BULLETIN DE LA S. M. F.

ALAIN GUICHARDET

Une caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 77-101
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__77_0>

Bull. Soc. math. France,
89, 1961, p. 77 à 101.

UNE CARACTÉRISATION DES ALGÈBRES DE VON NEUMANN DISCRÈTES ;

PAR

ALAIN GUICHARDET.

(Paris).

Le but de ce travail est de démontrer le théorème 1 du paragraphe 7, qui a déjà fait l'objet d'une Note [4]; pour y parvenir, il nous faudra préciser certaines notions relatives aux espaces topologiques mesurés (§§ 1, 2, 3), aux intégrales hilbertiennes (§§ 4, 5) et aux algèbres de von Neumann (§ 6). La proposition 1 du paragraphe 1 est évidemment à rapprocher d'un théorème de J. VON NEUMANN [7], et sa démonstration suit de très près celle de [2. app. IV]. On trouvera des résultats voisins de ceux des paragraphes 5 et 6 respectivement dans [5] et [3].

Les notations utilisées sont celles de [2]; rappelons que si Z est un espace topologique localement compact, $L_\infty(Z)$ désigne l'ensemble des fonctions numériques sur Z continues et tendant vers zéro à l'infini.

1. Homomorphismes d'espaces $L^\infty(Z, \nu)$.

LEMME 1. — *Soient Z (resp. Z_1) un espace topologique compact, ν (resp. ν_1) une mesure positive sur Z (resp. Z_1) de support Z (resp. Z_1), Φ un homomorphisme injectif d'algèbres normées de $L^\infty(Z, \nu)$ dans $L^\infty(Z_1, \nu_1)$ tel que :*

a. pour toute famille bornée $(f_\iota)_{\iota\in I}$ d'éléments de $L^\infty(Z, \nu)$

$$\Phi(\sup f_\iota) = \sup \Phi(f_\iota) \quad (^1).$$

b.

$$\Phi(L_\infty(Z)) \subset L_\infty(Z_1).$$

Il existe une application continue φ de Z_1 sur Z telle que $\varphi(\nu_1)$ soit équivalente à ν et que $(\Phi(f))(\zeta_1) = f(\varphi(\zeta_1))$ pour $\zeta_1 \in Z_1 - X$, $f \in L^\infty(Z, \nu)$, X étant ν_1-négligeable.

(1) Rappelons que $L^\infty(Z, \nu)$ est complètement réticulé [1], chap. 5, § 5, p. 56.

On sait qu'il existe une application continue φ de Z_1 sur Z telle que $(\Phi(f))(\zeta_1) = f(\varphi(\zeta_1))$ pour $\zeta_1 \in Z_1$ et $f \in L_\infty(Z)$. Soit $g \in L^\infty(Z, \nu)$, g positive, bornée et semi-continue inférieurement; on a $g = \sup f$, f parcourant l'ensemble des fonctions continues sur Z majorées par g, la borne supérieure pouvant être prise au sens ponctuel ou au sens de $L^\infty(Z, \nu)$ (*cf.* [1], chap. 5, § 5, lemme 1) et par suite,

$$\Phi(g) = \sup \Phi(f) \qquad \text{au sens de} \quad L^\infty(Z_1, \nu_1)$$

et

$$g \circ \varphi = \sup f \circ \varphi \qquad \text{au sens ponctuel,}$$

d'où

$$\Phi(g) = g \circ \varphi.$$

Soit enfin $h \in L^\infty(Z, \nu) . h \geqq 0$; on a $h = \inf g$, g parcourant l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement bornées et majorant h, la borne inférieure pouvant encore être prise aux deux sens indiqués ci-dessus et par suite,

$$\Phi(h) = \inf \Phi(g) \qquad \text{au sens de} \quad L^\infty(Z_1, \nu_1)$$

et

$$h \circ \varphi = \inf g \circ \varphi \qquad \text{au sens ponctuel,}$$

d'où

$\Phi(h) = h \circ \varphi$, et la deuxième assertion du lemme.

Posons

$$\tilde{\nu} = \varphi(\nu_1),$$

on a

$$\tilde{\nu}(f) = \nu_1(f \circ \varphi) = \nu_1(\Phi(f)) \qquad \text{pour} \quad f \in L^\infty(Z, \nu)$$

donc

$$\tilde{\nu}(f) = 0 \Leftrightarrow \nu(f) = 0$$

et $\varphi(\nu_1)$ est équivalente à ν.

LEMME 2. — *Soient Z (resp. Z_1) un espace topologique compact à base dénombrable, ν (resp. ν_1) une mesure positive sur Z (resp. Z_1), Φ un homomorphisme injectif de $L^\infty(Z, \nu)$ dans $L^\infty(Z_1, \nu_1)$. Il existe des espaces compacts Z' et Z'_1, des mesures positives ν' et ν'_1 sur Z' et Z'_1 de supports Z' et Z'_1, des ensembles $N' \subset Z'$ et $N'_1 \subset Z'_1$, ν'- et ν'_1-négligeables, des applications bijectives continues θ et θ_1 de $Z' - N'$ sur Z et de $Z'_1 - N'_1$ sur Z_1 transformant ν' en ν et ν'_1 en ν_1 et telles que, en appelant Θ et Θ_1 les isomorphismes correspondant de $L^\infty(Z', \nu')$ sur $L^\infty(Z, \nu)$ et de $L^\infty(Z'_1, \nu'_1)$ sur $L^\infty(Z_1, \nu_1)$, l'homomorphisme injectif $\bar{\Phi} = \Theta_1^{-1} \circ \Phi \circ \Theta$ envoie $L_\infty(Z')$ dans $L_\infty(Z'_1)$.*

DÉMONSTRATION. — *Voir* [2], app. IV.

PROPOSITION 1. — *Soient Z (resp. Z_1) un espace topologique localement compact à base dénombrable, ν (resp. ν_1) une mesure positive bornée* *sur* Z (*resp.* Z_1), Φ *un homomorphisme injectif de* $L^\infty(Z, \nu)$ *dans* $L^\infty(Z_1, \nu_1)$ *tel que pour toute famille bornée* $(f_\iota)_{\iota \in I}$ *d'éléments de* $L^\infty(Z, \nu)$, *on ait* $\Phi(\sup f_\iota) = \sup \Phi(f_\iota)$. *Il existe des ensembles* $N \subset Z$ *et* $N_1 \subset Z_1$ *respectivement* ν- *et* ν_1-*négligeables et une application* φ, ν_1-*mesurable, de* $Z_1 - N_1$ *sur* $Z - N$ *telle que* $\varphi(\nu_1)$ *soit équivalente à* ν *et que pour toute* $f \in L^\infty(Z, \nu)$ *on ait* $(\Phi(f))(\zeta_1) = f(\varphi(\zeta_1))$ *pour presque tout* $\zeta_1 \in Z_1 - N_1$.

Tout d'abord, on peut supposer Z et Z_1 compacts et égaux aux supports de ν et ν_1 (*cf.* [2], app. IV). Alors le lemme 2 fournit les diagrammes suivants :

$$L^\infty(Z', \nu') \overset{\Theta}{\rightleftarrows} L^\infty(Z, \nu) \overset{\Phi}{\rightarrow} L^\infty(Z_1, \nu_1) \overset{\Theta_1}{\leftrightarrows} L^\infty(Z'_1, \nu'_1),$$
$$L_\infty(Z') \rightleftarrows A \rightarrow A_1 \leftrightarrows L_\infty(Z'_1),$$

où $A = \Theta(L_\infty(Z'))$, $A_1 = \Theta_1(L_\infty(Z'_1))$.

Si $\overline{\Phi} = \Theta_1^{-1} \circ \Phi \circ \Theta$, il existe d'après le lemme 1 une application continue $\overline{\varphi}$ de Z'_1 sur Z' telle que $\overline{\varphi}(\nu'_1)$ soit équivalente à ν' et que $\overline{\Phi}(f') = f' \circ \overline{\varphi}$ pour $f' \in L^\infty(Z', \nu')$. Alors $M' = Z' - \overline{\varphi}(Z'_1 - N'_1)$ est ν'-négligeable et $M'_1 = N'_1 \cup \overline{\varphi}^{-1}(M' \cup N')$ est ν'_1-négligeable.

Définissons $N \subset Z$ et $N_1 \subset Z_1$ respectivement ν- et ν_1-négligeables par le diagramme suivant :

$$Z_1 - N_1 \overset{\theta_1^{-1}}{\rightleftarrows} Z'_1 - M'_1 \overset{\overline{\varphi}}{\rightarrow} Z' - M' \cup N' \overset{\theta}{\rightleftarrows} Z - N$$

N, N_1 et $\varphi = \theta \circ \overline{\varphi} \circ \theta_1^{-1}$ vérifient la deuxième condition de l'énoncé; enfin si $\tilde{\nu}' = \overline{\varphi}(\nu'_1)$ et $\tilde{\nu} = \theta(\tilde{\nu}')$, $\tilde{\nu}$ est équivalente à ν et $\tilde{\nu} = \varphi(\nu_1)$.

2. Relation d'équivalence entre permutations d'un espace mesuré.

Définition. — Soient Z un espace localement compact, ν une mesure positive sur Z; deux permutations s et t de Z seront dites ν-équivalentes, et nous écrirons $s \underset{\nu}{\sim} t$ (ou simplement $s \sim t$) s'il existe un ensemble $A \subset Z$ de complémentaire localement négligeable tel que $s(A) = t(A) = A$ et $s \mid A = t \mid A$ ($s \mid A$ désigne la restriction de s à A).

On vérifie immédiatement que la relation ainsi définie est une relation d'équivalence et que la relation d'équivalence induite sur le groupe Γ des permutations laissant ν quasi-invariante est compatible avec la loi de groupe.

Appelons $\hat{\Gamma}$ le quotient de Γ par cette relation d'équivalence et G le groupe des antomorphismes (pour la structure d'algèbre normée) de $L^\infty(Z, \nu)$. Tout élément $s \in \Gamma$ définit un élément $S \in G$ de la façon suivante :

$$(S(f)(\zeta) = f(s^{-1}\zeta) \qquad \text{pour} \quad \zeta \in Z, f \in L^\infty(Z, \nu)$$

S ne dépend que de la classe $\hat{s}$ de s dans $\hat{\Gamma}$ et l'application $\hat{s} \rightarrow S$ ainsi définie est un homomorphisme α de $\hat{\Gamma}$ dans G.

