-1}, \ldots, s_{p-j+1}$. On va établir des relations entre les α_j et les β_j en étudiant le passage de $j-1$ à j. Chaque « section pleine » ou « morceau de section » de s_{p-j+1} donne *au plus* 2 « morceaux de sections » de s_{p-j}, car le « morcellement » ne peut se produire qu'aux extrémités. D'autre part, chaque section pleine de s_{p-j+1}

donne *au moins* $E[2B\rho/(\rho+4)]-2$ sections pleines de s_{p-j}, comme il résulte des relations (1), (2), (3) [on pose $E(x)=$ partie entière de x] : en effet la section pleine de s_{p-j+1} a au moins $2k_{p-j+1}$ éléments; une section pleine et une lacune de s_{p-j} ont ensemble au plus $2k_{p-j}+2+(\rho+1)k_{p-j}\leqq(\rho+4)k_{p-j}$ éléments; après, « évidement » par les lacunes de s_{p-j}, il apparaît donc au moins $E[2k_{p-j+1}/(\rho+4)k_{p-j}]$ sections ou morceaux de section de s_{p-j}, d'où la minoration annoncée. On a donc les inégalités

$$\beta_j\leqq 2(\alpha_{j-1}+\beta_{j-1}); \qquad \alpha_j\geqq E\left(2B\frac{\rho}{\rho+4}-2\right)\alpha_{j-1},$$

d'où

$$\frac{\beta_j}{\alpha_j}\leqq\frac{2}{E\left(2B\frac{\rho}{\rho+4}-2\right)}\left(1+\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}\right). \tag{5}$$

Soit enfin, conformément aux notations précédentes, σ_{p-j+1} le nombre d'éléments d'une section pleine de s_{p-j+1}. Majorons le nombre σ des éléments de cette section qui appartiennent à s_{p-j}. D'après (2) et (3), on a

$$\begin{aligned}\sigma&\leqq 2k_{p-j}+2+\frac{2k_{p-j}+2}{(\rho-1)k_{p-j}}\sigma_{p-j+1}\\&\leqq 3k_{p-j}+\frac{3}{\rho-1}\sigma_{p-j+1}\leqq\frac{3}{B\rho}k_{p-j+1}+\frac{3}{\rho-1}\sigma_{p-j+1},\end{aligned}$$

et donc

$$\sigma\leqq 3\left(\frac{1}{B\rho}+\frac{1}{\rho+1}\right)\sigma_{p-j+1}. \tag{6}$$

c. Choisissons ε_0 assez petit (i.e. ρ assez grand) pour que de (6) vienne

$$\sigma\leqq\frac{\sigma_{p-j+1}}{5}. \tag{7}$$

Choisissons la suite θ_p assez rapidement décroissante (i.e. B assez grand) pour que de (5) vienne, par récurrence sur j,

$$\beta_j/\alpha_j\leqq 1/4. \tag{8}$$

Alors, d'après (2) et (7), on a, pour tout $j=0, 1, \ldots, p-2$,

$$\left\{\begin{aligned}&\tau_{p-j,\ldots,p}(n)\geqq 2k_{p-j}\alpha_j,\\&\tau_{p-j-1,\ldots,p}(n)\leqq\frac{2k_{p-j}+2}{5}\alpha_j+(2k_{p-j}+1)\beta_j\end{aligned}\right.$$

et donc, d'après (8),

$$\frac{\tau_{p-j-1,\ldots,p}(n)}{\tau_{p-j,\ldots,p}(n)}\leqq\frac{2k_{p-j}+2}{10k_{p-j}}+\frac{2k_{p-j}+1}{2k_{p-j}}\,\frac{\beta_j}{\alpha_j}\leqq C<1,$$

où C est une constante. Multipliant membre à membre ces inégalités relatives aux divers $j = 0, 1, 2, \ldots, p-2$, on aboutit, en utilisant (4), à

$$\tau_{1,2,\ldots,p}(n) \leqq \tau_p(n)\, C^{p-1} \leqq \frac{3\,C^{p-1}}{\rho - 1}(n - k_p),$$

d'où

$$\nu_p(n) \leqq k_p + \tau_{1,2,\ldots,p}(n) \leqq \left(1 - \frac{3\,C^{p-1}}{\rho - 1}\right) k_p + \frac{3\,C^{p-1}}{\rho - 1} n.$$

