

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUELINE LELONG-FERRAND

**Application des méthodes de Hilbert à l'étude  
des transformations infinitésimales d'une  
variété différentiable**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 86 (1958), p. 1-26

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1958\\_\\_86\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__1_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**BULLETIN**  
DE LA  
**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

*Bull. Soc. math. France,*  
86, 1958, p. 1 à 26.

**APPLICATION DES MÉTHODES DE HILBERT  
A L'ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES  
D'UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE;**

PAR

M<sup>me</sup> JACQUELINE LELONG-FERRAND.

---

**1. Introduction.** — La donnée d'un champ de vecteurs  $\xi$ , sur une variété différentiable  $V^n$ , pose, entre autres, les problèmes suivants :

**PROBLÈME 1.** — *A quelles conditions doit satisfaire le champ  $\xi$  pour que la transformation infinitésimale  $X_\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , définie par ce champ, corresponde à un groupe global de transformations de  $V^n$ ?*

La réponse est simple et connue quand la variété  $V^n$  est compacte, tout champ  $\xi$  suffisamment régulier définissant alors un groupe global. D'autre part nous avons déjà étudié le problème général par une méthode directe, dans [5] et [7] et nous avons établi alors une condition nécessaire et suffisante très générale, de nature géométrique. Les méthodes de l'analyse fonctionnelle nous permettront de donner ici une autre réponse (théorème 9a); et par retour à des considérations géométriques, nous retrouverons la condition établie dans [7].

**PROBLÈME 2.** — *A quelles conditions doit satisfaire le champ  $\xi$  pour que la transformation infinitésimale associée  $X_\xi$  définisse un groupe compact à un paramètre?*

Ici encore nous établirons une condition nécessaire et suffisante fondée sur les propriétés de l'opérateur  $X_{\xi}$  (théorème 13a).

Il est à remarquer que l'algèbre de Lie  $\{X_{\alpha}\}$  définie par un groupe de Lie compact à un nombre quelconque de dimensions, opérant sur  $V^n$ , satisfait à une condition analogue; mais cette question ne sera pas étudiée ici <sup>(1)</sup>. Nous verrons, par contre, que le problème 2 est étroitement lié à un problème de décomposition orthogonale, qui sera formulé de façon précise plus loin, mais qu'on peut, en gros, énoncer sous la forme suivante :

**PROBLÈME 3.** — *A quelles conditions doit satisfaire le champ  $\xi$  pour que l'opérateur associé  $X_{\xi}$  donne lieu à une décomposition « forte » [analogue à celle de Kodaira] de l'espace des fonctions, ou, plus généralement, des tenseurs, de carré sommable sur  $V^n$ ?*

Les méthodes employées seront essentiellement des méthodes d'analyse fonctionnelle, fondées sur les propriétés des opérateurs adjoints dans un espace de Hilbert. On connaît le succès de ces méthodes pour l'étude des opérateurs  $d$  et  $\delta$  attachés à une variété riemannienne; il est donc assez naturel de les appliquer aux opérateurs  $X_{\xi}$ . Cependant, comme on le verra, les résultats obtenus seront d'une nature assez différente.

Il est à remarquer enfin que la résolution du problème 3 donne, implicitement, la solution globale de certains systèmes particuliers d'équations linéaires aux dérivées partielles : des méthodes analogues ont été appliquées par K. O. FRIEDRICHS <sup>(2)</sup> à une étude générale de ces systèmes.

Les résultats principaux ont été énoncés dans [6].

**DÉFINITIONS.** — Une fonction  $f(x^1, \dots, x^n)$ , définie dans un ouvert de  $R^n$ , sera dite de classe  $C_1^k$  ( $k \geq 0$ ) si elle est pourvue de dérivées d'ordre  $k$ , satisfaisant, en tout point, à une condition de Lipschitz.

Par extension, une variété différentiable  $V^n$  sera dite de classe  $C_1^k$  si les fonctions qui définissent les changements de coordonnées admissibles sont de classe  $C_1^k$ .

Dans tout ce qui suit,  $V^n$  désignera une variété différentiable ouverte, connexe, non nécessairement orientable, de classe  $C_1^1$ , pourvue d'une structure uniforme compatible avec sa topologie. Si  $V^n$  n'est pas complète, nous supposerons qu'elle admet un bord régulier  $\partial V^n$ , c'est-à-dire qu'elle peut être complétée par adjonction d'un bord  $\partial V^n$ , localement défini par  $x^n = 0$  dans un système de coordonnées admissibles, et nous poserons  $\bar{V}^n = V^n \cup \partial V^n$  (fermeture de  $V^n$ ) <sup>(3)</sup>.

Par le procédé devenu classique <sup>(4)</sup> de « doublement » des variétés à bord,

<sup>(1)</sup> Certains résultats, relatifs à cette question, ont été énoncés dans [4].

<sup>(2)</sup> Conférence à la Société mathématique de France, 31 mai 1957, non publiée.

<sup>(3)</sup> Pour une définition plus précise du bord, voir [7].

<sup>(4)</sup> Voir, par exemple, P. E. CONNER [1].

le cas d'une variété à bord régulier se ramène à celui d'une variété complète sans bord. Mais il est à remarquer que, même si  $V^n$  est de classe  $C_1^k$ , avec  $k > 1$ , la variété complète double n'est, en général, que de classe  $C_1^1$ .

La variété  $V^n$  est finie si la variété complète double est compacte.

**2. Les opérateurs  $X_\xi$ .** — On sait que, sur une variété différentiable paracompacte de classe  $C_1^k$ , il est possible de définir une métrique riemannienne  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ , de classe  $C_1^{k-1}$ , et, partant, un élément de volume  $d\tau = \sqrt{g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ . Dans la plus grande partie de cette étude, nous supposons seulement qu'on a pu définir sur  $V^n$  un élément de volume  $d\tau = \gamma dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , où  $\gamma$  est une densité de classe  $C_1^0$ . Cette condition est réalisée en particulier sur la variété constituée par un groupe localement euclidien quelconque.

Sur une variété  $V^n$  de classe  $C_1^1$ , on peut définir des champs de tenseurs de classe  $C_1^0$ , et des fonctions de classe  $C_1^1$ . A tout champ de vecteurs  $\xi$ , de classe  $C_1^0$ , nous ferons correspondre la transformation infinitésimale  $X_\xi$ , c'est-à-dire l'opérateur différentiel du premier ordre agissant sur les fonctions  $f$  de classe  $C_1^0$  selon la loi  $X_\xi f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ , où  $\xi^i$  désignent les composantes de  $\xi$  dans le système de coordonnées locales  $x^i$ . Le transformé  $X_\xi f$  d'une fonction  $f$  de classe  $C_1^0$  est une fonction définie presque partout et mesurable; si  $f$  est de classe  $C_1^1$  alors  $X_\xi f$  est de classe  $C_1^0$ .

Plus généralement,  $X_\xi$  opère sur les champs de tenseurs de classe  $C_1^0$  selon la loi

$$X_\xi T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \xi^r \frac{\partial}{\partial x^r} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + \sum_{k=1}^p \frac{\partial \xi^r}{\partial x^{i_k}} T_{i_1 \dots i_{k-1} r i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} - \sum_{h=1}^q \frac{\partial \xi^r}{\partial x^r} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{h-1} r j_{h+1} \dots j_q}$$

le transformé  $X_\xi T$  du tenseur  $T$  étant un tenseur de même variance, défini presque partout et mesurable.

En particulier,  $X_\xi$  agit sur les formes différentielles de classe  $C_1^0$ , considérées comme liées à des tenseurs covariants antisymétriques, en conservant leur degré. Et l'on a alors

$$X_\xi \varphi = d i_\xi \varphi + i_\xi d \varphi,$$

où  $d$  désigne l'opérateur de différentiation extérieure, et où  $i_\xi$  est l'opérateur « produit intérieur » par le vecteur  $\xi$ , défini par

$$i_\xi \varphi = \xi^r \varphi_{r(i_1 \dots i_{p-1})} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}.$$

D'autre part la formule de dérivation d'un produit se généralise ici en

$$X_\xi (\varphi \wedge \psi) = X_\xi \varphi \wedge \psi + \varphi \wedge X_\xi \psi.$$

En appliquant ces règles à l'élément du volume  $d\tau = \gamma dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , on obtient

$$X_\xi d\tau = -\delta_\xi^\zeta d\tau,$$

avec

$$\delta_\xi^\zeta = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x^i} (\gamma \xi^i) \quad [\text{divergence du vecteur } \xi].$$

**3. Espaces fonctionnels.** —  $V^n$  étant une variété différentiable de classe  $C_1^1$  sur laquelle on a défini un élément de volume  $d\tau$ , nous désignerons par  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert constitué par les fonctions réelles ou complexes, de carré sommable sur  $V^n$ , avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{V^n} f \bar{g} d\tau.$$

Si  $V^n$  est une variété riemannienne de classe  $C_1^1$ , portant la métrique  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ , nous désignerons par  $\mathcal{H}_p^q$  l'espace de Hilbert constitué par les tenseurs  $p$  fois covariants et  $q$  fois contravariants, de carré sommable sur  $V^n$ , avec le produit scalaire

$$\langle S, T \rangle = \int_{V^n} (S, T) d\tau,$$

où l'on a posé

$$(S, T) = g^{i_1 i_1} \dots g^{i_p i_p} g_{j_1 s_1} \dots g_{j_q s_q} S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \bar{T}_{(s_1 \dots s_q)}^{(i_1 \dots i_p)}.$$

Le sous-espace de  $\mathcal{H}_p^0$  constitué par les tenseurs  $p$  fois covariants antisymétriques sera désigné par  $\mathcal{H}_p$ ; il s'identifie à l'espace des formes différentielles  $\varphi$  de degré  $p$  et de carré sommable sur  $V^n$ , muni du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{V^n} \varphi \wedge \star \bar{\psi}.$$

**4. Formules fondamentales.** —  $\varphi$  étant une forme différentielle de degré  $n$ , on a  $X_\xi \varphi = di_\xi \varphi$ ; d'où, si  $V^n$  est une variété finie à bord régulier :

$$\int_{V^n} X_\xi \varphi = \int_{\partial V^n} i_\xi \varphi = (-1)^{n-1} \int_{\partial V^n} \xi^n \varphi_{12 \dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1},$$

en désignant par  $\{x^i\}$  un système de coordonnées locales canoniques (telles que  $\partial V^n$  soit caractérisé localement par  $x^n = 0$ ). Plus généralement, si le bord de  $V^n$  est localement défini par  $r(x) = R$ , où  $r(x)$  est une fonction de classe  $C_1^1$ , on pourra poser  $x^n = r(x) - R$ , d'où  $\xi^n = X_\xi r$ , et

$$(1) \quad \int_{V^n} X_\xi \varphi = \int_{\partial V^n} X r \left( \frac{\varphi}{dr} \right) \quad (5),$$

$\omega = \left( \frac{dr}{\varphi} \right)$  étant la forme différentielle définie par  $dr \wedge \omega = \varphi$ .