Proposition 1. — *Si Z est à base dénombrable, α est un isomorphisme de $\hat{\Gamma}$ sur G.*

Montrons que α est surjectif; soit $S \in G$; d'après [2], app. IV, il existe deux parties A et B de Z de complémentaires négligeables et une bijection s_0 de A sur B laissant ν quasi invariante et telle que pour $f \in L^\infty(Z, \nu)$

$$(S(f))(\zeta) = f(s_0^{-1}\zeta) \qquad \text{pour presque tout} \quad \zeta \in B.$$

L'ensemble $C = \cap s_0^n(A)$ $(-\infty < n < +\infty)$ est de complémentaire négligeable; soit s la permutation de Z obtenue en prolongeant $s_0 \mid C$ (qui est une permutation de C) par l'identité sur $Z - C$; on a $s \in \Gamma$ et $S = \alpha(\hat{s})$. Montrons ensuite que α est injectif, c'est-à-dire que si $s \in \Gamma$ et $\alpha(\hat{s}) = I$, on a $s \sim I$. Soit (Z_i) une suite de compacts dans Z tels que $Z - \bigcup_i Z_i$ soit négligeable et que la restriction de s à chaque Z_i soit continue. Soit Ω_i le plus grand ouvert relativement à Z_i négligeable; la suite $Z_i' = Z_i - \Omega_i$ possède les propriétés de la suite Z_i et aucun ouvert relativement à Z_i' n'est négligeable.

Soit alors $\zeta \in Z_i'$ et $s\zeta \neq \zeta$; ζ possède un voisinage V ouvert relativement à Z_i' tel que $V \cap s(V) = \emptyset$; V et par suite $s(V)$ est mesurable et non négligeable, ce qui est absurde puisque $\alpha(\hat{s}) = I$; s induit donc l'identité sur $\bigcup_i Z_i'$ et $s \sim I$.

3. Relations d'équivalence sur un espace mesuré. — Soient Z un ensemble, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux relations d'équivalence sur Z; rappelons que $\mathcal{R}'$ est dite plus fine que $\mathcal{R}$ si $\mathcal{R}'(\zeta, \zeta') \Rightarrow \mathcal{R}(\zeta, \zeta')$ pour $\zeta \in Z$, $\zeta' \in Z$; on écrira alors $\mathcal{R} \leqq \mathcal{R}'$. La relation ainsi définie est une relation d'ordre; toute famille $(\mathcal{R}_\iota)_{\iota \in I}$ de relations d'équivalence possède une borne supérieure $\mathcal{R} = \sup_{\iota \in I} \mathcal{R}_\iota$ définie par

$$\mathcal{R}(\zeta, \zeta') \Leftrightarrow \mathcal{R}_\iota(\zeta, \zeta') \qquad \text{pour tout} \quad \iota \in I.$$

Remarque. — On démontre facilement que si Z est un espace localement compact muni d'une mesure positive ν, la borne supérieure d'une famille dénombrable de relations d'équivalence ν-mesurables est ν-mesurable.

Dans la suite Z désignera un espace localement compact et ν une mesure positive sur Z.

Définition. — Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux relations d'équivalence sur Z; on dira que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont ν-équivalentes et l'on écrira $\mathcal{R} \underset{\nu}{\equiv} \mathcal{R}'$ (ou simplement $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}'$) s'il existe une partie A de Z de complémentaire localement négligeable telle que $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}'_A$ ($\mathcal{R}_A$ désigne la relation d'équivalence induite par $\mathcal{R}$ sur A).

On voit de suite que la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence; on notera $\hat{\mathcal{R}}$ la classe de $\mathcal{R}$ selon cette relation. Si $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}'$ les graphes de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ ne diffèrent que par un ensemble $\nu \otimes \nu$-négligeable.

PROPOSITION 1. — *Si $\mathcal{R}$ est mesurable et si $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}'$, $\mathcal{R}'$ est mesurable.*

Soit $\mathcal{K}$ une famille ν-dense de compacts telle que $\mathcal{R}_K$ soit séparée pour $K \in \mathcal{K}$ (*cf.* [1] chap. 5, § 1, déf. 2); soit A une partie de Z de complémentaire localement-négligeable telle que $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}'_A$, il suffit de montrer que l'ensemble $\mathcal{K}'$ des $K \in \mathcal{K}$ tels que $K \subset A$ est ν-dense; les propriétés PL_1 et PL_2 (*loc. cit.*, prop. 1) sont trivialement vérifiées; démontrons la propriété b_1 : soit K_0 un compact dans Z et soit $\varepsilon > 0$; il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $K \subset K_0$ et $\nu(K_0 - K) \leqq \varepsilon/2$ et un compact $K' \subset A \cap K_0$ tel que $\nu(A \cap K_0 - K') \leqq \varepsilon/2$; alors $K \cap K' \in \mathcal{K}'$ et $\nu\,(K_0 - K \cap K') \leqq \varepsilon$.

On vérifie immédiatement la

PROPOSITION 2. — *Si $\mathcal{R}_n \equiv \mathcal{R}'_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, on a*

$$\sup \mathcal{R}_n \equiv \sup \mathcal{R}'_n$$

qui permet de définir $\sup \hat{\mathcal{R}}_n$-classe de $\sup \mathcal{R}_n$, avec $\mathcal{R}_n \in \hat{\mathcal{R}}_n$ pour tout n.

DÉFINITION. — $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ étant deux relations d'équivalence sur Z, on écrira $\mathcal{R} \prec \mathcal{R}'$ s'il existe une partie A de Z de complémentaire localement négligeable telle que $\mathcal{R}_A \leqq \mathcal{R}'_A$. La relation $\prec$ est une relation de préordre et définit par passage au quotient une relation d'ordre sur les classes $\hat{\mathcal{R}}$, relation que nous noterons encore $\prec$.

DÉFINITION. — Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur Z et s une application de Z dans Z; on dira que $\mathcal{R}$ et s sont ν-compatibles si l'on a $\mathcal{R}(\zeta, s\zeta)$ pour tout ζ appartenant à un ensemble de complémentaire localement négligeable.

Considérons maintenant des applications s qui sont des permutations de Z laissant ν quasi invariante; on démontre alors facilement que si s et s' sont ν-compatibles avec $\mathcal{R}$, ss'^{-1} l'est aussi; et d'autre part que si s est ν-compatible avec $\mathcal{R}$ et si $s \sim s'$ et $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}'$, s' est ν-compatible avec $\mathcal{R}'$; on pourra donc dire que $\hat{s}$ est ν- compatible avec $\hat{\mathcal{R}}$. Enfin si $\hat{s}$ est ν-compatible avec $\hat{\mathcal{R}}_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, $\hat{s}$ est ν-compatible avec $\sup \hat{\mathcal{R}}_n$.

PROPOSITION 3. — *Soient $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$ deux algèbres de von Neumann abéliennes dans un espace hilbertien à base dénombrable, Z un espace topologique localement compact à base dénombrable muni d'une mesure positive bornée ν tel que $\mathcal{Z}$ soit isomorphe à $L^\infty(z, \nu)$. Définissons de même Y et μ tels que $\mathcal{Y}$ soit isomorphe à $L^\infty(Y, \mu)$; l'injection canonique de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Z}$ définit un homomorphisme injectif de $L^\infty(Y, \mu)$ dans $L^\infty(z, \nu)$ qui à son tour définit une application φ d'une partie Z_0 de z de complémentaire ν-négligeable dans Y* (*cf.* § 1, prop. 1)*; soit $\hat{\mathcal{R}}$ la classe de relations* *d'équivalence mesurables sur Z définie par φ. Alors $\hat{\mathcal{R}}$ est indépendante du choix de Y, μ et φ.*

Supposons en effet que Y_1, μ_1, φ_1 et Y_2, μ_2, φ_2 répondent à la question; soient Φ_1 et Φ_2 les homomorphismes injectifs de $L^\infty(Y_1, \mu_1)$ et de $L^\infty(Y_2, \mu_2)$ dans $L^\infty(Z, \nu)$; il existe un isomorphisme Ψ de $L^\infty(Y_1, \mu_1)$ sur $L^\infty(Y_2, \mu_2)$ tel que $\Phi_2 \circ \Psi = \Phi_1$, donc (*cf.* [2], app. IV) une bijection ψ d'une partie Y'_1 de Y_1 de complémentaire négligeable sur une partie Y'_2 de Y_2 de complémentaire négligeable telle que pour $f \in L^\infty(Y_1, \mu_1)$ on ait

$$f(\varphi_1(\zeta)) = f(\psi^{-1}(\varphi_2(\zeta))) \qquad \text{pour} \quad \zeta \in Z_f \subset Z,$$

Z_f étant de complémentaire négligeable; appelons (O_n) une base d'ouverts de Y_1 et f_n la fonction caractéristique de O_n; pour $\zeta \in \bigcap_n Z_{f_n}$ on a $\varphi_1(\zeta) = \psi^{-1}(\varphi_2(\zeta))$ et il existe une partie Z' de Z de complémentaire négligeable telle que pour $\zeta \in Z'$, $\zeta' \in Z'$:

$$\varphi_1(\zeta) = \varphi_1(\zeta') \Leftrightarrow \varphi_2(\zeta) = \varphi_2(\zeta').$$

Définition. — Nous dirons que $\hat{\mathcal{R}}$ est la classe de relations d'équivalence mesurables sur Z associée à la sous-algèbre $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{Z}$.

PROPOSITION 4. — *$\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, Z, ν, $\hat{\mathcal{R}}$ étant définis comme précédemment, soient Φ un automorphisme de $\mathcal{Z}$ (pour la structure d'algèbre normée) et $\hat{s}$ la classe de permutations de Z associée à Φ* (*cf.* § 1, prop. 1), *alors Φ induit l'identité sur $\mathcal{Y}$ si et seulement si $\hat{s}$ est ν-compatible avec $\hat{\mathcal{R}}$.*

La condition est évidemment suffisante; pour montrer qu'elle est nécessaire, définissons Y, μ et φ comme pour la proposition 3, φ étant prolongée arbitrairement dans $Z - Z_0$; soit $\mathcal{R} \in \hat{\mathcal{R}}$ la relation d'équivalence sur Z définie par φ; appelons (O_n) une base d'ouverts de Y et $\mathcal{R}_n$ la relation d'équivalence sur Z correspondant à la partition $Z = \varphi^{-1}(O_n) \cup (Z - \varphi^{-1}(O_n))$; $\hat{s}$ est ν-compatible avec $\mathcal{R}_n$ pour tout n donc avec $\sup \mathcal{R}_n$ qui n'est autre que $\mathcal{R}$.

4. Représentation matricielle continue de certains opérateurs unitaires.

PROPOSITION 1. — *Soient Z un espace localement compact, ν une mesure positive bornée sur Z, $\mathcal{H} = \int_Z^\oplus \mathcal{H}(\zeta),\ d\nu(\zeta)$ une intégrale hilbertienne, $\mathcal{Z}$ l'algèbre des opérateurs diagonalisables; soient s une permutation de Z laissant ν quasi invariante et r une fonction mesurable telle que*

$$d\nu(s\zeta) = r(\zeta).d\nu(\zeta).$$

Supposons qu'il existe un unitaire U dans $\mathcal{H}$ tel que pour toute $f \in L^\infty(Z, \nu)$ on ait $T_{f_s} = U.T_f.U^{-1}$ (T_f désigne l'opérateur diagonalisable défini par f et f_s la fonction $\zeta \to f_s(\zeta) = f(s^{-1}\zeta)$). Alors il existe des isomorphismes ψ_ζ de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}(s\zeta)$ définis pour presque tout ζ et tels que pour tout $x = (x(h)) \in \mathcal{H}$ on ait presque partout

$$(Ux)(\zeta) = (r(s^{-1}\zeta))^{-\frac{1}{2}}.\psi_{s^{-1}\zeta}(x(s^{-1}\zeta)).$$

Soit $x_i = (x_i(\zeta)) \in \mathcal{H}$ un champ mesurable de bases orthonormales, soit $y_i = Ux_i$, soit $y_i(\zeta)$ une décomposition de y; soient enfin $z_i = (z_i(\zeta))$ avec $z_i(\zeta) = (r(\zeta))^{\frac{1}{2}}.y_i(\zeta)$ et $\mathcal{H}_1(\zeta)$ le sous-espace fermé de $\mathcal{H}(\zeta)$ engendré par les $z_i(\zeta)$.

