BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL KOOSIS

Nouvelle démonstration d'un théorème de Levinson concernant la distribution des zéros d'une fonction de type exponentiel, bornée sur l'axe réel

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 27-40

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__27_0>

Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 27 à 40.

NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE LEVINSON CONCERNANT LA DISTRIBUTION DES ZÉROS D'UNE FONCTION DE TYPE EXPONENTIEL, BORNÉE SUR L'AXE RÉEL;

PAR

PAUL KOOSIS (1).

Introduction. — LEVINSON ([6], chap. III) a énoncé un théorème sur les fonctions de type exponentiel, dont voici l'essentiel :

Soit $F(z)$ une fonction bornée sur l'axe réel, et de type exponentiel A dans chacun des deux demi-plans inférieur et supérieur. Dans les demi-plans gauche et droite, soient respectivement $n_-(r)$ et $n_+(r)$ le nombre de zéros de $F(z)$ dont les modules sont inférieurs à r. Alors, quand $r \to \infty$, les rapports $\frac{n_-(r)}{r}$ et $\frac{n_+(r)}{r}$ tendent vers la même limite $\frac{A}{\pi}$.

Comme ce résultat s'applique en particulier à la transformée de Fourier de n'importe quelle mesure à support compact convenablement translatée, il est d'une utilité évidente pour l'analyse harmonique, et il y a en effet plusieurs mathématiciens qui l'ont exploité. (*Voir*, par exemple, [6], [11], [3], chap. 12 de [1], et [7]). Cependant, sa démonstration usuelle est assez longue, et utilise de nombreux résultats et techniques appartenant à la théorie générale des fonctions entières, De plus, elle fait appel à un procédé spécial, à savoir, la comparaison de la fonction donnée avec une autre ayant seulement des zéros réels. (*Voir* [6], chap. III et [7], chap. 8.)

On se propose ici de donner une nouvelle démonstration qui évite toutes ces difficultés. Elle est directe, et utilise seulement quelques matériaux d'analyse tels que le théorème de Jensen, des faits élémentaires concernant les produits de Blaschke, et la représentation de Poisson pour les fonctions

---

(1) Fulbright scholar.

harmoniques et négatives dans le cercle-unité, matériaux tous très généraux et assez bien connus; le théorème de Carleman, par exemple, ne sera pas utilisé. De cette façon on espère avoir rendu le théorème de Levinson plus accessible.

Concernant ses diverses extensions connues ([7], chap. 8), on remarquera que la plupart pourraient s'obtenir, en soignant un peu les détails, par notre méthode. Mais, pour plus de clarté, on se bornera ici à prouver le théorème sous la forme ci-dessus.

Remarquons qu'une autre démonstration se trouve dans le livre récent de Levine ([5]); celui-ci ne recourt pas non plus au procédé spécial plus haut mentionné. Mais il utilise une théorie personnelle antérieure, et dans son ensemble sa démonstration est beaucoup plus longue que la nôtre.

On trouve dans la thèse de Nyman ([9]) des évaluations qui permettraient d'obtenir le résultat de notre paragraphe 3. Celles que nous donnons ici nous paraissent intéressantes en elles-mêmes; celle du paragraphe 4, en particulier, peut remplacer dans maintes applications le théorème d'Ahlfors-Heins ([1], paragraphe 7.2).

1. Fonctions de type exponentiel exact. — Soit $F(z)$ une fonction entière de type exponentiel, bornée sur l'axe réel. Sans restreindre la généralité, supposons que $|F(x)| \leqq 1$, $-\infty < x < \infty$. Par deux applications successives du théorème de Phragmén-Lindelöf ([1]), p. 82, [12], chap. 5), on a $|F(z)| \leqq \exp k |\mathcal{I} z|$, k étant une constante.

Soit A la borne inférieure de tous les k pour lesquels cette inégalité est vérifiée dans le demi-plan supérieur. Alors, $|F(z)| \leqq \exp A \mathcal{I} z$, $\mathcal{I} z > 0$, ceci devenant inexact quand on remplace A par un nombre plus petit. Pareillement, $|F(z)| \leqq \exp A' |\mathcal{I} z|$, $\mathcal{I} z < 0$, où A' ne peut être remplacé par aucun nombre plus petit.

Une fonction $F(z)$ avec $A = A'$ sera dite *de type exponentiel exact A*.

Pour chaque fonction $G(z)$ bornée sur l'axe réel et de type exponentiel, il existe des nombres réels C et λ tels que $F(z) \equiv C e^{i\lambda z} G(z)$ soit de type exponentiel exact. Donc, l'étude de la distribution des zéros de $G(z)$ est ramenée à celle d'une fonction de type exponentiel exact, et dans la suite nous considérerons seulement de telles fonctions.