---

(5) A partir de maintenant, quand aucune confusion ne sera possible, nous laisserons tomber l'indice  $\xi$  et écrirons  $X$  au lieu de  $X_\xi$ .

Si nous appliquons cette formule à la forme  $\varphi = f\bar{g} d\tau$ , où  $f, g \in \mathcal{X}$ , nous obtenons

$$\langle Xf, g \rangle + \langle f, Xg \rangle - \int_{V^n} \partial_{\xi} f \bar{g} d\tau = \int_{\partial V^n} f \bar{g} Xr \frac{d\tau}{dr}.$$

Si donc nous introduisons le nouvel opérateur  $\tilde{X}$  défini par

$$(2) \quad \tilde{X}f = \partial_{\xi} f - Xf,$$

la différence  $\langle Xf, g \rangle - \langle f, \tilde{X}g \rangle$  s'exprime par une intégrale étendue au bord de  $V^n$ , soit

$$(3) \quad \langle Xf, g \rangle - \langle f, \tilde{X}g \rangle = \int_{\partial V^n} f \bar{g} Xr \frac{d\tau}{dr}.$$

Si,  $V^n$  étant une variété riemannienne, nous appliquons la formule (4, 1) à  $\varphi = (S, T) d\tau$ , où  $S$  et  $T$  désignent deux tenseurs de même variance, nous obtenons la formule plus générale

$$(4) \quad \langle XS, T \rangle - \langle S, \tilde{X}T \rangle = \int_{\partial V^n} (S, T) Xr \frac{d\tau}{dr},$$

l'opérateur  $\tilde{X}$  étant défini par

$$(5) \quad \begin{aligned} XT_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + \tilde{X}T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} &= \partial_{\xi} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \\ &+ \sum_{k=1}^p t_{ik}^r T_{i_1 \dots i_{k-1} r i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} - \sum_{h=1}^q t_r^h T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{h-1} r j_{h+1} \dots j_q}, \end{aligned}$$

avec

$$t_{ij} = Xg_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} \quad \text{et} \quad t_i^r = g^{rj} t_{ij}$$

(ce qui entraîne  $2 \partial_{\xi} \xi = -t_i^i$ ).

En particulier, si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux formes différentielles de même degré  $p$ , nous avons

$$(6) \quad \langle X\varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, \tilde{X}\psi \rangle = \int_{\partial V^n} Xr \frac{\varphi \wedge \bar{\psi}}{dr}, \quad \text{avec} \quad {}^* \tilde{X}\psi = -X^* \psi.$$

**5. Cas des variétés finies.** — Les formules précédentes vont nous permettre de traduire en langage d'analyse fonctionnelle la condition pour que le champ  $\xi$  définisse un groupe global de transformations sur une variété finie  $V^n$ .

Cette condition, qui sera désignée par (C<sup>1</sup>), est facile à déterminer en se référant au cas compact, et elle a été établie dans [7]. Nous nous bornerons ici à l'énoncer :

**LEMME 5a.** — *Pour que le champ  $\xi$ , de classe  $C_1^0$  sur la fermeture  $\bar{V}^n$  d'une variété finie, à bord régulier, de classe  $C_1^1$ , détermine un groupe*

continu à un paramètre d'homéomorphismes, il faut et il suffit que le champ  $\xi$  soit tangent à  $\partial V^n$  en tout point  $x$  tel que  $\xi(x) \neq 0$  (ce qu'on peut encore exprimer en disant que la composante « normale » de  $\xi$  s'annule sur  $\partial V^n$ ).

En revenant à la formule (4, 3), on en déduit immédiatement :

LEMME 5b. — *Pour que le champ  $\xi$  définisse un groupe global de transformations sur une variété finie à bord régulier  $V^n$ , il faut et il suffit qu'on ait*

$$(1) \quad \langle X_\xi f, g \rangle = \langle f, \tilde{X}_\xi g \rangle, \quad \forall f, g \in C_1^1.$$

Cette nouvelle condition sera désignée par  $(C^2)$ .

Nous transformerons ce dernier énoncé en introduisant les fermetures respectives (extensions fortes) des opérateurs  $X$  et  $\tilde{X}$ , soient  $X^c$  et  $\tilde{X}^c$ . L'opérateur  $X + \tilde{X}$  étant borné [il correspond à une simple multiplication par la fonction  $\partial \xi(x)$ ],  $X^c$  et  $\tilde{X}^c$  ont même domaine  $\mathcal{O}^c(\xi)$ . Utilisant une terminologie classique<sup>(6)</sup>, nous dirons que l'adjoint  $\tilde{X}^w = (X^c)^*$  de  $X^c$  [resp. l'adjoint  $X^w = (\tilde{X}^c)^*$  de  $\tilde{X}^c$ ] constitue l'extension faible de  $\tilde{X}$  [resp.  $X$ ].

La formule (3, 1) prouve que le domaine commun de  $X^w$  et  $\tilde{X}^w$  est constitué par les fonctions  $f \in \mathcal{X}$  telles que la fonction  $Xf$  soit définie presque partout et appartienne elle-même à  $\mathcal{X}$ ; on voit de plus facilement que ce domaine coïncide avec  $\mathcal{O}^c(\xi)$ , ce qui entraîne l'identité de  $X^c$  avec  $X^w$  et de  $\tilde{X}^c$  avec  $\tilde{X}^w$ . Inversement, si  $X^c$  et  $\tilde{X}^c$  sont adjoints l'un de l'autre, la formule (3, 1) vaut en particulier pour  $f, g$  de classe  $C_1^1$ , ce qui nous permet d'énoncer :

THÉORÈME 5c. — *Pour qu'un champ de vecteurs  $\xi$  de classe  $C_1^0$  sur la fermeture  $\bar{V}^n$  d'une variété finie, à bord régulier, de classe  $C_1^1$ , définisse un groupe global de transformations, il faut et il suffit que les fermetures des opérateurs  $X_\xi$  et  $\tilde{X}_\xi$ , associés à ce champ, et considérés comme opérant dans l'espace  $\mathcal{X}$  défini par la donnée d'un élément de volume  $d\tau$  sur  $V^n$ , constituent des opérateurs adjoints l'un de l'autre [ou encore : que les extensions faible et forte de  $X_\xi$  coïncident].*

Ce résultat va nous servir de guide pour la suite.

6. **Cas des variétés infinies** — Dans le cas d'une variété infinie, nous savons que la condition  $(C^1)$ , exprimée dans le lemme 5a, reste nécessaire; cela nous permet de nous ramener toujours, par le procédé de « doublement », au cas d'une variété complète (sans bord). Mais cette condition n'est plus

---

(6) Voir, K. O. FRIEDRICHS [2].

équivalente à  $(C^2)$ , ni suffisante, ainsi que le prouveront des exemples ultérieurs.

Nous allons montrer, par contre, que la condition  $(C^3)$ , exprimée dans le théorème 5c, reste nécessaire et suffisante, si l'on suppose  $|\partial\bar{z}|$  borné, et si l'on définit convenablement le domaine « naturel » de  $X$ . Ce résultat, dont la démonstration se fera en plusieurs étapes, fera l'objet du théorème 9a. Il nous restera ensuite à rechercher les conditions géométriques que doit remplir le champ  $\xi$  pour que  $(C^3)$  soit vérifiée : ce sera l'objet du théorème 11a.

Nous considérerons désormais  $X_\xi$  et  $\tilde{X}_\xi$  comme agissant dans l'espace  $\mathcal{C}^1$  des fonctions de classe  $C^1$  à support compact contenu dans  $\bar{V}^n$ ; cet espace est dense dans  $\mathcal{X}$ . Le domaine  $\mathcal{O}^c(\xi)$  de  $X^c$  est constitué par les éléments  $f$  de  $\mathcal{X}$  auxquels on peut associer une suite  $f_n$  d'éléments de  $\mathcal{C}^1$ , convergeant fortement vers  $f$ , telle que  $Xf_n$  ait aussi une limite forte désignée par  $X^c f$ . On définirait de même la fermeture  $\tilde{X}^c$  de  $\tilde{X}$ , dont le domaine coïncide avec  $\mathcal{O}^c(\xi)$  si  $|\partial\bar{z}|$  est borné; et le domaine  $\mathcal{O}^w(\xi)$  de l'opérateur  $X^w$  sera constitué par les éléments  $f$  de  $\mathcal{X}$  auxquels on peut associer un élément de  $\mathcal{X}$ , désigné par  $X^w f$ , satisfaisant à

$$\langle f, \tilde{X}^c g \rangle = \langle X^w f, g \rangle, \quad \forall g \in \mathcal{O}^c.$$

Ceci étant, supposons que le champ  $\xi$  définisse un groupe global à un paramètre de transformations de  $V^n$ , soit  $(t, x) \rightarrow \varphi(t, x)$ ; et désignons par  $S_t$  l'opérateur défini par

$$f(x) \rightarrow f_t(x) = f[\varphi(t, x)].$$

Nous allons montrer d'abord que si  $|\partial\bar{z}|$  est borné,  $S_t$  est un opérateur borné de  $\mathcal{X}$ . Nous pouvons poser, en effet

$$d\tau[\varphi(t, x)] = \rho(t, x) d\tau(x).$$

et l'on aura

$$\rho(s+t, x) = \rho(t, x)\rho[s, \varphi(t, x)],$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(t, x)] = -\partial\bar{z}[\varphi(t, x)],$$

ce qui prouve que  $|\rho(t, x)|$  est majoré par  $e^{k|t|}$ , où  $k = \sup |\partial\bar{z}|$ , d'où

$$\|f_t\|^2 \leq e^{k|t|} \|f\|^2.$$

D'autre part, si  $f \in \mathcal{C}^1$ , la fonction

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \xi^i[\varphi(t, x)] \frac{\partial f}{\partial x^i}[\varphi(t, x)] = S_t X f$$

est elle-même continue, et converge uniformément vers  $Xf$  quand  $t \rightarrow 0$ .