On a pour presque tout ζ

$$(z_i(s\zeta), z_j(s\zeta)) = (x_i(\zeta), x_j(\zeta)) \qquad \text{pour tout } i \text{ et tout } j;$$

en effet pour toute $f \in L^\infty(Z, \nu)$

$$U.T_f.x_i = T_{f_s}.y_i,$$

$$(T_f.x_i, T_f.x_j) = (U.T_f.x_i, U.T_f.x_j) = (T_{f_s}.y_i, T_{f_s}.y_j),$$

$$\int |f(\zeta)|^2.(x_i(\zeta), x_j(\zeta)).d\nu(\zeta)$$

$$= \int |f(s^{-1}\zeta)|^2.(y_i(\zeta), y_j(\zeta)).d\nu(\zeta)$$

$$= \int r(s\zeta).|f(\zeta)|^2.(y_i(s\zeta), y_j(s\zeta)).d\nu(\zeta),$$

d'où l'égalité annoncée pour presque tout ζ, soit pour $\zeta \in Z'$ de complémentaire négligeable. Appelons ψ_ζ ($\zeta \in Z'$) l'isomorphisme de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}_1(s\zeta)$ défini par

$$\psi_\zeta(x_i(\zeta)) = z_i(s\zeta).$$

Montrons que $\mathcal{H}_1(\zeta) = \mathcal{H}(\zeta)$ pour presque tout ζ; supposons le contraire : il existe alors un élément $u = (u(\zeta)) \in \mathcal{H}$, $u \neq 0$ tel que $u(\zeta)$ soit orthogonal à $z_i(\zeta)$ pour tout ζ et tout i; soit $v = (v(\zeta)) = U^{-1}u$; pour toute $f \in L^\infty(Z, \nu)$,

$$(T_f.x_i, T_f.v) = (U.T_f.x_i, U.T_f.v) = (T_{f_s}.y_i, T_{f_s}.u),$$

$$\int |f(\zeta)|^2.(x_i(\zeta), v(\zeta)).d\nu(\zeta) = \int |f_s(\zeta)|^2.(y_i(\zeta), u(\zeta)).d\nu(\zeta) = 0,$$

donc $(x_i(\zeta), v(\zeta)) = 0$ presque partout, et $v = u = 0$. On a donc bien $\mathcal{H}_1(\zeta) = \mathcal{H}(\zeta)$ pour $\zeta \in Z''$ de complémentaire négligeable.

Posons $Z''' = Z' \cap s^{-1}(Z'')$ et $\tilde{Z} = \cap s^n(Z''')$ $(-\infty < n < +\infty)$; nous remplacerons dans la suite Z par $\tilde{Z}$ qui est de complémentaire négligeable;

ψ_ζ est alors, pour tout ζ, un isomorphisme de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}(s\zeta)$ et $z_i = (z_i(\zeta))$ est un champ mesurable de bases orthonormales.

Considérons un élément $x = (x(\zeta)) \in \mathcal{H}$ et posons

$$y(\zeta) = (r(s^{-1}\zeta))^{-\frac{1}{2}}.\psi_{s^{-1}\zeta}(x(s^{-1}\zeta)).$$

Le champ $\zeta \to y(\zeta)$ est mesurable car

$$(y(\zeta), z_i(\zeta)) = (x(s^{-1}\zeta), x_i(s^{-1}\zeta)).(r(s^{-1}\zeta))^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{pour tout } i,$$

est une fonction mesurable. Puis

$$\int |y(\zeta)|^2.d\nu(\zeta) = \int |x(\zeta)|^2.d\nu(\zeta)$$

et le champ $\zeta \to y(\zeta)$ définit un élément y de $\mathcal{H}$ tel que $\|y\| = \|x\|$ et qui ne dépend pas de la décomposition $x = (x(\zeta))$. Posons $y = U_1.x$; U_1 est un opérateur linéaire, donc unitaire et l'on vérifie de suite que

$$U_1.T_f.U_1^{-1} = T_{f_s} \qquad \text{pour toute} \quad f \in L^\infty(Z, \nu).$$

De plus, $U_1.x_i = U.x_i = y_i$ pour tout i, et pour $f \in L^\infty(Z, \nu)$,

$$U_1.T_f.x_i = T_{f_s}.U_1.x_i = T_{f_s}.U.x_i = U.T_f.x_i$$

et comme les éléments de la forme $T_f.x_i$ sont partout denses dans $\mathcal{H}$, on a $U_1 = U$.

5. Intégrales superposées d'espaces hilbertiens.

LEMME 1. — *Soient Z et X deux espaces compacts à bases dénombrables, ν et μ deux mesures positives sur Z et X, φ une application ν-mesurable de Z sur X telle que $\varphi(\nu)$ existe et que $\varphi(\nu) = \mu$, $\nu = \int \nu_\eta \, d\mu(\eta)$ une désintégration de ν relative à φ* (*cf.* [1, chap. 6, § 3]). *Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{F} \subset L^\infty(Z, \nu)$ partout dense dans $L^2(Z, \nu_\eta)$ pour presque tout $\eta \in X$.*

Il existe une partie ν-négligeable N de Z et une partition de $Z - N$ en compacts $Z_n (n = 1, 2, \ldots)$ sur chacun desquels φ est continue. Soit X_0 l'ensemble, de complémentaire μ-négligeable, des $\eta \in X$ tels que N soit ν_η-négligeable. Soit $\mathcal{F}_n$ un ensemble dénombrable partout dense dans $\mathcal{C}(Z_n)$ pour la topologie de la convergence uniforme; soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f définies sur Z telles que :

1° $f = 0$ sauf sur une réunion finie de compacts Z_n, soit $n \in A$,

2° pour tout $n \in A$ il existe $f_n \in \mathcal{F}_n$ telle que

$$f_n(\zeta) = f(\zeta) \qquad \text{pour} \quad \zeta \in Z_n.$$

$\mathcal{F}$ est dénombrable et $\mathcal{F} \subset L^\infty(z, \nu)$; il reste donc à démontrer que pour $\eta \in X_0$ toute fonction g_0 définie sur $\varphi^{-1}(\eta)$, nulle en dehors d'une réunion finie d'ensembles $\varphi^{-1}(\eta) \cap Z_n$, soit $n \in B$, et continue sur chacun d'eux, est limite uniforme de restrictions de fonctions de $\mathcal{F}$. Pour tout $n \in B$, $\varphi^{-1}(\eta) \cap Z_n$ est fermé dans Z_n et il existe $g_n \in \mathcal{C}(Z_n)$ coïncidant avec g_0 sur $\varphi^{-1}(\eta) \cap Z_n$. Puis pour tout $n \in B$, il existe $f_n \in \mathcal{F}_n$ telle que

$$|f_n(\zeta) - g_n(\zeta)| \leqq \varepsilon \qquad \text{pour} \quad \zeta \in Z_n.$$

Alors si f est définie par les f_n, $f \in \mathcal{F}$,

$$|f(\zeta) - g_0(\zeta)| \leqq \varepsilon \qquad \text{pour} \quad \zeta \in \varphi^{-1}(\eta).$$

PROPOSITION 1. — *Soient Z et X deux espaces localement compacts à bases dénombrables, ν et μ deux mesures positives bornées sur Z et X, φ une application ν-mesurable de Z sur X telle que $\varphi(\nu)$ existe et que $\varphi(\nu) = \mu$, $\nu = \int \nu_\eta . d\mu(\eta)$ une désintégration de ν relative à φ, $\zeta \to \mathcal{H}(\zeta)$ un champ ν-mesurable d'espaces hilbertiens, $\zeta \to x_i(\zeta) \in \mathcal{H}(\zeta)$ une suite fondamentale de champs de vecteurs telle que pour tout i, $x_i(\zeta)$ soit borné en norme. Soient $\mathcal{H}$ l'intégrale $\int^\oplus \mathcal{H}(\zeta) . d\nu(\zeta)$ et $\mathcal{Z}$ l'algèbre des opérateurs diagonalisables.*

Il existe une partie X_0 de X de complémentaire μ-négligeable telle que pour tout $\eta \in X_0$ la suite de champs $\zeta \to x_i(\zeta)$ définisse (au sens de [2], p. 144, prop. 4) *sur le champ $\zeta \to \mathcal{H}(\zeta)$ une structure de champ ν_η-mesurable. Pour $\eta \in X_0$ soient $\mathcal{K}(\eta)$ l'intégrale $\int^\oplus \mathcal{H}(\zeta) . d\nu_\eta(\zeta)$ et $\mathcal{X}(\eta)$ l'algèbre des opérateurs diagonalisables.*

Il existe une suite de champs ν-mesurables de vecteurs $\tilde{x}_i = (\tilde{x}_i(\zeta)) \in \mathcal{H}$ telle que la suite de champs $\eta \to y_i(\eta) = \int^\oplus \tilde{x}_i(\zeta) . d\nu_\eta(\zeta)$ définisse sur le champ $\eta \to \mathcal{K}(\eta)$ $(\eta \in X_0)$ une structure de champ μ-mesurable. Alors le champ d'algèbres de von Neumann $\eta \to \mathcal{X}(\eta)$ est μ-mesurable. Soient $\mathcal{K} = \int^\oplus \mathcal{K}(\eta) . d\mu(\eta)$ et $\mathcal{X} = \int^\oplus \mathcal{X}(\eta) . d\mu(\eta)$. Il existe un isomorphisme Ω de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{K}$ transformant $\tilde{x}_i$ en $y_i = (y_i(\eta))$ pour tout i et $\mathcal{Z}$ en $\mathcal{X}$.

Tout d'abord on peut se ramener au cas où Z et X sont compacts et égaux aux supports de ν et μ.

L'ensemble X_0 de l'énoncé peut être pris égal à l'ensemble des $\eta \in X$ pour lesquels les fonctions $\zeta \to (x_i(\zeta), x_j(\zeta))$ sont ν_η-mesurables.