Si m est une mesure à support compact avec segment-support $[-A, A]$, sa transformée de Fourier,

$$\hat{m}(\lambda) = \int_{-A}^{A} e^{i\lambda t}\, dm(t)$$

est, à un facteur constant près, une fonction de type exponentiel exact A. (Théorème de Paley-Wiener, *voir* [2]).

2. Une représentation de Nevanlinna. — Soit $F(z)$ une fonction de type exponentiel exact A. Posons $\Phi(z) = e^{iAz} F(z)$, alors $|\Phi(z)| \leqq 1$

et $\mathcal{I} z > 0$. Appliquons la transformation conforme $z \to w = (i - z)(i + z)^{-1}$ pour transformer $\mathcal{I} z \geq 0$ en $|w| \leq 1$, et posons $\Phi(z) = f(w)$. La fonction $f(w)$ est définie, analytique, et en module inférieure à l'unité pour $|w| < 1$, donc on sait ([**8**], p. 463) qu'on peut écrire $f(w) = g(w) h(w)$ où :

(i) $h(w)$ est le produit de Blaschke formé des zéros de $f(w)$ dans $|w| < 1$;
(ii) $g(w)$ n'a pas de zéros dans $|w| < 1$;
(iii) $h(w)$ et $g(w)$ sont analytiques et en module inférieures à 1 dans $|w| < 1$.

D'ailleurs, les z_n étant les zéros de $F(z)$ dans $\mathcal{I} z > 0$, tous les zéros de $f(w)$ dans $|w| < 1$ sont de la forme $w_n = (i - z_n)(i + z_n)^{-1}$, et l'on sait que

$$\sum_n (1 - |w_n|^2) < \infty.$$

c'est-à-dire que

$$\sum_n \mathcal{I} z_n |z_n|^{-2} < \infty.$$

Alors, $\log|g(w)|$ est harmonique et non positive dans $|w| < 1$, d'où ([**10**], p. 57)

$$\log|g(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2)\, d\sigma(\varphi)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)} \qquad (0 \leq r < 1),$$

σ étant une mesure non positive sur $[-\pi, \pi)$. En remplaçant $re^{i\theta} = w$ par son expression équivalente en z, et $e^{i\varphi}$ par $(i - t)(i + t)^{-1}$, avec t réel, la dernière intégrale se transforme facilement en

$$cy + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, d\mu(t)}{(x - t)^2 + y^2} \qquad (z = x + iy).$$

Ici, la mesure μ est définie par $d\sigma(\varphi) = \dfrac{2\, d\mu(t)}{1 + t^2}$, avec $-\pi < \varphi < \pi$, et $2\pi c$ est la masse assignée par σ au point $-\pi$. En particulier, $c \leq 0$, μ est non positive, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{1 + t^2}$ converge.

Cependant, $h(w)$ devient une fonction de z, soit $B(z)$, définie pour $\mathcal{I} z > 0$ par

$$B(z) = \prod_n \frac{z_n - z}{\bar{z}_n - z} \frac{\bar{z}_n}{z_n}.$$

En tenant compte des relations entre $F(z)$, $\Phi(z)$, et $f(w) = h(w) g(w)$, aussi bien que des formules que nous venons de trouver, on voit que pour $\mathcal{I}z > 0$,

$$\log |F(z)| = (A + c)y + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\,d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2} + \log |B(z)| \qquad (\text{où } z = x+iy).$$

Or, les deux derniers termes de droite étant négatifs on a

$$\log |F(z)| \leqq (A + c)\mathcal{I}z, \qquad \text{avec} \quad \mathcal{I}z > 0,$$

ce qui n'est possible que si $c \geqq 0$, car $F(z)$ est de type exponentiel exact A. Mais aussi $c \leqq 0$, donc $c = 0$; et

$$\log |F(z)| = Ay + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\,d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2} + \log |B(z)|, \qquad (\mathcal{I}z > 0).$$

De la même façon :

$$\log |F(z) = -Ay - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\,d\tilde{\mu}(t)}{(x-t)^2+y^2} + \log |\tilde{B}(z)| \qquad (\mathcal{I}z < 0),$$

où $\tilde{\mu}$ est une mesure non positive sur $(-\infty, \infty)$ avec $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\mu}(t)}{1+t^2}$ convergente, et

$$\tilde{B}(z) = \prod_n \frac{\zeta_n - z}{\bar{\zeta}_n - z}\frac{\bar{\zeta}_n}{\zeta_n} \qquad (\mathcal{I}z < 0),$$

les ζ_n étant des zéros de $F(z)$ dans $\mathcal{I}z < 0$.