On voit par conséquent que, dès que $n \geqq N_p = 2^p k_p$,

$$\nu_p(n)/n \leqq \frac{1}{2^p}\left(1 - \frac{3\,C^{p-1}}{\rho - 1}\right) + \frac{3\,C^{p-1}}{\rho - 1} = \lambda_p, \qquad \text{avec} \quad \lim_{p \to \infty} \lambda_p = 0,$$

ce qui achève la démonstration de (β) et du lemme 4.

III. Caractérisation des applications p.p.-régulières.

1. Un lemme d'équirépartition. — Désignons par G un groupe discret tel qu'il existe un isomorphisme $x \to \hat{a}(x)$ de G sur un sous-groupe de T. Alors $\hat{a}$ est un *générateur topologique* du groupe compact dual $\hat{G}$, i.e. l'ensemble des $p\hat{a}$, où $p \in Z$, est partout dense dans $\hat{G}$. Réciproquement, l'existence d'un générateur topologique de $\hat{G}$ implique que G est isomorphe à un sous-groupe de T. Désignons par μ la mesure de Haar sur $\hat{G}$ telle que $\mu(\hat{G}) = 1$. Avec ces notations on a le lemme suivant :

Lemme 5. — *Soient E un ensemble fermé dans $\hat{G}$ et $\mathring{E}$ son intérieur. Si $\nu(n)$ désigne le nombre d'entiers p tels que $1 \leqq p \leqq n$ et tels que $p\hat{a} \in E$, on a*

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \nu(n)/n \geqq \mu(\mathring{E}).$$

Démonstration. — Dans [1], B. Eckmann démontre que la suite $p\hat{a}$ est *équirépartie* dans $\hat{G}$, c'est-à-dire qu'on a

$$(9) \qquad \int_{\hat{G}} f(\hat{x})\, d\mu(\hat{x}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} f(p\hat{a})$$

pour toute fonction f continue sur $\hat{G}$.

Soit $\hat{x} \to F(\hat{x})$ la fonction qui vaut 1 si $\hat{x} \in \mathring{E}$, 0 si $\hat{x} \notin \mathring{E}$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe une fonction f continue sur $\hat{G}$ telle que $0 \leqq f \leqq F$ et

$$(10) \qquad \int_{\hat{G}} f(\hat{x})\, d\mu(\hat{x}) \geqq \mu(\mathring{E}) - \varepsilon.$$

Or, pour tout n entier $\geqq 1$,

$$(11) \qquad \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f(p\hat{a}) \leqq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} F(p\hat{a}) \leqq \nu(n)/n.$$

De (9), (10), (11) vient que

$$\mu(\mathring{E}) - \varepsilon \leqq \varliminf_{n\to\infty} \nu(n)/n,$$

ce qui, ε étant arbitraire, établit le lemme.

2. Une condition nécessaire de pp-régularité.

Théorème 1. — *Soient G_2 un groupe discret dénombrable et G_1 un groupe discret isomorphe à un sous-groupe de T* (¹). *Si φ est une application pp-régulière de G_2 dans G_1, il existe un sous-groupe $L \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que :*

(P_4) *pour tout couple y, y' d'éléments de G_2 équivalents modulo L, il existe un sous-groupe $H_{y,y'} \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que l'application de G_2 dans G_1 : $x \to \varphi(yx) - \varphi(y'x)$ soit constante sur chaque classe de G_2 modulo $H_{y,y'}$.*