Il en résulte que si  $f \in \mathcal{C}^1$ ,  $\frac{1}{t}(S_t f - f)$  converge fortement vers  $Xf$  quand  $t$  tend vers zéro.

On démontrerait de même que si  $S_t^*$  désigne l'adjoint de  $S_t$ ,  $\frac{1}{t}(S_t^* f - f)$  converge fortement vers  $\tilde{X}f$ , quand  $t$  tend vers zéro,  $\forall f \in \mathcal{C}^1$ . Or, pour que  $f \in \mathcal{O}^w$ , il faut et il suffit qu'il existe un élément de  $\mathcal{A}$ , désigné par  $X^w f$ , tel que

$$\langle X^w f, g \rangle = \langle f, \tilde{X}g \rangle, \quad \forall g \in \mathcal{C}^1.$$

Mais

$$\langle f, \tilde{X}g \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle f, S_t^* g - g \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle S_t f - f, g \rangle.$$

Donc  $f \in \mathcal{O}^w$  si et seulement si  $\frac{1}{t}(S_t f - f)$  a une limite faible quand  $t \rightarrow 0$ , cette limite étant  $X^w f$ ; et de même,  $\tilde{X}^w g$  peut être défini comme limite faible de  $\frac{1}{t}(S_t^* g - g)$ . Donc si  $f, g \in \mathcal{O}^w$ , on a

$$\langle X^w f, g \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle S_t f - f, g \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle f, S_t^* g - g \rangle = \langle f, \tilde{X}^w g \rangle.$$

Ceci prouve que l'adjoint de  $\tilde{X}^w$ , qui coïncide avec  $X^c$ , est contenu dans  $X^w$ ; comme on a toujours  $X^c \subset X^w$ , on en déduit  $X^c = X^w$ , et, de même,  $\tilde{X}^c = \tilde{X}^w$ , prouvant que la condition (C<sup>3</sup>) est nécessaire.

**7. Suite.** — Inversement, supposons qu'on ait  $X^c = X^w$ . L'opérateur  $X^c + \tilde{X}^c$  étant borné, nous pouvons poser alors

$$X^c = B + iA, \quad \tilde{X}^c = B - iA,$$

$B$  étant borné et  $A$  autoadjoint.

Nous allons d'abord prouver l'existence d'un groupe continu d'opérateurs  $S_t$  de  $\mathcal{O}$  satisfaisant formellement à

$$(1) \quad \frac{dS_t}{dt} = XS_t = S_t X,$$

ce qui signifie que  $\forall f \in \mathcal{O}^c$ , on peut définir  $S_t f \in \mathcal{O}^c$  de telle manière que

$$\frac{d}{dt}(S_t f) = XS_t f = S_t X f.$$

Pour construire l'opérateur  $S_t$ , nous utiliserons la décomposition spectrale de  $A$ , soit  $A = \int \lambda dE_\lambda$ , et, à chaque  $f \in \mathcal{A}$ , nous ferons correspondre les

deux suites  $f_n(t)$  et  $h_n(t)$  d'éléments de  $\mathcal{X}$ , définis par les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} \frac{dh_n}{dt} &= \int e^{-i\lambda t} dE_\lambda(Bf_n); & h_n(0) &= f; \\ f_{n+1} &= \int e^{i\lambda t} dE_\lambda(h_n); & f_0 &= f. \end{aligned}$$

L'opérateur  $U_t = \int e^{i\lambda t} dE_\lambda$ , étant unitaire,  $h_n$  et  $f_{n+1}$  sont bien déterminés par la connaissance de  $f_n$ , et satisfont à

$$\begin{aligned} \|f_{n+1} - f_n\| &= \|h_n - h_{n-1}\|, \\ \left\| \frac{dh_n}{dt} - \frac{dh_{n-1}}{dt} \right\| &= \|Bf_n - Bf_{n-1}\| \leq k \|f_n - f_{n-1}\| \quad \text{si } k = \|B\|. \end{aligned}$$

Les conditions initiales entraînant

$$\|f_1 - f_0\| \leq (2 + k|t|) \|f\|,$$

on en déduit, par récurrence

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leq k^n \left[ \frac{2|t|^n}{n!} + \frac{k|t|^{n+1}}{(n+1)!} \right] \|f\|.$$

Ces inégalités prouvent immédiatement que les suites  $f_n$ ,  $h_n$  et  $\frac{dh_n}{dt}$  convergent fortement,  $t$  étant fixé. Soient  $f_t$ ,  $h_t$  et  $h'_t$  leurs limites respectives.

On voit facilement que  $h'_t = \frac{d}{dt}(h_t)$ , et l'on a, par passage à la limite :

$$h'_t = \int e^{-i\lambda t} dE_\lambda(Bf_t); \quad f_t = \int e^{i\lambda t} dE_\lambda(h_t).$$

Si  $Af_t$  est défini, ou, ce qui revient au même, si  $f_t \in \mathcal{D}^c$ , on a donc

$$\frac{df_t}{dt} = \int i\lambda e^{i\lambda t} dE_\lambda(h_t) + \int e^{i\lambda t} dE_\lambda(h'_t),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(2) \quad \frac{df_t}{dt} = iAf_t + Bf_t = X^c f_t.$$

Il semble donc que l'opérateur  $S_t : f \rightarrow f_t$ , défini pour toute  $f \in \mathcal{X}$  et tout  $t$  réel, soit la solution du problème posé. Il reste cependant à établir que la famille  $\{S_t\}$  satisfait aux conditions voulues, et qu'elle est la seule à y satisfaire.

**8. Suite.** — Nous démontrons maintenant que le problème posé ne peut admettre d'autre solution que  $S_t$ ; et même, plus généralement, nous allons

voir que toute famille  $F_t$ , à un paramètre, d'éléments de  $\mathcal{O}^c$ , définie sur un intervalle fermé  $t_0 \leq t \leq t_1$ , contenant l'origine, et satisfaisant à  $F_0 = f$ ,  $\frac{d}{dt}(F_t) = X^c F_t$ , coïncide nécessairement, sur l'intervalle  $(t_0, t_1)$ , avec  $f_t = S_t f$ . On voit en effet facilement que la fonction

$$H_t = \int e^{-it} dE_\lambda(F_t)$$

admet une dérivée  $\frac{d}{dt}(H_t)$  satisfaisant à

$$\frac{d}{dt}(H_t) = \int e^{-it} dE_\lambda(BF_t).$$

De plus,  $F_0 = f$  entraîne  $H_0 = f$ ; et l'on établit, par récurrence, les inégalités

$$\|F_t - f_n\| = \|H_t - h_{n-1}\| \leq k^n \frac{|t|^n}{n!} \|F_t - f\|,$$

où  $k$ ,  $f_n$  et  $h_n$  ont la même signification que plus haut. Ces inégalités prouvent que  $f_n \rightarrow F_t$ , autrement dit, que  $F_t$  coïncide avec  $f_t$  sur  $(t_0, t_1)$ .

En fait, nous remarquerons que la famille d'opérateurs  $S_t$  est entièrement caractérisée par les relations

$$(3) \quad S_0 f = f; \quad \frac{d}{dt} \int e^{-it} dE_\lambda(S_t f) = \int e^{-it} dE_\lambda(BS_t f)$$

valables pour toute  $f \in \mathcal{D}$ .

Appliquant à chacun des deux membres de la deuxième de ces relations l'opérateur  $U = \int e^{-iu} dE_\lambda$ , et remplaçant  $f$  par  $f_u = S_u f$ , nous obtenons la relation

$$\frac{d}{dt} \int e^{-i\lambda(t+u)} dE_\lambda(S_t S_u f) = \int e^{-i\lambda(t+u)} dE_\lambda(BS_t S_u f)$$

qui prouve l'identité de  $S_t S_u$  avec  $S_{t+u}$ .

Nous avons ainsi établi que les opérateurs  $S_t$  constituent un groupe à un paramètre de transformations de  $\mathcal{D}$ . Ces opérateurs sont bornés, car les relations de récurrence précédemment écrites entraînent

$$\|f_t - f\| \leq [2 + k|t|] e^{k|t|} \|f\|,$$

d'où l'on déduit

$$\|S_t\| \leq [3 + k|t|] e^{k|t|}.$$

Et nous remarquerons aussi, bien que ceci ne découle pas des inégalités précédentes, que  $S_t f$  converge fortement vers  $f$ , quand  $t \rightarrow 0$ , quelle que

soit  $f \in \mathcal{X}$ ; on a en effet

$$S_t f - f = \int e^{i\lambda t} dE_\lambda (h_t - f) + \int (e^{i\lambda t} - 1) dE_\lambda f,$$

d'où

$$\|S_t f - f\| \leq \|h_t - f\| + 2 \left[ \int \sin^2 \frac{\lambda t}{2} d\|E_\lambda f\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

et il est facile de voir que chacun des termes du deuxième membre tend vers zéro (la convergence de  $h_t$  vers  $f = h_0$  résulte de l'existence de la dérivée  $h'_0 = Bf$ ).