Ces formules pour $\log |F(z)|$ constituent une forme affaiblie d'un théorème de Nevanlinna ([7], chap. 6).

3. Un lemme du calcul intégral. LEMME. — *Soit M une mesure sur* $[1, \infty)$ *avec* $\int_1^{\infty} t^{-2}\,dM(t)$ *absolument convergente.*

Alors, à chaque $\eta > 0$ *correspond une suite croissante,* $\{R_n\}$, *telle que* $R_{n+1} \leqq (1 + 3\eta)R_n$ *pour tous les* n, *et*

$$\frac{1}{R_n}\int_1^{\infty} t^{-1}\log\left|\frac{R_n+t}{R_n-t}\right| dM(t) \to 0 \qquad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

DÉMONSTRATION. — Il suffit d'établir ceci pour des mesures M positives, le résultat général s'ensuivant à cause de la positivité de $t^{-1}\log\left|\frac{R+t}{R-t}\right|$ pour R, $t \geqq 0$, et du fait que toute mesure est une combinaison linéaire de mesures non négatives.

Alors, $\eta > 0$ étant donné, soit M une mesure positive. A tout R assez grand faisons correspondre un R' arbitrairement choisi entre $(1-\eta)R$

et $(1+\eta)R$. Lorsque $R \to \infty$, les expressions

$$\frac{1}{R'}\int_{(1+2\eta)R}^{\infty} t^{-1}\log\left|\frac{R'+t}{R'-t}\right| dM(t), \qquad \frac{1}{R'}\int_{1}^{(1-2\eta)R} t^{-1}\log\left|\frac{R'+t}{R'-t}\right| dM(t)$$

tendent toutes deux vers zéro indépendamment du choix de R'. En effet, pour $(1-\eta)R \leqq R' \leqq (1+\eta)R$ et $(1+2\eta)R \leqq t$,

$$\log\left|\frac{R'+t}{R'-t}\right| \leqq C_\eta R' t^{-1},$$

C_η ne dépendant que de η ; la première expression est donc majorée par

$$C_\eta \int_R^{\infty} t^{-2}\, dM(t),$$

qui tend vers zéro quand $R \to \infty$, car $\int_1^{\infty} t^{-2}\, dM(t) < \infty$. De la même façon, avec un D_η dépendant seulement de η, la deuxième expression est inférieure à $D_\eta R^{-1} \int_1^R t^{-1}\, dM(t)$, qui tend encore vers zéro lorsque $R \to \infty$ pour la même raison.

Fixons maintenant R, et considérons la fonction

$$Q(r) = \int_{(1-2\eta)R}^{(1+2\eta)R} t^{-1}\log\left|\frac{r+t}{r-t}\right| dM(t),$$

définie pour $(1-\eta)R \leqq r \leqq (1+\eta)R$. En posant $\frac{r}{t} = s$, on trouve

$$\int_{(1-\eta)R}^{(1+\eta)R} Q(r)\, dr \leqq \int_{(1-2\eta)R}^{(1+2\eta)R} \int_{\frac{1-\eta}{1+2\eta}}^{\frac{1+\eta}{1-2\eta}} \log\left|\frac{s+1}{s-1}\right| ds\, dM(t),$$

puisque les quantités sous les signes d'intégration sont positives. Pour chaque $\eta > 0$, l'intégrale intérieure à droite a une valeur finie, soit I_η, tandis que $Q(r) \geqq 0$, pour $(1-\eta)R \leqq r \leqq (1+\eta)R$; il existe donc au moins un R' entre $(1-\eta)R$ et $(1+\eta)R$ pour lequel

$$Q(R') \leqq \frac{I_\eta}{2\eta R}\int_{(1-2\eta)R}^{(1+2\eta)R} dM(t).$$

c'est-à-dire que

$$\frac{1}{R'}\int_{(1-2\eta)R}^{(1+2\eta)R} t^{-1}\log\left|\frac{R'+t}{R'-t}\right| dM(t) \leqq \frac{I_\eta(1+2\eta)^2}{2\eta(1-\eta)}\int_{(1-2\eta)R}^{(1+2\eta)R} t^{-2}\, dM(t),$$

et la dernière intégrale tend vers zéro quand $R \to \infty$.