Démonstration. — Soit $\hat{x} \in \hat{G}_1$; c'est une fonction presque-périodique sur G_1; φ étant pp-régulière, la fonction $x \to \langle \hat{x}, \varphi(x) \rangle$ est donc presque-périodique sur G_2. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$, ε_0 étant la constante du lemme 4. Puisque $\hat{x} \circ \varphi \in A(G_2)$, il existe un nombre fini d'éléments de G_2, soient $h_1, h_2, \ldots, h_m$ tels que, pour tout $y \in G_2$,

$$\min_{i=1,\ldots,m} \sup_{x\in G_2} |\langle \hat{x}, \varphi(yx)\rangle - \langle \hat{x}, \varphi(h_i x)\rangle| \leqq \varepsilon.$$

Pour tout système fini $k_1, k_2, \ldots, k_n$ d'éléments de G_2, désignons par $E(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ l'ensemble des $\hat{x} \in \hat{G}_1$, tels que, pour tout $y \in G_2$,

$$\min_{j=1,\ldots,n} \sup_{x\in G_2} |\langle \hat{x}, \varphi(yx)\rangle - \langle \hat{x}, \varphi(k_j x)\rangle| \leqq \varepsilon.$$

Ce qui précède montre que $\hat{G}_1$ est réunion des $E(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ pour tous les systèmes finis possibles. Or l'ensemble de ces systèmes est dénombrable, car G_2 est dénombrable; de plus chacun des $E(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ est fermé dans $\hat{G}_1$; par conséquent l'un d'entre eux au moins, soit $E = E(s_1, s_2, \ldots, s_p)$, est d'intérieur non vide.

Pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$, soit F_i la partie de G_2 définie par : $y \in F_i$ si et seulement si l'ensemble fermé $E_i(y)$ des $\hat{x} \in E$ qui vérifient

$$\sup_{x\in G_2} |\langle \hat{x}, \varphi(yx)\rangle - \langle \hat{x}, \varphi(s_i x)\rangle| \leqq \varepsilon$$

(¹) Les groupes G_1 remplissant cette hypothèse ont été étudiés par Eckmann dans [1], et aussi par Halmos et Samelson, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 28, 1948, p. 254. Exemple : tout groupe abélien dénombrable sans torsion.

est d'intérieur non vide. Puisque, pour tout $y \in G_2$, $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i(y)$, G_2 est réunion des ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_p$.

Quels que soient $x, y \in G_2$ et $i = 1, 2, \ldots, p$, posons

$$\theta_{i,y}(x) = \varphi(yx) - \varphi(s_i x)$$

et montrons que, *pour i et $y \in F_i$ fixés, l'ensemble $\theta_{i,y}(G_2)$ est fini.* Soit $\hat{a}$ un générateur topologique de $\hat{G}_1$. L'application $x \to \langle \hat{a}, x \rangle$ étant injective de G_1 dans T, il faut voir que l'ensemble $Z' \subset T$ formé des nombres $\langle \hat{a}, \theta_{i,y}(x) \rangle$ est fini quand x parcourt G_2. Soit $s = (n_1, n_2, \ldots, n_q, \ldots)$ la suite strictement croissante des entiers $n_q \geq 1$ tels que $n_q \hat{a} \in E_i(y)$. Comme $E_i(y)$ est d'intérieur non vide, avec les notations des lemmes 4 et 5, s vérifie

$$\varliminf_{n \to \infty} \nu(n)/n > 0,$$

d'après le lemme 5. Or, en vertu des définitions de s et de $E_i(y)$, on a, pour tout $n_q \in s$ et tout $z \in Z'$,

$$|1 - z^{n_q}| \leq \varepsilon$$

et donc Z', contenu dans $Z(\varepsilon_0)$, est fini, d'après le lemme 4.