Enfin, la fonction  $X^c S_t f$  (si elle est définie et appartient à  $\mathcal{X}$ ) apparaît comme la limite forte, pour  $u \rightarrow 0$ , de

$$\frac{1}{u} [S_{t+u} f - S_t f] = S_t \left[ \frac{S_u f - f}{u} \right],$$

d'où, puisque  $S_t$  est borné, la formule de permutabilité :

$$X^c S_t f = S_t X^c f.$$

Cette formule prouve que  $f \in \mathcal{D}^c$  entraîne  $S_t f \in \mathcal{D}^c$ ; la formule (7, 2) est par conséquent applicable à toute  $f \in \mathcal{D}^c$ , de sorte que l'opérateur  $S_t$  satisfait bien à toutes les conditions voulues.

**9. Suite.** — Il reste maintenant à établir que le groupe  $S_t$ , de transformations de  $\mathcal{X}$  correspond à un groupe global  $x \rightarrow \varphi(t, x)$  de transformations de  $V_n$ , prolongeant le groupe local défini par le champ  $\xi$ . A chaque point  $x_0$  de  $V^n$  on peut en effet faire correspondre un voisinage  $U_0$  de  $x_0$  et un nombre  $\eta > 0$  tels que  $\varphi(t, x)$  soit défini pour  $x \in U_0$  et  $|t| < \eta$ , les coordonnées locales du point  $\varphi(t, x)$  satisfaisant au système différentiel

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi^i(t, x)}{\partial t} = \xi^i[\varphi(t, x)]$$

avec les conditions initiales qui se déduisent de  $\varphi(0, x) = x$ . Plus généralement, si  $K$  est un compact quelconque, on peut, au moyen d'un recouvrement de  $K$ , définir un intervalle ouvert  $I$ , contenant l'origine, tel que  $\varphi(t, x)$  soit défini pour tout  $x \in K$  et  $t \in I$ . Nous désignerons par  $I_K = ]t_0, t_1[$  l'intervalle  $I$  maximal.

Pour les fonctions  $f$  de classe  $C_1^1$  à support dans  $K$ , et pour  $t \in I_K$ , on a nécessairement

$$f[\varphi(t, x)] = S_t f(x),$$

car  $f[\varphi(t, x)]$  satisfait au système

$$f[\varphi(0, x)] = f(x); \quad \frac{\partial}{\partial t} f[\varphi(t, x)] = Xf[\varphi(t, x)]$$

qui, nous l'avons vu, caractérise  $S_t f$  dans l'intervalle  $I_K$ .

L'opérateur  $S_t$ , défini quel que soit  $t$ , permet de prolonger

$$f_t(x) = f[\varphi(t, x)] \quad \text{pour } t \geq t_1 \quad \text{ou} \quad t \leq t_0,$$

donc aussi, semble-t-il, de définir  $\varphi(t, x)$  pour toute valeur réelle de  $t$  et tout  $x \in K$ . Ce dernier point cependant n'est pas absolument évident car les fonctions  $S_t f$ , considérées ici comme des éléments de  $\mathcal{H}$ , ne sont définies qu'à un ensemble de mesure nulle près. Pour l'établir, nous remarquerons

d'abord que si  $f \in \mathcal{O}^c$ , alors  $\frac{d}{dt}(S_t f) \in \mathcal{H}$ , ce qui permet de prouver que,  $x$  étant fixé,  $S_t f(x)$  est fonction continue de  $t$ , excepté au plus pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de  $x$  (la mesure utilisée étant  $d\tau$ );  $K$  étant un compact quelconque, nous désignerons par  $\mathcal{J}(K)$  la fermeture de la réunion  $\bigcup_{t \in I_K} \varphi(t, K)$ ;  $\mathcal{J}(K)$  étant une réunion dénombrable de

compacts, on peut déterminer une famille dénombrable  $\{f_n\}$  de fonctions continues à supports compacts, séparant les points de  $\mathcal{J}(K)$ . A cette famille  $\{f_n\}$  correspond un ensemble  $E$ , de mesure nulle, tel que si  $x \notin E$ ,  $S_t f_n$  soit continue en  $t$  quel que soit  $n$ . Le point  $x \in K$  étant fixé, nous désignerons par  $y$  l'une des valeurs d'adhérence de  $\varphi(t, x)$  au point  $t_1$  ( $y$  pouvant éventuellement être à l'infini). Les fonctions  $f_n$  étant continues à l'infini, et le point  $y$  appartenant à  $\mathcal{J}(K)$ ,  $f_n(y)$  est l'une des valeurs d'adhérence de  $S_t f_n(x)$  au point  $t_1$ ; et si  $x \notin E$ , la continuité de  $S_t f_n(x)$  par rapport à  $t$  entraîne l'unicité de cette limite. Si donc  $y'$  désigne une autre valeur d'adhérence de  $\varphi(t, x)$  au point  $t_1$ , on doit avoir  $f_n(y) = f_n(y')$ ,  $\forall n$ , ce qui entraîne  $y = y'$ , pourvu que  $x \notin E$ . Autrement dit, si  $x \notin E$ ,  $\varphi(t, x)$  a une limite  $y_x$  bien déterminée (éventuellement à l'infini) quant  $t \rightarrow t_1$  par valeurs inférieures. Nous allons voir, de plus, que l'ensemble  $F$  des  $x \in K$  tels que  $y_x$  soit à l'infini, est de mesure nulle. Sinon, en effet, la fonction caractéristique  $f$  de  $F$  satisferait à

$$\|f\| \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_1} S_t f(x) = 0, \quad \forall x.$$

La convergence de  $t$  vers  $t_1$  entraînant la convergence forte de  $S_t f$  vers  $S_{t_1} f$ , on devrait avoir  $S_{t_1} f = 0$  presque partout sur  $V^n$ , donc  $\|S_{t_1} f\| = 0$  contrairement au fait que le rapport  $\frac{\|f\|}{\|S_{t_1} f\|}$  est borné par  $\|S_{-t_1}\|$ .

Or, si le point  $y_x = \lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t, x)$  est à distance finie, nous pouvons définir  $\varphi(t, z)$  dans un voisinage convenable de  $y_x$  et pour  $|t|$  suffisamment petit, donc prolonger  $\varphi(t, x)$  pour  $t > t_1$  dans un voisinage convenable de  $x$ ; et l'ensemble des points  $x$  de  $K$  où ce prolongement n'est pas possible, est de mesure nulle.

D'autre part, nous pouvons toujours déterminer un compact  $K'$  contenant  $K$ , tel que le complémentaire dans  $K'$  d'un ensemble de mesure nulle,

soit dense dans  $K'$ . En appliquant le résultat précédent à  $K'$ , on voit que le prolongement de  $\varphi(t, x)$  est possible pour tout  $x \in K'$ , et pour des valeurs de  $t$  constituant un intervalle contenant strictement  $I_{K'}$ , contrairement à l'hypothèse que l'intervalle  $I_{K'}$  est maximal. Il en résulte que  $I_{K'}$  est l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , autrement dit, que  $\varphi(t, x)$  peut être défini quels que soient  $t$ , réel, et  $x \in K'$ , et ceci, de telle manière qu'on ait  $S_t f_n = f_n[\varphi(t, x)]$  quel que soit  $n$ . L'identité  $S_t(fg) = S_t f \cdot S_t g$ , valable quelles que soient les fonctions bornées  $f, g \in \mathfrak{X}$ , et le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass permettent de démontrer l'égalité  $S_t f = f[\varphi(t, x)]$  pour toute  $f$  continue à support dans  $K$ ;  $K$  étant quelconque, on en déduit que  $\varphi(t, x)$  peut être prolongé pour tout  $t$  réel et tout  $x \in V^n$ , sans cesser de satisfaire au système différentiel (9, 1).

La démonstration étant ainsi achevée, nous pouvons revenir au cas d'une variété à bord et énoncer :

**THÉOREME 9a.** — Soit  $V^n$  une variété différentiable de classe  $C_1^1$ , à bord régulier, sur laquelle on a défini un élément de volume

$$d\tau = \gamma dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Pour qu'un champ de vecteurs  $\xi$ , de classe  $C_1^0$  sur  $V^n$ , et à divergence bornée, définisse un groupe global de transformations de  $V^n$ , il faut et il suffit que les extensions faible et forte de l'opérateur infinitésimal associé  $X_\xi$ , considéré comme opérant dans  $\mathfrak{X}$ , coïncident.

**Cas particulier. Cas des variétés riemanniennes.** — Le théorème 9a s'applique en particulier aux champs de vecteurs à divergence nulle, c'est-à-dire aux transformations infinitésimales conservant l'élément de volume  $d\tau$ . L'opérateur  $X$  est alors antisymétrique (c'est-à-dire que  $\tilde{X} = -X$  ou que  $iX$  est symétrique) et la condition trouvée équivaut à dire que  $iX^c$  est autoadjoint. La deuxième partie de la démonstration précédente (§ 7 et 8) se simplifie alors notablement, car  $X^c$  admet alors une décomposition spectrale de la forme

$$X^c = \int i\lambda dE_\lambda$$

et l'opérateur  $S_t$  est défini simplement par  $S_t = \int e^{i\lambda t} dE_\lambda$ . Nous énoncerons :

**THÉOREME 10a.** — Soit  $V^n$  une variété de classe  $C_1^1$  à bord régulier sur laquelle on a défini un élément de volume  $d\tau$ . Pour qu'une transformation infinitésimale  $X$  définisse un groupe global de transformations de  $V^n$ , conservant les volumes, il faut et il suffit que l'opérateur  $iX^c$ , considéré comme opérant dans  $\mathfrak{X}$ , soit autoadjoint.

**EXTENSION.** — Nous avons vu (§ 3), que, si  $V^n$  est une variété rieman-

nienne, on peut considérer  $\mathcal{X}$  comme opérant dans l'espace  $\mathfrak{A}_p^q$  des tenseurs de variance  $(p, q)$  et de carré sommable. Cette extension de  $\mathcal{X}$  conduit à un théorème analogue à 9a, que nous n'énoncerons pas, l'analogue de 10a nous paraissant plus intéressant.

Un simple examen de la formule (4, 5) nous montre en effet, que  $i\mathcal{X}$  ne constitue un opérateur symétrique de  $\mathfrak{A}_p^q$  que dans les cas suivants :

- a. ou bien  $t_{ij} = \mathcal{X}g_{ij} = 0, \forall i, j$  (cas d'une isométrie infinitésimale);
- b. ou bien  $t_{ij} = \mathcal{X}g_{ij} = \lambda g_{ij}, \lambda$  étant un scalaire (cas d'une transformation infinitésimale conforme), avec  $n = 2(p - q)$ .