Alors, posons $R_n^\star = \left(1+\frac{\eta}{2}\right)^n$, avec $n=1, 2, 3, \ldots$, et, pour chaque n, soit R_n le nombre R' correspondant à $R=R_n^\star$ choisi entre $(1-\eta)R_n^\star$ et $(1+\eta)R_n^\star$ de façon que la dernière inégalité soit vérifiée. On a $R_n \to \infty$ et, par les trois estimations précédentes,

$$\frac{1}{R_n}\int_1^\infty t^{-1}\log\left|\frac{R_n+t}{R_n-t}\right| dM(t) \to 0, \qquad (n\to\infty).$$

D'ailleurs,

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} \leqq \frac{\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^{n+1}(1+\eta)}{\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^{n}(1-\eta)} \leqq 1+3\eta,$$

et si la suite $\{R_n\}$ n'est pas croissante, on peut la rendre croissante en omettant certains termes, de sorte que l'inégalité $R_{n+1} \leqq (1+3\eta)R_n$ reste encore valable.

4. Évaluation des produits de Blaschke. — Considérons maintenant la fonction

$$B(z) = \prod_n \frac{z_n - z}{\bar{z}_n - z}\cdot\frac{\bar{z}_n}{z_n} \qquad (\mathcal{J} z > 0),$$

les z_n étant des zéros de $F(z)$ dont les parties imaginaires sont positives. On sait (§ 2) que $\sum_n \mathcal{J} z_n |z_n|^{-2} < \infty$. D'ailleurs si $n(r)$ est le nombre de z_n avec $|z_n| < r$, $\frac{n(r)}{r}$ est inférieure à une constante, soit C, pour $0 < r < \infty$. (Application usuelle du théorème de Jensen, *voir* [12], p. 249 ou [8], p. 521.)

Lemme. — $\frac{1}{R}\int_0^\pi \log|B(Re^{i\varphi})|\, d\varphi \to 0$ *quand* $R\to\infty$.

(On remarque que la fonction intégrée est toujours négative.)

Démonstration :

$$\log|B(Re^{i\varphi})| = \sum_n \log\left|\frac{Re^{i\varphi} - r_n e^{i\theta_n}}{Re^{i\varphi} - r_n e^{-i\theta_n}}\right|, \qquad \text{où} \quad r_n e^{i\theta_n} = z_n;$$

$$\int_0^\pi \log\left|\frac{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}}{Re^{i\varphi} - re^{-i\theta}}\right| d\varphi = \int_0^\pi \log\left|\frac{\rho e^{i\theta} - e^{i\varphi}}{\rho e^{i\theta} - e^{-i\varphi}}\right| d\varphi, \qquad \text{où} \quad \rho = \frac{r}{R};$$

notons par $J(\rho, \theta)$ la dernière intégrale et étudions la fonction $J(\rho, \theta)$.

Pour $0 \leqq \rho \leqq 2$ on remarque qu'on peut écrire

$$J(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} \log |\rho e^{i\theta} - e^{i\varphi}| \operatorname{sgn} \varphi \, d\varphi,$$

ce qui fait apparaître $J(\rho, \theta)$ comme potentiel logarithmique engendré par une distribution *bornée* de masse, $\operatorname{sgn} \varphi$, située sur la circonférence-unité. Un procédé simple et bien connu (*voir* [4], p. 150-151), basé sur la convergence de $\int_0^1 \log \varphi \, d\varphi$, montre alors que $J(\rho, \theta)$ est continue dans le cercle $0 \leqq \rho \leqq 2$. De là on conclut :

(i) Il existe un $k < \infty$ tel que $|J(\rho, \theta)| \leqq k$, $0 \leqq \rho \leqq 2$.

(ii) Puisque évidemment $J(\rho, 0) = J(\rho, \pi) = 0$, $0 \leqq \rho \leqq 2$, on peut, pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, trouver un $\alpha > 0$ tel que, lorsqu'on a, soit $|\theta| \leqq \alpha$, soit $|\pi - \theta| \leqq \alpha$, on ait $|J(\rho, \theta)| \leqq \varepsilon$ pour $0 \leqq \rho \leqq 2$.

Quand $\rho \geqq 2$,

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{\rho e^{i\theta} - e^{i\varphi}}{\rho e^{i\theta} - e^{-i\varphi}} \right| &= \mathcal{R} \log \frac{1 - \rho^{-1} e^{i(\varphi - \theta)}}{1 - \rho^{-1} e^{-i(\varphi + \theta)}} \\ &= -2 \left(\frac{\sin\theta \sin\varphi}{\rho} + \frac{\sin 2\theta \sin 2\varphi}{\rho^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

d'où

$$|J(\rho, \theta)| \leqq 8 \frac{\sin\theta}{\rho} \qquad \text{pour} \qquad \rho \geqq 2,$$

puisque

$$|\sin n\theta| \leqq n |\sin\theta| \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Alors, $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\alpha > 0$ déterminé dans la remarque (ii). Posons

$$N_\alpha(r) = \text{nombre des } z_n = r_n e^{i\theta_n}$$

tels que

$$r_n < r \quad \text{et} \quad 0 \leqq \theta_n \leqq \alpha \quad \text{ou} \quad \pi - \alpha \leqq \theta_n \leqq \pi;$$

$$\check{N}_\alpha(r) = \text{nombre des } z_n \text{ tels que} \quad r_n < r \quad \text{et} \quad \alpha < \theta_n < \pi - \alpha.$$

