BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. II

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 325-388
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__325_0>

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 325 à 388.

SUR LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS. II [1];

PAR

JACQUES DIXMIER.

(Paris).

INTRODUCTION

Soit Γ un groupe localement compact séparable et unimodulaire. On peut décomposer la représentation régulière de Γ en intégrale hilbertienne de représentations unitaires factorielles U_χ, où χ parcourt un certain ensemble Ω muni d'une mesure positive μ. Soit f une fonction intégrable et de carré intégrable pour la mesure de Haar $d\gamma$ sur Γ. Pour tout $\chi \in \Omega$, soit $U_\chi(f)$ l'opérateur correspondant à f dans la représentation U_χ. Alors, on a

$$\int_G |f(\gamma)|^2 \, d\gamma = \int_\Omega \operatorname{tr}(U_\chi(f)^* U_\chi(f)) \, d\mu(\chi),$$

où tr désigne la trace (finie ou infinie) au sens de MURRAY et VON NEUMANN. Cette égalité constitue la « formule de Plancherel » pour Γ. On renvoie à [20] et [24] pour cette théorie générale (les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie à la fin de l'article).

Pour des classes particulières de groupes, différents auteurs ont précisé la structure de l'ensemble Ω et de la mesure μ. Pour les groupes de Lie connexes semi-simples, *cf.* par exemple [10] et [14]. Pour les groupes de classe finie, *cf.* [12]. Il faut aussi mentionner les structures boréliennes sur Ω introduites dans [19].

Dans ce Mémoire, on étudiera le cas où Γ est un groupe de Lie réel connexe nilpotent. On sait [8] que les représentations unitaires factorielles de Γ sont alors de type I, de sorte que la formule de Plancherel fera inter-

(1) Cet article a été rédigé en partie avec l'aide de l'United States Air Force (Contract No. A. F. 18 (600)-1383 monitored by A. F. Office of Scientific Research, Air Research and Development Command).

venir seulement des représentations irréductibles de Γ et la trace au sens usuel. Nous verrons qu'une représentation unitaire irréductible de Γ est déterminée « en général » par son caractère infinitésimal (théorème 1), que Ω s'identifie à une partie d'un espace affine ouverte pour la topologie de Zariski, et que la transformation de Fourier possède des propriétés très voisines des propriétés usuelles (théorèmes 2, 3, 4). En particulier, la mesure μ intervenant dans la formule de Plancherel est définie par une forme différentielle rationnelle sur Ω. Les démonstrations sont indépendantes de la théorie générale citée plus haut.

Les principaux résultats de cet article ont été résumés dans une Note aux *Proceedings of the National Academy of Sciences of U. S. A* (t. 43, 1957, p. 985-986).

CHAPITRE I.

Notations. Rappel de résultats.

Tous les résultats indiqués dans ce chapitre sont très connus. Mais on espère que ces rappels seront utiles à certains lecteurs.

Soient f une application d'un ensemble A dans un ensemble B, A' un sous-ensemble de A. On note $f|A'$ la restriction de f à A'.

Soient A une algèbre à unité sur un corps K, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des éléments de A, A' une partie de A. On note $K[a_1, a_2, \ldots, a_n, A']$ la sous-algèbre de A engendrée par $1, a_1, a_2, \ldots, a_n, A'$.

Le corps des nombres réels sera désigné par $\mathbf{R}$, celui des nombres complexes par $\mathbf{C}$. Dans tout le Mémoire, la lettre i désigne exclusivement le nombre complexe habituel.

Soient X un espace localement compact, μ une mesure $\geqq 0$ sur X, E un espace de Banach, p un nombre réel tel que $1 \leqq p < +\infty$. On note $L^p_E(X, \mu)$ l'espace de Banach des fonctions définies sur X, à valeurs dans E, de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable pour μ (on identifie deux fonctions égales presque partout). On note $\| \quad \|_p$ la norme dans cet espace. Si X est un groupe localement compact et si μ est une mesure de Haar invariante à gauche, on emploie simplement la notation $L^p_E(X)$. D'une manière générale, on renvoie à [3] pour les notions d'intégration utilisées.

Tous les espaces hilbertiens considérés sont supposés complexes. Soit $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien. On note $(x|y)$ le produit scalaire de deux éléments de $\mathfrak{H}$. On note $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus dans $\mathfrak{H}$. Pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, la trace $\operatorname{tr}(T^*T)$ de T^*T a un sens : c'est un nombre $\geqq 0$, fini ou non.

Toutes les algèbres de Lie considérées sont de dimension finie sur le corps de base K. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, on désigne par $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante universelle, par $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, par $\mathfrak{U}_n(\mathfrak{g})$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de filtration $\leq n$; on a $\mathfrak{U}_n(\mathfrak{g})\mathfrak{U}_{n'}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}_{n+n'}(\mathfrak{g})$. Si a et b sont deux éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on pose $[a, b] = ab - ba$; en particulier, si $a \in \mathfrak{g}$ et $b \in \mathfrak{g}$, on retrouve le crochet dans $\mathfrak{g}$. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de $\mathfrak{g}$, les monomes $x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}$ (où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des entiers ≥ 0) forment une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Si a et b sont deux éléments non nuls de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, ab est non nul; en particulier, on pourra donc considérer le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Soient $\mathfrak{g}'$ une autre algèbre de Lie, φ un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$; alors φ se prolonge de manière unique en un homomorphisme de l'algèbre $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$; en particulier, si $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, l'injection canonique de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$ se prolonge en un homomorphisme injectif de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, par lequel on identifie $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ à une sous-algèbre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Toute dérivation de $\mathfrak{g}$ se prolonge de manière unique en une dérivation de l'algèbre $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$; en particulier, si $x \in \mathfrak{g}$, la dérivation de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ qui prolonge $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ est la dérivation intérieure $\mathrm{ad}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}\, x$ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ définie par x, et $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ annulés par ces dérivations; si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})_n}\, x$ est nilpotent pour tout n, et $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}\, x$ est l'unique automorphisme de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ prolongeant l'automorphisme $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ de $\mathfrak{g}$; les automorphismes de $\mathfrak{g}$ de la forme $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ (où $x \in \mathfrak{g}$) sont appelés automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$.

Si V est un espace vectoriel sur K, on désigne par $\mathfrak{S}(V)$ l'algèbre symétrique de V. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur K. Si K est de caractéristique o, il existe une application linéaire canonique de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ qui, pour tout système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'éléments de $\mathfrak{g}$, transforme le produit $x_1 x_2 \ldots x_n$ [calculé dans $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$] en $\frac{1}{n!}\Sigma_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$ [calculé dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$], où σ parcourt le groupe symétrique de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Cette application est bijective. Soit $\mathfrak{U}^n(\mathfrak{g})$ l'image par cette application de l'ensemble des éléments homogènes de degré n de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$. Alors, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est somme directe des $\mathfrak{U}^n(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{U}_n(\mathfrak{g}) = \Sigma_{n' \leq n} \mathfrak{U}^{n'}(\mathfrak{g})$. Les éléments de $\mathfrak{U}^n(\mathfrak{g})$ sont appelés les éléments homogènes de degré n de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. On prendra garde qu'on n'a pas $\mathfrak{U}^n(\mathfrak{g})\mathfrak{U}^{n'}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}^{n+n'}(\mathfrak{g})$, de sorte que $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ n'est pas une algèbre graduée par les $\mathfrak{U}^n(\mathfrak{g})$. Si φ est un homorphisme de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$, et si φ' est son prolongement à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on a $\varphi'(\mathfrak{U}^n(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{U}^n(\mathfrak{g}')$ pour tout n; on a un résultat analogue pour le prolongement à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ d'une dérivation de $\mathfrak{g}$.

Tout endomorphisme de V se prolonge de manière unique en dérivation de $\mathfrak{S}(V)$. En particulier, toute dérivation D de $\mathfrak{g}$ se prolonge en dérivation de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$. Cette dérivation, transportée à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ par la bijection canonique de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, n'est autre que la dérivation de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ qui prolonge D. En particulier, les éléments de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ annulés par les dérivations de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ prolongeant les $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x\, (x \in \mathfrak{g})$ correspondent, par la bijection canonique de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, aux éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. *Voir* [13] en ce qui concerne les trois derniers alinéas.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie qui a même espace vectoriel sous-jacent que $\mathfrak{g}$, mais où le crochet est l'opposé du crochet calculé dans $\mathfrak{g}$. Appelons linéarisation d'une algèbre de Lie une application linéaire de cette algèbre de Lie dans une algèbre associative compatible avec les crochets. Alors, les linéarisations de $\tilde{\mathfrak{g}}$ dans une algèbre associative $\mathfrak{A}$ ne sont autres que les linéarisations de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre associative opposée à $\mathfrak{A}$. D'après la caractérisation universelle de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, il en résulte que $\mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$ s'identifie à l'algèbre associative $\mathfrak{U}^{\sim}(\mathfrak{g})$ opposée à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. D'autre part, l'application $x \rightarrow - x$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. Cet isomorphisme se prolonge de manière unique en un isomorphisme de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ sur $\mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Ce dernier isomorphisme peut être considéré comme un antiautomorphisme A de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$: on l'appelle l'antiautomorphisme principal de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$; il transforme un élément $x_1 x_2 \ldots x_n$ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ (où $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$) en $(-1)^n x_n x_{n-1} \ldots x_1$. On a $A^2 = 1$. Un élément $a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est dit symétrique si $Aa = a$, antisymétrique si $Aa = -a$. On note $\mathfrak{U}^+(\mathfrak{g})$ l'ensemble des éléments symétriques, $\mathfrak{U}^-(\mathfrak{g})$ l'ensemble des éléments antisymétriques. Supposons K de caractéristique 0. On a $\mathfrak{U}^n(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}^+(\mathfrak{g})$ pour n pair, $\mathfrak{U}^n(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}^-(\mathfrak{g})$ pour n impair; $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est somme directe de $\mathfrak{U}^+(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{U}^-(\mathfrak{g})$. Toute dérivation de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ prolongeant une dérivation de $\mathfrak{g}$ commute à A et laisse stables $\mathfrak{U}^+(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{U}^-(\mathfrak{g})$. En particulier, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ est stable pour A, et est somme directe de ses intersections $\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{Z}^-(\mathfrak{g})$ avec $\mathfrak{U}^+(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{U}^-(\mathfrak{g})$. On a

$$\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{g})\,\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}^+(\mathfrak{g}), \quad \mathfrak{Z}^+(\mathfrak{g})\,\mathfrak{Z}^-(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}^-(\mathfrak{g}), \quad \mathfrak{Z}^-(\mathfrak{g})\,\mathfrak{Z}^-(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}^+(\mathfrak{g});$$

en effet, si par exemple $a \in \mathfrak{Z}^+(\mathfrak{g})$ et $b \in \mathfrak{Z}^+(\mathfrak{g})$, on a

$$A(ab) = A(b)A(a) = ba = ab.$$

Si $K = \mathbf{R}$, on appelle caractère de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ un homomorphisme de la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ dans la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{C}$ transformant 1 en 1. Un tel caractère χ est dit hermitien si ses valeurs sont réelles sur $\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{g})$, imaginaires pures sur $\mathfrak{Z}^-(\mathfrak{g})$; il revient au même de dire que $\chi(Aa) = \overline{\chi(a)}$ pour tout $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.

Par « groupe de Lie », on entendra toujours « groupe de Lie réel connexe ». On appelle représentation unitaire d'un groupe topologique Γ dans un espace hilbertien $\mathfrak{H}$ un homomorphisme algébrique de Γ dans le groupe des opérateurs unitaires de $\mathfrak{H}$, continu pour la topologie forte des opérateurs. Deux telles représentations U et U', opérant dans des espaces $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$, sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme isométrique W de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}'$ tel que $U(\gamma) = W^{-1} U'(\gamma') W$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Supposons Γ localement compact, et choisissons une mesure de Haar invariante à gauche $d\gamma$ sur Γ; alors, pour $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, on pose $U(f) = \int_\Gamma f(\gamma) U(\gamma)\, d\gamma$. L'application $f \rightarrow U(f)$ est un homomorphisme de $L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Plus généralement, si μ est une mesure bornée sur Γ, on pose $U(\mu) = \int_\Gamma U(\gamma)\, d\mu(\gamma)$.

Une représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie opère nécessairement dans un espace hilbertien à base dénombrable.

Soient Γ un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, U une représentation unitaire de Γ dans $\mathfrak{H}$. Soit $\mathfrak{H}'$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{H}$ sommes finies d'éléments de la forme $U(f)\xi$, où $\xi \in \mathfrak{H}$ et où f est une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur Γ. Le sous-espace $\mathfrak{H}'$ s'appelle sous-espace de Gårding de U; il est partout dense dans $\mathfrak{H}$. Un élément ξ de $\mathfrak{H}$ est dit indéfiniment différentiable pour U si l'application $\gamma \to U(\gamma)\xi$ de Γ dans $\mathfrak{H}$ est indéfiniment différentiable pour la topologie forte de $\mathfrak{H}$. Soit $\mathfrak{H}''$ le sous-espace des vecteurs indéfiniment différentiables; on a $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H}''$. Soit $a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$; il existe un endomorphisme, qui sera noté $U(a)$, de l'espace vectoriel $\mathfrak{H}''$, tel que, pour $\xi \in \mathfrak{H}''$, $U(a)\xi$ s'obtienne en appliquant à la fonction $\gamma \to U(\gamma)\xi$ la distribution ponctuelle à laquelle s'identifie a. L'application $a \to U(a)$ est une représentation de l'algèbre $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ dans l'espace $\mathfrak{H}''$, qui laisse stable $\mathfrak{H}'$. Pour $x \in \mathfrak{g}$ et $\xi \in \mathfrak{H}''$, on a

$$U(x)\xi = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}[U(\exp \lambda x)\xi - \xi].$$

Soit Ω un homomorphisme continu (donc analytique) d'un autre groupe de Lie Γ' dans Γ. Alors, $\gamma' \to U(\Omega\gamma')$ est une représentation unitaire $\mathfrak{U}^{\Omega}$ de Γ'. Si $\xi \in \mathfrak{H}$ est indéfiniment différentiable pour U, ξ est indéfiniment différentiable pour U^{Ω}. Soit ω l'homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ de Γ' dans $\mathfrak{g}$ correspondant à Ω; notons encore ω son prolongement à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$; pour $a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ et $\xi \in \mathfrak{H}''$, on a $U^{\Omega}(a)\xi = U(\omega(a))\xi$; il suffit de le vérifier pour $a \in \mathfrak{g}'$, et c'est immédiat en utilisant par exemple la formule ci-dessus et le fait que l'application exponentielle commute aux homomorphismes. En particulier, si Γ' est un sous-groupe fermé de Γ, et si U' désigne la restriction de U à Γ', $U'(a)$ est, pour $a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, un prolongement de $U(a)$. Comme autre cas particulier, soient Ω un automorphisme continu de Γ, ω l'automorphisme correspondant de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$; alors les vecteurs indéfiniment différentiables pour U et U^{Ω} sont les mêmes, et $U^{\Omega}(a) = U(\omega(a))$. Plus particulièrement encore, si Ω est l'automorphisme intérieur défini par un élément γ de Γ, et si $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, on a $\omega(a) = a$, donc $U(\gamma)U(a)U(\gamma)^{-1} = U(a)$; autrement dit, $U(a)$ commute aux $U(\gamma)$; il en est de même de $U(a) \mid \mathfrak{H}'$. *Voir* [4] sur le dernier alinéa.