On en déduit facilement le résultat suivant :

**THÉORÈME 10b.** — Si le champ de vecteurs  $\xi$  définit un groupe global d'isométries de  $V^n$ , l'opérateur  $iX_\xi^c$ , considéré comme opérant dans l'un quelconque des espaces  $\mathfrak{A}_p^q$ , est autoadjoint.

Réciproquement, si, considéré comme opérant dans un espace  $\mathfrak{A}_p^q$  tel que  $p - q \neq \frac{n}{2}$ , l'opérateur  $iX_\xi^c$  est autoadjoint, alors le champ de vecteurs  $\xi$  définit un groupe global d'isométries de  $V^n$ .

Le cas singulier  $p - q = \frac{n}{2}$  conduit à l'énoncé suivant :

**THÉORÈME 10c.** — Pour que le champ  $\xi$  à divergence bornée définisse un groupe global de transformations conformes d'une variété riemannienne  $V^n$  de dimension  $n$  paire, il faut et il suffit que l'opérateur  $iX_\xi^c$ , considéré comme opérant dans l'un quelconque des espaces  $\mathfrak{A}_{q+\frac{n}{2}}^q$  soit autoadjoint.

**REMARQUE.** — Les théorèmes 10b et 10c restent vrais si l'on remplace  $\mathfrak{A}_p^q$  par l'espace  $\mathfrak{A}_p$  des formes différentielles de carré sommable, en posant  $q=0$ .

**11. Critère géométrique.** — Pour que le théorème 9a puisse servir à la détermination effective des groupes de transformations de  $V^n$ , il nous faut avoir un critère géométrique permettant de reconnaître si les extensions faible et forte de  $X_\xi$  coïncident, autrement dit, si l'extension faible  $X_\xi^w$  de  $X_\xi$  satisfait à

$$\langle X_\xi^w f, g \rangle = \langle f, \tilde{X}_\xi^w g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{O}^n.$$

Ce critère nous sera fourni par le théorème suivant :

**THÉORÈME 11a.** — Soit  $V^n$  une variété complète de classe  $C_1^1$  sur laquelle on a pu définir une fonction positive  $r(x)$ , de classe  $C_1^1$ , telle que l'ensemble  $E_R = \{x; r(x) \leq R\}$  soit compact quel que soit  $R$ . Posons

$$\theta(R) = \sup_{x \in \partial E_R} |X_\xi r(x)|,$$

où  $\partial E_R$  désigne la frontière de  $E_R$  et  $X_\xi$  la transformation infinitésimale associée à un champ de vecteurs  $\xi$ , de classe  $C_1^0$  sur  $V^n$ .

Pour que les extensions faible et forte de l'opérateur  $X_\xi$ , considéré comme opérant dans l'espace des fonctions de carré sommable sur  $V^n$ , coïncident, il suffit que l'intégrale  $\int_R^\infty \frac{du}{\theta(u)}$ , soit divergente quel que soit  $R > 0$ .

DÉMONSTRATION. — Supposons  $\int_R^\infty \frac{du}{\theta(u)} = +\infty$ ,  $\forall R > 0$ , et soient  $f, g \in \mathcal{O}^w$ . La variété  $V^n$  étant la réunion des compacts  $E_R$ , on a

$$\langle X^w f, g \rangle = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E_R} X f \bar{g} \, d\tau; \quad \langle f, \tilde{X}^w g \rangle = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E_R} f \tilde{X} \bar{g} \, d\tau,$$

d'où par application de (4, 3) :

$$\langle X^w f, g \rangle - \langle f, \tilde{X}^w g \rangle = \lim_{R \rightarrow +\infty} \varphi(R),$$

avec

$$\varphi(R) = \int_{\partial E_R} f \bar{g} X r \frac{d\tau}{dr}.$$

Or cette fonction  $\varphi(R)$  satisfait à

$$\int_R^\infty |\varphi(u)| \frac{du}{\theta(u)} \leq \int_R^\infty du \int_{\partial E_u} |f \bar{g}| \frac{d\tau}{du} \leq \int_{V^n} |f \bar{g}| \, d\tau,$$

la deuxième inégalité résultant du fait que chaque point de  $V^n$  appartient à un seul ensemble  $\partial E_u$  au plus. La dernière intégrale étant majorée par  $\|f\| \cdot \|g\|$ , l'intégrale  $\int_R^\infty |\varphi(u)| \frac{du}{\theta(u)}$  est convergente; et la divergence à l'infini de  $\int \frac{du}{\theta(u)}$  entraîne l'existence d'une suite  $R_n$ , tendant vers  $+\infty$ , telle que  $\varphi(R_n) \rightarrow 0$ . On en déduit l'égalité

$$\langle X^w f, g \rangle = \langle f, \tilde{X}^w g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{O}^w.$$

C. Q. F. D.

En rapprochant ce résultat du théorème 9a, on obtiendrait immédiatement une condition géométrique suffisante pour que le champ définisse un groupe global, cette condition étant d'ailleurs indépendante du choix de l'élément de volume  $d\tau$ . Nous ne l'énoncerons pas, car elle coïncide avec celle qui a été établie par un procédé plus direct dans [7], sans l'hypothèse  $|\delta \xi|$  borné, et en supposant seulement  $r(x)$  de classe  $C_1^0$ .

**12. Exemple.** — Pour terminer cette première partie de notre étude, nous allons donner l'exemple d'un champ de vecteurs, à divergence nulle,



qui ne définit pas un groupe global de transformations; et nous vérifierons que les extensions faible et forte de l'opérateur associé  $\mathcal{X}$  ne coïncident pas.

Soit  $\mathcal{X}$  la transformation infinitésimale de  $R^2$  définie par

$$\mathcal{X} = -\frac{2}{3}xy \frac{\partial}{\partial x} + \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Cette transformation conserve l'élément d'aire  $d\tau = dx dy$ ; mais la solution du système différentiel

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3}xy; \quad \frac{dy}{dt} = \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)$$

est donnée, sous forme paramétrique, par

$$x = k(1+u^2)^{-\frac{1}{3}}; \quad y = ku(1+u^2)^{-\frac{1}{3}}; \quad t = \frac{1}{k} \int_{u_0}^u \frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{2}{3}}};$$

$u_0$  et  $k$  désignant des constantes qui dépendent des conditions initiales. Il résulte de ces formules que  $|y| \rightarrow +\infty$  pour une valeur finie de  $t$ , et que le transformé  $\varphi(t, x_0, y_0)$  du point  $(x_0, y_0)$  ne peut être défini quel que soit  $t$ , donc que  $\mathcal{X}$  ne correspond pas à un groupe global de transformations de  $R^2$ .

Nous allons voir en effet que les extensions faible et forte de  $\mathcal{X}$  ne coïncident pas; pour simplifier, nous nous limiterons au sous-domaine  $D_k$  de  $R^2$  défini par  $x(x^2+y^2) > k^3$  ( $k > 0$ ); la frontière de  $D_k$ , qui est une courbe intégrale de (1), est tangente au champ  $\xi$ . Nous pouvons donc appliquer notre théorie à  $D_k$ . Or il est facile de voir, par un changement de variables et un calcul fondé sur l'inégalité de Schwarz, que toute fonction  $f$ , de classe  $C_1^1$ , à support compact contenu dans  $D_k$ , satisfait à

$$\|f\| \leq \frac{\alpha}{k} \|\mathcal{X}f\|, \quad \text{avec} \quad \alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Par extension, toute fonction de  $\mathcal{O}^c$  devra satisfaire à la même inégalité: il en résulte qu'il n'existe pas de fonction  $f$ , autre que la fonction zéro, satisfaisant à  $\mathcal{X}^c f = 0$ .

Or si nous désignons par  $\psi(z)$  une fonction quelconque, de classe  $C_1^1$ , de la variable réelle  $z$ , nulle en dehors de l'intervalle  $a \leq z \leq b$  ( $a > k$ ), la fonction  $f(x, y) = \psi[x(x^2+y^2)]$  est elle-même de classe  $C_1^1$ , et satisfait en tout point à  $\mathcal{X}f = 0$ ; d'autre part l'aire comprise entre les trajectoires  $x(x^2+y^2) = a^3$ ,  $x(x^2+y^2) = b^3$  (qui limitent le support de  $f$ ) étant finie,  $f$  est de carré sommable; donc  $f \in \mathcal{O}^w$  et satisfait à  $\mathcal{X}^w f = 0$ , ce qui prouve que les opérateurs  $\mathcal{X}^w$  et  $\mathcal{X}^c$  ne coïncident pas; nous avons même démontré que l'espace des fonctions faiblement invariantes (satisfaisant à  $\mathcal{X}^w f = 0$ ) ne coïncide pas avec l'espace des fonctions fortement invariantes (satisfaisant à  $\mathcal{X}^c f = 0$ ).

II.

**13. Deuxième problème.** — Nous abordons maintenant le problème 2 : à quelle condition le champ de vecteurs  $\xi$  définit-il un groupe compact, à un paramètre, de transformations de  $V^n$  ?

Nous remarquerons d'abord que si le champ  $\xi$  définit un groupe compact  $G$ , sur une variété paracompacte, on peut, par le choix d'une métrique riemannienne appropriée, supposer qu'il s'agit d'un groupe d'isométries. Car si l'on part d'une métrique riemannienne arbitraire, on peut, par un procédé d'intégration, en déduire une métrique invariante par  $G$ . Nous pouvons donc nous borner ici à l'étude des champs de vecteurs de Killing.

NOTATIONS. —  $\xi$  désignant un champ de vecteurs quelconque, de classe  $C_1^0$ , sur une variété de classe  $C_1^1$ , nous désignerons par  $\mathcal{B}'(\xi)$  l'espace des fonctions faiblement invariantes pour la transformation infinitésimale associée  $X_\xi$ , c'est-à-dire le sous-espace fermé de  $\mathcal{B}$  constitué par les fonctions  $f$  satisfaisant à  $\langle f, \tilde{X}^v g \rangle = 0, \forall g \in \mathcal{D}^v$ ; l'espace complètement orthogonal à  $\mathcal{B}'(\xi)$  sera désigné par  $\mathcal{B}''(\xi)$ ; quand aucune confusion ne sera possible, ces deux espaces seront désignés simplement par  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$ .