La convergence de

$$\sum_n \mathcal{I} z_n |z_n|^{-2} = \sum_n r_n^{-1} \sin\theta_n$$

entraîne celle de $\sum_{\alpha < \theta_n < \pi - \alpha} r_n^{-1}$; donc

$$r^{-1} \check{N}_\alpha(r) \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

D'ailleurs,

$$r^{-1} N_\alpha(r) \leqq r^{-1} n(r) \leqq C.$$

Or,

$$\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\log|B(Re^{i\varphi})|\,d\varphi=\frac{1}{R}\sum_{r_n<2R}J\left(\frac{r_n}{R},\theta_n\right)+\frac{1}{R}\sum_{r_n\geq 2R}J\left(\frac{r_n}{R},\theta_n\right),$$

et il résulte des estimations obtenues ci-dessus que l'expression de droite est en valeur absolue majorée par

$$k\frac{\check{N}_\alpha(2R)}{R}+\varepsilon\frac{N_\alpha(2R)}{R}+8\sum_{r_n\geq 2R}r_n^{-1}\sin\theta_n.$$

Lorsque $R\to\infty$, les premier et dernier termes tendent vers zéro, tandis que le deuxième reste inférieur à $2\varepsilon C$. Donc

$$\limsup_{R\to\infty}\left|R^{-1}\int_0^{\pi}\log|B(Re^{i\varphi})|\,d\varphi\right|\leq 2\varepsilon C,$$

et la démonstration s'achève en faisant $\varepsilon\to 0$.

5. L'existence d'une densité pour les zéros. — Maintenant, nous posons $n(r)$ = nombre total des zéros de $F(z)$ de module inférieur à r, et

$$N(R)=\int_0^R r^{-1}n(r)\,dr.$$

Si $F(z)$ est de type exponentiel exact A, nous allons démontrer que

$$\frac{n(r)}{r}\to\frac{2A}{\pi}\qquad\text{quand}\quad r\to\infty.$$

Montrons d'abord que $\dfrac{N(R)}{R}\to\dfrac{2A}{\pi}$, $(R\to\infty)$. On commence par la formule de Jensen ([**12**], p. 126; [8], p. 459-460) :

$$\frac{N(R)}{R}=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{\pi}\log|F(Re^{i\varphi})|\,d\varphi+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

(Ici on suppose que $F(0)\neq 0$, ce qui n'est pas une restriction.) Or, selon le paragraphe **2**,

$$Ay\geq\log|F(z)|=\quad Ay+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2}+\log|B(z)|\qquad(y>0);$$

$$-Ay\geq\log|F(z)|=-Ay-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,d\tilde{\mu}(t)}{(x-t)^2+y^2}+\log|\tilde{B}(z)|\qquad(y<0);$$

$$z=x+iy.$$

Concernant les deuxièmes termes des expressions de droite, on a, par exemple,

$$\frac{1}{R}\int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R\sin\theta\, d\mu(t)}{(R\cos\theta - t)^2 + R^2\sin^2\theta}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{R}\int_0^\infty t^{-1}\log\left|\frac{R+t}{R-t}\right| (d\mu(t) + d\mu(-t)),$$

l'inversion étant justifiée par la non-positivité de la quantité se trouvant sous les signes d'intégration. Il est ensuite évident que

$$R^{-1}\int_0^1 t^{-1}\log\left|\frac{R+t}{R-t}\right| (d\mu(t) + d\mu(-t)) \to 0 \qquad (R \to \infty).$$