Conservons les notations Γ, $\mathfrak{g}$, U, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}''$. Si $x \in \mathfrak{g}$, $iU(x)$ est hermitien, c'est-à-dire que $(iU(x)\xi \mid \xi') = (\xi \mid iU(x)\xi')$ pour ξ, $\xi' \in \mathfrak{H}''$; en effet,

$$\begin{aligned}(U(x)\xi \mid \xi') &= \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}(U(\exp \lambda x)\xi - \xi \mid \xi') \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}[(\xi \mid U(\exp \lambda x)^{-1}\xi') - (\xi \mid \xi')] \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}(\xi \mid U(\exp(-\lambda x))\xi' - \xi') = (\xi \mid U(-x)\xi').\end{aligned}$$

Désignant toujours par A l'antiautomorphisme principal de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on a

$$(U(a)\xi \mid \xi') = (\xi \mid U(Aa)\xi') \qquad \text{pour } \xi,\ \xi' \in \mathfrak{H}'',\quad a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g});$$

en effet, cette égalité est vraie d'après ce qui précède si $a \in \mathfrak{g}$; il suffit alors de raisonner par récurrence sur la filtration de a : si la formule est vraie pour $a_1 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et $a_2 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on a

$$\begin{aligned}(U(a_1 a_2)\xi \mid \xi') &= (U(a_1)U(a_2)\xi \mid \xi') = (U(a_2)\xi \mid U(Aa_1)\xi') \\ &= (\xi \mid U(Aa_2)U(Aa_1)\xi') = (\xi \mid U(Aa_2 . Aa_1)\xi') \\ &= (\xi \mid U(A(a_1 a_2))\xi'),\end{aligned}$$

d'où notre assertion. En particulier, si a est symétrique (resp. antisymétrique), $U(a)$ [resp. $iU(a)$] est hermitien, et l'on peut considérer l'opérateur fermé $U(a)^{**}$ [resp. $(iU(a))^{**}$] qui est hermitien; il commute à tout opérateur linéaire continu dans $\mathfrak{H}$ qui commute aux $U(\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma$.

Soit a un élément symétrique de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Alors, $T = U(a)$ est essentiellement autoadjoint. En effet, il suffit de montrer que $(T + i.1)(\mathfrak{H}'')$ et $(T - i.1)(\mathfrak{H}'')$ sont partout denses dans $\mathfrak{H}$; montrons par exemple que le sous-espace $\mathfrak{X}$ orthogonal à $(T + i.1)(\mathfrak{H}'')$ est réduit à 0. L'opérateur T permute aux $U(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$, donc il en est de même du projecteur $P_{\mathfrak{X}}$; donc, si $\xi \in \mathfrak{H}''$, on a $\xi' = P_{\mathfrak{X}}\xi \in \mathfrak{H}''$. Alors, $T\xi'$ est défini, et $(T\xi' + i\xi' \mid \xi') = 0$, donc $(T\xi' \mid \xi') = -i(\xi' \mid \xi')$ est à la fois réel et imaginaire pur, donc nul; donc $\xi' = 0$ quel que soit $\xi \in \mathfrak{H}''$ et par suite $\mathfrak{X} = 0$. Un raisonnement analogue montre que, si a est un élément antisymétrique de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, $iU(a)$ est essentiellement autoadjoint. La même démonstration s'applique en remplaçant $\mathfrak{H}''$ par $\mathfrak{H}'$.

Si $U(a)$ est scalaire pour $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, on a $U(a) = \chi(a).1$ pour $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, où χ est un caractère hermitien de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. On dit alors que *$U$ admet le caractère χ*. Avec les notations employées plus haut, le caractère de U^{Ω} (Ω étant un automorphisme de Γ) est $\chi \circ \omega$. En particulier, si U est irréductible, U admet un caractère; car, pour $a \in \mathfrak{Z}^+(\mathfrak{g})$, $U(a)^*$ est autoadjoint et commute aux $U(\gamma)$, donc est scalaire; donc $U(a)$ est scalaire pour $a \in \mathfrak{Z}^+(\mathfrak{g})$, et de même pour $a \in \mathfrak{Z}^-(\mathfrak{g})$, donc pour $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. *Voir* [22] et [23] pour les trois derniers alinéas.

CHAPITRE II.

Premiers résultats sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g}$, algèbre de Lie nilpotente).

Lemme 1. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}'$ un idéal de $\mathfrak{g}$, x un élément de $\mathfrak{g}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. On suppose $a_i = x$ pour les indices $j_1, j_2, \ldots, j_p$ $(j_1 < j_2 < \ldots < j_p)$, et $a_i \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ pour les autres indices (soient $k_1, k_2, \ldots, k_q$ ces indices, avec $k_1 < k_2 < \ldots < k_q$). Alors*

$$a_1 a_2 \ldots a_n - x^p a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_q}$$

est une somme de termes de la forme $x^{p'} b$, où $b \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ et $p' < p$.

DÉMONSTRATION. — Le lemme est évident pour $p=0$. Supposons-le vrai pour $p-1$. Si $j_1=1, j_2=2, \ldots, j_p=p$, le lemme est encore évident. Sinon, il existe un entier l tel que $l \in \{k_1, k_2, \ldots, k_q\}$ et $l+1 \in \{j_1, j_2, \ldots, j_p\}$. Alors

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \ldots a_n &= a_1 \ldots a_{l-1} a_l x a_{l+2} \ldots a_n \\ &= a_1 \ldots a_{l-1} x a_l a_{l+2} \ldots a_n + a_1 \ldots a_{l-1} [a_l, x] a_{l+2} \ldots a_n \end{aligned}$$

et $[a_l, x] \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ parce que $\mathfrak{g}'$ est un idéal, de sorte que l'hypothèse de récurrence s'applique à $a_1 \ldots a_{l-1}[a_l, x] a_{l+2} \ldots a_n$. Il suffit donc de prouver le lemme pour $a_1 \ldots a_{l-1} x a_l a_{l+2} \ldots a_n$. En recommençant ce raisonnement, on se ramène de proche en proche au cas où tous les facteurs x sont en tête du produit.

LEMME 2. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique* 0, *$\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension* 1 *dans $\mathfrak{g}$, x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{d}$ un ensemble de dérivations de $\mathfrak{g}$ [qui se prolongent en dérivations de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$]. On suppose $D(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}'$ pour toute $D \in \mathfrak{d}$. Soit $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$ [resp. $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')$] la sous-algèbre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ [resp. $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$] formée des éléments annulés par $\mathfrak{d}$. On suppose $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$ contenu dans le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ [de sorte qu'on peut former le corps des fractions de $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$], et l'on suppose $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$.*

(i) *Il existe des éléments $a_1 \in \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')$, $a_2 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ tels que $a_1 \neq 0$ et tels que $a = xa_1 + a_2$ soit un élément symétrique ou antisymétrique de $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$.*

Dans (ii) *et* (iii), *on suppose a, a_1, a_2 choisis de manière à vérifier* (i).

(ii) *$\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$ est contenu dans l'algèbre $K[a, a_1^{-1}, \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')]$ engendrée par a, a_1^{-1}, $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')$ dans le corps des fractions de $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$.*

(iii) *Le corps des fractions de $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$ est le corps engendré par a et $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')$, et a est transcendant sur $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')$.*

DÉMONSTRATION. — Prouvons (i). Soit $x^m b_m + x^{m-1} b_{m-1} + \ldots + b_0$, où b_m, $b_{m-1}, \ldots, b_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ et $m > 0$, $b_m \neq 0$, un élément de $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$ n'appartenant pas à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. Pour toute $D \in \mathfrak{d}$, on a $Db_m, Db_{m-1}, \ldots, Db_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ puisque D laisse stable $\mathfrak{g}'$. D'autre part

$$D(x^n) = x^{n-1}(Dx) + x^{n-2}(Dx)x + \ldots + (Dx)x^{n-1}$$

et $Dx \in \mathfrak{g}'$. En utilisant le lemme 1, on voit que

$$D(x^n) = n x^{n-1}(Dx) + x^{n-2} c_{n,n-2} + \ldots + x c_{n,1} + c_{n,0}$$

où $c_{n,n-2}, \ldots, c_{n,0}$ sont des éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. Ceci posé, on a

$$\begin{aligned} 0 = {} & D(x^m b_m + x^{m-1} b_{m-1} + \ldots + b_0) \\ = {} & x^m (Db_m) + m x^{m-1} (Dx) b_m + x^{m-2} c_{m,m-2} b_m + \ldots + c_{m,0} b_m \\ & + x^{m-1}(Db_{m-1}) + (m-1) x^{m-2} (Dx) b_{m-1} + x^{m-3} c_{m-1,m-3} b_{m-1} + \ldots \\ & + c_{m-1,0} b_{m-1} + \ldots + Db_0. \end{aligned}$$

D'après ce qu'on a dit au chapitre I des bases de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, ceci entraîne notamment

$$Db_m = 0, \tag{1}$$

$$m(Dx)b_m + Db_{m-1} = 0. \tag{2}$$

Compte tenu de (1), (2) s'écrit

$$D(mxb_m + b_{m-1}) = 0. \tag{3}$$

Donc $mxb_m + b_{m-1} \in \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$ et $b_m \in \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')$. Comme les dérivations D commutent à l'antiautomorphisme principal A de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, les composantes symétrique et antisymétrique de $mxb_m + b_{m-1}$ appartiennent à $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$. Or, ces composantes sont

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(mxb_m + b_{m-1} + mA(b_m)A(x) + A(b_{m-1})) \\ &\quad = m\frac{b_m - A(b_m)}{2}x + \frac{b_{m-1} + A(b_{m-1})}{2}, \\ &\frac{1}{2}(mxb_m + b_{m-1} - mA(b_m)A(x) - A(b_{m-1})) \\ &\quad = m\frac{b_m + A(b_m)}{2}x + \frac{b_{m-1} - A(b_{m-1})}{2}. \end{aligned}$$

[On s'est servi du fait que $A(b_m) \in \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')$ est dans le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.] Comme $b_m \neq 0$ et que K est de caractéristique 0, l'un des deux éléments $m\frac{b_m - A(b_m)}{2}$, $m\frac{b_m + A(b_m)}{2}$ est $\neq 0$. D'où (i).

Dans la suite de la démonstration, on suppose a, a_1, a_2 choisis de manière à vérifier (i). Prouvons (ii). Soit $d = x^p d_p + x^{p-1} d_{p-1} + \ldots + d_0$, où $d_p, d_{p-1}, \ldots, d_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ et $d_p \neq 0$, un élément de $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$. Nous allons montrer qu'il appartient à $K[a, a_1^{-1}, \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')]$. C'est évident pour $p = 0$. Supposons-le établi pour les entiers $< p$. On a vu dans la démonstration de (i) que $d_p \in \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')$. Donc $da_1^p - d_p a^p \in \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$. Or

$$da_1^p - d_p a^p = (x^p d_p + x^{p-1} d_{p-1} + \ldots + d_0)a_1^p - d_p(xa_1 + a_2)^p = \Sigma_{p'<p} x^{p'} d'_{p'},$$

avec $d'_{p'} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, d'après le lemme 1. D'après l'hypothèse de récurrence, $da_1^p - d_p a^p \in K[a, a_1^{-1}, \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')]$. Donc

$$da_1^p \in K[a, a_1^{-1}, \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')], \qquad d \in K[a, a_1^{-1}, \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')].$$

D'où (ii).

Prouvons (iii). Comme $a_1 \in \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')$, (ii) entraîne aussitôt que le corps des fractions de $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$ est engendré par a et $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')$. D'autre part, supposons qu'il existe une relation de la forme $a^q e_q + a^{q-1} e_{q-1} + \ldots + e_0 = 0$, où

$e_q, e_{q-1}, \ldots, e_0 \in \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}')$, $e_q \neq 0$. Remplaçant a par $x a_1 + a_2$, on en déduit, utilisant le lemme 1,

$$x^q a_1^q e_q + x^{q-1} e'_{q-1} + \ldots + e'_0 = 0,$$

avec $e'_{q-1}, \ldots, e'_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. D'où $a_1^q e_q = 0$, ce qui est absurde. D'où (iii).

Lemme 3. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique* o. *Soit $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ et* $\dim \mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1} = 1$ *pour $j = 1, 2, \ldots, n$. Pour $j = 1, 2, \ldots, n$, soit x_j un élément de $\mathfrak{g}_j$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}_{j-1}$. Soit $\mathfrak{d}$ un ensemble de dérivations de $\mathfrak{g}$ tel que $D(\mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}_{j-1}$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$ quelle que soit $D \in \mathfrak{d}$. Soit $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$ la sous-algèbre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ formée des éléments annulés par $\mathfrak{d}$. On suppose $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$ contenue dans le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Soient $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$ les indices $j \geq 1$ tels qu'il existe dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ un élément de $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$ n'appartenant pas à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$.*

(i) *Pour $j \in \{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$, il existe $a_{j1} \in \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ et $a_{j2} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ tels que $a_{j1} \neq 0$ et tels que $a_j = x_j a_{j1} + a_{j2}$ soit un élément symétrique ou antisymétrique de $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$.*

Dans (ii), (iii), (iv), *on suppose les a_j, a_{j1}, a_{j2} choisis de façon à vérifier* (i).

(ii) $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}) \subset K[a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}, a_{j_1 1}^{-1}, \ldots, a_{j_q 1}^{-1}]$.

(iii) *Le corps des quotients de $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g})$ est le corps engendré par les éléments algébriquement indépendants $a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}$.*

(iv) *D'après* (iii), *on a $a_{j_1 1} = b_1 b_1'^{-1}, \ldots, a_{j_q 1} = b_q b_q'^{-1}$, où $b_1, b'_1, \ldots, b_q, b'_q \in K[a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{q-1}}]$. Posant $b = b_1 b_2 \ldots b_q$, on a*

$$\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}) \subset K[a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}, b^{-1}].$$

Démonstration. — L'énoncé (i) résulte du lemme 2(i) appliqué à $\mathfrak{g}_j$ et $\mathfrak{g}_{j-1}$.

Supposons (ii) démontré quand la dimension de $\mathfrak{g}$ est $< n$, et envisageons la situation du lemme. On a $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}) \subset K[a_{j_q}, a_{j_q 1}^{-1}, \mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_q - 1})]$ d'après le lemme 2(ii), et $\mathfrak{U}_0(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_q-1}) \subset K[a_{j_1}, \ldots, a_{j_{q-1}}, a_{j_1 1}^{-1}, \ldots, a_{j_{q-1} 1}^{-1}]$ d'après l'hypothèse de récurrence. D'où (ii).

On démontre (iii) de manière analogue, par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, en utilisant le lemme 2 (iii).

On a $a_{j_1 1}^{-1} = b'_1 b^{-1} b_2 b_3 \ldots b_q \in K[a_{j_1}, \ldots, a_{j_{q-1}}, b^{-1}]$, et de même pour $a_{j_2 1}^{-1}, \ldots, a_{j_q 1}^{-1}$, de sorte que (iv) résulte de (ii).