Soient X_1 une partie de X_0 de complémentaire μ-négligeable et $\mathcal{F} = \{f_i\}$

une partie dénombrable de $L^{\infty}(Z, \nu)$ partout dense dans $L^2(Z, \nu_\eta)$ pour tout $\eta \in X_1$. La suite $\tilde{x}_i$ de l'énoncé peut être prise égale à la suite double

$$x_{i,j} = (x_{i,j}(\zeta)) \qquad \text{où} \quad x_{i,j}(\zeta) = f_i(\zeta).x_j(\zeta);$$

posons

$$y_{i,j}(\eta) = \int^{\oplus} x_{i,j}(\zeta).d\nu_\eta(\zeta).$$

Soit pour $\eta \in X_1$, $T_i(\eta$ l'opérateur de $\mathcal{L}(\mathcal{K}(\eta))$ défini par f_i; pour tout i le champ $\eta \to T_i(\eta)$ est μ-mesurable car les fonctions

$$\eta \to (T_i(\eta).y_{j,k}(\eta), y_{l,m}(\eta))$$

sont μ-mesurables; et pour tout $\eta \in X_1$ les $T_i(\eta)$ engendrent $\mathfrak{X}(\eta)$; par suite le champ $\eta \to \mathfrak{X}(\eta)$ est μ-mesurable.

Considérons maintenant un élément $x = (x(\zeta))$ de $\mathcal{H}$; les fonctions $\zeta \to (x_i(\zeta), x(\zeta))$ sont ν_η-mesurables pour presque tout η, soit pour $\eta \in X_x$ de complémentaire μ-négligeable, et le champ $\zeta \to x(\zeta)$ est ν_η-mesurable pour $\eta \in X_x$; posons

$$y(\eta) = \int^{\oplus} x(\zeta).d\nu_\eta(\zeta).$$

Le champ $\eta \to y(\eta))$ est μ-mesurable car les fonctions $\eta \to (y(\eta), y_{i,j}(\eta))$ sont μ-mesurables et l'on a

$$\int \|y(\eta)\|^2.d\mu(\eta) = \int \|x(\zeta)\|^2.d\nu(\zeta),$$

par suite le champ $\eta \to y(\eta)$ définit un élément $y \in \mathcal{K}$ tel que $\|y\| = \|x\|$. Posons $y = \Omega x$; Ω est une application linéaire, donc un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur un sous-espace fermé de $\mathcal{K}$, et l'on a $y_{i,j} = \Omega.x_{i,j}\Omega(\mathfrak{X})$ contient les champs $\eta \to h(\eta).\, y_{i,j}(\eta)$ pour $\zeta \in L^{\infty}(X, \mu)$ et par suite est égal à $\mathcal{K}$. Il reste à montrer que Ω transforme $\mathfrak{Z}$ en $\mathfrak{X}$; soit $T = T_f \in \mathfrak{Z}\, f \in L^{\infty}(Z, \nu)$ et soit $x = (x(\zeta)) \in \mathcal{K}$; on a

$$\Omega.x = (y(\eta)), \qquad \text{où} \quad y(\eta(= \int^{\oplus} x(\zeta).d\nu_\eta(\zeta)$$

et

$$\Omega.T.x = (y'(\eta)), \qquad \text{où} \quad y'(\eta) = \int^{\oplus} f(\zeta).x(\zeta).d\nu_\eta(\zeta)$$

donc

$$\Omega.T.\Omega^{-1} \in \mathfrak{X}.$$

Inversement soit $S = \int^{\oplus} S(\eta).d\mu(\eta) \in \mathfrak{X}$, $S(\eta)$ étant défini pour tout $\eta \in \mathfrak{X}_1$ par une fonction $f_n(\zeta)$, $\zeta \in \varphi^{-1}(\eta)$; posons $T = \Omega^{-1}S.\Omega$; quel que soit le champ $x=(x(\zeta))\in\mathcal{H}$, le champ $\zeta\to f(\zeta).x(\zeta)$ est ν-mesurable et définit T_x, donc $f(\zeta)$ est ν-mesurable, $f\in L^\infty(Z.\mathcal{X})$ et $T=T_f$.

Proposition 2. — *Soient $\mathcal{H}$ un espace hilbertien à base dénombrable, $\mathcal{Y}\subset\mathcal{Z}$ deux algèbre de von Neumann abéliennes dans $\mathcal{H}$*

$$\mathcal{H}=\int_Y^\oplus \mathcal{H}(\eta).d\mu(\eta) \qquad et \qquad \mathcal{H}=\int_Z^\oplus \mathcal{H}(\zeta).d\nu(\zeta)$$

deux décompositions de $\mathcal{H}$ associées à $\mathcal{Y}$ et à $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}=\int^\oplus \mathcal{Z}(\eta).d\mu(\eta)$ une décomposition de $\mathcal{Z}$ sur Y.

1° *Il existe des ensembles $M\subset Y$ et $N\subset Z$ respectivement μ- et ν-négligeables et une application φ ν-mesurable de Z-N sur Y-M telle que $\varphi(\nu)$ soit équivalente à μ et que en appelant Φ l'homomorphisme injectif de $L^\infty(Y.\mu)$ dans $L^\infty(Z.\nu)$ correspondant à l'injection canonique de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Z}$, on ait pour toute $f\in L^\infty(Y,\mu)$*

$$(\Phi(f))(\zeta)=f(\varphi(\zeta)) \qquad \text{pour presque tout} \quad \zeta\in Z-N.$$

2° *Il existe une désintégration $\nu=\int\nu_\eta.d\mu(\eta)$ telle que pour tout η, ν_η soit concentrée sur $\varphi^{-1}(\eta)$.*

3° *Le champ $\zeta\to\mathcal{H}(\zeta)$ est ν_η-mesurable pour presque tout η.*

4° *Pour presque tout η il existe un isomorphisme de $\mathcal{H}(\eta)$ sur $\int^\oplus\mathcal{H}(\zeta).d\nu_\eta(\zeta)$ qui transforme $\mathcal{Z}(\eta)$ en l'algèbre des opérateurs diagonalisables.*

5° *Si $T\in\mathcal{Z}'$ et si $T=\int^\oplus T(\eta).d\mu(\eta)$ et $T=\int^\oplus T(\zeta).d\nu(\zeta)$ sont des décompositions de T sur Y et Z, $T(\eta)$ s'identifie à $\int^\oplus T(\zeta).d\nu(\zeta)$ pour presque tout η.*

Le 1° résulte du paragraphe 1, proposition 1.
Le 2° résulte de [1] (*loc. cit.*), et a déjà été utilisé.
Le 3° résulte de la proposition 1.

Démontrons le 4°. Définissons $\mathcal{K}(\eta)$, $\mathcal{K}$, $\mathfrak{X}(\eta)$, $\mathfrak{X}$ et Ω comme à la proposition 1 et soit $\mathcal{C}$ l'algèbre des opérateurs diagonalisables dans $\mathcal{K}$ sur Y soient $g\in L^\infty(Y,\mu)$ et $f=g\circ\varphi$; d'après la fin de la démonstration de la proposition 1, Ω transforme l'opérateur $T_f\in\mathcal{Y}$ en l'opérateur $S_g\in\mathcal{C}$ défini par g; d'après ([2], p. 221, th. 3) il existe, après modification éventuelle de $\mathcal{H}(\eta)$ et $\mathcal{K}(\eta)$ sur des ensembles μ-négligeables, un champ μ-mesurable $\eta\to V(\eta)$ d'isomorphismes de $\mathcal{H}(\eta)$ sur $\mathcal{K}(\eta)$ tel que si $x=(x(\eta))\in\mathcal{H}$

on ait $\Omega x = (y(\eta))$ où $y(\eta) = V(\eta).x(\eta)$ presque partout. On peut alors identifier les champs $\eta \to \mathcal{H}(\eta)$ et $\eta \to \mathcal{K}(\eta)$ ainsi que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$, et l'on a alors $\mathfrak{Z}(\eta) = \mathfrak{X}(\eta)$ presque partout (*cf.* [2] p. 180, prop. 1).

Enfin pour démontrer le 5°, considérons une suite fondamentale de champ de vecteurs de carrés intégrables $x_i = (x_i(\zeta))$ et posons $y_i = (y_i(\eta))$ où $y_i(\eta) = \int^{\oplus} x_i(\zeta).d\nu_\eta(\zeta)$; on a, pour presque tout η,

$$T(\eta).y_i(\eta) = \int^{\oplus} T(\zeta).x_i(\zeta).d\nu_\eta(\zeta) \qquad \text{pour tout } i$$

donc pour presque tout η le champ $\zeta \to T(\zeta)$ est ν_η-mesurable et

$$T(\eta) = \int^{\oplus} T(\zeta).d\nu_n(\zeta).$$

6. Algèbres de von Neumann relativement discrètes et relativement continues.

1° *Définitions et propriétés globales.* — Définition. — Dans ce qui suit, $\mathfrak{A}$ désigne une algèbre de von Neumann dans un espace hilbertien $\mathcal{H}$ et $\mathfrak{Z}$ une algèbre de von Neumann contenue dans le centre de $\mathfrak{A}$. Le support dans $\mathfrak{Z}$ d'un projecteur $P \in \mathfrak{A}$ est le plus petit projecteur de $\mathfrak{Z}$ majorant P; on le notera souvent $\overline{P}$. P est dit relativement minimal par rapport à $\mathfrak{Z}$ si $P \neq 0$ et si, pour tout projecteur Q de $\mathfrak{A}$,

$$Q \leqq P \quad \text{et} \quad \overline{Q} = \overline{P} \Rightarrow Q = P.$$

(Nous emploierons la notation $Q < P$ pour $Q \leqq P$ et $Q \neq P$).

Lemme 1. — *Si $(P_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de projecteurs de $\mathfrak{A}$ deux à deux permutables,*

$$\overline{\sup P_\iota} = \sup \overline{P}_\iota.$$

Car si R est un projecteur de $\mathfrak{Z}$,

$$R \geqq \overline{\sup P_\iota} \Leftrightarrow R \geqq \sup P_\iota \Leftrightarrow R \geqq P_\iota \qquad \text{pour tout } \iota,$$
$$\Leftrightarrow R \geqq \overline{P}_\iota \qquad \text{pour tout} \quad \iota \Leftrightarrow R \geqq \sup \overline{P}_\iota.$$

Lemme 2. — *Soient $P \in \mathfrak{A}$, $Q \in \mathfrak{Z}$ tels que $Q \leqq \overline{P}$, alors* $\overline{PQ} = Q$. D'abord, $\overline{PQ} \leqq Q$. Supposons qu'il existe $R \in \mathfrak{Z}$ tel que $\overline{PQ} \leqq R < Q$. On a

$$RP = RQP = QP,$$

d'où $(\overline{P} - Q + R).P = P$ et $P \leqq \overline{P} - Q + R < \overline{P}$. Impossible.

Lemme 3. — *Si P est relativement minimal, tout projecteur A de $\mathcal{A}$, non nul et majoré par P, l'est aussi.*

Car supposons $Q' \in \mathcal{A}$, $Q' < Q$, $\overline{Q'} = \overline{Q}$. En posant $P_1 = P - Q$ on a $\overline{P} = \sup(\overline{P_1}, \overline{Q})$ et $\overline{\sup(P_1, Q')} = \overline{P}$, mais $\sup(P_1, Q') < P$. Impossible.