Quant au reste, soit

$$dM(t) = d\mu(t) + d\mu(-t) + d\tilde{\mu}(t) + d\tilde{\mu}(-t).$$

L'intégrale $\int_1^\infty t^{-2}\, dM(t)$ étant, d'après le paragraphe 2, convergente, on peut appliquer le lemme du paragraphe 3. C'est-à-dire, que pour n'importe quel $\eta > 0$ il existe une suite croissante $\{R_n\}$ telle que

$$R_{n+1} \leq (1 + 3\eta) R_n,$$

et

$$R_n^{-1}\int_1^\infty t^{-1}\log\left|\frac{R_n+t}{R_n-t}\right| dM(t) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Puisque μ et $\tilde{\mu}$ sont non positives, ceci reste valable avec $dM(t)$ remplacée soit par $d\mu(t) + d\mu(-t)$, soit par $d\tilde{\mu}(t) + d\tilde{\mu}(-t)$, la suite $\{R_n\}$ restant la même dans chaque cas. Donc

$$\frac{1}{R_n}\int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_n\sin\theta\, d\mu(t)}{(R_n\cos\theta - t)^2 + R_n^2\sin^2\theta}\, d\theta \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

et la même formule subsiste avec $\tilde{\mu}$ au lieu de μ.

D'autre part, nous avons d'après le paragraphe 4 ;

$$\frac{1}{R_n}\int_0^\pi \log|B(R_n e^{i\theta})|\, d\theta \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

et de même :

$$\frac{1}{R_n}\int_\pi^{2\pi} \log|\tilde{B}(R_n e^{i\theta})|\, d\theta \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

En tenant compte des formules pour $\log|F(z)|$, nous avons enfin :

$$\frac{1}{2\pi R_n}\int_0^{2\pi} \log|F(R_n e^{i\theta})|\, d\theta - \frac{1}{2\pi R_n}\int_0^{2\pi} AR_n|\sin\theta|\, d\theta \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

donc

$$\frac{N(R_n)}{R_n} \to \frac{2A}{\pi} \qquad (n \to \infty).$$

Or, $N(R)$ étant croissante,

$$N(R_n) < N(R) < N(R_{n+1}) \qquad \text{pour} \quad R_n < R < R_{n+1},$$

d'où

$$(1+3\eta)^{-1}\frac{N(R_n)}{R_n} < \frac{N(R)}{R} < (1+3\eta)\frac{N(R_{n+1})}{R_{n+1}}, \qquad R_n < R < R_{n+1},$$

puisque $R_{n+1} \leqq (1+3\eta)R_n$. En faisant tendre n vers l'infini, on trouve

$$(1+3\eta)^{-1}\frac{2A}{\pi} \leqq \liminf_{R\to\infty}\frac{N(R)}{R} \leqq \limsup_{R\to\infty}\frac{N(R)}{R} \leqq (1+3\eta)\frac{2A}{\pi},$$

et, comme $\eta > 0$ est arbitraire, nous avons montré que $\frac{N(R)}{R} \to \frac{2A}{\pi}$ quand $R \to \infty$.

A partir de là, on montre que $\frac{n(r)}{r} \to \frac{2A}{\pi}$, $(r \to \infty)$, en suivant un procédé simple, dû à Landau (*voir* [1], p. 58). En effet, quand $R \to \infty$,

$$\frac{N(R)}{R} = \frac{1}{R}\int_0^R \frac{n(r)}{r}\,dr \to \frac{2A}{\pi},$$

donc la même formule subsiste si l'on remplace R par λR, λ étant un nombre quelconque inférieur à l'unité, que nous supposerons, pour le moment, fixé. Donc

$$\frac{1}{R}\int_{\lambda R}^R \frac{n(r)}{r}\,dr \to \frac{2A}{\pi}(1-\lambda) \qquad (R \to \infty),$$

et, $n(r)$ étant non décroissante, ceci entraîne

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{n(R)}{R}\int_{\lambda R}^R \frac{dr}{r} \geqq \frac{2A}{\pi}(1-\lambda).$$

C'est-à-dire que

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{n(R)}{R} \geqq \frac{2A(1-\lambda)}{\pi \log\frac{1}{\lambda}},$$

et, en faisant tendre λ vers 1,

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{n(R)}{R} \geqq \frac{2A}{\pi}.$$

De la même façon,

$$\limsup_{R\to\infty}\frac{n(R)}{R} \leqq \frac{2A}{\pi},$$

donc

$$\frac{n(R)}{R} \to \frac{2A}{\pi} \qquad (R \to \infty),$$

C. Q. F. D.

6. Deux remarques sur le numéro précédent. — Les raisonnements du paragraphe 5 montrent en fait que

$$\int_0^{2\pi} \left| R^{-1} \log |F(Re^{i\varphi})| - A |\sin\varphi| \right| d\varphi \to 0 \qquad (R \to \infty),$$

puisque $\dfrac{N(R)}{R} \to \dfrac{2A}{\pi}$ $(R \to \infty)$, et $R^{-1}\log|F(R\,e^{i\varphi})|$ reste toujours inférieur à $A\,|\sin\varphi|$.

