G. REEB

Remarques sur les structures feuilletées

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 445-450
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__445_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89, 1959, Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 445 à 450.

REMARQUES SUR LES STRUCTURES FEUILLETÉES;

PAR

GEORGES REEB
(Grenoble).

INTRODUCTION. — Je me propose d'indiquer ici un certain nombre de remarques qui prolongent des résultats contenus dans la thèse de HAEFLIGER et dans la mienne [2], [3] sur les structures feuilletées.

Ces résultats concernent l'un ou l'autre des deux types de structures suivants :

(i) Structures feuilletées de co-dimension 1

(ii) Structures feuilletées analytiques.

Dans un souci de simplicité, je restreindrai mon exposé à la considération des variétés feuilletées, bien que les extensions à des structures feuilletées soient à peu près immédiates.

1. Rappel de définitions et de résultats antérieurs. — Nous considérons ici des structures feuilletées, de co-dimension p définies sur une variété V_n à n dimensions, de l'un des types suivants :

(i) *stuctures de classe* C_∞.

(ii) *structures analytiques réelles*,

(iii) *structures complexes.*

Une structure feuilletée de co-dimension p sur V_n est définie par la donnée d'un système de Pfaff Σ_p complètement intégrable de rang p sur V_n. Le système Σ_p est de classe C_∞, analytique réel, ou analytique complexe (sur la variété complexe à n dimensions complexes V_n) selon qu'on est en présence d'une structure du type (i), (ii), (iii).

Étant donnée une structure feuilletée (V_n, Σ_p), il existe au voisinage de tout $x \in V_n$ des systèmes de fonctions (de classe C_∞, analytiques réelles, ou analytiques complexes) $\varphi_1 \ldots \varphi_p$ tels que le système Σ_p soit équivalent, au voisinage de x, à :

$$d\varphi_1 = d\varphi_2 = \ldots = d\varphi_p = 0.$$

On définit dès lors une topologie fine T sur V_n, cette topologie T est la topologie la moins fine telle que les fonctions $\varphi_1, \ldots \varphi_p$, soient localement constantes. Cette topologie est une topologie de variété [à $n-p$ dimensions dans le cas d'une structure réelle et de $2(n-p)$ dimensions dans le cas d'une structure complexe]. Les composantes connexes de cette topologie T sont les feuilles (ou variétés intégrales de Σ_p). En fait, on peut subordonner à T une structure de variété de classe C_∞, analytique réelle ou analytique complexe selon que la structure (V_n, Σ_p) est de type (i), (ii) ou (iii).

Une feuille γ est dite propre si sa topologie de feuille coïncide avec la topologie initiale de V_n dans γ. Je rappelle les résultats suivants de [2] et [3] qui seront utiles pour la suite de mon exposé.

THÉORÈME. — *Si A est une réunion de feuilles propres de (V_n, Σ_p) et si A est compact, alors A contient au moins une feuille compacte.*

EXEMPLE. — Il existe sur S_3 une structure feuilletée de classe C_∞, de co-dimension 1, dont toutes les feuilles sont propres et dont une seule feuille est compacte (*cf.* [3]).

THÉORÈME DE STABILITÉ. — *Si la feuille γ de (V_n, Σ_p) est compacte et a un groupe de Poincaré fini, il existe un voisinage ouvert Ω de V_n tel que toute feuille γ' qui rencontre Ω soit compacte et contenue dans Ω et admette un groupe de Poincaré fini. Si, de plus, V_n est compact et connexe et si $p = 1$ toutes les feuilles sont compactes et ont un groupe de Poincaré fini.*

THÉORÈME DE HAEFLIGER. — *Il n'existe pas de structure feuilletée analytique réelle de co-dimension 1 sur une variété compacte simplement connexe.*

COMPLÉMENT AU THÉORÈME DE STABILITÉ. — *Si (V_n, Σ_p) est une struture feuilletée analytique réelle ou complexe de co-dimension 1 et si γ est une feuille compacte dont le nombre de Betti (rationnel) de la dimension 1 est nul, il existe un voisinage ouvert Ω de γ tel que toute feuille γ' qui rencontre Ω soit compacte, contenue dans Ω, et ait un nombre de Betti de la dimension 1 égal à 0.*

(On remarquera que le nombre de Betti de dimension 1 peut être nul sans que le groupe de Poincaré soit fini).

Les résultats qui précèdent font apparaître en quoi les conditions d'analyticité ou de co-dimension 1 sont remarquables; ces résultats impliquent également des questions non résolues à ce jour (par exemple : le complément au théorème de stabilité est-il valable si l'on supprime dans son énoncé l'hypothèse d'analyticité ?)