Lemme 4. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}'$ un idéal de $\mathfrak{g}$, x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$, a_1 et a_2 des éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. Si $x a_1 + a_2$ appartient à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et est symétrique* (*resp. antisymétrique*), *a_1 est antisymétrique* (*resp. symétrique*), *et a_2 est symétrique* (*resp. antisymétrique*).

Démonstration. — Comme on l'a vu dans la démonstration du lemme 2 (i), on a $a_1 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Soit A l'antiautomorphisme principal de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Supposons $x a_1 + a_2$ symétrique pour fixer les idées. Alors

$$a_1 x + a_2 = x a_1 + a_2 = A(x a_1 + a_2)$$
$$= A(a_1) A(x) + A(a_2) = -A(a_1) x + A(a_2),$$

d'où $a_1 = -A(a_1)$, $a_2 = A(a_2)$.

Proposition 1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur un corps K de caractéristique* o. *Le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ est une extension transcendante pure de K.*

Démonstration. — Il existe une suite $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ et $\dim \mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1} = 1$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 3 (iii) en prenant pour $\mathfrak{d}$ l'ensemble des dérivations intérieures de $\mathfrak{g}$.

Le résultat suivant serait évident si l'on savait que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments. [Si le 14e problème de Hilbert admettait une réponse positive, on pourrait facilement prouver que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ est engendré par un nombre fini d'éléments.]

Proposition 2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur un corps K de caractéristique* o. *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_q$ des éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ engendrant le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Il existe un élément non nul $a \in K[a_1, a_2, \ldots, a_q]$ tel que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset K[a_1, a_2, \ldots, a_q, a^{-1}]$.*

Démonstration. — D'après le lemme 3 (iv), il existe $b_1, b_2, \ldots, b_r, b_{r+1} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ tels que $b_{r+1} \neq 0$ et $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset K[b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}^{-1}]$. On a

$$b_j = B_j(a_1, \ldots, a_q)\, B'_j(a_1, \ldots, a_q)^{-1},$$

où B_j, B'_j sont des polynomes. Posons

$$a = B'_1(a_1, \ldots, a_q) B'_2(a_1, \ldots, a_q) \ldots B'_r(a_1, \ldots, a_q) B_{r+1}(a_1, \ldots, a_q).$$

Alors, pour $1 \leq j \leq r$, on a $a b_j \in K[a_1, \ldots, a_q]$, donc $b_j \in K[a_1, \ldots, a_q, a^{-1}]$; et $a b_{r+1}^{-1} \in K[a_1, \ldots, a_q]$, donc $b_{r+1}^{-1} \in K[a_1, \ldots, a_q, a^{-1}]$. Donc

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset K[b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}^{-1}] \subset K[a_1, \ldots, a_q, a^{-1}].$$

Définition 1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur un corps K de caractéristique* o; *soient $a_1, \ldots, a_q$ des éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ engendrant le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Un élément non nul $a \in K[a_1, \ldots, a_q]$ tel que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset K[a_1, \ldots, a_q, a^{-1}]$ sera appelé un élément affine relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_q$.*

Soit b un autre élément non nul de $K[a_1, \ldots, a_q]$. Alors,

$$a^{-1} = (ab)^{-1} b \in (ab)^{-1} K[a_1, \ldots, a_q],$$

donc $K[a_1, \ldots, a_q, a^{-1}] \subset K[a_1, \ldots, a_q, (ab)^{-1}]$. Donc ab est encore affine relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_q$.

CHAPITRE III.

COMPARAISON DE $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ ET $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ ($\mathfrak{g}'$, IDÉAL DE CODIMENSION 1 DANS $\mathfrak{g}$).

Les lemmes 5 à 10 n'ont pour but que de préparer la proposition 3, et ne seront plus utilisés dans la suite du Mémoire (exception faite de la démonstration du lemme 12).

Soient V un espace vectoriel sur un corps commutatif, B une forme bilinéaire alternée sur V. Nous noterons N_B l'ensemble des $x \in V$ tels que $B(x, y) = 0$ pour tout $y \in V$. Alors, B définit par passage au quotient une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur V/N_B.

LEMME 5. — *Soient V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif, W un sous-espace de dimension $n-1$ de V, B une forme bilinéaire alternée sur V, B' sa restriction à W. Deux cas sont possibles :*

(i) *ou bien $N_B \not\subset W$; alors $N_B \cap W = N_{B'}$, et $N_{B'}$ est de codimension 1 dans N_B;*

(ii) *ou bien $N_B \subset W$; alors $N_B \subset N_{B'}$, et N_B est de codimension 1 dans $N_{B'}$.*

DÉMONSTRATION. — Supposons qu'il existe un élément x de N_B tel que $x \notin W$. Si $y \in N_{B'}$, y est orthogonal à W pour B' donc pour B, et y est orthogonal à x pour B, donc $y \in N_B$. Donc $N_{B'} \subset N_B \cap W$. Par ailleurs, il est clair que $N_B \cap W \subset N_{B'}$. Donc $N_B \cap W = N_{B'}$. On a par suite $\dim N_B/N_{B'} \leq \dim V/W = 1$, et $N_B \neq N_{B'}$, d'où (i).

Supposons maintenant $N_B \subset W$. Alors, il est clair que $N_B \subset N_{B'}$. Soit z un élément de V n'appartenant pas à W. Comme N_B est formé des éléments de $N_{B'}$ orthogonaux à z pour B, on a $\dim N_{B'}/N_B \leq 1$. Reste à montrer que $N_B \neq N_{B'}$. Passant au quotient par N_B, on est ramené au cas où B est non dégénérée. Alors, n est pair, donc $n-1$ est impair, donc B' est dégénérée, c'est-à-dire que $N_{B'} \neq 0$.

LEMME 6. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n, $\mathfrak{g}'$ un idéal de dimension $n-1$ de $\mathfrak{g}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $(x_2, \ldots, x_n)$ soit une base de $\mathfrak{g}'$, L le corps des fractions de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$, L' le corps des fractions de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}')$. On suppose que les relations*

$$\Sigma_{j=1}^{n} [x_k, x_j] p_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

entre éléments $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de L, entraînent $p_1 = 0$. Dans ces conditions, le rang sur L' de la matrice $([x_k, x_j])_{1 \leq k \leq n, 2 \leq j \leq n}$ est égal au rang sur L' de la matrice $([x_k, x_j])_{2 \leq k \leq n, 2 \leq j \leq n}$ augmenté de 1.

Démonstration. — Soit V l'espace vectoriel L^n de dimension n sur L. Pour $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$, soit $u_{kj} = [x_k, x_j] \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{S}(\mathfrak{g}) \subset L$. La matrice alternée $(u_{kj})_{1 \leqq k \leqq n, 1 \leqq j \leqq n}$ définit sur V (qui possède une base canonique) une forme bilinéaire alternée B. Soit W l'ensemble des éléments $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in V$ tels que $t_1 = 0$. Un élément $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de V est dans N_B si et seulement si l'on a

$$0 = B((t'_1, t'_2, \ldots, t'_n), (t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \Sigma_{k=1}^n (\Sigma_{j=1}^n u_{kj} t_j) t'_k$$

quels que soient $t'_1, t'_2, \ldots, t'_n \in L$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\Sigma_{j=1}^n u_{kj} t_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après l'hypothèse du lemme, ceci entraîne $t_1 = 0$. Ainsi, $N_B \subset W$. D'après le lemme 5, il existe un élément $(0, s_2, s_3, \ldots, s_n) \in W$ possédant les deux propriétés suivantes :

$$(a) \qquad B((0, s'_2, s'_3, \ldots, s'_n), (0, s_2, s_3, \ldots, s_n)) = 0$$

quels que soient $s'_2, s'_3, \ldots, s'_n \in L$, c'est-à-dire

$$(4) \qquad \Sigma_{j=2}^n u_{kj} s_j = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

$$(b) \qquad B((1, 0, 0, \ldots, 0), (0, s_2, s_3, \ldots, s_n)) \neq 0,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma_{j=2}^n u_{1j} s_j \neq 0.$$

Soient r, r' les rangs sur L (donc sur L') des matrices $(u_{kj})_{1 \leqq k \leqq n, 2 \leqq j \leqq n}$ et $(u_{kj})_{2 \leqq k \leqq n, 2 \leqq j \leqq n}$. Ce qui précède montre que $r > r'$. Mais il est clair que $r \leqq r' + 1$. D'où le lemme.

Lemme 7. — *Soient K un corps commutatif de caractéristique* 0, *V un espace vectoriel de dimension finie sur K, L le corps des fractions de $\mathfrak{S}(V)$, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique d'endomorphismes de V qu'on prolonge en dérivations de L, L_0 le sous-corps des éléments de L annulés par $\mathfrak{g}$, d le degré de transcendance de L_0 sur K. Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de V sur K, $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ une base de $\mathfrak{g}$ sur K, r le rang sur L de la matrice $(x_l e_j)_{1 \leqq l \leqq q, 1 \leqq j \leqq n}$. Alors, $d = n - r$.*

Démonstration. — Soient V^* l'espace vectoriel dual de V, ${}^t\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie dans V^* formée des transposés des éléments de $\mathfrak{g}$, Γ le groupe algébrique irréductible d'automorphismes de V^* d'algèbre de Lie ${}^t\mathfrak{g}$. Nous identifierons L au corps des fonctions rationnelles sur V^*. Les éléments de L_0 sont alors les éléments de L invariants par Γ ([5], p. 31).

Supposons d'abord K algébriquement clos. D'après [6], il existe :

1° une partie non vide U de V^*, ouverte pour la topologie de Zariski, et stable pour Γ;

2° une variété algébrique affine irréductible Z, n'ayant que des points simples;

3° un morphisme φ de U sur Z, de rang constant sur U, tels que les fonctions rationnelles sur V^* invariantes par Γ soient exactement les fonctions $f \odot \varphi$, où f est une fonction rationnelle sur Z.

Par suite $d = n - s$, s étant la dimension (constante) de l'espace tangent aux orbites de Γ. D'après [5], p. 192, proposition 2, cette dimension est égale à la dimension sur K de ${}^t\mathfrak{g}\, x^*$ pour tout $x^* \in U$. Posons $x_l e_j = \Sigma_{k=1}^n \lambda_{ljk} e_k$ avec $\lambda_{ljk} \in K$. Soit $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ la base de V^* duale de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On a ${}^t x_l e_j^* = \Sigma_{k=1}^n \lambda_{lkj} e_k^*$; donc, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, on a

$$ {}^t x_l(\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \ldots + \alpha_n e_n^*) = \Sigma_{j,k} \lambda_{lkj} \alpha_j e_k^* = \Sigma_{j,k} \lambda_{ljk} \alpha_k e_j^*. $$

Ainsi, s est égal au rang sur K de la matrice $(\Sigma_k \lambda_{ljk} \alpha_k)_{1 \leq l \leq q, 1 \leq j \leq n}$, toutes les fois que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont choisis de manière à ne pas annuler un nombre fini de polynômes par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Ce rang est aussi le rang sur $K(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de la matrice $(\Sigma_k \lambda_{ljk} X_k)_{1 \leq l \leq q, 1 \leq j \leq n}$ ($X_1, X_2, \ldots, X_n$ désignant des indéterminées), ou encore le rang sur L de la matrice $(\Sigma_k \lambda_{ljk} e_k)_{1 \leq l \leq q, 1 \leq j \leq n})$, c'est-à-dire r. Le lemme est donc démontré lorsque K est algébriquement clos.

Passons au cas général. Soit K' une clôture algébrique de K. Étendant le corps de base à K' dans V et $\mathfrak{g}$, on obtient $V_{(K')}$ et $\mathfrak{g}_{(K')}$. Soit L' le corps des quotients de $\mathfrak{S}(V_{(K')})$. Comme K' est la clôture algébrique de K, tout élément de L' peut s'écrire $p' q'^{-1}$, où $p' \in \mathfrak{S}(V_{(K')})$ et $q' \in \mathfrak{S}(V)$. D'autre part, tout élément de $\mathfrak{S}(V_{(K')})$ est combinaison linéaire à coefficients dans K' d'éléments de $\mathfrak{S}(V)$. Donc, si $(\beta_\iota)_{\iota \in I}$ est une base de K' sur K, tout élément de L' s'écrit de manière unique sous la forme $\Sigma_{\iota \in I} \beta_\iota f_\iota$, où $f_\iota \in L$. Si cet élément est annulé par $\mathfrak{g}_{(K')}$, les f_ι sont annulés par $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire appartiennent à L_0; la réciproque est évidente. Ainsi, le corps des éléments de L' annulés par $\mathfrak{g}_{(K')}$ est engendré par K' et L_0. Donc son degré de transcendance sur K' est égal à celui de L_0 sur K (car L et K' sont algébriquement disjoints sur K). Par ailleurs, la dimension de $V_{(K')}$ sur K' est égale à la dimension de V sur K, et le rang de la matrice $(x_l e_j)_{1 \leq l \leq q, 1 \leq j \leq n}$ est le même sur L et sur L'. Il suffit donc d'appliquer le résultat obtenu lorsque K est algébriquement clos.

LEMME 8. — *On conserve les notations du lemme 7. Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des éléments de L tels que $\Sigma_{j=1}^n (x_l e_j) p_j = 0$ pour $l = 1, 2, \ldots, q$, il existe des éléments $f, g, \ldots, h$ de L_0 et des éléments $a, b, \ldots, c$ de L tels que*

$$ \begin{aligned} p_1 &= a f'_{e_1} + b g'_{e_1} + \ldots + c h'_{e_1}, \\ p_2 &= a f'_{e_2} + b g'_{e_2} + \ldots + c h'_{e_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= a f'_{e_n} + b g'_{e_n} + \ldots + c h'_{e_n}. \end{aligned} $$

DÉMONSTRATION. — Conservant les notations du lemme 7, il existe d éléments de L_0 algébriquement indépendants sur K, que nous désignerons par $f, g, \ldots, h$. Alors, chacun des éléments

$$\begin{aligned} F &= (f'_{e_1}, f'_{e_2}, \ldots, f'_{e_n}), \\ G &= (g'_{e_1}, g'_{e_2}, \ldots, g'_{e_n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H &= (h'_{e_1}, h'_{e_2}, \ldots, h'_{e_n}) \end{aligned}$$

de L^n constitue une solution du système d'équations

$$(5) \qquad \Sigma_{j=1}^n (x_l e_j) q_j = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, q)$$

par rapport aux inconnues $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de L. Puisque $f, g, \ldots, h$ sont algébriquement indépendants sur K, les vecteurs $F, G, \ldots, H$ de L^n sont linéairement indépendants sur L. Comme $d = n - r$ (lemme 7), toute solution de (5) est combinaison L-linéaire de $F, G, \ldots, H$. C'est exactement ce qu'exprime le lemme 8.

LEMME 9. — *Soient K un corps commutatif de caractéristique* 0, $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente sur K,* $\mathfrak{g}'$ *un idéal de codimension* 1 *de* $\mathfrak{g}$, *L (resp. L') le corps des quotients de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ [resp. $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}')$], L_0 (resp. L'_0) l'ensemble des éléments de L (resp. L') annulés par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$). On suppose $L_0 \subset L'$. Alors, L'_0 contient L_0 et son degré de transcendance sur L_0 est égal à* 1.