D'ailleurs, si $\alpha > 0$ et si $\check{n}_\alpha(r)$ représente le nombre des zéros de $F(z)$ de module inférieur à r qui se trouvent *en dehors* des deux secteurs $|\arg z| \leqq \alpha$, $|\pi - \arg z| \leqq \alpha$, on a $\dfrac{\check{n}_\alpha(r)}{r} \to 0$ $(r \to \infty)$, d'après les remarques du paragraphe 4. Donc, en posant $n_\alpha(r) = n(r) - \check{n}_\alpha(r)$, on a

$$\frac{n_\alpha(r)}{r} \to \frac{2A}{\pi} \qquad (r \to \infty),$$

pour n'importe quel $\alpha > 0$.

7. Le théorème de Levinson. — Soient $n_+(r)$ et $n_-(r)$ respectivement le nombre des zéros de $F(z)$ dans les demi-plans ouverts droit et gauche, dont les modules sont inférieurs à r.

Montrons que

$$\frac{n_+(r)}{r} - \frac{n_-(r)}{r} \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

(Comparer avec [1], p. 139-140.)

Soit $\{z_n = r_n\,e^{i\theta_n}\}$ la suite des zéros de $F(z)$, et posons

$$S(r) = \sum_{r_n < r} r_n^{-1} \cos\theta_n.$$

On va prouver que quand $r \to \infty$, $S(r)$ converge vers une limite.

Désignons par Γ un cercle de rayon r centré à l'origine, et posons sur Γ, $z = x + iy = r\,e^{i\theta}$. On a

$$\sum_{|z_n| < r} z_n^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\log F(z)}{dz}\,\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{d\log F(z)}{dz}\,d\theta,$$

d'où

$$S(r) = \mathcal{R} \sum_{|z_n| < r} z_n^{-1}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial \log |F(z)|}{\partial x} d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \log |F(r e^{i\theta})|}{\partial r} \cos\theta \, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \log |F(r e^{i\theta})|}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{r} d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \log |F(r e^{i\theta})| \cos\theta \, d\theta + \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \log |F(r e^{i\theta})| \cos\theta \, d\theta,$$

après une intégration par parties.

Ainsi,

$$\frac{1}{R} \int_0^R S(r) \, dr = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \log |F(Re^{i\theta})| \cos\theta \, d\theta$$
$$+ \frac{1}{2\pi R} \int_0^R \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \log |F(re^{i\theta})| \cos\theta \, d\theta \, dr.$$

Or, on sait d'après le paragraphe 6 que $r^{-1} \log |F(re^{i\theta})|$ converge suivant la norme de $\mathcal{L}_1$ lorsque $r \to \infty$; partant, la dernière expression de droite tend vers une limite finie, soit c, quand $R \to \infty$. (En fait, on voit facilement que $c = 0$.) Il en résulte que

$$R^{-1} \int_0^R S(r) \, dr \to c \qquad (R \to \infty).$$

Par la même méthode que celle de la fin du paragraphe 5, il s'ensuit que, pour n'importe quel $\lambda < 1$,

$$\frac{1}{(1-\lambda)R} \int_{\lambda R}^R S(r) \, dr \to c \qquad (R \to \infty).$$

D'où

$$\limsup_{R \to \infty} \left| S(R) - \frac{1}{R} \int_0^R S(r) \, dr \right| \leq \limsup_{R \to \infty} \frac{1}{(1-\lambda)R} \int_{\lambda R}^R |S(R) - S(r)| \, dr.$$

Mais pour $\lambda R \leq r \leq R$,

$$|S(R) - S(r)| \leq \int_{\lambda R}^R t^{-1} dn(t) = \frac{n(R)}{R} - \frac{n(\lambda R)}{\lambda R} + \int_{\lambda R}^R \frac{n(t)}{t} \frac{dt}{t}$$
$$\leq \frac{n(R)}{R} - \frac{n(\lambda R)}{\lambda R} + \frac{1}{\lambda R} \int_{\lambda R}^R \frac{n(t)}{t} \, dt,$$

la fonction $n(t)$ étant celle définie dans le paragraphe 5. Comme, d'après le paragraphe 5, $\frac{n(t)}{t} \to \frac{2A}{\pi}$ $(t \to \infty)$, la dernière expression est inférieure à $4\frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{A}{\pi}$ pour R assez grand. Donc

$$\limsup_{R\to\infty} \left| S(R) - \frac{1}{R}\int_0^R S(r)\,dr \right|$$
$$\leq \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{(1-\lambda)R}\int_{\lambda R}^R |S(R) - S(r)|\,dr \leq \frac{4A(1-\lambda)}{\pi\lambda},$$

et en faisant $\lambda \to 1$,

$$S(R) - \frac{1}{R}\int_0^R S(r)\,dr \to 0 \qquad (R \to \infty).$$

[Ici, nous avons adopté un procédé utilisé par ZYGMUND pour démontrer le théorème taubérien $O\left(\frac{1}{n}\right)$ sur la sommabilité $(C, 1)$; *voir* [13], p. 47.]