Lemme 4. — *Si P est relativement minimal et si $Q \in \mathcal{A}$, $Q \leqq P$, on a $Q = P.\overline{Q}$.*

Car $\overline{P\overline{Q}} = \overline{Q}$, et d'autre part $Q \leqq P.\overline{Q}$ et $P\overline{Q}$ est relativement minimal; donc, $Q = P\overline{Q}$.

Lemme 5. — *Soit P un projecteur de $\mathcal{A}$ tel que tout projecteur Q de $\mathcal{A}$ majoré par P soit de la forme $Q = P.R$, $R \in \mathfrak{Z}$. Alors P est nul ou relativement minimal.*

En effet supposons $Q \leqq P$ et $\overline{Q} = \overline{P}$; en posant $R_1 = R.\overline{P}$, $R_2 = R(I - \overline{P})$, on a $R = R_1 + R_2$, $Q = P.R_1$ et $\overline{Q} = R_1$, par suite $\overline{P} = R_1 \leqq R$, $P \leqq R$ et $Q = P$.

Nous avons ainsi la

Proposition 1. — *Pour qu'un projecteur P non nul de $\mathcal{A}$ soit relativement minimal, il faut et il suffit que tout projecteur Q de $\mathcal{A}$ majoré par P soit de la forme $Q = P.R$, $R \in \mathfrak{Z}$.*

Proposition 2. — *Pour qu'un projecteur P non nul de $\mathcal{A}$ soit relativement minimal, il faut et il suffit que $\mathfrak{Z}_P = \mathcal{A}_P$.*

Condition nécessaire : il suffit de montrer que tout projecteur $Q' \in \mathcal{A}_P$ est de la forme $Q' = R_P$, $R \in \mathfrak{Z}$. Or Q' est de la forme Q_P, $Q \in \mathcal{A}$, $Q \leqq P$; posant $Q - P.R$, $R \in \mathfrak{Z}$, on obtient $Q' = Q_P = R_P$.

Condition suffisante : soit $Q \in \mathcal{A}$, $Q \leqq P$; Q_P est de la forme R_P, $R \in \mathfrak{Z}$ et l'on a $Q_P = (P.R)_P$, d'où $Q = P.R$.

Définition. — $\mathcal{A}$ sera dite relativement discrète (resp. relativement continue) par rapport à $\mathfrak{Z}$ si tout projecteur non nul de $\mathcal{A}$ majore un projecteur relativement minimal (resp. si $\mathcal{A}$ ne contient aucun projecteur relativement minimal). Un projecteur P non nul de $\mathcal{A}$ sera dit relativement discret (resp. relativement continu) par rapport à $\mathfrak{Z}$ si tout projecteur non nul de $\mathcal{A}$ majoré par P majore un projecteur relativement minimal (resp. si P ne majore aucun projecteur relativement minimal).

Lemme 6. — *Si P et Q sont des projecteurs de $\mathcal{A}$ tels que $Q \leqq P$, on a $\overline{(Q_P)} \leqq (\overline{Q})_P$ (R étant un projecteur de $\mathcal{A}_P$, $\overline{R}$ désigne son support dans $\mathfrak{Z}_P$).*

On a d'abord $\overline{(Q_P)} \leqq (\overline{Q})_P$. Supposons que pour un projecteur $S_0 \in \mathfrak{Z}_P$ on ait $Q_P \leqq S_0 \leqq (\overline{Q})_P$. Soit $S \in \mathfrak{Z}$ tel que $S_0 = S_P$; on a $Q \leqq P.S \leqq P.\overline{Q}$ et posant $S' = \overline{P}.S$, $S'_P = S_0$ et $Q \leqq P.S' \leqq P.\overline{Q}$, d'où, d'après le lemme 2, $Q \leqq S' \leqq \overline{Q}$ et $S' = \overline{Q}$, $S_0 = (\overline{Q})_P$.

Lemme 7. — *Avec les notations précédentes, Q est relativement minimal par rapport à $\mathfrak{Z}$ si et seulement si Q_P l'est par rapport à $\mathfrak{Z}_P$.*

Supposons Q relativement minimal et soit $R_0 \in \mathfrak{A}_P$, $R_0 < Q_P$; $R_0 = R_P$ avec $R \in \mathfrak{A}$, $R \leqq P$; on a $R < Q$, donc $\overline{R} < \overline{Q}$ et (lemme 2) $P.\overline{R} < P.\overline{Q}$; puis $\overline{R}_0 = (\overline{R})_P < (\overline{Q})_P = \overline{(Q_P)}$.

Supposons maintenant Q non relativement minimal : soit $R \in \mathfrak{A}$ $R < Q$ tel que $\overline{R} = \overline{Q}$: on a $R_P < Q_P$, mais $\overline{(R_P)} = \overline{(Q_P)}$ et Q_P n'est pas relativement minimal.

On a ainsi la

Proposition 3. — *Un projecteur P non nul de $\mathfrak{A}$ est relativement discret (resp. continu) par rapport à $\mathfrak{Z}$ si et seulement si $\mathfrak{A}_P$ est relativement discrète (resp. continue) par rapport à $\mathfrak{Z}_P$.*

On vérifie immédiatement la

Proposition 4. — *Soient $\mathfrak{Z}_\iota$ et $\mathfrak{A}_\iota$ $(\iota \in I)$ deux familles d'algèbres de von Neumann telles que pour tout ι $\mathfrak{Z}_\iota \subset \mathfrak{A}_\iota \cap \mathfrak{A}'_\iota$; pour tout projecteur $(P_\iota) \in \Pi \mathfrak{A}_\iota$ on a $\overline{(P_\iota)} = (\overline{P}_\iota)$ et (P_ι) est relativement minimal si et seulement si chaque P_ι l'est. $\Pi \mathfrak{A}_\iota$ est relativement discrète (resp. continue) si et seulement si chaque $\mathfrak{A}_\iota$ l'est.*

Proposition 5. — *Les notations étant celles du début, il existe dans $\mathfrak{Z}$ un plus grand projecteur relativement discret (resp. continu) dans $\mathfrak{A}$ par rapport à $\mathfrak{Z}$; si E et E' sont ces projecteurs, on a $E.E' = 0$.*

Soit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) l'ensemble, inductif pour l'inclusion, des familles de projecteurs de $\mathfrak{Z}$ relativement discrets (resp. continus) et orthogonaux deux à deux; soit E_ι (resp. $E'_\varkappa$) une famille maximale et soit $E = \Sigma E_\iota$ (resp. $E' = \Sigma E'_\varkappa$) E (resp. E') est relativement discret (resp. continu) d'après les propositions 3 et 4 et l'on a évidemment $E.E' = 0$. Enfin on voit de suite que si $P \in \mathfrak{Z}$ est relativement discret (resp. continu), $P \leqq E$ (resp. $P \leqq E'$).

Lemme 8. — *Soit $(P_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de projecteurs de $\mathfrak{A}$ relativement minimaux et tels que les $\overline{P}_\iota$ soient orthogonaux deux à deux. Alors $P = \Sigma P_\iota$ est relativement minimal.*

Ceci résulte de la proposition 4.

PROPOSITION 6. — *E' étant le projecteur défini à la proposition 5, $I - E'$ est le support d'un projecteur relativement minimal de $\mathfrak{A}$.*

Soit Λ l'ensemble des supports des projecteurs relativement minimaux et soit $P_0 = \sup_{P \in \Lambda} P$. Montrons que $P_0 \in \Lambda$; soit $(P_\iota)_{\iota \in I}$ une famille maximale d'éléments de Λ orthogonaux deux à deux, $\Sigma P_\iota \in \Lambda$ (lemmes 1 et 8) et $\Sigma P_\iota = P_0$ car tout élément de Λ est majoré par ΣP_ι; donc $P_0 \in \Lambda$. On vérifie aisément que $P_0 . E' = 0$ et que P_0 ne peut être strictement inférieur à $I - E'$; par suite $P_0 = I - E'$.

REMARQUE. — Si $\mathfrak{Z}$ est le centre de $\mathfrak{A}$, on retrouve la notion de support central d'un projecteur; d'après la proposition 1 les projecteurs relativement minimaux sont les projecteurs abéliens (*cf.* [2], p. 123); les algèbres relativement discrètes sont les algèbres discrètes; enfin les algèbres relativement continues sont les algèbres continues d'après la proposition 3.

2° *Cas où $\mathfrak{A}$ est abélienne.*

PROPOSITION 7. — *Il existe dans $\mathfrak{A}$ un plus grand projecteur relativement discret (resp. continu), F (resp. F'); on a $F.F' = 0$, $F + F' = I$. F et F' sont fixes par tout automorphisme de $\mathfrak{A}$ induisant l'identité sur $\mathfrak{Z}$.*

On démontre l'existence de F et F' et l'égalité $F.F' = 0$ par la méthode employée pour la proposition 5. On a $F + F' = I$ parce que $I - F$ ne peut majorer aucun projecteur relativement minimal. Enfin soit Φ un automorphisme de $\mathfrak{A}$ induisant l'identité sur $\mathfrak{Z}$; on a $\overline{\Phi(P)} = \overline{P}$ pour tout $P \in \mathfrak{A}$ et $\Phi(P)$ est relativement minimal si et seulement si P l'est; d'où la proposition.

PROPOSITION 8. — *Pour que $\mathfrak{A}$ soit relativement discrète par rapport à $\mathfrak{Z}$, il faut et il suffit qu'elle contienne une famille de projecteurs relativement minimaux, orthogonaux deux à deux et de somme I.*

Condition suffisante : si P_i est une telle famille et si $Q \in \mathfrak{A}$, $Q \neq 0$; on a $Q.P_{\iota_0} \neq 0$ pour au moins un indice ι_0 et $Q.P_{\iota_0}$ est relativement minimal.

Condition nécessaire : il suffit de prendre une famille maximale de projecteurs de $\mathfrak{A}$ relativement minimaux, orthogonaux deux à deux.

3° *Réduction des algèbres de von Neumann relativement discrètes et relativement continues.* — Dans ce numéro, on considère une intégrale hilbertienne $\mathcal{H} = \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta).d\nu(\zeta)$ sur un espace Z localement compact à base dénombrable et deux algèbres de von Neumann décomposables

$$\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta).d\nu(\zeta), \qquad \mathfrak{Z} = \int^{\oplus} \mathfrak{Z}(\zeta).d\nu(\zeta)$$

telles que pour tout ζ, $\mathfrak{Z}(\zeta)$ soit contenue dans le centre de $\mathfrak{A}(\zeta)$.