DÉMONSTRATION. — Il est clair que $L_0 \subset L'_0$. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ soit une base de $\mathfrak{g}'$. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des éléments de L tels que

$$\Sigma_{j=1}^n [x_l, x_j] p_j = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après le lemme 8, il existe des éléments $f, g, \ldots, h$ de L_0 et des éléments $a, b, \ldots, c$ de L tels que $p_1 = af'_{e_1} + bg'_{e_1} + \ldots + ch'_{e_1}$. Comme $L_0 \subset L'$, on a $f'_{e_1} = g'_{e_1} = \ldots = h'_{e_1} = 0$, donc $p_1 = 0$. Ainsi, on est dans les conditions d'application du lemme 6. Donc le rang sur L' de la matrice $([x_l, x_j])_{1 \leqq l \leqq n, 2 \leqq j \leqq n}$ est supérieur d'une unité au rang de la matrice $([x_l, x_j])_{2 \leqq l \leqq n, 2 \leqq j \leqq n}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 7.

LEMME 10. — *Soient K un corps commutatif, V un espace vectoriel de dimension finie sur K, L le corps des fractions de $\mathfrak{S}(V)$, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie d'endomorphismes nilpotents de V. Tout élément de L annulé par $\mathfrak{g}$ est quotient de deux éléments de $\mathfrak{S}(V)$ annulés par $\mathfrak{g}$.*

DÉMONSTRATION. — Soit $f = pq^{-1} \in L$, avec $p \in \mathfrak{S}(V)$, $q \in \mathfrak{S}(V)$, p et q étant premiers entre eux. Supposons f annulé par $\mathfrak{g}$. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a $(x.p)q - (x.q)p = 0$. Donc p divise $x.p$. Comme $\deg(x.p) \leqq \deg p$, on voit que $x.p = \lambda(x)p$ avec $\lambda(x) \in K$. Le sous-espace Kp de dimension 1 de $\mathfrak{S}(V)$ est stable par $\mathfrak{g}$. D'autre part, les endomorphismes définis par $\mathfrak{g}$ dans V, donc dans chaque composante homogène de $\mathfrak{S}(V)$, sont nilpotents. Donc $\lambda(x) = 0$, de sorte que p, et par suite q, sont annulés par $\mathfrak{g}$.

PROPOSITION 3. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique* 0, *$\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension* 1 *de $\mathfrak{g}$.*

(i) *Si $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ contient strictement $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$.*

(ii) *Si $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ et si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ contient strictement $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.*

DÉMONSTRATION. — Supposons $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. Soit $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ et montrons que $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Soit x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$. Comme a commute aux éléments de $\mathfrak{g}'$ il suffit de montrer que a commute à x. Or [lemme 2 (i)] il existe $a_1 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ et $a_2 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ tels que $a_1 \neq 0$ et $xa_1 + a_2 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. On a $a(xa_1 + a_2) = (xa_1 + a_2)a$. Comme $aa_1 = a_1a$ et $aa_2 = a_2a$, on déduit de là que $(ax - xa)a_1 = 0$, d'où $ax - xa = 0$ puisque $a_1 \neq 0$. On a donc prouvé que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et par suite que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. Comme $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, on a aussi $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \neq \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$.

Supposons $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ et $\mathfrak{g}$ nilpotente. Il est clair que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Pour montrer que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ sont distincts, il suffit de montrer que leurs images canoniques $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}'$ dans $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ sont distinctes. Or, $\mathfrak{I}$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ annulés par $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{I}'$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}')$ annulés par $\mathfrak{g}'$. Nous sommes dans le cas où $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{S}(\mathfrak{g}')$. Notre assertion résulte alors des lemmes 9 et 10.

CHAPITRE IV.

COMPARAISON DE $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_1), \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_2), \ldots, \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_n)$ ($\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$, SUITE CROISSANTE D'IDÉAUX).

Il nous faut pour la suite analyser de façon plus détaillée chacune des deux situations décrites dans la proposition 3.

LEMME 11. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur un corps de caractéristique* 0, *$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n)$ une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ et $\dim \mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1} = 1$ pour $1 \leq j \leq n$. On suppose $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{n-1})$, de sorte que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{n-1})$ d'après la proposition* 3. *Pour $1 \leq j \leq n$, soit x_j un élément de $\mathfrak{g}_j$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}_{j-1}$. Soient $j_1 < j_2 < \ldots < j_{q-1}$ les indices $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tels qu'il existe dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ un élément de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1})$ n'appartenant pas à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$.*

(i) *Les indices $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels qu'il existe dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ un élément de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ n'appartenant pas à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ sont $j_1, j_2, \ldots, j_{q-1}$ et $j_q = n$.*

(ii) *Pour $k = 1, 2, \ldots, q$, il existe $a_{k1} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_k - 1})$ et $a_{k2} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_k - 1})$*

tels que $a_{k1} \neq 0$ *et tels que* $a_k = x_{j_k} a_{k1} + a_{k2}$ *soit un élément symétrique ou antisymétrique de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_k})$.

(iii) *Il existe un élément de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1})$ *affine relativement à* $(a_1, a_2, \ldots, a_{q-1})$ *et affine relativement à* $(a_1, a_2, \ldots, a_q)$.

Démonstration. — On a $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, n-1$, et $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{n-1})$, d'où aussitôt (i). L'assertion (ii) résulte du lemme 3 (i) où l'on prend pour $\mathfrak{d}$ l'ensemble des dérivations intérieures de $\mathfrak{g}$. Alors [lemme 3 (iii)] le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ [resp. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1})$] est engendré par $a_1, a_2, \ldots, a_q$ (resp. $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$). Soient $a_{11} = b_1 b_1'^{-1}, \ldots, a_{q1} = b_q b_q'^{-1}$ où $b_1, b'_1, \ldots, b_q, b'_q \in K[a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}]$. Alors [lemme 3 (iv)] $b_1 b_2 \ldots b_q$ est affine relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_q$, et $b_1 b_2 \ldots b_{q-1}$ est affine relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$, donc $b_1 b_2 \ldots b_q$ est affine relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$. D'où (iii).

Lemme 12. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente sur un corps* K *de caractéristique* 0, $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n)$ *une suite d'idéaux de* $\mathfrak{g}$ *tels que* $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ *et* $\dim \mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1} = 1$ *pour* $1 \leq j \leq n$. *On suppose* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1})$. *Pour* $1 \leq j \leq n$, *soit* x_j *un élément de* $\mathfrak{g}_j$ *n'appartenant pas à* $\mathfrak{g}_{j-1}$. *Soient* $j_1 < j_2 < \ldots < j_{q+1}$ *les indices* $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *tels qu'il existe dans* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ *un élément de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1})$ *n'appartenant pas à* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$.

(i) *Les indices* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *tels qu'il existe dans* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ *un élément de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ *n'appartenant pas à* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ *sont* $j_1, \ldots, j_{r-1}, j_{r+1}, \ldots, j_{q+1}$ (r *étant un certain entier de* $\{1, 2, \ldots, q+1\}$).

(ii) $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_{r-1}}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_{r-1}})$.

(iii) *Pour* $k = 1, 2, \ldots, q+1$, *il existe* $a_{k1} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_{k-1}})$ *et* $a_{k2} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_{k-1}})$ *tels que* $a_{k1} \neq 0$ *et tels que* $a_k = x_{j_k} a_{k1} + a_{k2}$ *soit un élément symétrique ou antisymétrique de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_k})$ *pour* $k \neq r$, *de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_k})$ *pour* $k = r$.

(iv) *Soit* $b = (\operatorname{ad} x_n) . a_r$. *On a*

$$b \neq 0, \quad b \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_{r-1}}),$$

et

$$(\exp \operatorname{ad} \lambda x_n) . a_r = a_r + \lambda b \qquad \textit{pour} \quad \lambda \in K.$$

(v) *Il existe un élément de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ *affine relativement à* $(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_{q+1})$ *et affine relativement à* $(a_1, a_2, \ldots, a_q)$.

Démonstration. — Prouvons (i). Les indices $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tels qu'il existe dans $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_j)$ un élément annulé par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_{n-1}$ et n'appartenant pas à $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{j-1})$ sont $j_1, j_2, \ldots, j_{q+1}$, comme le montre l'application canonique de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{n-1})$ sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$. Soient L et L' les corps des fractions de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{n-1})$. Soit L_0 (resp. L'_0) l'ensemble des éléments de L (resp. L') annulés par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}_{n-1}$). Puisque $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1})$, on a $L_0 \subset L'_0$. D'après le lemme 9, L'_0 est de degré de transcendance 1 sur L_0. Le degré de transcendance de L'_0 sur K est $q+1$, d'après le lemme 10 et le lemme 3 (iii) (dans lequel on prend pour $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie abélienne sous-jacente à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{n-1}$ du présent lemme, et pour $\mathfrak{d}$ l'ensemble des dérivations intérieures de $\mathfrak{g}_{n-1}$). De même, le degré de transcendance de L_0 sur K est égal au nombre des indices $j \in \{j_1, j_2, \ldots, j_{q+1}\}$ tels qu'il existe dans $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_j)$ un élément annulé par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ et n'appartenant pas à $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{j-1})$. Le nombre de ces indices est donc q, et nous pouvons les désigner par $j_1, \ldots, j_{r-1}, j_{r+1}, \ldots, j_{q+1}$. Ce sont aussi les indices $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels qu'il existe dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ un élément de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ n'appartenant pas à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$, comme le montre l'application canonique de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$. D'où (i).

D'après le lemme 3 (i) appliqué à $\mathfrak{g}$, il existe pour $k = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, q+1$ des éléments $a_{k1} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_k - 1})$ et $a_{k2} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_k - 1})$ tels que $a_{k1} \neq 0$ et tels que $a_k = x_{j_k} a_{k1} + a_{k2}$ soit un élément symétrique ou antisymétrique de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_k})$. D'après le lemme 3 (i) appliqué à $\mathfrak{g}_{n-1}$, il existe des éléments $a_{r1} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_r - 1})$ et $a_{r2} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_r - 1})$ tels que $a_{r1} \neq 0$ et tels que $a_r = x_{j_r} a_{r1} + a_{r2}$ soit un élément symétrique ou antisymétrique de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_r})$. Ceci prouve (iii) à l'exception de la relation $a_{r1} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_r - 1})$ qui sera une conséquence de (ii).

Prouvons (ii). On a évidemment $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_r - 1}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_r - 1})$. Réciproquement, soit $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_r - 1})$. D'après le lemme 3 (ii) (appliqué à $\mathfrak{g}_{j_r - 1}$ et aux dérivations définies dans $\mathfrak{g}_{j_r - 1}$ par les éléments de $\mathfrak{g}_{n-1}$, on a, pour des exposants $s_1, s_2, \ldots, s_{r-1}$ convenables

$$a a_{11}^{s_1} a_{21}^{s_2} \ldots a_{r-1,1}^{s_{r-1}} \in K[a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{r-1,1}].$$

Donc, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$0 = [x, a a_{11}^{s_1} a_{21}^{s_2} \ldots a_{r-1,1}^{s_{r-1}}] = [x, a] a_{11}^{s_1} a_{21}^{s_2} \ldots a_{r-1,1}^{s_{r-1}},$$

donc $[x, a] = 0$, et finalement $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. On a ainsi prouvé (ii) et (iii).

Soit $b = (\operatorname{ad} x_n) . a_r$. Comme a_r commute à $\mathfrak{g}_{n-1}$ mais n'appartient pas à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, a_r ne commute pas à x_n, donc $b \neq 0$. Pour tout $x \in \mathfrak{g}_{n-1}$, on a

$$[x, b] = [[x, x_n], a_r] + [x_n, [x, a_r]] = 0 \qquad \text{car } [x, x_n] \in \mathfrak{g}_{n-1} \text{ et } a_r \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1}),$$

donc $b \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1})$. Par ailleurs, $b = [x_n, x_{j_r}] a_{r1} + x_{j_r} [x_n, a_{r1}] + [x_n, a_{r2}]$; on a $[x_n, a_{r1}] = 0$ d'après (iii), et $[x_n, x_{j_r}] \in \mathfrak{g}_{j_r - 1}$ puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente; donc $b \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_r - 1})$. Ainsi,

$$b \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_r - 1}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{n-1}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_r - 1}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_r - 1})$$

d'après (ii). Enfin, $(\operatorname{ad} x_n)^2 . a_r = (\operatorname{ad} x_n) . b = 0$ d'après ce qui précède, donc $(\exp \operatorname{ad} \lambda x_n) . a_r = a_r + \lambda b$ pour $\lambda \in K$. On a ainsi prouvé (iv).

D'après (iii), on a $a_{11} = b_1 b_1'^{-1}, \ldots, a_{q+1,1} = b_{q+1} b_{q+1}'^{-1}$ avec $b_1, b'_1, \ldots, b_{q+1}, b'_{q+1} \in K[a_1, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_{q+1}]$. D'après le lemme 3 (iv), $b_1 b_2 \ldots b_{q+1}$ est affine relativement à $(a_1, a_2, \ldots, a_{q+1})$. De même, $b_1 \ldots b_{r-1} b_{r+1} \ldots b_{q+1}$ est affine relativement à $(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_{q+1})$, donc $b_1 b_2 \ldots b_{q+1}$ est affine relativement à $(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_{q+1})$. D'où (v).

Remarque 1. — Avec les notations des lemmes 11 et 12, l'idéal $\mathfrak{g}_1$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$. En multipliant au besoin a_{k1} et a_{k2} par un élément non nul de $\mathfrak{g}_1$, on voit qu'on peut toujours supposer les a_k symétriques (par exemple).

Proposition 4. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur un corps K de caractéristique* o, *n sa dimension, n_1 le degré de transcendance de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ sur K.*

(i) *$n - n_1$ est un nombre pair.*

(ii) *Si $n = n_1$, $\mathfrak{g}$ est abélienne.*

Démonstration. — Supposons la proposition établie pour les algèbres de dimension $< n$. Soit $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, n'_1 le degré de transcendance de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ sur K. D'après l'hypothèse de récurrence, $n - 1 - n'_1$ est pair. Si $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \supset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, on a $n_1 = n'_1 + 1$ d'après le lemme 11, donc $n - n_1 = n - 1 - n'_1$ est pair. Si $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, on a $n_1 = n'_1 - 1$ d'après le lemme 12, donc $n - n_1 = n + 1 - n'_1$ est pair. D'où (i). Si $n = n_1$, ce qui précède montre que $n - 1 = n'_1$ (car on ne peut avoir $n + 1 = n'_1$). Donc, d'une part $\mathfrak{g}'$ est une algèbre abélienne d'après l'hypothèse de récurrence, d'autre part il existe $a_1 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, $a_2 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, et $x \in \mathfrak{g}$, tels que $a_1 \neq 0$, $x \notin \mathfrak{g}'$, et $xa_1 + a_2 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Alors, si $y \in \mathfrak{g}'$, on a $0 = [y, xa_1 + a_2] = [y, x]a_1$ (compte tenu du fait que $\mathfrak{g}'$ est abélienne), donc $[y, x] = 0$. Donc $\mathfrak{g}$ est abélienne, ce qui prouve (ii).