Ceci étant posé, nous allons établir le résultat suivant :

**THÉORÈME 13 a.** — *Pour qu'un champ de vecteurs  $\xi$ , de classe  $C_1^0$ , sur une variété riemannienne de classe  $C_1^1$ , définisse un groupe compact d'isométries à un paramètre, il faut et il suffit que l'opérateur inverse  $X_\xi^{-1}$  associé, considéré comme opérant dans  $\mathcal{B}''(\xi)$ , soit borné.*

*a. La condition est nécessaire.* — Supposons que  $\xi$  définisse un groupe global compact, à un paramètre, d'isométries de  $V^n$ . Ce groupe étant global. l'opérateur associé  $X^w$ , considéré comme opérant dans  $\mathcal{B}$ , est opposé à son adjoint. Et si l'on pose

$$X^w = \int i\lambda dE_\lambda,$$

on sait que l'opérateur

$$S_t = e^{tX} = \int e^{i\lambda t} dE_\lambda,$$

coïncide avec celui que définissent les opérations du groupe, soit  $f \rightarrow f[\varphi(t, x)]$  (voir § 8 et 9). Le groupe  $G$  étant compact,  $S_t$  définit un groupe compact à un paramètre de transformations de  $V^n$ , d'où il résulte, par application du théorème de Stone, que sa décomposition spectrale est de la forme

$$S_t = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{in\omega t} E_n,$$

$E_n$  désignant un système complet de projections. On en déduit :

$$X^w = \omega \sum_{-\infty}^{+\infty} i^n E_n.$$

L'espace  $\mathcal{H}'$  des fonctions faiblement invariantes est donc constitué par les  $f \in \mathcal{H}$  satisfaisant à  $E_n f = 0$  pour  $n \neq 0$ , tandis que  $\mathcal{H}''$  est constitué par les  $f \in \mathcal{H}$  satisfaisant à  $E_0 f = 0$ ; d'où il résulte que si  $f \in \mathcal{H}' \cap \mathcal{H}''$ , on a

$$\|Xf\| \geq \omega \|f\|.$$

Inversement, si  $g \in \mathcal{H}''$ , il existe un élément et un seul de  $\mathcal{H}' \cap \mathcal{H}''$ , soit  $f = \frac{1}{i\omega} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} E_n g$ , satisfaisant à  $g = X^w f$ , et l'on a

$$\|f\| = \|X^{-1}g\| \leq \frac{1}{\omega} \|g\|.$$

C. Q. F. D.

$\beta$ . *La condition est suffisante.* — Cette réciproque sera démontrée en trois temps. Nous établirons d'abord (lemme 14a) que, si  $X_{\xi}^{-1}$  est borné dans  $\mathcal{H}''$ , alors le champ  $\xi$  définit un groupe global. Puis nous établirons (lemme 14b) que les orbites de ce groupe sont fermées; ces deux propositions n'utiliseront pas toutes les hypothèses, et seront valables pour un champ  $\xi$  quelconque à divergence nulle. Enfin nous démontrerons (lemme 15a) qu'un groupe d'isométries à un paramètre, dont les orbites sont fermées, est nécessairement compact.

14. LEMME 14a. — Soit  $\xi$  un champ de vecteurs, à divergence nulle sur  $V^n$ , tel que l'opérateur inverse associé  $X^{-1}$  soit borné dans  $\mathcal{H}''$ ; alors le champ  $\xi$  définit un groupe global de transformations de  $V^n$ .

On voit immédiatement en effet, que l'opérateur  $iX^{-1}$ , étant symétrique et borné dans  $\mathcal{H}''$ , est autoadjoint; son inverse  $-iX^c$  est donc autoadjoint dans  $\mathcal{H}''$ , et, par extension, dans  $\mathcal{H}$ ; d'où le résultat annoncé, par application du théorème 10a.

LEMME 14b. — Soit  $\xi$  un champ de vecteurs à divergence nulle sur  $V^n$ , tel que l'opérateur inverse associé  $X^{-1}$  soit borné dans  $\mathcal{H}''$ . Alors le groupe  $G$  défini par  $\xi$  a toutes ses orbites fermées, et les périodes correspondantes sont bornées.

DÉMONSTRATION. — Supposons que  $G$  admette une orbite non fermée, ou, que, toutes les orbites étant fermées, les périodes correspondantes ne soient pas bornées. Quel que soit le nombre  $T > 0$ , on pourrait alors déterminer un arc  $C_T$ , sans point double, image continue et biunivoque du seg-

ment  $|t| < T$  dans une transformation de la forme  $t \rightarrow \varphi(t, x_0)$ , où  $x_0$  désigne un point de  $V^n$ . L'arc  $C_T$ , régulièrement plongé dans  $V^n$ , admettrait un voisinage  $U$  homéomorphe à un pavé  $\Omega \times I$  de  $R^n$ ,  $\Omega$  désignant un pavé  $|x^i| < \alpha$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) de  $R^{n-1}$ , et  $I$  un intervalle  $|x^n| < \beta$  de  $R$  [ $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ]; et l'on pourrait choisir  $U$  de manière que dans le système de coordonnées défini par cet homéomorphisme, on ait  $\xi^i = 0$  pour  $i=1, 2, \dots, n-1$ ;  $\xi^n = 1$ .

Soit  $\chi(t)$  la fonction de classe  $C_1^0$ , nulle pour  $|t| > T$ , linéaire dans chacun des intervalles  $\left[-T, -\frac{T}{2}\right]$ ,  $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{T}{2}, T\right]$ , et satisfaisant à  $\chi\left(-\frac{T}{2}\right) = -\frac{T}{2}$ ,  $\chi\left(\frac{T}{2}\right) = +\frac{T}{2}$ . Un calcul simple nous donne

$$\int_{-T}^{+T} \chi(t) dt = 0; \quad \int_{-T}^{+T} \chi^2(t) dt = \frac{T^3}{6}; \quad \int_{-T}^{+T} \chi'^2(t) dt = 2T.$$

Désignant par  $\psi(x^1, \dots, x^{n-1})$  une fonction quelconque, de classe  $C_1^0$ , non identiquement nulle et à support dans  $\Omega$ , nous définirons une fonction  $f$  à support dans  $U$  et de classe  $C_1^0$ , en posant

$$f(x^1, \dots, x^n) = \chi(x^n) \psi(x^1, \dots, x^{n-1}).$$

D'autre part l'élément de volume  $d\tau$ , étant invariant dans  $G$ , serait nécessairement, dans  $U$ , de la forme

$$d\tau = \gamma(x^1, \dots, x^{n-1}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$

Et nous aurions

$$\|f\|^2 = \int_U |f|^2 d\tau = \int_{-T}^{+T} \chi^2(t) dt \int_{\Omega} \psi^2(x^1, \dots, x^{n-1}) \gamma dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1};$$

$$\|Xf\|^2 = \int_U \left| \frac{\partial f}{\partial x^n} \right|^2 d\tau = \int_{-T}^{+T} \chi'^2(t) dt \int_{\Omega} \psi^2(x^1, \dots, x^{n-1}) \gamma dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1};$$

d'où

$$\|f\| = \left[ \frac{T}{\sqrt{12}} \right] \|Xf\|.$$

Or il est facile de voir que la fonction  $f$  ainsi déterminée appartient à  $\mathcal{H}''$ ; car si  $g$  désigne une fonction invariante de classe  $C_1^1$ , on a nécessairement  $Xg = \frac{\partial g}{\partial x^n} = 0$  dans  $U$ ; d'où

$$\int_U f \bar{g} d\tau = \int_{-T}^{+T} \chi(t) dt \int_{\Omega} \bar{g}(x^1, \dots, x^{n-1}) \psi(x^1, \dots, x^{n-1}) \gamma dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = 0.$$

Il existerait donc une fonction  $f \in \mathcal{X}^n$  telle que le rapport  $\frac{\|f\|}{\|\mathcal{X}f\|} = \frac{T}{\sqrt{12}}$  soit aussi grand qu'on le veut, contrairement à l'hypothèse.

C. Q. F. D.

13. LEMME 15 a. — Soit  $V^n$  une variété riemannienne complète, admettant un groupe global d'isométries  $G$  à un paramètre. Si toutes les orbites de  $G$  sont fermées, le groupe est compact.

Soit, en effet,  $G$  un groupe d'isométries à un paramètre dont toutes les orbites soient fermées; à chaque point  $x$  de  $V^n$  est associé un nombre positif minimal  $T(x)$  [période de l'orbite correspondante] tel que les transformations du groupe satisfassent à  $\varphi[t + T(x), x] = \varphi(t, x)$ ,  $\forall t$ .

$G$  étant un groupe d'isométries, la distance géodésique  $d(x, x_m)$  d'un point quelconque  $x$  à chacun des points  $x_m = \varphi[mT(x), x_0]$  est, quel que soit  $x_0 \in V^n$ , et quel que soit l'entier  $m$ , égale à  $d(x, x_0)$ . Supposons que l'orbite  $C_0$  de  $x_0$  ne soit pas réduite à un point; on peut alors la considérer comme image continue et biunivoque de la circonférence-unité par  $e^{i\theta} \rightarrow \varphi\left[\frac{\theta T(x_0)}{2\pi}, x_0\right]$ ;

nous désignerons par  $\delta$  la distance du point  $x_0$  à l'arc  $\gamma_1$  de  $C_0$ , qui correspond à  $\frac{\pi}{4} < \theta < 7\frac{\pi}{4}$ ;  $T(x_0)$  étant le plus petit nombre positif satisfaisant

à  $\varphi[T(x_0), x_0] = x_0$ ,  $\delta$  est non nul. Si le point  $x$  satisfait à  $d(x, x_0) < \frac{\delta}{2}$ ,

les points  $x_m$  satisferont à  $d(x_m, x_0) < \delta$  et ne pourront, par conséquent, appartenir à l'arc  $\gamma_1$ . Leurs images réciproques  $y_m = \exp\left[2i\pi m \frac{T(x)}{T(x_0)}\right]$  sur

la circonférence-unité devront appartenir à l'arc défini par  $|\theta| < \frac{\pi}{4}$ , quel que

soit l'entier  $m$ , ce qui exige que les points  $y_m$  soient tous confondus avec  $y_0$ . Autrement dit, les points  $x_m$  sont tous confondus avec  $x_0$ , ce qui exige que  $T(x)$  soit un multiple de  $T(x_0)$ . Nous avons donc ainsi établi que chaque point  $x_0$  de  $V^n$ , dont l'orbite ne se réduit pas à un point, admet un voisinage  $U_0$  en chaque point duquel  $T(x)$  est un multiple entier de  $T(x_0)$ .