Lemme 9. — *Soit* $P = \int^{\oplus} P(\zeta).\,d\nu(\zeta)$ *un projecteur de* $\mathcal{A}$ *tel que, pour tout* ζ, $P(\zeta)$ *soit un projecteur de* $\mathcal{A}(\zeta)$. *Pour que* P *soit relativement minimal par rapport à* $\mathcal{Z}$ *il faut et il suffit que* $P(\zeta)$ *soit presque partout nul ou relativement minimal par rapport à* $\mathcal{Z}(\zeta)$ *et ne soit pas nul presque partout.*

Supposons en effet $P \neq 0$, donc $P(\zeta)$ non nul presque partout; on a [2], p. 188],

$$\mathcal{A}_P = \int^{\oplus} \mathcal{A}(\zeta)_{P(\zeta)}.\,d\nu(\zeta),$$

$$\mathcal{Z}_P = \int^{\oplus} \mathcal{Z}(\zeta)_{P(\zeta)}.\,d\nu(\zeta)$$

et le lemme résulte de la proposition 2.

Proposition 9. — *Si* $\mathcal{A}$ *est abélienne et relativement discrète par rapport à* $\mathcal{Z}$, $\mathcal{A}(\zeta)$ *est relativement discrète par rapport à* $\mathcal{Z}(\zeta)$ *pour presque tout* ζ.

Soit P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite de projecteurs de $\mathcal{A}$ relativement minimaux, orthogonaux deux à deux et de somme I (*cf.* prop. 8) et soient

$$P_i = \int^{\oplus} P_i(\zeta).\,d\nu(\zeta)$$

des décompositions telles que pour tout ζ et tout i $P_i(\zeta)$ soit un projecteur de $\mathcal{A}(\zeta)$; pour presque tout ζ les $P_i(\zeta)$ sont relativement minimaux et orthogonaux deux à deux; de plus le champ $\zeta \to \sum_i P_i(\zeta)$ est mesurable et $\sum_i P_i(\zeta) = I$ pour presque tout ζ; la proposition résulte alors de la proposition 8.

Proposition 10. — *Si* $\mathcal{A}$ *est relativement continue par rapport à* $\mathcal{Z}$, $\mathcal{A}(\zeta)$ *est relativement continue par rapport à* $\mathcal{Z}(\zeta)$ *pour presque tout* ζ.

On peut se ramener au cas où $\mathcal{H}(\zeta)$ est le champ constant correspondant à un espace $\mathcal{H}_0$ et où il existe des applications fortement continues de Z dans la boule unité $\mathcal{L}_1$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$, $\zeta \to T_i(\zeta)$, $\zeta \to T'_j(\zeta)$, $\zeta \to T''_k(\zeta)$ telles que pour tout ζ les opérateurs $T_i(\zeta)$ (resp. $T'_j(\zeta)$, $T''_k(\zeta)$) engendrent $\mathcal{A}(\zeta)$ (resp. $\mathcal{A}'(\zeta)$, $\mathcal{Z}'(\zeta)$). On peut supposer de plus que les ensembles $\{ T_i(\zeta) \}$ et $\{ T''_k(\zeta) \}$ sont, pour tout ζ, stables par adjonction et multiplication.

Appelons $\mathcal{R}_\zeta$ l'ensemble des propriétés suivantes relatives à un élément T de $\mathcal{L}_1$:

a. T est un projecteur;
b. $T.T'_i(\zeta) = T'_i(\zeta).T$ pour tout i;
c. $T_i(\zeta)_T.T''_j(\zeta)_T = T''_j(\zeta)_T.T_i(\zeta)_T$ pour tout i et tout j;
d. $T \neq 0$.

Les opérateurs $T_i(\zeta)_T$ (resp. $T'_j(\zeta)_T$, $T''_k(\zeta)_T$) engendrent $\mathcal{A}(\zeta)_T$ (resp. $\mathcal{A}'(\zeta)_T$, $\mathcal{Z}'(\zeta)_T$) [2, p. 18]; par suite $\mathcal{R}_\zeta(T)$ signifie : T est un projecteur de $\mathcal{A}(\zeta)$, relativement minimal par rapport à $\mathcal{Z}(\zeta)$ (*cf.* prop. 2). Soit Y l'ensemble des ζ pour lesquels il existe un $T \in \mathcal{L}_1$ vérifiant $\mathcal{R}_\zeta$. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des couples $(\zeta, T) \in Z \times \mathcal{L}_1$ tels qu'on ait $\mathcal{R}_\zeta(T)$. (a) et (b) définissent dans $Z \times \mathcal{L}_1$ des ensembles fermés; montrons qu'il en est de même de (c).

Supposons que $(\zeta_\alpha, T_\alpha) \to (\zeta, T)$ et que

$$T_i(\zeta_\alpha)_{T_\alpha}.T''_j(\zeta_\alpha)_{T_\alpha} = T''_j(\zeta_\alpha)_{T_\alpha}.T_i(\zeta_\alpha)_{T_\alpha}.$$

Il faut montrer que pour tout $x \in T(\mathcal{H}_0)$ on a

$$T.T_i(\zeta).T.T''_j(\zeta).x = T.T''_j(\zeta).T.T_i(\zeta).x. \tag{1}$$

Or

$$T_\alpha.T_i(\zeta_\alpha).T_\alpha.T''_j(\zeta_\alpha).T_\alpha.x = T_\alpha.T''_j(\zeta_\alpha).T_\alpha.T_i(\zeta_\alpha).T_\alpha.x \tag{2}$$

et $T_\alpha.x \to x$; le premier et le deuxième membre de (2) convergent respectivement vers le premier et le deuxième membre de (1); d'où (1). Comme (d) définit dans $Z \times \mathcal{L}_1$ un ensemble ouvert, $\mathfrak{M}$ est borélien. D'après [2], app. V), il existe un ensemble X mesurable et contenant Y et une application mesurable $\zeta \to S(\zeta)$ de x dans $\mathcal{L}_1$ telle que $(\zeta, S(\zeta)) \in \mathfrak{M}$ pour $\zeta \in X$.

Pour $\zeta \notin X$ posons $S(\zeta) = 0$. Le champ $\zeta \to S(\zeta)$ est mesurable et (lemme 9) $\int^{\oplus} S(\zeta).d\nu(\zeta)$ est relativement minimal ou nul, donc nul; par suite Y est négligeable.

Remarque. — Les propositions 9 et 10 admettent des réciproques.

7. Caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes.

Lemme 1. — *Soient $\mathcal{H}$ un espace hilbertien à base dénombrable, $\mathcal{Z}$ une algèbre de von Neumann abélienne maximale dans $\mathcal{H}$, $\mathcal{Y}$ une sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{Z}$ telle que $\mathcal{Y}'$ soit homogène* (*cf.* [2] p. 251) *et que $\mathcal{Z}$ soit relativement discrète* (*resp. continue*) *par rapport à $\mathcal{Y}$. Il existe aeux espaces hilbertiens $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, une algèbre de von Neumann $\mathcal{Y}_1$ abélienne maximale dans $\mathcal{H}_1$, une algèbre de von Neumann $\mathcal{Y}_2$ abélienne maximale* *dans* $\mathcal{H}_2$ *et relativement discrète (resp. continue) par rapport à* $C_{\mathcal{H}_2}$, *et un isomorphisme de* $\mathcal{H}$ *sur* $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ *transformant* $\mathcal{Y}$ *en* $\mathcal{Y}_1 \otimes C_{\mathcal{H}_2}$ *et* $\mathcal{Z}$ *en* $\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2$.

Soit $\mathcal{H} = \int_Y^{\oplus} \mathcal{H}(\eta) . d\mu(\eta)$ une décomposition associée à $\mathcal{Y}$, Y étant à base dénombrable et $\mathcal{H}(\eta)$ de dimension constante; soit $\mathcal{Z} = \int^{\oplus} \mathcal{Z}(\eta) . d\mu(\eta)$ une décomposition de $\mathcal{Z}$; pour presque tout η, soit pour $\eta \in Y_0$ de complémentaire négligeable, $\mathcal{Z}(\eta)$ est abélienne maximale et relativement discrète (resp. continue) par rapport à $C_{\mathcal{H}(\eta)}$ (*cf.* § 6, prop. 9 et 10); les algèbres $\mathcal{Z}(\eta)$ $(\eta \in Y_0)$ sont deux à deux isomorphes (ce fait est trivial dans le cas discret; dans le cas continue il résulte de [6]), donc spatialement isomorphes; par suite, si $\eta_0 \in Y_0$, il existe pour tout $\eta \in Y_0$ un isomorphisme de $\mathcal{H}(\eta_0)$ sur $\mathcal{H}(\eta)$ transformant $\mathcal{Z}(\eta_0)$ en $\mathcal{Z}(\eta)$. Posons

$$\mathcal{H}_1 = L^2(Y, \mu), \qquad \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}(\eta_0);$$

$$\mathcal{Y}_1 = \text{algèbre des opérateurs diagonalisables dans } L^2(Y, \mu);$$

$$\mathcal{Y}_2 = \mathcal{Z}(\eta_0).$$

D'après ([2], p. 187, prop. 4) il existe un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ transformant $\mathcal{Z}$ en $\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2$; cet isomorphisme transforme évidemment $\mathcal{Y}$ en $\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2$.

Lemme 2. — *Soit* Y_1 *un espace localement compact muni d'une mesure positive* μ_1 *telle que* $\|\mu_1\| = 1$; *soient* Y_2 *le segment* $[0, 1]$ (*resp. un espace fini ou dénombrable*) *et* μ_2 *la mesure de Lebesgue* (*resp. la masse* $+1$ *en chaque point*), *soient* $Z = Y_1 \times Y_2$, $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$, $\mathcal{R}_0$ *la relation d'équivalence sur* Z *définie par la première projection,* Γ *le groupe des classe de bijections de* Z *sur* Z *laissant* ν *quasi invariante et conservant les ensembles* $\mathrm{pr}_1^{-1}(\eta_1)$, $\eta_1 \in Y_1$. $\hat{\mathcal{R}}_0$ *est la plus fine des classes de relations d'équivalence à graphes mesurables* ν*-compatible avec* Γ.

Il suffit de montrer que toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ à graphe mesurable plus fine que $\mathcal{R}_0$ et ν-compatible avec Γ est ν-équivalente à $\mathcal{R}_0$.

Notons $Y_1 \times Y_2 \times Y'_1 \times Y'_2$ l'espace $Z \times Z$ et $(\eta_1, \eta_2, \eta'_1, \eta'_2)$ l'un quelconque de ses éléments; soit X la diagonale de $Y_1 \times Y'_1$. Le graphe $\mathcal{G}_0$ de $\mathcal{R}_0$ est $X \times Y_2 \times Y'_2$; nous noterons (x, η_2, η'_2) l'un quelconque de ses éléments; si $\mathcal{G}$ est le graphe de $\mathcal{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_0$.

Une bijection s de Z sur Z conservant les ensembles $\mathrm{pr}_1^{-1}(\eta_1)$ est de la forme $(\eta_1, \eta_2) \to (\eta'_1, \eta'_2)$, où

$$\eta'_1 = \eta_1, \qquad \eta'_2 = \eta'_2(\eta_1, \eta_2)$$

et son graphe g_s est dans $\mathcal{G}_0$. Si s laisse ν quasi invariante, la projection h_s de $\mathcal{G} \cap g_s$ sur $X \times Y_2$ est de complémentaire négligeable pour la mesure $dx . d\eta_2$

(dx désigne la mesure sur X qui se projette sur Y_1 suivant μ_1) car on a $\mathcal{R}((\eta_1, \eta_2), s(\eta_1, \eta_2))$ pour presque tout $(\eta_1, \eta_2) \in Z$.