Définition 2. — *Avec les notations de la proposition 4, l'entier $\frac{1}{2}(n - n_1)$ s'appelle le défaut de commutativité de $\mathfrak{g}$.*

Pour la suite, il est commode d'utiliser la représentation graphique suivante. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur un corps de caractéristique o. Soit $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ et $\dim \mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1} = 1$ pour $1 \leqq j \leqq n$. Traçons un réseau triangulaire à n lignes et n colonnes ($n = 7$ sur la figure ci-dessous). Disons que le sommet du réseau situé au croisement de la $j^{\text{ième}}$ ligne (à partir du haut) et de la $k^{\text{ième}}$ colonne (à partir de la gauche) est *distingué* s'il existe dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_k)$ un élément de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_j)$ n'appartenant pas à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{k-1})$. (Sur la figure, on a mis en évidence ces sommets par des points.) Le passage de la $j^{\text{ième}}$ ligne à la $(j+1)^{\text{ième}}$ ligne s'effectue alors de la manière suivante. Ou bien le sommet le plus à droite de la $(j+1)^{\text{ième}}$ ligne est distingué; les autres sommets distingués de la $(j+1)^{\text{ième}}$ ligne sont alors exactement sur les mêmes colonnes que dans la $j^{\text{ième}}$ ligne [lemme 11 (i)]. Ou bien le sommet le plus à droite de la $(j+1)^{\text{ième}}$ ligne est non distingué; les sommets distingués de la $(j+1)^{\text{ième}}$ ligne sont alors sur les mêmes colonnes que dans la $j^{\text{ième}}$ ligne, à l'exception d'une colonne qui porte un sommet distingué dans la $j^{\text{ième}}$ ligne mais n'en porte plus dans la $(j+1)^{\text{ième}}$ ligne [lemme 12 (i)]. Si un sommet du réseau est non distingué, tous les sommets de la même colonne situés plus bas sont donc non distingués. On dira qu'un indice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ est *distingué* si tous les sommets de la $j^{\text{ième}}$ colonne sont distingués, autrement dit s'il existe dans $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ un élément de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ n'appartenant pas à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$; le nombre d'indices distingués est le degré de transcendance de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ [lemme 3 (iii)]; l'indice 1 est toujours distingué puisque $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. On dira qu'un indice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ est *libre* si aucun sommet de la $j^{\text{ième}}$ colonne n'est distingué, *mixte* s'il n'est ni distingué ni libre.

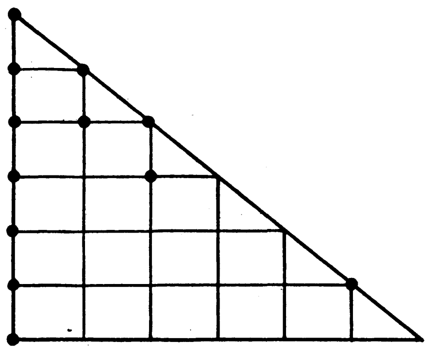

Fig. 1.

LEMME 13. — *Le nombre d'indices libres et le nombre d'indices mixtes sont égaux au défaut de commutativité de* $\mathfrak{g}$.

DÉMONSTRATION. — Admettons le lemme pour les algèbres de dimension $< n$. Si $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{n-1})$, le défaut de commutativité de $\mathfrak{g}$ est égal à celui de $\mathfrak{g}_{n-1}$; d'autre part, si l'on supprime la dernière ligne de notre réseau, le nouveau réseau a les mêmes colonnes libres et les mêmes colonnes mixtes que le réseau initial d'après ce qu'on a dit plus haut; il suffit donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Si $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{n-1})$, le défaut de commutativité de $\mathfrak{g}$ est égal à celui de $\mathfrak{g}_{n-1}$, augmenté de 1; d'autre part, si l'on supprime la dernière ligne de notre réseau, le nouveau réseau a une colonne libre et une colonne mixte en moins que le réseau initial d'après ce qu'on a dit plus haut; là encore, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence. D'où le lemme.

Soit j un indice non libre. On appellera *profondeur* de j le plus grand entier p tel que, sur la $j^{\text{ième}}$ colonne, la $p^{\text{ième}}$ ligne porte un sommet distingué. En particulier, les indices distingués sont de profondeur n. Nous conviendrons d'autre part que les indices libres sont de profondeur 0.

LEMME 14. — (i) *Deux indices mixtes distincts ont des profondeurs distinctes.*

(ii) *Soient j un indice mixte, p sa profondeur. Soit* $\mathfrak{d}$ *une algèbre de*

Lie de dérivations nilpotentes de $\mathfrak{g}$ *laissant stables* $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_{n-1}$. *Il existe un élément* a *de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_p) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ *n'appartenant pas à* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ *et possédant la propriété suivante : pour toute* $D \in \mathfrak{d}$, *on a* $Da \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_p) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$.

Démonstration. — Si deux indices mixtes distincts avaient même profondeur, cela signifierait que, dans le passage d'une certaine ligne à la ligne suivante, *deux* colonnes qui portaient des indices distingués cessent d'en porter; ceci est absurde, d'où (i).

Soit V_m l'ensemble des éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_p) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ de filtration $\leq m$. Soit $V'_m = V_m \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$. Puisque j est de profondeur p, on a

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_p) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j) \neq \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_p) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1}),$$

donc $V_m \neq V'_m$ pour m bien choisi. Les dérivations $D \in \mathfrak{d}$ opérant dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ laissent stables V_m et V'_m, et sont nilpotentes dans V_m. D'après le théorème d'Engel, il existe un élément a de V_m tel que $a \notin V'_m$ et tel que $Da \in V'_m$ pour toute $D \in \mathfrak{d}$. D'où (ii).

CHAPITRE V.

Résultats préliminaires sur les caractères.

Les lemmes de ce chapitre n'ont qu'un intérêt technique. Les algèbres de Lie envisagées seront supposées réelles parce que nous nous intéressons aux caractères hermitiens. Il serait facile, par les mêmes raisonnements, d'obtenir des résultats analogues sur les caractères quelconques lorsque le corps de base est un corps de caractéristique o.

Définition 3. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie réelle*, a *un élément non nul de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. *On notera* $\Lambda_a(\mathfrak{g})$ *l'ensemble des caractères hermitiens de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ *non nuls en* a.

Lemme 15. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente réelle. Soient* $a_1, a_2, \ldots, a_q$ *des éléments algébriquement indépendants de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, *symétriques ou antisymétriques, engendrant le corps des fractions de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ [*cf.* lemme 3 (iii)]. *Soit* $a = P(a_1, a_2, \ldots, a_q)$ (*où* P *est un polynome*) *un élément affine relativement à* $a_1, a_2, \ldots, a_q$. *L'application* $\chi \to (\chi(a_1), \ldots, \chi(a_q))$ *est une bijection de* $\Lambda_a(\mathfrak{g})$ *sur l'ensemble des systèmes de nombres* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ *tels que :*

(i) λ_j *est réel si* a_j *est symétrique, imaginaire pur si* a_j *est antisymétrique;*

(ii) $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \neq 0$.

DÉMONSTRATION. — Soient χ, χ' deux caractères (hermitiens ou non) de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ tels que $\chi(a_1) = \chi'(a_1), \ldots, \chi(a_q) = \chi'(a_q)$, $\chi(a) \neq 0$, $\chi'(a) \neq 0$. Soit $\mathfrak{A}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ engendrée par $a_1, \ldots, a_q$. Les caractères χ et χ' coïncident sur $\mathfrak{A}$. Soit $b \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. On a $ba^s \in \mathfrak{A}$ pour un exposant s convenable. Donc $\chi(ba^s) = \chi'(ba^s)$ et par suite $\chi(b) = \chi'(b)$ puisque $\chi(a) = \chi'(a) \neq 0$. Donc $\chi = \chi'$.

Il est clair que si $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, $\chi(a_j)$ est réel pour a_j symétrique, imaginaire pur pour a_j antisymétrique; et l'on a $P(\chi(a_1), \ldots, \chi(a_q)) = \chi(a) \neq 0$. Réciproquement, soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ des nombres vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme. Comme les a_j sont algébriquement indépendants, il existe un homomorphisme χ^* et un seul de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans $\mathbf{C}$ tel que $\chi^*(a_1) = \lambda_1, \ldots,$ $\chi^*(a_q) = \lambda_q$. On a $\chi^*(a) = P(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \neq 0$. Donc χ^* se prolonge de manière unique en un homomorphisme de $\mathbf{R}[\mathfrak{A}, a^{-1}]$ dans $\mathbf{C}$. Soit χ la restriction à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ de ce prolongement. C'est un caractère de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Soit A l'antiautomorphisme principal de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Soit χ' le caractère de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ défini par $\chi'(b) = \overline{\chi(A(b))}$ pour $b \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Si a_j est symétrique, on a

$$\chi'(a_j) = \overline{\chi(a_j)} = \overline{\lambda_j} = \lambda_j = \chi(a_j);$$

si a_j est antisymétrique, on a

$$\chi'(a_j) = \overline{\chi(-a_j)} = -\overline{\lambda_j} = \lambda_j = \chi(a_j).$$

Donc $\chi = \chi'$ d'après la première partie de la démonstration. Donc χ est hermitien, et $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$.

LEMME 16. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente réelle, $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. On suppose $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$ des éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, symétriques ou antisymétriques, algébriquement indépendants, engendrant le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, tels que $a_1, a_2, \ldots, a_q$ engendrent le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$; soit a un élément de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ affine relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_q$, et relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$. (L'existence de $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$, a résulte du lemme* 12.)

Il existe une application $\chi \to \chi'$ de $\Lambda_a(\mathfrak{g})$ dans $\Lambda_a(\mathfrak{g}')$ possédant les propriétés suivantes :

(i) *pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, χ' prolonge χ;*

(ii) *quel que soit $b' \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, il existe un $b \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et un entier $s \geqq 0$ tels que $\chi'(b') = \chi(a)^{-s}\chi(b)$ pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$.*

DÉMONSTRATION. — Soit P un polynome à coefficients réels tel que $a = P(a_1, a_2, \ldots, a_q)$. Soit $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$. On a $P(\chi(a_1), \ldots, \chi(a_q)) \neq 0$. Comme a est affine relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$, il existe un caractère $\chi' \in \Lambda_a(\mathfrak{g}')$ et un seul tel que $\chi'(a_1) = \chi(a_1), \ldots, \chi'(a_q) = \chi(a_q)$, $\chi'(a_{q+1}) = 0$

(lemme 15). La restriction de χ' à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ prend les mêmes valeurs que χ en $a_1, a_2, \ldots, a_q$, et est non nulle en a, donc coïncide avec χ puisque a est affine relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_q$ (lemme 15). Soit $b' \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Il existe un entier $s \geqq 0$ et un polynome Q en $(q+1)$ variables à coefficients réels tels que $b'a^s = Q(a_1, a_2, \ldots, a_{q+1})$. Soit $b = Q(a_1, a_2, \ldots, a_q, 0) \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Pour $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, on a

$$\begin{aligned}\chi'(b'a^s) &= Q(\chi'(a_1), \chi'(a_2), \ldots, \chi'(a_{q+1}))\\ &= Q(\chi(a_1), \chi(a_2), \ldots, \chi(a_q), 0) = \chi(b)\end{aligned}$$

donc $\chi'(b') = \chi(a)^{-s}\chi(b)$.

Remarque 2. — Supposons a_{q+1} symétrique (ce qui est toujours possible : *cf.* remarque 1, chap. IV). Aux données du lemme 16, ajoutons celle d'un élément non nul b' de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Alors on peut choisir l'application $\chi \rightarrow \chi'$ de manière qu'en outre l'élément b associé à b' dans la propriété (ii) soit non nul. En effet, avec les notations précédentes, le polynome Q n'est pas identiquement nul. Donc, pour $\lambda \in \mathbf{R}$ bien choisi, $Q(a_1, \ldots, a_q, \lambda.1)$ est un élément non nul de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Il suffit alors d'avoir défini l'application $\chi \rightarrow \chi'$ en posant, non pas $\chi'(a_{q+1}) = 0$, mais $\chi'(a_{q+1}) = \lambda$.

Lemme 17. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente réelle, $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$. On suppose $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$ des éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, symétriques ou antisymétriques, algébriquement indépendants, engendrant le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, tels que $a_1, a_2, \ldots, a_q$ engendrent le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, et tels que $[x, a_{q+1}] = b$ soit un élément non nul de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$; soit a un élément de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ affine relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$. (L'existence de $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$, a résulte du lemme* 12.)

Deux caractères de $\Lambda_{ab}(\mathfrak{g}')$ égaux sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ sont transformés l'un de l'autre par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — Soient χ'_1, χ'_2 deux caractères de $\Lambda_{ab}(\mathfrak{g}')$ égaux sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. On a $(\mathrm{ad}\,x)^2.a_{q+1} = (\mathrm{ad}\,x).b = 0$, donc $(\exp \mathrm{ad}\,\lambda x).a_{q+1} = a_{q+1} + \lambda b$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$. Soit χ''_2 le transformé de χ'_2 par $\exp \mathrm{ad}\,\lambda x$. On a

$$\chi''_2(a_{q+1}) = \chi'_2(a_{q+1}) + \lambda\chi'_2(b).$$

Par hypothèse, $\chi'_2(b) \neq 0$. Si a_{q+1} est symétrique (resp. antisymétrique), b est symétrique (resp. antisymétrique), et $\chi'_1(a_{q+1})$, $\chi'_2(a_{q+1})$, $\chi'_2(b)$ sont réels (resp. imaginaires purs). Donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\chi''_2(a_{q+1}) = \chi'_1(a_{q+1})$. Sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, les caractères $\chi'_1, \chi'_2, \chi''_2$ prennent les mêmes valeurs. Donc $\chi'_1(a) = \chi''_2(a) \neq 0$, et par suite $\chi''_2 = \chi'_1$ (lemme 15). D'où le lemme.

CHAPITRE VI.

Détermination d'une représentation unitaire irréductible par son caractère.

Le but essentiel de ce chapitre est le théorème 1, qui se démontre par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Il est donc essentiel de comparer $\mathfrak{g}$ et un idéal $\mathfrak{g}'$ de codimension 1 de $\mathfrak{g}$. Le passage de $\mathfrak{g}'$ à $\mathfrak{g}$ se fait de façon très différente suivant qu'on est dans l'une ou l'autre des situations décrites dans la proposition 3. L'une de ces situations est étudiée au lemme 21, l'autre au lemme 24. Notre but provisoire est donc maintenant le lemme 21.

Lemme 18. — *Soient Γ un groupe topologique, Γ_1 un sous-groupe distingué de Γ, U une représentation unitaire de Γ dont la restriction U_1 à Γ_1 est irréductible. Alors, les représentations unitaires de Γ prolongeant U_1 sont les représentations de la forme $\gamma \to \alpha(\gamma) U(\gamma)$, α étant une représentation continue quelconque de Γ dans le groupe des nombres complexes de module 1 dont le noyau contient Γ_1.*

Démonstration. — Il est clair que les représentations ainsi construites sont des représentations unitaires de Γ prolongeant U_1. Réciproquement, soit V une représentation unitaire de Γ prolongeant U_1. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $\gamma_1 \in \Gamma_1$, on a

$$U(\gamma) U_1(\gamma_1) U(\gamma)^{-1} = U_1(\gamma\gamma_1\gamma^{-1}) = V(\gamma) U_1(\gamma_1) V(\gamma)^{-1}$$

donc $U(\gamma)^{-1} V(\gamma)$ commute à $U_1(\gamma_1)$. Comme U_1 est irréductible, on a $V(\gamma) = \alpha(\gamma) U(\gamma)$, $\alpha(\gamma)$ étant un scalaire de module 1. Il est clair que $\gamma \to \alpha(\gamma)$ est une représentation continue de Γ dans le groupe des nombres complexes de module 1. D'où le lemme.