Alors,

$$\frac{1}{R}\int_0^R S(r)\,dr = \sum_{r_n<R} \left(1 - \frac{r_n}{R}\right)\frac{\cos\theta_n}{r_n},$$

ce qui, avec la formule définissant $S(r)$, montre que

$$\frac{1}{R}\sum_{r_n<R} \cos\theta_n = S(R) - \frac{1}{R}\int_0^R S(r)\,dr \to 0 \qquad (R \to \infty).$$

Cependant, $|\cos\theta_n - \operatorname{sgn}\cos\theta_n| \leq 2|\sin\theta_n|$ tandis que $\sum_n r_n^{-1}|\sin\theta_n| < \infty$ (§ 2), d'où $R^{-1}\sum_{r_n<R} |\sin\theta_n| \to 0$ $(R \to \infty)$. Ceci, rapproché de ce qui précède, donne $R^{-1}\sum_{r_n<R} \operatorname{sgn}\cos\theta_n \to 0$, c'est-à-dire

$$\frac{n_+(R) - n_-(R)}{R} \to 0 \qquad \text{quand} \quad R \to \infty,$$

C. Q. F. D.

Avec ce résultat et les observations faites à la fin du paragraphe 1, nous avons achevé la démonstration du théorème de Levinson. Nous l'énoncerons maintenant sous la forme suivante :

THÉORÈME. — *Soit $F(z)$ une fonction de type exponentiel exact A. Etant donné n'importe quel secteur fermé S avec son sommet à l'origine, soit $n_S(R)$ le nombre de zéros de $F(z)$ contenus dans S dont les modules* *sont inférieurs à R. Alors,*

(i) $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{n_S(R)}{R} = 0$, *si l'axe réel se trouve en dehors de S;*

(ii) $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{n_S(R)}{R} = \dfrac{A}{\pi}$, *si S contient à son intérieur soit le demi-axe réel positif, soit le négatif;*

(iii) $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{n_S(R)}{R} = \dfrac{2A}{\pi}$, *si S contient tout l'axe réel à son intérieur.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Boas (Ralph Philip). — *Entire Functions*, New York, Academic Press, 1954.

[2] Dufresnoy (Jacques). — *Sur le produit de composition de deux fonctions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 857-859).

[3] Kahane (Jean-Pierre). — *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 5, 1953-1954, p. 39-130).

[4] Kellog (Olivier Dimon). — *Foundations of potential theory*, Berlin, Springer, 1929 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Band 31). Reprinted, New York, Dover, 1953.

[5] Levine (B. Ya.). — *Raspredelenie kornei tselykh funkcii* (*Distribution des racines des fonctions entières*), Moscou, 1956.

[6] Levinson (Norman). — *Gap and density theorems*, New York, American mathematical Society, 1940 (*American mathematical Society Colloquium Publications*, n° 26).

[7] Lions (Jacques-Louis). — *Supports de produits de composition* (I., *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1530-1532; II., *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1622-1624).

[8] Markuševič (A. I.). — *Teorija analitičeskikh funkcij* (*Théorie des fonctions analytiques*), Moscou, 1950.

[9] Nyman (Bertil). — *On the one-dimensional translation group and semi-group in certain function spaces*, University of Uppsala, 1950 (Thèse de l'Université d'Uppsala).

[10] Privalov. — *Graničnye svojstva analitičeskikh funkcij* (*Propriétés limites des fonctions analytiques*), Moscou, 1950.

[11] Schwartz (Laurent). — *Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires* (*Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse*, 4e série, t. 6, 1942, p. 111-174).

[12] Titmarsh (E. C.). — *The theory of functions*, 2e éd. 1939, reprinted 1952 (corrected), London, Oxford University Press, 1952.

[13] Zygmund (Antoni). — *Trigonometrical series*, Warszawa-Lwow, 1935 (*Monografje Matematyczne*, t. 5), Reprinted, New York, Chelsea, 1952.

(Manuscrit reçu le 16 décembre 1957.)

Paul Koosis,
Faculté des Sciences,
31, rue de l'Université,
Montpellier (Hérault).