Supposons d'abord $Y_2 = [0, 1]$ et considérons les bijections s_α :

$$\eta'_1 = \eta_1, \qquad \eta'_2 = \eta_2^\alpha \qquad (\alpha > 0).$$

On peut définir l'élément de volume dv dans $\mathcal{G}_0$ par

$$dv = -\eta_2^\alpha . \log \eta_2 . d\eta_2 . d\alpha . dx.$$

Alors

$$\begin{aligned} v(\mathcal{G}) &= -\int_0^\infty d\alpha . \iint_{h_s} \eta_2^\alpha . \log \eta_2 . d\eta_2 . dx \\ &= -\int_0^\infty d\alpha . \int_X dx . \int_0^1 \eta_2^\alpha . \log \eta_2 . d\eta_2 = 1 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{G}$ est de complémentaire négligeable dans $\mathcal{G}_0$.

Dans le cas où Y_2 est fini à n éléments (resp. infini dénombrable) on aboutit au même résultat en identifiant Y_2 à $\mathbf{Z}/(n)$ (resp. à $\mathbf{Z}$) ($\mathbf{Z}$ désigne l'ensemble des entiers) et en considérant les bijections

$$\eta'_1 = \eta_1, \qquad \eta'_2 = \eta_2 + \alpha \qquad [(\text{mod } n) \ (\text{resp. } \eta_2 + \alpha)],$$

où $\alpha \in \mathbf{Z}$.

Par suite pour presque tout $(\eta_2)_0 \in Y_2$, l'ensemble des (η_1, η_2) tels qu'on ait $\mathcal{R}((\eta_1, \eta_2), (\eta_1, (\eta_2)_0))$ est de complémentaire ν-négligeable; choisissons $(\eta_2)_0$ pour qu'il en soit ainsi et soit A l'ensemble des (η_1, η_2) correspondant. On a $\mathcal{R}_A = (\mathcal{R}_0)_A$, car si $(\eta_1, \eta_2) \in A$ et $(\eta_1, \eta'_2) \in A$ on a

$$\mathcal{R}((\eta_1, \eta_2), (\eta_1, (\eta_2)_0)) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}((\eta_1, \eta'_2), (\eta_1, (\eta_2)_0))$$

et par suite

$$\mathcal{R}((\eta_1, \eta_2), (\eta_1, \eta'_2)).$$

Lemme 3. — *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann, $\mathcal{Y}$ son centre, $\mathcal{Z}$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathcal{A}$. Tout projecteur P de $\mathcal{Z}$ relativement minimal par rapport à $\mathcal{Y}$ est relativement minimal dans $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{Y}$* (i. e. *abélien*).

Soient Q un projecteur de $\mathcal{A}$ majoré par P et P' un projecteur de $\mathcal{Z}$. On a $P' = P'.P + P'(I - P)$ et $P'P = PR$ avec $R \in \mathcal{Y}$ (*cf.* § 6, prop. 1), d'où

$$\begin{aligned} P' &= P.R + P'.(I - P), \\ P'.Q &= PRQ = PQR = QR, \\ QP' &= QPR = QR, \end{aligned}$$

Q permute à $\mathcal{Z}$ et par suite $Q \in \mathcal{Z}$ et son support dans $\mathcal{Y}$ est strictement inférieur à celui de P.

LEMME 4. — *Soient* $\mathcal{H} = \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta).d\nu(\zeta)$ *une intégrale hilbertienne sur un espace* Z *localement compact à base dénombrable,* $T_i = \int^{\oplus} T_i(\zeta).d\nu(\zeta)$ *une suite d'opérateurs décomposables. Considérons sur* Z *la relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *définie par* $\mathcal{R}(\zeta, \zeta')$ *si et seulement si il existe un isomorphisme de* $\mathcal{H}(\zeta)$ *sur* $\mathcal{H}(\zeta')$ *transformant* $T_i(\zeta)$ *en* $T_i(\zeta')$ *pour tout* i. *Le graphe* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{R}$ *est* $\nu \otimes \nu$*-mesurable.*

Soit d'abord Z'_m ($m = 1, 2, \ldots, \infty$) le sous-ensemble mesurable de Z sur lequel $\dim \mathcal{H}(\zeta) = m$. On a

$$\mathcal{G} \subset \bigcup_m (Z'_m \times Z'_m)$$

et il suffit de démontrer que $\mathcal{G} \cap (Z'_m \times Z'_m)$ est mesurable pour tout m. On est donc ramené au cas d'un champ constant $\mathcal{H}(\zeta) = \mathcal{H}'$.

On considère $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$ comme muni de la topologie forte et l'on note $\mathcal{L}_1$ sa boule unité et $\mathcal{L}_u$ l'ensemble des unitaires. Il existe un ensemble négligeable $N \subset Z$ et une partition de $Z - N$ en parties compactes Z_n ($n = 1, 2, \ldots$) telles que les restrictions des $T_i(\zeta)$ à chaque Z_n soient continues.

Considérons pour tout couple (n, n') l'espace $Z_n \times Z_{n'} \times \mathcal{L}_u$; nous noterons (ζ, ζ', U) l'un quelconque de ses éléments. Soit A le sous-ensemble formé des éléments qui vérifient

$$T_i(\zeta).U = U.T_i(\zeta') \qquad \text{pour tout } i.$$

A est fermé, car les deux membres de (1) sont des fonctions continues de (ζ, ζ', U).

D'autre part $\mathcal{L}_u$ est l'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles Ω_i ouverts dans $\mathcal{L}_1$ ([2], p. 170); par suite $Z_n \times Z_{n'} \times \mathcal{L}_u$ est l'intersection des ensembles $Z_n \times Z_{n'} \times \Omega_i$ ouverts dans $Z_n \times Z_{n'} \times \mathcal{L}_1$ qui est complet et séparable. Donc A est borélien dans $Z_n \times Z_{n'} \times \mathcal{L}_1$ et sa projection sur $Z_n \times Z_{n'}$ est analytique dans $Z_n \times Z_{n'}$, donc aussi dans $Z \times Z$, donc $\nu \otimes \nu$-mesurable; or, elle n'est autre que $\mathcal{G} \cap (Z_n \times Z_{n'})$. Comme $\bigcup_{n, n'} Z_n \times Z_{n'}$ est de complémentaire négligeable, $\mathcal{G}$ est mesurable.

NOTATIONS. — Dans la suite $\mathcal{H}$ désigne un espace hilbertien à base dénombrable; $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}$; $\mathcal{Y}$ son centre; $\mathcal{Z}$ une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale de $\mathcal{A}$; Z un espace localement compact à base dénombrable et ν une mesure positive bornée sur Z tels que $\mathcal{Z}$ soit isomorphe à $L^\infty(Z, \nu)$, $\hat{\mathcal{R}}_0$ la classe de relations d'équivalence mesurables sur Z associée à $\mathcal{Y}$ (*cf.* § 3, prop. 3); F (resp. F') le plus grand projecteur de $\mathcal{Z}$ relativement discret (resp. continu) par rapport à $\mathcal{Y}$; M et

M' des sous-ensembles mesurables de Z définis par F et F' et tels que $M \cap M' = \emptyset$, $M \cup M' = Z$; $\mathcal{R}_1$ la relation d'équivalence sur Z correspondant à la partition $Z = M \cup M'$; G le groupe des automorphismes Φ de $\mathfrak{Z}$ pour lesquels il existe un unitaire U de $\mathcal{A}$ tel que

$$\Phi(T) = U.T.U^{-1} \qquad \text{pour tout} \quad T \in \mathfrak{Z}.$$

Γ le groupe des classes de bijections de Z sur Z laissant ν quasi invariante correspondant aux éléments de G. Le groupe Γ est ν compatible avec $\hat{\mathcal{R}}_0$ (*cf.* § 3, prop. 4) et avec $\mathcal{R}_1$ (*cf.* § 6, prop. 7), donc avec $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$.

THÉORÈME 1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{A}$ *est discrète.*

(ii) *Il existe une sous-algèbre abélienne maximale* $\mathfrak{Z}$ *telle que tout automorphisme de* $\mathfrak{Z}$ *induisant l'identité sur* $\mathcal{Y}$ *appartienne à* G.

(ii)$'$ *Pour toute sous-algèbre abélienne maximale* $\mathfrak{Z}$, *tout automorphisme de* $\mathfrak{Z}$ *induisant l'identité sur* $\mathcal{Y}$ *appartient à* G (²).

(iii) *Il existe une sous-algèbre abélienne maximale* $\mathfrak{Z}$ *telle que* $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$ *soit la plus fine des classes de relations d'équivalence à graphes* $\nu \otimes \nu$*-mesurables* ν*-compatibles avec* Γ.

(iii)$'$ *Pour toute sous-algèbre abélienne maximale* $\mathfrak{Z}$, $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$ *est la plus fine des classe de relations d'équivalence à graphes* $\nu \otimes \nu$*-mesurables* ν*-compatibles avec* Γ.

Les implications (ii)$'\Rightarrow$(ii) et (iii)$'\Rightarrow$(iii) sont évidentes.

(i) $\Rightarrow$ (ii)$'$ (démonstration valable sans hypothèses de dénombrabilité sur $\mathcal{H}$); il existe un isomorphisme Ω de $\mathcal{A}$ sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$; $\Omega(\mathfrak{Z})$ est abélienne maximale et tout automorphisme Ψ de $\Omega(\mathfrak{Z})$ est défini par un opérateur unitaire V ([2], p. 253, prop. 3)]; si Ψ induit l'identité sur $\mathcal{B}'$, $V \in \mathcal{B}$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) et (ii)$'\Rightarrow$(iii)$'$, tout revient à démontrer ce qui suit : $\mathcal{Y}$ et $\mathfrak{Z}$ étant définies comme précédemment, Γ étant le groupe de toutes les classes de bijections de Z sur Z laissant ν quasi invariante et ν-compatibles avec $\hat{\mathcal{R}}_0$, $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$ est la plus fine des classes de relations d'équivalence à graphes mesurables ν-compatibles avec Γ; c'est-à-dire encore : toute classe de relations d'équivalence à graphes mesurables ν-compatibles avec Γ et plus fine que $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$ est égale à $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$; on est ainsi ramené à étudier séparément les cas de $\mathfrak{Z}$ relativement discrète (resp. continue) par rapport

(²) L'idée de l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) revient à J. DIXMIER.

à $\mathcal{Y}$ et l'on a $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1) = \hat{\mathcal{R}}_0$. De plus, on peut supposer $\mathcal{Z}$ abélienne maximale dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Soit (F_i) une suite de projecteurs de $\mathcal{Y}$ orthogonaux deux à deux, de somme I et tels que $\mathcal{Y}'_{F_i}$ soit homogène pour tout i et soit Z_i le sous espace de Z correspondant à F_i; il suffit de démontrer la proposition pour chaque Z_i, c'est-à-dire dans le cas où $\mathcal{Y}'$ est homogène.