Soient Γ un groupe topologique, Γ_1 un sous-groupe distingué de Γ, U_1 une représentation unitaire de Γ_1. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $\gamma_1 \to U_1(\gamma\gamma_1\gamma^{-1})$ est une représentation unitaire U_1^γ de Γ_1. Si U_1^γ est équivalente à U_1 pour tout $\gamma \in \Gamma$, nous dirons que U_1 est *invariante* par Γ.

Lemme 19. — *Soient Γ un groupe de Lie simplement connexe, Γ' un sous-groupe distingué fermé connexe de codimension 1 dans Γ, U' une représentation unitaire irréductible de Γ' invariante par Γ. Alors U' se prolonge en une représentation unitaire de Γ.*

Démonstration. — On sait que Γ' est simplement connexe. Le groupe Γ est localement isomorphe au produit semi-direct de Γ' et d'un groupe Δ isomorphe à $\mathbf{R}$. Puisque Γ est simplement connexe, il est globalement isomorphe à ce produit semi-direct auquel nous l'identifierons. Pour tout $\delta \in \Delta$, il existe un opérateur unitaire $V(\delta)$ dans l'espace hilbertien $\mathfrak{H}$ où opère U' tel que $U'(\delta\gamma'\delta^{-1}) = V(\delta)U'(\gamma')V(\delta)^{-1}$ quel que soit $\gamma' \in \Gamma'$. Si $\delta_1 \in \Delta$, on a

$$\begin{aligned}&V(\delta)V(\delta_1)U'(\gamma')V(\delta_1)^{-1}V(\delta)^{-1}\\ &= V(\delta)U'(\delta_1\gamma'\delta_1^{-1})V(\delta)^{-1}\\ &= U'(\delta\delta_1\gamma'(\delta\delta_1)^{-1}) = V(\delta\delta_1)U'(\gamma')V(\delta\delta_1)^{-1}.\end{aligned}$$

Comme U' est irréductible, on en conclut que $V(\delta\delta_1) = \sigma(\delta, \delta_1)V(\delta)V(\delta_1)$, $\sigma(\delta, \delta_1)$ étant un nombre complexe de module 1. Soit $\overline{V}(\delta)$ la classe de $V(\delta)$ dans le groupe quotient du groupe des opérateurs unitaires de $\mathfrak{H}$ par le sous-groupe des opérateurs unitaires scalaires. On a donc $\overline{V}(\delta\delta_1) = \overline{V}(\delta)\overline{V}(\delta_1)$. D'autre part, soit Θ l'ensemble des opérateurs linéaires de norme ≤ 1 dans $\mathfrak{H}$; c'est un espace métrisable à base dénombrable pour la topologie forte (car, comme Γ' est à base dénombrable et que U' est irréductible, $\mathfrak{H}$ est à base dénombrable). Si $T \in \Theta$, il existe (d'après [15], théorème 1) une suite T_1, T_2, ... de combinaisons linéaires finies des $U'(\gamma')$ ($\gamma' \in \Gamma'$) tendant fortement vers T. Pour tout j, l'application $\delta \to V(\delta)T_jV(\delta)^{-1}$ est fortement continue. Donc ([16], p. 208) l'application $\delta \to V(\delta)TV(\delta)^{-1}$ admet au moins un point de continuité $\delta_0 \in \Delta$. Soit $\delta_1 \in \Delta$. Si $\delta \to \delta_1$,

$$V(\delta)TV(\delta)^{-1} = V(\delta_1\delta_0^{-1})V(\delta_0\delta_1^{-1}\delta)TV(\delta_0\delta_1^{-1}\delta)^{-1}V(\delta_1\delta_0^{-1})^{-1}$$

tend fortement vers

$$V(\delta_1\delta_0^{-1})V(\delta_0)TV(\delta_0)^{-1}V(\delta_1\delta_0^{-1})^{-1} = V(\delta_1)TV(\delta_1)^{-1}.$$

Ainsi, l'application $\delta \to V(\delta)TV(\delta)^{-1}$ est fortement continue pour tout $T \in \Theta$. Alors ([8], lemme 1) $\delta \to \overline{V}(\delta)$ est une application continue pour la topologie quotient de la topologie forte. Comme Δ est simplement connexe et que son algèbre de Lie est de dimension 1, l'application $\delta \to \overline{V}(\delta)$ se déduit par passage au quotient d'une représentation unitaire (fortement continue) $\delta \to W(\delta)$ de Δ ([1], théorème 3.2 et lemme 4.9). Pour $\gamma = \delta\gamma' \in \Gamma$ ($\delta \in \Delta$, $\gamma' \in \Gamma'$), posons $U(\gamma) = W(\delta)U'(\gamma')$. L'application $\gamma \to U(\gamma)$ est fortement continue et prolonge U'. Enfin, U est une représentation unitaire de Γ, car, si $\gamma_1 = \delta_1\gamma'_1 \in \Gamma$ ($\delta_1 \in \Delta$, $\gamma'_1 \in \Gamma'$), on a

$$\gamma\gamma_1 = \delta\gamma'\delta_1\gamma'_1 = \delta\delta_1(\delta_1^{-1}\gamma'\delta_1)\gamma'_1$$

donc

$$\begin{aligned}U(\gamma\gamma_1) &= W(\delta\delta_1)U'((\delta_1^{-1}\gamma'\delta_1)\gamma'_1) = W(\delta)W(\delta_1)U'(\delta_1^{-1}\gamma'\delta_1)U'(\gamma'_1)\\ &= W(\delta)W(\delta_1)W(\delta_1)^{-1}U'(\gamma')W(\delta_1)U'(\gamma'_1)\\ &= W(\delta)U'(\gamma')W(\delta_1)U'(\gamma'_1) = U(\gamma)U(\gamma_1).\end{aligned}$$

Lemme 20. — *Soient Γ un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien à base dénombrable, U une représentation unitaire de Γ dans $\mathfrak{H}$. Soit $\mathfrak{H}=\int^{\oplus}\mathfrak{H}_\zeta\,d\nu(\zeta)$ une décomposition de $\mathfrak{H}$ en intégrale hilbertienne d'espaces hilbertiens $\mathfrak{H}_\zeta$, telle que $U=\int^{\oplus}U_\zeta\,d\nu(\zeta)$, U_ζ étant, pour tout ζ, une représentation unitaire de Γ dans $\mathfrak{H}_\zeta$.*

(i) *Si $\xi=\int^{\oplus}\xi_\zeta\,d\nu(\zeta)\in\mathfrak{H}$ est un élément du sous-espace de Gårding de $\mathfrak{H}$, ξ_ζ appartient, pour presque tout ζ, au sous-espace de Gårding de $\mathfrak{H}_\zeta$. Et, pour $a\in\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on a $U(a)\xi=\int^{\oplus}U_\zeta(a)\xi_\zeta\,d\nu(\zeta)$.*

(ii) *Si U admet le caractère χ, U_ζ admet le caractère χ pour presque tout ζ.*

(iii) *Supposons que U_ζ admette, pour tout ζ, un caractère χ_ζ. Soit a un élément symétrique (resp. antisymétrique) de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Alors, $U(a)^{**}$ [resp. $iU(a)^{**}$] est l'opérateur autoadjoint défini par le champ d'opérateurs scalaires $\zeta\to\chi_\zeta(a).1$ [resp. $\zeta\to i\chi_\zeta(a).1$].*

Démonstration. — Il suffit de prouver (i) quand ξ est de la forme $U(f)\xi'$, ξ' étant un élément de $\mathfrak{H}$ et f une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur Γ. Or, on sait que $U(f)=\int^{\oplus}U_\zeta(f)\,d\nu(\zeta)$. Posant $\xi'=\int^{\oplus}\xi'_\zeta\,d\nu(\zeta)$, on a $\xi=\int^{\oplus}U_\zeta(f)\xi'_\zeta\,d\nu(\zeta)$, Donc, presque partout, $\xi_\zeta=U_\zeta(f)\xi'_\zeta$ appartient au sous-espace de Gårding de $\mathfrak{H}_\zeta$. Et, en identifiant $a\in\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ à une distribution sur Γ [4], on a

$$U(a)\xi=U(a)\,U(f)\xi'=U(a\star f)\xi'=\int^{\oplus}U_\zeta(a\star f)\xi'_\zeta\,d\nu(\zeta)$$
$$=\int^{\oplus}U_\zeta(a)\,U_\zeta(f)\xi'_\zeta\,d\nu(\zeta)=\int^{\oplus}U_\zeta(a)\xi_\zeta\,d\nu(\zeta).$$

Supposons que U admette le caractère χ. Soit $a\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Montrons que, pour presque tout ζ, $U_\zeta(a)=\chi(a).1$. Il suffit de le montrer quand a est symétrique ou antisymétrique. Pour fixer les idées, supposons a symétrique. Soit ξ^1, ξ^2, ... une suite d'éléments du sous-espace de Gårding $\mathfrak{H}'$ de $\mathfrak{H}$, totale dans $\mathfrak{H}$; soit $\xi^j=\int^{\oplus}\xi^j_\zeta\,d\nu(\zeta)$; alors, presque partout, ξ^1_ζ, ξ^2_ζ, ... forment une suite totale dans $\mathfrak{H}_\zeta$. D'après (i), on a, pour $j=1, 2, \ldots$,

$$\int^{\oplus}U_\zeta(a)\xi^j_\zeta\,d\nu(\zeta)=U(a)\xi^j=\chi(a)\xi^j=\int^{\oplus}\chi(a)\xi^j_\zeta\,d\nu(\zeta).$$

Donc $U_\zeta(a)\xi^j_\zeta=\chi(a)\xi^j_\zeta$ quel que soit j lorsque ζ n'appartient pas à un certain ensemble ν-négligeable N_a. Pour $\zeta\notin N_a$, la restriction de $U_\zeta(a)$ à un sous-espace vectoriel partout dense de $\mathfrak{H}_\zeta$ est égale à $\chi(a).1$; mais $U_\zeta(a)$ est hermitien, donc égal à $\chi(a).1$ sur tout son ensemble de définition. Soit alors a_1, a_2, ... une suite d'éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ engendrant l'espace vectoriel $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Pour $\zeta \notin N_{a_1} \cup N_{a_2} \cup \ldots$, U_ζ admet le caractère χ.

Enfin, supposons que U_ζ admette, pour tout ζ, un caractère χ_ζ. Pour fixer les idées, soit a un élément symétrique de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Si $\xi = \int^\oplus \xi_\zeta \, d\nu(\zeta) \in \mathfrak{H}'$, on a, d'après (i), $U(a)\xi = \int^\oplus \chi_\zeta(a)\xi_\zeta \, d\nu(\zeta)$. Soit T l'opérateur autoadjoint défini par le champ $\zeta \rightarrow \chi_\zeta(a).1$. On a $U(a) \mid \mathfrak{H}' = T \mid \mathfrak{H}'$. Donc

$$U(a)^{**} = (U(a) \mid \mathfrak{H}')^{**} = (T \mid \mathfrak{H}')^{**},$$

de sorte que T prolonge $U(a)^{**}$. Comme T et $U(a)^{**}$ sont autoadjoints, on en conclut que $T = U(a)^{**}$.

Lemme 21. — *Soient Γ un groupe de Lie simplement connexe, Γ' un sous-groupe distingué fermé connexe de codimension 1 dans Γ, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ les algèbres de Lie de Γ et Γ'. On suppose $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, de sorte que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. Soit $x \in \mathfrak{g}$ tel que $x \notin \mathfrak{g}'$. Soient $a_1 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')(a_1 \neq 0)$ et $a_2 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ tels que $a = x a_1 + a_2$ soit un élément symétrique ou antisymétrique de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Soit Λ l'ensemble des caractères hermitiens de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ correspondant à une représentation unitaire irréductible de Γ' et à une seule (à une équivalence près).*

(i) *Soit U' une représentation unitaire irréductible de Γ' dont le caractère appartient à Λ. Alors, U' se prolonge en une représentation unitaire irréductible de Γ.*

(ii) *Soient U une représentation unitaire irréductible de Γ, χ son caractère. Si la restriction de χ à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ appartient à Λ, la restriction de U à Γ' est irréductible.*

(iii) *Tout caractère hermitien de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ dont la restriction à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ appartient à Λ et est non nulle en a_1 correspond à une représentation unitaire irréductible de Γ et à une seule (à une équivalence près).*

Démonstration. — Prouvons (i). Soit U' une représentation unitaire irréductible de Γ' dont le caractère χ' appartient à Λ. Soient $y \in \mathfrak{g}$ et $\gamma = \exp y \in \Gamma$. L'automorphisme intérieur de Γ défini par γ a pour différentielle à l'élément neutre l'automorphisme $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} y$. L'automorphisme $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})} y$ est l'unique automorphisme de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ prolongeant $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} y$. Cet automorphisme induit l'identité sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, donc sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Donc la représentation U'^{γ} a pour caractère χ'. Puisque $\chi' \in \Lambda$, U'^{γ} est équivalente à U'. Donc (lemme 19) U' se prolonge en une représentation unitaire de Γ, évidemment irréductible. D'où (i).

Prouvons (ii). Soient U une représentation unitaire irréductible de Γ, χ son caractère, χ' la restriction de χ à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, U' la restriction de U à Γ'. Supposons $\chi' \in \Lambda$. Soit $U' = \int^\oplus U'_\zeta \, d\nu(\zeta)$ une décomposition de U' en intégrale hilbertienne de représentations unitaires irréductibles de Γ' Pour presque tout ζ, U'_ζ admet le caractère χ' [lemme 20 (ii)]. On peut donc supposer, en modifiant U'_ζ sur un ensemble de mesure nulle, que les U'_ζ sont deux à deux équivalentes. D'après [20], théorème 1.5 (*cf.* aussi [7], chap. II, § 2, th. 2), U' est alors équivalente à une représentation du type suivant : on prend deux espaces hilbertiens $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, une représentation unitaire irréductible V' de Γ' dans $\mathfrak{H}_1$ de caractère χ', et l'on forme la représentation unitaire $V' \otimes 1$ dans $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$. Nous supposerons donc désormais $U' = V' \otimes 1$. D'après (i), V' se prolonge en une représentation unitaire irréductible V de Γ. Si $\gamma \in \Gamma$, $\gamma' \in \Gamma'$, on a

$$\begin{aligned}
&U(\gamma)\,U'(\gamma')\,U(\gamma)^{-1} \\
&\quad = U'(\gamma\gamma'\gamma^{-1}) = V'(\gamma\gamma'\gamma^{-1}) \otimes 1 \\
&\quad = V(\gamma)\,V'(\gamma')\,V(\gamma)^{-1} \otimes 1 = (V(\gamma) \otimes 1)\,U'(\gamma')\,(V(\gamma) \otimes 1)^{-1},
\end{aligned}$$

donc $(V(\gamma) \otimes 1)^{-1} U(\gamma)$, commutant aux opérateurs $U'(\gamma') = V'(\gamma') \otimes 1$, est de la forme $1 \otimes W(\gamma)$, $W(\gamma)$ étant un opérateur unitaire dans $\mathfrak{H}_2$. On a $U(\gamma) = V(\gamma) \otimes W(\gamma)$. Comme U et V sont des représentations unitaires de Γ, on voit que W est une représentation unitaire de Γ, triviale sur Γ'. Comme Γ/Γ' est abélien, les $W(\gamma)$ sont deux à deux permutables. Comme U est irréductible, ces opérateurs sont scalaires, et $\mathfrak{H}_2$ est de dimension 1. Donc $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$, et $U' = V'$ est irréductible. D'où (ii).