Il reste maintenant à dire quelques mots sur l'outil essentiel que constitue la notion de groupe d'holonomie $\mathcal{G}_x$ d'une feuille γ au point x. Cette notion a été introduite par Ch. EHRESMANN [1]; nous nous contenterons de donner l'idée de la définition et nous citerons quelques conséquences immédiates :

A tout chemin fermé c d'origine x tracé sur γ correspond un homéomorphisme h_c (de classe C_∞, analytique réel, ou analytique complexe) d'un voisinage de l'origine O de R^p ou C^p sur un voisinage de O. Cet homéomorphisme h_c s'exprime au moyen des formules :

$$\overline{\varphi}_i = h_{c,i}(\varphi_j) \tag{1}$$

au moyen des coordonnées locales φ_i introduites ci-dessus. Dans les formules (1) les $\overline{\varphi}_i$ sont les coordonnées de la plaque en laquelle la feuille γ' issue de la plaque de coordonnées φ_i, au voisinage de x, rencontre ce voisinage de x après avoir suivi sur γ' un chemin voisin de c. Si c est déformé, les homéomorphismes h_c définissent un même germe $h_{\overline{c}}$ (où $\overline{c}$ est la classe d'homotopie de c). Les germes $h_{\overline{c}}$ engendrent un groupe $\mathcal{G}_x$ qui est appelé le groupe d'holonomie de γ en x. L'application $\overline{c} \to h_{\overline{c}}$ est homomorphisme p du groupe de Poincaré $\pi(\gamma)$ de γ dans $\mathcal{G}_x$. Si l'on désigne par $h_{\overline{c},r}$ le jet d'ordre r de $h_{\overline{c}}$, les $h_{\overline{c},r}$ forment un groupe noté $\mathcal{G}_{x,r}$.

Dans les cas d'une structure analytique réelle ou complexe, la connaissance des groupes $\mathcal{G}_{x,r}$ définit complètement $\mathcal{G}_x$.

Les éléments de $\mathcal{G}_{x,r}$ se présentent sous la forme polynomiale

$$\overline{\Phi}_i = a_{ij}\Phi_j + a_{ijk}\Phi_j\Phi_k + \ldots + a_{i,i_1 \ldots i_r}\Phi_{i_1}\ldots\Phi_{i_r}$$

et la loi de composition est la loi de composition habituelle des parties polynomiales de degré r des développements limités.

2. Feuilletages de co-dimension 1. — Le théorème de Haefliger cité plus haut met en évidence une propriété remarquable des feuilletages de co-dimension 1 et analytiques réels. Un examen de la démonstration de Haefliger montre qu'en fait l'hypothèse d'analyticité peut être remplacée par l'hypothèse suivante :

Pour chaque feuille γ et chaque élément α du groupe de Poincaré de γ, l'élément du groupe d'holonomie relatif à α est semblable au germe d'une fonction analytique.

Il en résulte en particulier :

THÉORÈME 1. — *Si (V_n, Σ_1) est une structure feuilletée de classe C_∞ dont toutes les feuilles ont un groupe de Poincaré fini, et si V_n est compacte alors le groupe de Poincaré de V_n contient un élément d'ordre infini.*

Donc en particulier, *on ne saurait trouver un feuilletage de co-dimension* 1 *de la sphère S_n dont toutes les feuilles seraient homéomorphes à R^{n-1}.*

Nous allons considérer, à présent, des feuilles γ non compactes possédant la propriété suivante :

(π) *Le filtre d'Alexandroff de γ possède une base formée d'ensembles connexes.*

La propriété (π) signifie : γ a un seul bout. Il en est ainsi pour les feuilles homéomorphes à R^n ($n > 1$).

On montre facilement que l'adhérence $A(\gamma)$ du filtre d'Alexandroff d'une feuille γ est une réunion de feuilles. *Si γ a la propriété (π) et si V_n est compacte, il est clair que $A(\gamma)$ est connexe.*

D'un autre côté, si une feuille γ *d'un feuilletage de co-dimension* 1 contient une feuille compacte γ' dans son adhérence, alors la réunion des feuilles δ qui contiennent γ' dans leur adhérence, est un ouvert.

On en déduit :

Théorème 2. — *Si toutes les feuilles non compactes d'un feuilletage de co-dimension* 1 *de la variété compacte V_n ont une propriété π et sont propres, alors les feuilles compactes de ce feuilletage forment un ensemble connexe.*

Ce théorème éclaire l'exemple classique de la structure feuilletée sur S_3.

Il est intéressant de remarquer que les feuilletages analytiques complexes de co-dimension 1 vérifient la propriété P sauf dans certains cas exceptionnels où les éléments du groupe d'holonomie du 1er ordre (*voir* 3) se présentent sous la forme :

$$z' = \alpha z \qquad \text{où} \quad |\alpha| = 1.$$

Un résultat analogue au théorème 2 est donc valable pour les structures feuilletées analytiques complexes.