On peut alors écrire (lemme 1) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \otimes C_{\mathcal{H}_2}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2$, $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ étant abéliennes maximales et $\mathcal{Y}_2$ relativement discrète (resp. continue) par rapport à $C_{\mathcal{H}_2}$. Soit $\mathcal{H}_1 = L^2(Y_1, \mu_1)$ une décomposition de $\mathcal{H}_1$ associée à Y_1, Y_1 étant localement compact et $\|\mu_1\| = 1$; il existe une décomposition $\mathcal{H}_2 = L^2(Y_2, \mu_2)$ associée à $\mathcal{Y}_2$ où Y_2 est le segment $[0, 1]$ (resp. un espace dénombrable) et μ_2 la mesure de Lebesgue (resp. la masse $+1$ en chaque point). On peut identifier (Z, ν) à $(Y_1 \times Y_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, $\hat{\mathcal{R}}_0$ à la classe de relations d'équivalence définie par pr_1 et Γ au groupe des classes de bijections de Z sur Z laissant ν quasi invariante et conservant chaque ensemble $\mathrm{pr}_1^{-1}(\eta_1)$ $\eta_1 \in Y_1$; la proposition résulte alors du lemme 2.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soit E le plus grand projecteur de $\mathcal{Y}$ relativement continu dans $\mathcal{Z}$ par rapport à $\mathcal{Y}$ (§ 6, prop. 5); on a $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_E \times \mathcal{Y}_{I-E}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_E \times \mathcal{Z}_{I-E}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_E \times \mathcal{A}_{I-E}$. $\mathcal{Z}_{I-E}$ contient un projecteur P relativement minimal par rapport à $\mathcal{Y}_{I-E}$ et de support $I - E$ (§ 6, prop. 6); P est aussi relativement minimal dans $\mathcal{A}_{I-E}$ par rapport à $\mathcal{Y}_{I-E}$ (lemme 3) donc $\mathcal{A}_{I-E}$ est discrète ([2], p. 123, théorème 1). On est donc ramené au cas où $\mathcal{Z}$ est relativement continue par rapport à $\mathcal{Y}$; alors $\hat{\mathcal{R}}_0 = \sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$.

Soient $\mathcal{H} = \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta).d\nu(\zeta)$ une décomposition de $\mathcal{H}$ associé à $\mathcal{Z}$, $\mathcal{H} = \int_Y^{\oplus} \mathcal{H}(\eta).d\mu(\eta)$ une décomposition de $\mathcal{H}$ associée à $\mathcal{Y}$ (Y étant à base dénombrable) telle que l'injection canonique de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Z}$ définisse une application φ de Z sur Y et que $\mu = \varphi(\nu)$; soit $\nu = \int \nu_\eta.d\mu(\eta)$ une désintégration de ν relative à φ.

D'après le paragraphe 5, proposition 2, on peut supposer de plus que $\mathcal{H}(\eta) = \int^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta).d\nu_\eta(\zeta)$ pour tout η et il existe une décomposition $\mathcal{Z} = \int^{\oplus} \mathcal{Z}(\eta), d\mu(\eta)$ telle que pour tout η $\mathcal{Z}(\eta)$ soit l'algèbre des opérateurs diagonalisables pour la décomposition de $\mathcal{H}(\eta)$. Soit

$$\mathcal{A}' = \int^{\oplus} \mathcal{A}'(\eta).d\mu(\eta)$$

une décomposition de $\mathcal{A}'$ telle que $\mathcal{A}'(\eta)$ soit un facteur pour tout η.

Considérons une suite $T_i = \int^{\oplus} T_i(\eta).d\mu(\eta) = \int^{\oplus} T_i(\zeta).d\nu(\zeta)$ d'élément de $\mathcal{A}'$ telle que pour tout η la suite $(T_i(\eta))$ engendre $\mathcal{A}'(\eta)$ et que

$$T_i(\eta) = \int^{\oplus} T_i(\zeta).d\nu_\eta(\zeta) \qquad (\S\ 5,\ \text{prop. } 2).$$

Définissons sur Z la relation d'équivalence : $\mathcal{R}(\zeta, \zeta')$ si et seulement si il existe un isomorphisme de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}(\zeta')$ transformant $T_i(\zeta)$ en $T_i(\zeta')$ pour tout i. Montrons que $\mathcal{R}$ est ν-compatible avec Γ.

Soit s telle que $\hat{s}$ corresponde à un élément Φ de G, et soit U un unitaire de $\mathcal{A}$ tel que $\Phi(T) = U.T.U^{-1}$ pour tout $T \in \mathfrak{Z}$; d'après le paragraphe 4, proposition 1 il existe un ensemble $\tilde{Z} \subset Z$ de complémentaire négligeable, stable par s et s^{-1} et un isomorphisme ψ_ζ de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}(s\zeta)$ quel que soit $\zeta \in \tilde{Z}$ de façon que pour tout $x = (x(\zeta)) \in \mathcal{H}$ on ait

$$(Ux)(\zeta) = r(s^{-1}\zeta)^{-\frac{1}{2}}.\psi_{s^{-1}\zeta}(x(s^{-1}\zeta))$$

pour presque tout $\zeta \in \tilde{Z}$, r est une fonction telle que

$$d\nu(s\zeta) = r(\zeta).d\nu(\zeta).$$

Pour un i donné, T_i permute à U, donc pour tout x on a, pour presque tout $\zeta \in \tilde{Z}$,

$$T_i(s\zeta).\psi_\zeta(x(\zeta)) = \psi_\zeta(T_i(\zeta).x(\zeta)).$$

Soit $x_j = (x_j(\zeta))$ un champ mesurable de bases orthonormales; pour un i donné on a pour presque tout $\zeta \in \tilde{Z}$

$$T_i(s\zeta).\psi_\zeta(x_j(\zeta)) = \psi_\zeta(T_i(\zeta).x_j(\zeta)) \qquad \forall j.$$

Comme il s'agit d'opérateurs continus dans $\mathcal{H}(s\zeta)$, pour un i donné on a pour presque tout $\zeta \in \tilde{Z}$

$$T_i(s\zeta).\psi_\zeta = \psi_\zeta.T_i(\zeta)$$

Enfin on a pour presque tout $\zeta \in \tilde{Z}$

$$T_i(s\zeta).\psi_\zeta = \psi_\zeta.T_i(\zeta) \qquad \text{pour tout } i.$$

c'est-à-dire $\mathcal{R}(\zeta, s\zeta)$. Et $\mathcal{R}$ est ν-compatible avec Γ. $\mathcal{R}$ ayant un graphe mesurable (lemme 4), on a $\mathcal{R} \prec \mathcal{R}_0$; il existe donc un ensemble $A \subset Z$ de complémentaire négligeable tel que $\mathcal{R}_A \leq (\mathcal{R}_0)_A$. Pour presque tout $\eta \in Y$, soit pour $\eta \in Y'$ de complémentaire μ-négligeable, $A'_\eta = A \cap \varphi^{-1}(\eta)$ est de complémentaire ν_η-négligeable dans $\varphi^{-1}(\eta)$.

D'autre part, pour presque tout $\zeta \in Z$ la suite $T_i(\zeta)$ engendre $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\zeta))$, donc pour presque tout $\eta \in Y$, soit pour $\eta \in Y''$ de complémentaire μ-négligeable, il existe un ensemble $A''_\eta \subset \varphi^{-1}(\eta)$ de complémentaire ν_η-négligeable tel que si $\zeta \in A''_\eta$ la suite $T_i(\zeta)$ engendre $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\zeta))$. Prenons

$$\eta^0 \in Y' \cap Y''$$

et

$$\zeta^0 \in A'''_{\eta^0} = A'_{\eta^0} \cap A''_{\eta^0}.$$

Réduisons $\varphi^{-1}(\eta^0)$ à A'''_{η^0} et posons

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{H}(\zeta^0), \qquad S_i = T_i(\zeta^0).$$

Soit $U(\zeta)$ $(\zeta \in A'''_{\eta^0})$ un isomorphisme (nous savons qu'il en existe) de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}(\zeta^0)$ transformant $T_i(\zeta)$ en S_i pour tout i. D'après ([2], p. 173, th. 2) il existe un isomorphisme de $\mathcal{H}(\eta^0)$ sur $L^2(Z, \nu_{\eta^0}) \otimes \mathcal{K}_0$ transformant $T_i(\eta^0)$ en $I \otimes S_i$ pour tout i. Cet isomorphisme transforme $\mathcal{A}'(\eta^0)$ en $I \otimes \mathcal{L}(\mathcal{K}_0)$ et $\mathcal{A}'(\eta^0)$ est discret; ceci étant vrai pour presque tout $\eta^0 \in Y$, $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ sont discrètes.

C. Q. F. D.

En supposant que $\mathcal{A}$ est un facteur et en se bornant au cas où $\mathfrak{Z}$ est sans projecteurs minimaux, on obtient le

COROLLAIRE.

a. Le facteur $\mathcal{A}$ est discret si et seulement s'il existe une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{Z}$ de $\mathcal{A}$ telle que tout automorphisme de $\mathfrak{Z}$ soit défini par un opérateur unitaire de $\mathcal{A}$; dans ce cas toute sous-algèbre abélienne maximale possède cette propriété.

b. Le facteur $\mathcal{A}$ est discret si et seulement s'il existe une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{Z}$ de $\mathcal{A}$ telle que toute relation d'équivalence sur Z à graphe $\nu \otimes \nu$-mesurable et ν-compatible avec Γ soit ν-équivalente à la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par « $\mathcal{R}(\zeta, \zeta')$ quels que soient ζ et ζ' »; dans ce cas toute sous-algèbre abélienne maximale sans projecteurs minimaux possède cette propriété.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (Nicolas). — Livre 6 : *Intégration*, Chap. 5 et 6. Paris, Hermann, 1956-1960 (*Act. scient. et ind.*, 1244 et 1281; Bourbaki, 21 et 25).

[2] DIXMIER (Jacques). — *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien.* Paris, Gauthier-Villars, 1957 (*Cahiers scientifiques*, 25).

[3] DYE (H. A.). — On groups of measure preserving transformations, *Amer. J. of Math.*, t. 81, 1959, p. 119-159.
[4] GUICHARDET (Alain). — Une caractérisation des algèbres de von Neumann de type I, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 248, 1959, p. 3398-3400.
[5] MACKEY (George W.). — Induced representations of locally compact groups, I., *Annals of Math.*, t. 55, 1952, p. 101-139.
[6] MAHARAM (Dorothy). — On homogeneous measure algebras, *Proc. Nat Acad. Sc. U. S. A.*, t. 28, 1942, p. 108-111.
[7] VON NEUMANN (John). — Einige Sätze über messbare Abbildungen, *Annals of Math.*, t. 33, 1932, p. 574-586.

(Manuscrit reçu le 29 juillet 1960.)

Alain GUICHARDET,
48, rue Rapatel,
Montreuil (Seine).