Or nous pouvons supposer  $U_0$  assez petit pour que chaque point  $x$  de  $U_0$  puisse être joint à  $x_0$  par une seule géodésique; chaque point de  $U_0$  est alors déterminé par ses coordonnées normales; et la donnée des transformés  $\varphi[T(x_0), x_i]$  de  $n$  points  $x_i$  de  $U_0$  convenablement choisis suffit à déterminer l'isométrie  $x \rightarrow \varphi[T(x_0), x]$  qui laisse  $x_0$  invariant: il suffit que les points  $x_i$  soient situés sur  $n$  géodésiques distinctes issues de  $x_0$ . Si nous posons  $T(x_i) = p_i T(x_0)$  [ $p_i$  entier] et si nous désignons par  $p$  le plus petit commun multiple des nombres  $p_i$ , le nombre  $T = p T(x_0)$  satisfait à  $\varphi(T, x_i) = x_i$  [ $i = 0, 1, \dots, n$ ] d'où il résulte qu'on a  $\varphi(T, x) = x$ ,  $\forall x \in V^n$ , d'où enfin  $\varphi[t + T, x] = \varphi(t, x)$  quels que soient  $t$  et  $x$ . Il suffit donc de partir d'un point  $x_0$ , dont l'orbite ne se réduit pas à un point, pour

déterminer un nombre  $T$ , période commune à toutes les orbites, ce qui prouve que le groupe  $G$  est compact. C. Q. F. D.

16. EXEMPLE. — Considérons le sous-groupe à un paramètre du tore  $T^2$  défini par  $X = \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y}$ , où  $x, y$  sont des coordonnées sur  $T^2$ , définies modulo  $2\pi$ . Si le rapport  $\frac{\lambda}{\mu}$  est rationnel, soit  $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a}{b}$  [ $a, b$ , entiers premiers entre eux], on peut déterminer deux entiers  $c, d$ , satisfaisant à  $ad - bc = 1$ , et le changement de variables  $x = au + cv, y = bu + dv$ , nous ramène à l'étude de l'opérateur  $X = \frac{\lambda}{a} \frac{\partial}{\partial u}$ . Toute fonction  $f$ , de carré sommable sur  $T^2$ , admettant un développement en série de Fourier de la forme

$$f(u, v) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq} e^{i(pu+qv)},$$

on a

$$\|f\|^2 = 4\pi^2 \sum_p \sum_q |c_{pq}|^2;$$

$$\|Xf\|^2 = 4\pi^2 \left| \frac{\lambda}{a} \right|^2 \sum_p \sum_q p^2 |c_{pq}|^2$$

et l'espace  $\mathfrak{E}''$  est constitué par les fonctions  $f$  dont tous les coefficients  $c_{0q}$  sont nuls. Si  $f \in \mathfrak{E}''$ , on a donc  $\|Xf\| > \left| \frac{\lambda}{a} \right| \|f\|$  prouvant que  $X$  engendre un groupe compact, conformément aux résultats connus.

Si le rapport  $\frac{\lambda}{\mu}$  est irrationnel, nous pouvons déterminer une fraction irréductible  $\frac{a}{b}$ , de dénominateur  $b$  aussi grand qu'on le veut, telle que

$$\left| \frac{\lambda}{\mu} - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}; \text{ la fonction } f(x, y) = e^{i(bx-ay)} \text{ satisfait à } \|f\| = 2\pi,$$

$$\|Xf\| = 2\pi |\lambda b - \mu a|, \quad \|XXf\| = 2\pi |\lambda b - \mu a|^2$$

d'où, en posant  $g = Xf$ :

$$\frac{\|Xg\|}{\|g\|} = |\lambda b - \mu a| < \left| \frac{\mu}{b} \right|,$$

ce qui prouve l'existence d'une fonction  $g \in \mathfrak{E}''$  telle que le rapport  $\frac{\|Xg\|}{\|g\|}$  soit aussi petit qu'on le veut; et nous retrouvons le fait connu que le groupe engendré par  $X = \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y}$ , avec  $\frac{\lambda}{\mu}$  irrationnel, n'est pas compact.

17. — Au cours de l'étude qui précède, nous avons, en fait, établi le résultat suivant : si le champ  $\xi$  est à divergence nulle, et si l'opérateur inverse associé  $X^{-1}$  est borné dans  $\mathcal{B}''(\xi)$ , alors  $\xi$  définit un groupe global  $G$ ; toutes les orbites de  $G$  sont fermées, et les périodes correspondantes sont bornées. Nous allons maintenant établir la proposition inverse, qui nous sera utile par la suite.

Soit donc  $G$  un groupe à un paramètre de transformations de  $V^n$ , conservant les volumes, et dont toutes les orbites soient fermées. Nous désignerons toujours par  $T(x)$  la période de l'orbite du point  $x$ , définie en tout point  $x$  tel que  $\xi(x) \neq 0$ . Et, pour abrégé, nous dirons qu'une propriété a lieu sur presque toute orbite si l'ensemble des orbites sur lesquelles elle n'est pas vérifiée constitue un ensemble de mesure nulle sur  $V^n$ . Ceci étant, on voit que  $\mathcal{B}'$  est constitué par les fonctions  $f$  de  $\mathcal{B}$  qui sont presque partout égales à une fonction constante sur chaque orbite, tandis que  $\mathcal{B}''$  est constitué par les fonctions  $g$  de  $\mathcal{B}$  qui sont sommables et satisfont à

$$\int_0^{T(x)} g[\varphi(t, x)] dt = 0$$

sur presque toute orbite  $C_x$ .

Si  $g \in \mathcal{B}''$ , nous lui ferons correspondre la fonction  $f$  définie sur ces orbites  $C_x$ , par les conditions

$$f[\varphi(v, x)] - f[\varphi(u, x)] = \int_u^v g[\varphi(t, x)] dt;$$

et

$$(1) \quad \int_0^{T(x)} f[\varphi(t, x)] dt = 0.$$

dont on voit facilement qu'elles déterminent une fonction et une seule.

Aux points tels que  $\xi(x) = 0$ , nous poserons  $f(x) = 0$ .

La fonction  $f$  est ainsi déterminée presque partout et satisfait à  $Xf = g$ . Nous allons montrer que, si les périodes  $T(x)$  sont bornées par un même nombre  $k$ , alors  $f \in \mathcal{B}$  et satisfait à

$$(2) \quad \|f\| \leq k \|g\|.$$

Il résultera alors de (1) que  $f$  appartient à  $\mathcal{B}''$ , et nous aurons établi que l'opérateur  $X^{-1} : g \rightarrow f$  est borné dans  $\mathcal{B}''$ .

Pour établir (2) nous remarquerons qu'on a, par application de l'inégalité de Schwartz,

$$|f[\varphi(v, x)] - f[\varphi(u, x)]|^2 \leq T(x) \int_0^{T(x)} |g[\varphi(t, x)]|^2 dt,$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de l'hypothèse faite sur  $T(x)$ ,

$$\int_0^{T(x)} |f[\varphi(t, x)]|^2 dt \leq k^2 \int_0^{T(x)} |g[\varphi(t, x)]|^2 dt,$$

cette inégalité étant valable sur presque toute orbite  $C_x$ . Or, on a

$$\|g\|^2 = \int_{V^n} |g(x)|^2 d\tau(x) = \int_{V^n} \int_0^{T(x)} |g[\varphi(t, x)]|^2 \frac{dt d\tau(x)}{T(x)}$$

à cause de l'invariance de l'élément de volume  $d\tau$ . On en déduit immédiatement le résultat annoncé. Nous énoncerons :

**THÉOREME 17a.** — Soit  $V^n$  une variété de classe  $C_1^1$  sur laquelle on a défini un élément de volume  $d\tau$ . Pour que l'opérateur inverse  $X_{\xi}^{-1}$  associé à un champ de vecteurs  $\xi$  à divergence nulle, soit borné dans l'espace  $\mathcal{B}'(\xi)$  correspondant, il faut et il suffit que le champ  $\xi$  définisse un groupe à un paramètre de transformations de  $V^n$ , dont toutes les orbites soient fermées, les périodes correspondantes étant bornées.

**REMARQUE.** — Il est à noter que les conditions du théorème précédent peuvent être vérifiées par un groupe non compact. Par exemple, le groupe à un paramètre, défini sur la sphère  $S^2$  en coordonnées sphériques  $\theta, \varphi$ , par

$$\theta_t = \theta, \quad \varphi_t = \varphi + (1 + \cos^2 \theta)t,$$

conserve l'élément d'aire  $d\tau = \sin \theta d\theta d\varphi$ ; les orbites sont fermées, et les périodes correspondantes bornées par  $k=1$ , mais ce groupe n'est pas compact.

**18. Problèmes de décomposition orthogonale.** — Soit toujours  $V^n$  une variété de classe  $C_1^1$  sur laquelle on a défini un élément de volume  $d\tau$ ; à tout champ de vecteurs  $\xi$ , de classe  $C_1^0$  sur  $V^n$ , nous avons fait correspondre (§ 13) une décomposition orthogonale  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'(\xi) \oplus \mathcal{B}''(\xi)$  de l'espace des fonctions de carré sommable sur  $V^n$  [cette décomposition résultant immédiatement de la définition de  $\mathcal{B}'(\xi)$  et de  $\mathcal{B}''(\xi)$ , et du fait que  $\mathcal{B}'(\xi)$  est fermé]. Nous allons étudier les problèmes soulevés par cette décomposition.