Dans G_2 définissons la relation : $y \sim y'$ si et seulement si G_2 a une image finie dans G_1 par l'application $x \to \varphi(yx) - \varphi(y'x)$. Il est clair que $\sim$ est une relation d'équivalence compatible avec la multiplication à droite par les éléments de G_2; les classes d'équivalence sont les classes à droite de G_2 modulo le sous-groupe L' des $y \sim e$. Or, nous avons montré qu'il existe des $s_1, s_2, \ldots, s_p \in G_2$, en nombre fini, tels que, à tout $y \in G_2$ corresponde au moins l'un des s_i de sorte que l'application de G_2 dans G_1 :

$$x \to \theta_{i,y}(x) = \varphi(yx) - \varphi(s_i x)$$

ne prenne qu'un nombre fini de valeurs distinctes. C'est dire que $\sim$ admet un système fini de représentants, et donc que L' est d'indice fini.

Soit alors $L \subset L'$ un sous-groupe distingué et d'indice fini dans G_2. Si $y \sim y' \pmod{L}$, la fonction

$$x \to \langle \hat{a}, \varphi(yx) - \varphi(y'x) \rangle$$

est presque-périodique sur G_2 et ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes. D'après la proposition 3, il existe un sous-groupe $H_{y,y'} \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que cette fonction soit constante sur chaque classe de G_2 modulo $H_{y,y'}$; $\hat{a}$ étant injectif, il en est de même de l'application $x \to \varphi(yx) - \varphi(y'x)$ de G_2 dans G_1, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

3. Cas où G_2 n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini.

THÉORÈME 2. — *Soit G_2 un groupe dénombrable n'admettant pas de sous-groupe d'indice fini différent de G_2, et soit G_1 un groupe abélien quelconque. Pour qu'une application φ de G_2 dans G_1 soit pp-régulière, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme*

$$\varphi(x) = h + \sigma(x),$$

où σ est un homomorphisme de G_2 dans G_1, et h un élément fixe de G_2.

DÉMONSTRATION. — La condition est suffisante : nous l'avons remarqué en I (§ 2). Montrons qu'elle est nécessaire. Soit φ une application pp-régulière de G_2 dans G_1 ; pour tout $x \in G_2$, posons

$$\sigma(x) = \varphi(x) - \varphi(e).$$

Si $\hat{x} \in \hat{G}_1$, $\hat{x} \circ \sigma$ est une application pp-régulière de G_2 dans T, à laquelle nous appliquons le théorème 1. Les sous-groupes L et $H_{y,y'}$ coïncidant avec G_2, pour chaque y fixé appartenant à G_2, l'application

$$x \to \langle \hat{x}, \sigma(yx) - \sigma(x) \rangle$$

est *constante* sur G_2 et vaut $\langle \hat{x}, \sigma(y) \rangle$, valeur obtenue pour $x = e$. Quels que soient x, $y \in G_2$, on a donc

$$\langle \hat{x}, \sigma(yx) - \sigma(x) - \sigma(y) \rangle = 1,$$

ce qui entraîne que σ est un homomorphisme, car les $\hat{x}$ séparent G_1.

REMARQUE. — L'hypothèse $\mathcal{F}(G_2) = \{ G_2 \}$ équivaut à la suivante : $\overline{G}_2$ est connexe. En effet, par transformation de Gelfand, l'algèbre de Banach $A(G_2)$ est isomorphe à l'algèbre de toutes les fonctions continues sur $\overline{G}_2$. Supposons $\overline{G}_2$ non connexe; alors il existe sur $\overline{G}_2$ une fonction continue non constante ne prenant que les valeurs 0 et 1 ; il existe donc dans $A(G_2)$ un idempotent non trivial, ce qui, d'après la proposition 3, implique l'existence dans G_2 d'un sous-groupe distingué d'indice fini distinct de G_2. Réciproquement, si H est un tel sous-groupe, la fonction caractéristique de H est un idempotent non trivial de $A(G_2)$, ce qui entraîne que le spectre $\overline{G}_2$ de $A(G_2)$ n'est pas connexe.

COROLLAIRE. — *Soient K un groupe compact, G_2 un sous-groupe dénombrable de K tel que $\mathcal{F}(G_2) = \{ G_2 \}$ et G_1 un groupe abélien. Soit φ une application de G_2 dans G_1 telle que $\varphi(e) = 0$. Alors, si φ se prolonge en une application continue de K dans $\overline{G}_1$, φ est un homomorphisme.*

Cela résulte immédiatement de la proposition 2 et du théorème 2.