Établissons maintenant un résultat intermédiaire. Soient U_1 une représentation unitaire irréductible de Γ dans un espace hilbertien $\mathfrak{H}$, χ_1 son caractère, ρ une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$ nulle sur $\mathfrak{g}'$, α la représentation continue de Γ dans le groupe des nombres complexes de module 1 définie par $\alpha(\exp y) = \exp i\rho(y)\,(y \in \mathfrak{g})$, U_2 la représentation unitaire irréductible $\gamma \to \alpha(\gamma)\,U_1(\gamma)$ de Γ, χ_2 le caractère de U_2. Alors

$$\chi_2(a) - \chi_1(a) = i\rho(x)\chi_1(a_1). \tag{6}$$

En effet, les éléments indéfiniment différentiables de $\mathfrak{H}$ sont évidemment les mêmes pour U_1 et U_2. Si ξ est un tel élément, on a

$$\begin{aligned}
(\chi_2(a) - \chi_1(a))\xi &= U_2(xa_1 + a_2)\xi - U_1(xa_1 + a_2)\xi \\
&= U_2(x)\,U_2(a_1)\xi + U_2(a_2)\xi - U_1(x)\,U_1(a_1)\xi - U_1(a_2)\xi.
\end{aligned}$$

Or $U_2(a_1)\xi = U_1(a_1)\xi = \chi_1(a_1)\xi$ et $U_2(a_2)\xi = U_1(a_2)\xi$ puisque U_1 et U_2 ont même restriction à Γ' (*cf.* chap. I). Par ailleurs

$$\begin{aligned}
U_2(x)\xi &= \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}[(\exp i\lambda\rho(x))\,U_1(\exp \lambda x)\xi - \xi] \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\exp i\lambda\rho(x) - 1}{\lambda}\, U_1(\exp \lambda x)\xi \\
&\quad + \lim_{\lambda \to 0} \frac{U_1(\exp \lambda x) - 1}{\lambda}\,\xi = i\rho(x)\xi + U_1(x)\xi,
\end{aligned}$$

d'où $(\chi_2(a) - \chi_1(a))\xi = i\rho(x)\chi_1(a_1)\xi$, ce qui établit (6).

Ceci posé, nous pouvons démontrer (iii). Soit χ un caractère hermitien de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ dont la restriction χ' à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ appartient à Λ et est non nulle en a_1. Soit U' une représentation unitaire irréductible de Γ' de caractère χ'. D'après (i), U' se prolonge en une représentation unitaire irréductible U_1 de Γ, dont le caractère χ_1 prolonge χ' donc est non nul en a_1. Compte tenu du lemme 4, les nombres $\chi(a)$, $\chi_1(a)$, $i\chi_1(a_1)$ sont tous trois réels ou tous trois imaginaires purs. Il existe donc une forme linéaire réelle et une seule ρ sur $\mathfrak{g}$, nulle sur $\mathfrak{g}'$, telle que

$$(7) \qquad \chi(a) - \chi_1(a) = i\rho(x)\chi_1(a_1).$$

Soit α la représentation continue de Γ dans le groupe des nombres complexes de module 1 correspondant à ρ. Soient U la représentation unitaire $\gamma \to \alpha(\gamma)U_1(\gamma)$ de Γ, χ_2 le caractère de U. D'après (6) et (7), on a $\chi_2(a) = \chi(a)$. Par ailleurs, χ_2 et χ coïncident sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Si b est un élément quelconque de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, on a $ba_1^s \in K[a, a_1, \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')]$ pour un exposant $s \geq 0$ convenable [lemme 2 (ii)]. Donc $\chi_2(ba_1^s) = \chi(ba_1^s)$ et par suite $\chi_2(b) = \chi(b)$ puisque $\chi(a_1) \neq 0$. Donc $\chi_2 = \chi$. D'où *l'existence* d'une représentation unitaire irréductible U de Γ de caractère χ. Enfin, soit V une autre représentation unitaire irréductible de Γ de caractère χ. Soit V' la restriction de V à Γ', qui est irréductible d'après (ii). Alors, V' et U' ont pour caractère χ', donc sont équivalentes puisque $\chi' \in \Lambda$. On peut donc supposer désormais $U' = V'$. D'après le lemme 18, il existe une représentation continue β de Γ dans le groupe des nombres complexes de module 1, triviale sur Γ', telle que $V(\gamma) = \beta(\gamma)U(\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma$. Soit σ la forme linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$ nulle sur $\mathfrak{g}'$ telle que $\beta(\exp y) = \exp(i\sigma(y))$ pour $y \in \mathfrak{g}$. Puisque U et V admettent le même caractère χ, la formule (6) prouve que $\sigma(x)\chi(a_1) = 0$. Comme $\chi(a_1) \neq 0$, on a $\sigma(x) = 0$ et par suite $\sigma = 0$, $U = V$. Ceci achève la démonstration du lemme 21.

Maintenant, nous nous dirigeons vers le lemme 24.

Lemme 22. — *Soient* Γ *un groupe localement compact,* Δ *un sous-groupe distingué fermé de* Γ, γ_0 *un élément de* Γ, V_1 *une représentation unitaire de* Δ *dans un espace hilbertien* $\mathfrak{H}$, V_2 *la représentation* $\delta \to V_1(\gamma_0\delta\gamma_0^{-1})$ *de* Δ. *Alors, les représentations* U_1 *et* U_2 *de* Γ *induites par* V_1 *et* V_2 *sont équivalentes.*

Démonstration. — Le lemme est presque évident par transport de structure. Soit $\mathfrak{K}_1$ (resp. $\mathfrak{K}_2$) l'espace hilbertien des fonctions f sur Γ à valeurs dans $\mathfrak{H}$, mesurables pour la mesure de Haar (à gauche, par exemple) de Γ, telles que $f(\delta\gamma) = V_1(\delta)f(\gamma)$ [resp. $f(\delta\gamma) = V_2(\delta)f(\gamma)$] pour $\gamma \in \Gamma$, $\delta \in \Delta$, et telles que la fonction $\dot\gamma \to \dot f(\dot\gamma) = \|f(\gamma)\|$ sur Γ/Δ déduite de $\gamma \to \|f(\gamma)\|$ par passage au quotient soit de carré intégrable pour la mesure de Haar à droite de Γ/Δ. Alors, $\mathfrak{K}_1$ (resp. $\mathfrak{K}_2$) est l'espace de U_1 (resp. U_2) (*cf.* [18]). Pour toute $f \in \mathfrak{K}_1$, soit f' la fonction sur Γ définie par $f'(\gamma) = f(\gamma_0\gamma\gamma_0^{-1})$. Si $\delta \in \Delta$, on a

$$\begin{aligned} f'(\delta\gamma) &= f(\gamma_0\delta\gamma\gamma_0^{-1}) = f((\gamma_0\delta\gamma_0^{-1})\gamma_0\gamma\gamma_0^{-1}) \\ &= V_1(\gamma_0\delta\gamma_0^{-1})f(\gamma_0\gamma\gamma_0^{-1}) = V_2(\delta)f'(\gamma), \end{aligned}$$

et $\dot{f}'(\dot{\gamma}) = \|f(\gamma_0\gamma\gamma_0^{-1})\| = \dot{f}(\dot{\gamma}_0\dot{\gamma}\dot{\gamma}_0^{-1})$, donc $f' \in \mathfrak{K}_2$, et $\|f'\| = m(\dot{\gamma}_0)\|f\|$ en désignant par m le module du groupe Γ/Δ. Soit W l'application $f \to f'$ de $\mathfrak{K}_1$ sur $\mathfrak{K}_2$. Pour $\gamma \in \Gamma$, $\gamma' \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} (WU_1(\gamma)f)(\gamma') &= (U_1(\gamma)f)(\gamma_0\gamma'\gamma_0^{-1}) = f(\gamma_0\gamma'\gamma_0^{-1}\gamma) \\ &= f(\gamma_0(\gamma'\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0)\gamma_0^{-1}) = f'(\gamma'\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0) = (U_2(\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0)f')(\gamma'), \end{aligned}$$

donc

$$WU_1(\gamma) = U_2(\gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0)W \qquad \text{ou} \qquad WU_1(\gamma)W^{-1} = U_2(\gamma_0)^{-1}U_2(\gamma)U_2(\gamma_0),$$

ce qui prouve que U_1 et U_2 sont équivalentes.

LEMME 23. — *Soient Γ un groupe de Lie, Γ' un sous-groupe distingué fermé de Γ, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ leurs algèbres de Lie. On suppose $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Soient U' une représentation unitaire de Γ' admettant le caractère χ', χ la restriction de χ' à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, U la représentation unitaire de Γ induite par U'. Alors, U admet le caractère χ.*

DÉMONSTRATION. — Soit $\mathfrak{K}$ l'espace de U. Soit U'' la restriction de U à Γ'. La définition des représentations induites entraîne aussitôt que $U'' = \int^{\oplus} U'_\zeta \, d\nu(\zeta)$, où chaque U'_ζ se déduit de U' par l'automorphisme de Γ' que définit un élément de Γ (variable avec ζ). Soit $\xi = \int^{\oplus} \xi_\zeta \, d\nu(\zeta)$ un élément du sous-espace de Gårding de $\mathfrak{K}$ relativement à U''. On a, pour $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$,

$$U''(a)\xi = \int^{\oplus} U'_\zeta(a)\xi_\zeta \, d\nu(\zeta)$$

[lemme 20 (i)]. Or, les automorphismes de Γ' correspondant à des éléments de Γ définissent des automorphismes de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ laissant fixes les points de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$; donc $U'_\zeta(a)\xi_\zeta = \chi(a)\xi_\zeta$ pour tout ζ. Donc $U''(a)\xi = \chi(a)\xi$; cette égalité s'étend à tout vecteur ξ indéfiniment différentiable pour U'' (il suffit de le vérifier pour a symétrique ou antisymétrique, auquel cas $U''(a)$ ou $iU''(a)$ est hermitien). En particulier, $U(a)\xi = \chi(a)\xi$ quand ξ est indéfiniment différentiable pour U.

LEMME 24. — *Soient Γ un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, Γ' un sous-groupe distingué fermé connexe de codimension 1 dans Γ, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ les algèbres de Lie de Γ et Γ'. On suppose $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Soit x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$ des éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, symétriques ou antisymétriques, algébriquement indépendants, engendrant* *le corps des fractions de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, *tels que* $a_1, a_2, \ldots, a_q$ *engendrent le corps des fractions de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, *et tels que* $[x, a_{q+1}] = b$ *soit un élément non nul de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$; *soit a un élément de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ *affine relativement à* $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$. (*L'existence de* $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$, *a résulte du lemme* 12). *Soit* Λ *l'ensemble des caractères hermitiens de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ *qui correspondent à une représentation unitaire irréductible de* Γ' *et à une seule* (*à une équivalence près*).

(i) *Soit* U' *une représentation unitaire irréductible de* Γ' *dont le caractère appartient à* $\Lambda_{ab}(\mathfrak{g}') \cap \Lambda$. *Alors, la représentation unitaire de* Γ *induite par* U' *est irréductible.*

(ii) *Soit* U *une représentation unitaire irréductible de* Γ *dont le caractère appartient à* $\Lambda_b(\mathfrak{g})$. *Alors,* U *est équivalente à la représentation induite par une représentation unitaire irréductible de* Γ'.

(iii) *Tout* $\chi \in \Lambda_{ab}(\mathfrak{g})$ *qui se prolonge en un caractère de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ *appartenant à* Λ *correspond à une représentation unitaire irréductible de* Γ *et à une seule* (*à une équivalence près*).

Démonstration. — Prouvons (ii). Soit U une représentation unitaire irréductible de Γ dans un espace hilbertien $\mathfrak{H}$, dont le caractère χ appartient à $\Lambda_b(\mathfrak{g})$. Soient U' la restriction de U à Γ', et $T = U'(a_{q+1})$, qui est essentiellement autoadjoint (*cf.* chap. I; pour fixer les idées, nous supposons a_{q+1} symétrique). Si ξ est un vecteur de $\mathfrak{H}$ indéfiniment différentiable pour U', on a, pour $\gamma \equiv \exp\lambda x \pmod{\Gamma'}$

$$\begin{aligned} U(\gamma)U'(a_{q+1})U(\gamma)^{-1}\xi &= U'((\exp \operatorname{ad}\lambda x)a_{q+1})\xi \\ &= U'(a_{q+1} + \lambda b)\xi = U'(a_{q+1})\xi + \lambda\chi(b)\xi \end{aligned}$$

donc $U(\gamma)TU(\gamma)^{-1} = T + \lambda\chi(b).1$.

Comme a_{q+1} est symétrique, b est symétrique, donc $\chi(b)$ est réel. L'application $\gamma \to \lambda$ est une représentation continue de Γ dans le groupe additif $\mathbf{R}$. Donc on définit Γ comme groupe de transformations de $\mathbf{R}$ en posant, pour $\theta \in \mathbf{R}$ et $\gamma \equiv \exp\lambda x \pmod{\Gamma'}$

$$\gamma.\theta = \theta + \lambda\chi(b).$$

Pour tout ensemble borélien Φ de nombres réels, désignons par P_Φ le projecteur $f_\Phi(T^{**})$ où f_Φ est la fonction caractéristique de Φ. (Comme T^{**} est autoadjoint, on peut lui appliquer le calcul opérationnel.) Si $\gamma \in \Gamma$ est tel que $\gamma \equiv \exp\lambda x \pmod{\Gamma'}$, on a

$$\begin{aligned} U(\gamma)P_\Phi U(\gamma)^{-1} &= f_\Phi(U(\gamma)T^{**}U(\gamma)^{-1}) = f_\Phi(T^{**} + \lambda\chi(b).1) \\ &= f_{\Phi-\lambda\chi(b)}(T^{**}) = P_{\Phi-\lambda\chi(b)} = P_{\gamma^{-1}\Phi}. \end{aligned}$$

On a donc défini un système d'intransitivité [17] de base $\mathbf{R}$ pour U. Comme $\chi(b) \neq 0$, ce système est transitif et le stabilisateur d'un point quelconque de $\mathbf{R}$ est Γ'. Alors, (ii) résulte de [17], théorème 2.