Nous remarquerons d'abord que l'espace  $\mathcal{B}'(\xi)$  peut se réduire au seul élément zéro (par exemple si  $\xi$  définit un groupe de translations dans  $R^n$ ), tandis que  $\mathcal{B}''(\xi)$  contient tous les éléments de la forme  $\tilde{X}_{\xi}^c g$ , où  $g \in \mathcal{O}^c(\xi)$ , lesquels constituent un sous-ensemble dense de  $\mathcal{B}''(\xi)$ . Nous avons donc, dans tous les cas, la

*Formule de décomposition faible.* — Tout élément  $f$  de  $\mathcal{B}$  peut se mettre, d'une manière et d'une seule, sous la forme  $f = f' + f''$ , où  $f' \in \mathcal{B}'(\xi)$  et où  $f''$  est limite forte, pour  $r \rightarrow \infty$ , d'une suite  $\tilde{X}_{\xi}^c g_r$ , où  $g_r \in \mathcal{O}^c(\xi)$ .



Cette formule étant établie, il est naturel de se demander s'il existe un élément  $g$  de  $\mathcal{O}^w(\xi)$ , tel qu'on ait  $f'' = X_\xi^w g$ ; or des exemples simples montrent qu'un tel élément  $g$  n'existe pas toujours : c'est le cas de la fonction  $f$  définie, sur la droite numérique  $R$ , par  $f(x) = 0$  pour  $|x| > 1$  et  $f(x) = 1$  pour  $|x| < 1$ , pour le groupe des translations de  $R$ ; car ici,  $\mathcal{B}'(\xi)$  est réduit à l'élément zéro, donc  $f \in \mathcal{B}''(\xi)$ , et il n'existe d'autre part aucune fonction  $g \in \mathcal{B}$  telle que  $f = \frac{dg}{dx}$ .

Pour avoir une « formule de décomposition forte »  $f = h + \tilde{X}^w g$ , où  $h \in \mathcal{B}'(\xi)$  et  $g \in \mathcal{O}^w(\xi)$ , valable pour toute  $f \in \mathcal{B}$ , il faut et il suffit que la transformation  $(\tilde{X}^w)^{-1}$  soit partout définie dans  $\mathcal{B}''(\xi)$  [l'unicité de  $g = (\tilde{X}^w)^{-1} f$  étant assurée, si l'on veut, par la condition supplémentaire  $g \in \tilde{\mathcal{B}}''(\xi)$ , où  $\tilde{\mathcal{B}}''(\xi)$  est l'espace complètement orthogonal à

$$\tilde{\mathcal{B}}''(\xi) = \{f; \tilde{X}_\xi^w f = 0\}.$$

Cette condition s'interprète simplement dans le cas où  $\xi$  est à divergence nulle, car alors  $\tilde{\mathcal{B}}'' = \mathcal{B}''$ , et  $(\tilde{X}^w)^{-1} = (X^w)^{-1}$  peut être considéré comme une transformation linéaire de  $\mathcal{B}''$  dans lui-même, partout définie et fermée : un tel opérateur est nécessairement borné; et réciproquement, si  $X^{-1}$  est borné dans  $\mathcal{B}''$ , sa fermeture  $(X^c)^{-1}$  est partout définie. Or nous avons trouvé précédemment la condition pour que  $X^{-1}$  soit borné dans  $\mathcal{B}''$ . Nous pouvons donc énoncer :

**THÉORÈME 18 a.** — Soit  $X_\xi$  une transformation infinitésimale conservant un élément de volume  $d\tau$  défini sur une variété  $V^n$  de classe  $C_1^1$ . Pour que tout élément  $f$  de  $\mathcal{B}$  admette une décomposition de la forme  $f = h + X^w g$ , où  $h \in \mathcal{B}'(\xi)$  et  $g \in \mathcal{O}^w(\xi)$ , il faut et il suffit que  $X_\xi$  corresponde à un groupe global  $G$ , à un paramètre, de transformations de  $V^n$ , que les orbites de  $G$  dans  $V^n$  soient fermées, et que les périodes correspondantes soient bornées par un même nombre.

**REMARQUE.** — Dans le cas où  $X$  est une isométrie infinitésimale sur une variété riemannienne, l'énoncé se simplifie et la condition obtenue peut être remplacée par « il faut et il suffit que  $X$  définisse un groupe compact à un paramètre de transformations de  $V^n$  ». Mais, dans ce cas, on obtient une formule de décomposition spectrale complète, soit

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} E_n f,$$

où  $\{E_n\}$  désigne l'ensemble complet de projections défini au paragraphe 13.

Nous remarquerons que  $f_n = E_n f$  satisfait à  $X f_n = \frac{2\pi in}{T} f_n$ , où  $T$  désigne la période du groupe.

On a d'ailleurs une formule analogue pour chacun des espaces  $\mathfrak{X}_p^q$  définis au paragraphe 3, et l'on en déduit, si l'on veut, une « formule de décomposition forte ».

Une étude directe des espaces  $\mathfrak{X}_p^q$ , analogue à celle qui a été faite pour  $\mathfrak{X}$ , nous permet d'énoncer :

**THÉORÈME 18 b.** — Soit  $V^n$  une variété riemannienne complète de classe  $C_1^1$  sur laquelle on a défini un champ de vecteurs de Killing, de classe  $C_1^0$ . Nous considérons l'opérateur  $X_\xi$  associé comme opérant dans l'un des espaces  $\mathfrak{X}_p^q$ , et désignons par  $\mathfrak{X}_p^{q'}$  l'espace des tenseurs « faiblement invariants » de type  $p, q$ , par  $\mathfrak{X}_p^{q''}$  l'espace complètement orthogonal à  $\mathfrak{X}_p^{q'}$ . Alors les trois hypothèses suivantes sont équivalentes :

- a.  $\xi$  définit un groupe compact à un paramètre d'isométrie de  $V^n$ ;
- b. L'opérateur  $X_\xi^{-1}$  est borné dans  $\mathfrak{X}_p^{q'}$ ;
- c. Tout tenseur  $T$  de  $\mathfrak{X}_p^{q'}$  admet une décomposition de la forme

$$T = U + X_\xi^{-1} S, \quad \text{où } U \in \mathfrak{X}_p^{q''}.$$

Le théorème 18 a reste vrai si l'on remplace  $\mathfrak{X}_p^q$  par l'espace  $\mathfrak{X}_p$  des formes différentielles de degré  $p$  et de carré sommable sur  $V^n$ .

**19. Interprétation de certains résultats.** — Il est à remarquer que l'étude précédente contient, en fait la solution globale de certaines équations (ou de certains systèmes d'équations) aux dérivées partielles du premier ordre.

Tout d'abord la « formule de décomposition forte » du paragraphe précédent nous permet d'étudier l'équation

$$(1) \quad X f = g,$$

où  $g \in \mathfrak{X}$  est donné, et où  $X$  est un opérateur différentiel « antisymétrique » du premier ordre. Nous voyons ainsi que (1) ne peut admettre une solution  $f \in \mathfrak{X}$  que si  $g$  appartient à  $\mathfrak{X}''(\xi)$  [c'est-à-dire si  $g$  est orthogonale à toutes les solutions de l'équation homogène correspondante]; et pour que (1) admette une solution  $f \in \mathfrak{X}$  quelle que soit  $g \in \mathfrak{X}''$  il faut et il suffit que  $X$  définisse un groupe global, dont toutes les orbites soient fermées, les périodes correspondantes étant bornées.

Nous obtiendrons de même la solution des systèmes d'équations aux dérivées partielles, très particuliers, représentés symboliquement par  $X T = S$ , où  $X$  est une isométrie infinitésimale,  $T$  un tenseur inconnu et  $S$  un tenseur donné.

D'autre part les paragraphes 7 et 8 contiennent une étude, sur la variété-

produit  $V^n \times R$ , de l'équation  $\mathcal{X}f \equiv \frac{\partial f}{\partial t}$ , où  $\mathcal{X}$  désigne un opérateur différentiel du premier ordre, défini sur  $V^n$ , et assujéti à la seule condition  $|\partial \xi|$  borné; cette équation présente une certaine analogie avec celle de la chaleur; et il résulte de notre étude qu'elle ne peut admettre de solution  $f(t, x)$ , définie pour toute valeur de  $t$ , et prenant des valeurs arbitraires données pour  $t=0$ , que si  $\mathcal{X}$  définit un groupe global de transformations de  $V^n$ .

On obtiendrait de même la solution du système représenté symboliquement par  $\mathcal{X}S \equiv \frac{\partial S}{\partial t}$ , où  $S$  désigne un tenseur, sur une variété riemannienne.

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] CONNER (P. E.). — *The Green's and Neumann's problems for differential forms on Riemannian manifolds*, (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 40, 1954, p. 1151-1155).
- [2] FRIEDRICHS (K. O.). — *The identity of weak and strong extensions of differential operators*, (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 55, 1944, p. 132-151).
- [3] KOBAYASHI (Shôshichi). — *Espaces à connexion de Cartan complets*, (*Proc. Japan Acad.*, t. 30, 1954, p. 709-710).
- [4] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — *Application of Hilbert space methods to Lie groups acting on a differentiable manifold*, (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 43, 1957, p. 249-252).
- [5] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — *Sur le champs de vecteurs définissant un groupe d'homéomorphismes d'une variété différentiable* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 1491-1493).
- [6] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — *Sur les transformations infinitésimales d'une variété différentiable, considérées comme des opérateurs hilbertiens* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 1585-1588).
- [7] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — *Sur les groupes à un paramètre de transformations des variétés différentiables*, [*J. Math. pures et appl.* (sous presse)].

(Manuscrit reçu en décembre 1957.)

M<sup>me</sup> J. LELONG-FERRAND,  
 Professeur à la Faculté des Sciences,  
 95, boulevard Jourdan,  
 Paris (14<sup>e</sup>).