Remarque. — Les conclusions du théorème 2 cessent d'être valables si l'on supprime l'hypothèse que les feuilles sont propres.

A ce propos, il est utile d'indiquer qu'on construit facilement des exemples [4], sur une variété V_n compacte et connexe, de feuilletages de co-dimension 1 dont certaines feuilles sont localement partout denses, mais non partout denses. Il est plus difficile de mettre en évidence ce dernier phénomène dans le cas d'un feuilletage de co-dimension $n-1$ (c'est-à-dire dans les cas des lignes intégrales d'un champ de vecteurs); voici un exemple instructif à cet égard :

Considérons, sur le tore T^2, le champ de vecteurs $\vec{V}$ engendrant des trajectoires ergodiques et modifions ce champ en module, mais non en direction, de façon à faire apparaître deux points singuliers α et β situés sur une trajectoire de $\vec{V}$ conformément à la figure 1. Fendons le tore selon le segment $\alpha\beta$, écartons les deux lèvres de la plaie et recollons un disque D sur le contour ainsi formé de façon à obtenir de nouveau un tore. Remplissons ce disque D par

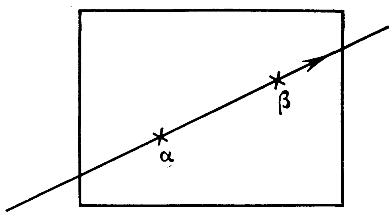

Fig. 1.

un réseau de courbes conformément à la figure 2. De cette façon, on obtient sur le tore un champ de vecteurs $\vec{V}$ (présentant deux singularités) et admettant une ligne intégrale localement partout dense, mais non pas globalement partout dense. On conçoit dès lors qu'il soit possible d'indiquer sur une variété à trois dimensions un phénomène de même espace, mais sur un champ de vecteurs sans singularité.

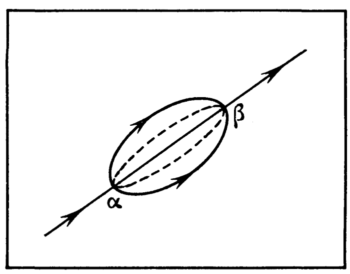

Fig. 2.

3. **Feuilletages analytiques.** — Le point de départ de ce paragraphe est le complément du théorème de stabilité de 1 : ce complément au théorème de stabilité reste-t-il valable si l'on supprime dans l'énoncé les termes suivants : « de co-dimension 1 » et si l'on remplace « (V_n, Σ_1) par (V_n, Σ_p) ». Il est probable que la réponse à cette question soit négative. Mais nous remarquerons que le groupe d'holonomie $\mathcal{G}_{x,r}$ d'ordre r d'une feuille au point x est un groupe linéaire si $r = 1$, et est un groupe abélien pour $r \geq 1$ si $\mathcal{G}_{x,r-1}$ se réduit à l'identité. Il en résulte :

THÉORÈME. — *Si* (V_n, Σ_p), $p > 1$, *est une structure feuilletée analytique réelle ou complexe de co-dimension p et si* γ *est une feuille compacte dont* *le nombre de Betti (rationnel) de la dimension* 1 *est nul et si* $\mathcal{G}_{x,1}$ *est réduit à l'identité, alors il existe un voisinage ouvert* Ω *de* γ *tel que toute feuille* γ' *qui rencontre* Ω *soit compacte et contenue dans* Ω *et ait un nombre de Betti de la dimension* 1 *égal à* 0.

D'une façon plus générale, le théorème précédent reste vrai si l'on supprime dans son énoncé les termes : « $\mathcal{G}_{x;1}$ ($x \in \gamma$) est réduit à l'identité » et si l'on remplace par « il n'existe aucun homéomorphisme p du groupe de Poincaré $\pi(\gamma)$ de γ dans le groupe linéaire de R^p (ou C^p) tel que $p(\pi(\gamma))$ contienne un élément d'ordre infini ».

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ehresmann (Charles). — *Sur la théorie des variétés feuilletées*, (*Rend. Mat. e delle sue Appl.*, 5e série, t. 10, 1951, p. 64-82).

[2] Haefliger (André). — *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes* (*Comment. Math. Helvet.*, t. 32, 1958, p. 248-329) (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1958).

[3] Reeb (Georges). — *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Paris, Hermann, 1952 (*Act. scient. et ind.*, 1183) (*Thèse Sc. math.* Strasbourg, 1948).

[4] Reeb (Georges). — *Sur la théorie générale des systèmes dynamiques* (*Ann. Inst. Fourier Grenoble*, t. 6, 1955-56, p. 89-115).

Georges Reeb
Professeur à la Faculté des Sciences
12, rue Duployé
Grenoble (Isère)