En particulier, si G est un groupe abélien dénombrable tel que $\overline{G}$ soit connexe, toute application continue de $\overline{G}$ conservant G et l'élément neutre induit sur G un homomorphisme.

4. Cas où G_2 est à génération finie.

THÉORÈME 3. — *Soit G_2 un groupe à génération finie, et soit G_1 un groupe abélien. Pour qu'une application φ de G_2 dans G_1 soit pp-régulière, il faut et il suffit qu'elle soit linéaire par morceaux* (²).

DÉMONSTRATION. — D'après la proposition 5, la condition est suffisante; montrons qu'elle est nécessaire. Soit φ une application pp-régulière de G_2 dans G_1. Remarquons que, G_2 étant à génération finie, $\mathcal{F}(G_2)$ est dénombrable : en effet tout sous-groupe appartenant à $\mathcal{F}(G_2)$ est lui-même à génération finie (³); il n'y a donc pas plus de tels sous-groupes que de systèmes finis d'éléments de G_2; or G_2 est dénombrable. Par suite du lemme 2, on peut, pour la démonstration, se placer dans le cas où $G_1 \subset T$.

Alors on applique le théorème 1. Soient L et $H_{y,y'}$ les sous-groupes appartenant à $\mathcal{F}(G_2)$ introduits dans l'énoncé de ce théorème, et soient $s_1, s_2, \ldots, s_m$ des représentants de G_2 modulo L. Pour chaque $i = 1, \ldots, m$, considérons l'application φ_i de L dans G_1 définie par

$$\varphi_i(x) = \varphi(s_i x) \qquad (x \in L).$$

D'après le théorème 1, pour tout $y \in L$ fixé, l'application

$$x \to \varphi(s_i y x) - \varphi(s_i x) = \varphi_i(yx) - \varphi_i(x)$$

de L dans G_1 est constante sur chaque classe de L modulo $H_y = L \cap H_{s_i y, s_i}$. Ainsi φ_i satisfait à la condition (P_3) du lemme 3; L étant à génération finie, il résulte de ce lemme que, pour tout i, φ_i est une application linéaire par morceaux de L dans G_1. Enfin le lemme 1 montre que φ est une application linéaire par morceaux.

COROLLAIRE. — *Soient K un groupe compact, G_2 un sous-groupe à génération finie de K et G_1 un groupe abélien. Soit φ une application de G_2 dans G_1. Si φ se prolonge en une application continue de K dans $\overline{G}_1$, φ est une application linéaire par morceaux.*

Cela résulte immédiatement de la proposition 2 et du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ECKMANN (Beno). — Ueber monothetische Gruppen, *Comment. Math. Helvet.*, t. 16, 1943-1944, p. 249-263.

[2] EYMARD (Pierre). — Applications laissant stable l'ensemble des fonctions presque-périodiques sur certains groupes discrets, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 249, 1959, p. 2459-2461.

(²) Pour le cas $G_2 = G_1 = Z$, *cf.* W. RUDIN [5], p. 47-48.

(³) Se reporter à KUROSH, *The theory of groups*, Tome 2. — New York, Chelsea, publishing Company, 1956, p. 36.

[3] Loomis (Lynn H.). — *An introduction to abstract harmonic analysis.* — Princeton, Toronto, London, Van Nostrand, 1953.

[4] Montgomery (D.) and Zippin (L.). — *Topological transformation groups.* — New York, Interscience Publishers, 1955 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 1).

[5] Rudin (Walter). — The automorphisms and the endomorphisms of the group algebra of the unit circle, *Acta Math.*, t. 95, 1956, p. 39-55.

[6] Weil (André). — *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* — Paris, Hermann, 1940 (Act. scient. et ind., 869).

(Manuscrit reçu le 25 février 1961.)

Pierre Eymard,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-Curie,
Paris, 5e.