Établissons maintenant un résultat intermédiaire. Soient U une représentation unitaire irréductible de Γ de caractère χ, U' une représentation unitaire irréductible de Γ' de caractère χ'. On suppose que χ' prolonge χ, que $\chi' \in \Lambda$, et que $\chi(ab) \neq 0$. Alors, U est équivalente à la représentation unitaire de Γ induite par U'. En effet, d'après (ii), il existe [puisque $\chi(b) \neq 0$] une représentation unitaire irréductible U'_1 de Γ' telle que U soit équivalente à la représentation unitaire de Γ induite par U'_1. Soit χ'_1 le caractère de U'_1. D'après le lemme 23, χ'_1 prolonge χ. Puisque $\chi(ab) \neq 0$, il existe un élément γ de Γ tel que l'automorphisme correspondant de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ transforme χ' en χ'_1 (lemme 17). Or, si l'on transforme U'_1 par γ, la représentation de Γ induite par U'_1 ne change pas (lemme 22). On peut donc supposer que U'_1 admet le caractère χ'. Comme $\chi' \in \Lambda$, U'_1 et U' sont équivalentes. D'où notre résultat intermédiaire.

Prouvons alors (i). Soit U' une représentation unitaire irréductible de Γ dont le caractère χ' appartient à $\Lambda_{ab}(\mathfrak{g}') \cap \Lambda$. Soit χ la restriction de χ' à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Soit U_1 la représentation de Γ induite par U'. Alors U_1 admet le caractère χ (lemme 23). Si l'on décompose U_1 en intégrale hilbertienne de représentations irréductibles, presque toutes ces représentations admettent le caractère χ [lemme 20 (ii)]. Il existe donc une représentation unitaire irréductible U de Γ admettant le caractère χ. D'après notre résultat intermédiaire, U est unitairement équivalente à U_1. Donc U_1 est irréductible. D'où (i).

Prouvons (iii). Soit χ un caractère hermitien de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ non nul en ab, prolongeable en un caractère χ' de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ appartenant à Λ. Soit U' une représentation unitaire irréductible de Γ' de caractère χ'. Soit U la représentation unitaire de Γ induite par U'. Alors, U est irréductible d'après (i), et son caractère est χ d'après le lemme 23. On a donc bien prouvé *l'existence* d'une représentation unitaire irréductible de Γ de caractère χ. Et, si U_1 est une autre représentation unitaire irréductible de Γ de caractère χ, elle est équivalente à U d'après notre résultat intermédiaire. D'où (iii).

THÉORÈME 1. — *Soient* Γ *un groupe de Lie nilpotent simplement connexe,* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie. Il existe dans* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ *un élément non nul c tel que tout* $\chi \in \Lambda_c(\mathfrak{g})$ *corresponde à une représentation unitaire irréductible de* Γ *et à une seule* (*à une équivalence près*).

DÉMONSTRATION. — Le théorème est évident pour $\dim \Gamma = 0$ ou même $\dim \Gamma = 1$. Supposons le théorème établi pour les groupes de Lie nilpotents simplement connexes de dimension $< \dim \Gamma$, et prouvons-le pour Γ.

Soient $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, Γ' le sous-groupe correspondant de Γ, qui est fermé et distingué. Soit a' un élément non nul de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ tel que tout $\chi' \in \Lambda_{a'}(\mathfrak{g}')$ corresponde à une représentation unitaire irréductible de Γ' et à une seule (à une équivalence près).

Supposons d'abord $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. D'après le lemme 21 (iii), il existe un élément $a_1 \neq 0$ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ tel que tout $\chi \in \Lambda_{a'a_1}(\mathfrak{g})$ corresponde à une représentation unitaire irréductible de Γ et à une seule (à une équivalence près).

Supposons maintenant $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Reprenons les notations $x, a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}, b, a$ du lemme 24 et supposons de plus a affine relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_q$, ce qui est possible d'après le lemme 12 (v). En multipliant a' par un élément convenable de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, on peut supposer que $a' \in K[a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}]$, donc que

$$a' = a_{q+1}^r c_r + a_{q+1}^{r-1} c_{r-1} + \ldots + c_0,$$

où $c_r, c_{r-1}, \ldots, c_0 \in K[a_1, a_2, \ldots, a_q]$, $c_r \neq 0$. Nous allons d'abord montrer que, si $\chi' \in \Lambda_{bc_r}(\mathfrak{g}')$, χ' correspond à une représentation unitaire irréductible de Γ' et à une seule (à une équivalence près). Pour fixer les idées, supposons a_{q+1}, donc b, symétriques; alors $\chi'(a_{q+1})$ et $\chi'(b)$ sont réels. Puisque $\chi'(c_r) \neq 0$, il existe un nombre réel λ tel que

$$\lambda^r \chi'(c_r) + \lambda^{r-1} \chi'(c_{r-1}) + \ldots + \chi'(c_0) \neq 0.$$

Pour tout $\mu \in \mathbf{R}$, soit A_μ la restriction à $\mathfrak{g}'$ de l'automorphisme $\exp \operatorname{ad} \mu x$ de $\mathfrak{g}$. L'extension de A_μ à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ laisse fixes les éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et transforme a_{q+1} en $a_{q+1} + \mu b$. Le caractère χ' est donc transformé en un caractère χ'_1 qui prend les mêmes valeurs que χ' sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et prend la valeur $\chi'(a_{q+1}) + \mu\chi'(b)$ en a_{q+1}. Puisque $\chi'(b) \neq 0$, on a $\chi'(a_{q+1}) + \mu\chi'(b) = \lambda$ pour μ bien choisi. Alors,

$$\chi'_1(a') = \lambda^r \chi'(c_r) + \lambda^{r-1} \chi'(c_{r-1}) + \ldots + \chi'(c_0) \neq 0,$$

donc χ'_1 correspond à une représentation unitaire irréductible de Γ' et à une seule (à une équivalence près). Le caractère χ' possède donc la même propriété.

Soit alors $\chi \in \Lambda_{bc_r a}(\mathfrak{g})$. D'après le lemme 16, χ se prolonge en un caractère $\chi' \in \Lambda_{bc_r a}(\mathfrak{g}')$. D'après ce qui précède, χ' correspond à une représentation unitaire irréductible de Γ' et à une seule (à une équivalence près). Alors, d'après le lemme 24 (iii), χ correspond à une représentation unitaire irréductible de Γ et à une seule (à une équivalence près). D'où le théorème 1.

Remarque 3. — Des exemples simples montrent que le théorème 1 ne se généralise pas aux groupes de Lie résolubles. Le centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ peut être alors « trop petit ».

Définition 4. — *Soient Γ un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Un élément a de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ sera dit classifiant pour Γ s'il est non nul et si tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$ correspond à une représentation unitaire irréductible de Γ et à une seule (à une équivalence près).*

Le théorème 1 affirme l'existence d'éléments classifiants.

Il est clair que le produit d'un élément classifiant par un élément non nul quelconque de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ est encore classifiant.

Pour la suite, nous aurons besoin des deux lemmes suivants, qui précisent le théorème 1 :

LEMME 25. — *Soient Γ un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, Γ' un sous-groupe distingué fermé connexe de codimension* 1 *dans Γ, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ les algèbres de Lie de Γ et Γ', x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$. On suppose $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Il existe des éléments symétriques ou antisymétriques $a_1, a_2, \ldots, a_q$ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et un élément a de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ avec les propriétés suivantes :*

(i) *a_1 $a_2, \ldots, a_q$ sont algébriquement indépendants et engendrent le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.*

(ii) *$a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ engendrent le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$.*

(iii) *$a_q = xb + c$ avec $b \neq 0$, $b \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, $c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$.*

(iv) *a est classifiant pour Γ et Γ'.*

(v) *a est affine relativement à $(a_1, a_2, \ldots, a_{q-1})$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_q)$.*

(vi) *a est produit de b par un élément de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$.*

(vii) *Toute représentation unitaire irréductible de Γ' dont le caractère est non nul en a se prolonge en une représentation unitaire irréductible de Γ'.*

(viii) *Si une représentation unitaire irréductible de Γ a son caractère non nul en a, sa restriction à Γ' est irréductible.*

DÉMONSTRATION. — Choisissons $a_1, a_2, \ldots, a_q$ conformément au lemme 11 (où l'on suppose que $\mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}'$, $x_n = x$). La propriété (iii) est donc satisfaite avec $b = a_{q1}$, $c = a_{q2}$. D'après le lemme 3 (iii), les propriétés (i) et (ii) sont aussi vérifiées. Soit b_1 un élément affine relativement à $(a_1, a_2, \ldots, a_{q-1})$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_q)$ [lemme 11 (iii)]. Soit b_2 un élément classifiant pour Γ' (théorème 1). Soit b' (resp. b'_2) un élément de $K[a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}]$ produit de b (resp. b_2) par un élément non nul de $K[a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}]$. Soit $a = b_1 b' b'_2$. Alors, les propriétés (v) et (vi) sont vérifiées. L'élément a est évidemment classifiant pour Γ', et il est classifiant pour Γ d'après le lemme 21 (iii). Les propriétés (vii) et (viii) résultent du lemme 21 (i) et (ii).

LEMME 26. — *Soient Γ un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, Γ' un sous-groupe distingué fermé connexe de codimension* 1 *dans Γ, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ les algèbres de Lie de Γ et Γ', x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$. On suppose $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Il existe des éléments symétriques ou antisymétriques $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ et un élément a de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ avec les propriétés suivantes :*

(i) *$a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$ sont algébriquement indépendants et engendrent le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$.*

(ii) *$a_1, a_2, \ldots, a_q$ engendrent le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.*

(iii) *$[x, a_{q+1}] = b$ est un élément non nul de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, et*

$$(\exp \operatorname{ad} \lambda x) a_{q+1} = a_{q+1} + \lambda b \qquad \textit{pour} \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

(iv) *a est classifiant pour Γ et Γ'.*

(v) *a est affine relativement à $(a_1, a_2, \ldots, a_q)$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_{q+1})$.*

(vi) *a est produit de b par un élément de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.*

(vii) *Toute représentation unitaire irréductible de* Γ' *dont le caractère est non nul en a induit une représentation unitaire irréductible de* Γ.

(viii) *Il existe une application* $\chi \to \chi'$ *de* $\Lambda_a(\mathfrak{g})$ *dans* $\Lambda_a(\mathfrak{g}')$ *possédant les propriétés suivantes :*

1. pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, χ' *prolonge* χ;

2. pour tout $c' \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, *il existe* $c \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ *et un entier* $s \geq 0$ *tels que* $\chi'(c') = \chi(a)^{-s}\chi(c)$ *pour tout* $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$;

3. si $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, *toute représentation unitaire irréductible de* Γ *de caractère* χ *est équivalente à la représentation unitaire induite par une représentation unitaire irréductible de* Γ' *de caractère* χ'.

Démonstration. — Choisissons $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}$ conformément au lemme 12 (où l'on suppose que $\mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}'$, $x_n = x$, et où l'on change la numérotation des a_j de manière que a_{q+1} soit l'élément noté a_r au lemme 12). La propriété (iii) est donc satisfaite. D'après le lemme 3 (iii), les propriétés (i) et (ii) sont aussi vérifiées. Soit b_1 un élément affine relativement à $(a_1, a_2, \ldots, a_q)$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_{q+1})$ [lemme 12 (v)]. Soit b_2 un élément classifiant pour Γ' (théorème 1); comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 1, on peut supposer $b_2 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, et bb_1b_2 est alors classifiant pour Γ. Soit b' (resp. b'_2) un élément de $K[a_1, a_2, \ldots, a_q]$ produit de b (resp. b_2) par un élément non nul de $K[a_1, a_2, \ldots, a_q]$. Soit $a = b_1 b' b'_2$. Alors, les propriétés (iv), (v) et (vi) sont vérifiées. La propriété (vii) résulte du lemme 24 (i). Soit $\chi \to \chi'$ une application de $\Lambda_a(\mathfrak{g})$ dans $\Lambda_a(\mathfrak{g}')$ possédant les propriétés (i) et (ii) du lemme 16, c'est-à-dire les propriétés *1* et *2* du lemme 26 (viii). Il ne reste plus qu'à prouver la propriété *3* du lemme 26 (viii). Soient $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, et U une représentation unitaire irréductible de Γ de caractère χ. Alors, U est équivalente à la représentation unitaire induite par une représentation unitaire irréductible U' de Γ' [lemme 24 (ii)]. Le caractère χ'_1 de U' prolonge χ (lemme 23). Comme χ est non nul en ab, χ' et χ'_1 sont transformés l'un de l'autre par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}$ (lemme 17). Sans changer U, on peut donc supposer que U' admet le caractère χ' (lemme 22).

Remarque 4. — D'après la remarque 2, chap. V, si $c' \neq 0$ est un élément donné de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, on peut choisir l'application $\chi \to \chi'$ de manière qu'en outre l'élément c associé à c' dans la propriété (viii b) soit non nul.

CHAPITRE VII.

Propriétés de la transformation de Fourier.

Notre but actuel est le théorème 2, qui se démontre par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, en comparant $\mathfrak{g}$ et un idéal $\mathfrak{g}'$ de codimension 1 de $\mathfrak{g}$. Là encore, il faut distinguer essentiellement les cas $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. Les lemmes 27 et 28 préparent l'étude du premier cas, les lemmes 29, 30 et 31 préparent l'étude du deuxième cas.

Lemme 27. — *Soient Γ un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$. On suppose $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. Il existe donc x, a_1, a_2 tels que $x \in \mathfrak{g}$, $x \notin \mathfrak{g}'$, $a_1 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, et $a = xa_1 + a_2 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Soit $b \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Il existe des éléments $b_1, b_2, \ldots, b_p$ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, des éléments b'_1, $b'_2, \ldots, b'_p$ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et un entier $s \geq 0$ possédant la propriété suivante : pour toute représentation unitaire U de Γ admettant un caractère χ non nul en a_1, on a*

$$U(b) = \chi(a_1)^{-s}[\chi(b'_1)U(b_1) + \chi(b'_2)U(b_2) + \ldots + \chi(b'_p)U(b_p)].$$

Démonstration. — Écrivons $b = x^m c_m + x^{m-1} c_{m-1} + \ldots + c_0$, où c_m, $c_{m-1}, \ldots, c_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. Le lemme est évident si $m = 0$ (on prend alors $p = 1$, $b_1 = b$, $b'_1 = 1$, $s = 0$). Supposons-le établi pour les entiers $< m$. On a $b = xb' + b''$ avec des éléments b', b'' de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ auxquels on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Pour toute représentation unitaire U de Γ admettant un caractère χ non nul en a_1, on a

$$\chi(a).1 = U(a) = U(x)U(a_1) + U(a_2) = \chi(a_1)U(x) + U(a_2),$$

d'où $U(x) = \chi(a_1)^{-1}[\chi(a).1 - U(a_2)]$, et par suite

$$\begin{aligned} U(b) &= U(x)U(b') + U(b'') \\ &= \chi(a_1)^{-1}[\chi(a)U(b') - U(a_2)U(b') + \chi(a_1)U(b'')]. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer à $U(b')$, $U(b'')$ l'hypothèse de récurrence.

Lemme 28. — *Soient Γ un groupe de Lie, Γ' un sous-groupe distingué fermé connexe de codimension 1 dans Γ, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ leurs algèbres de Lie. On suppose $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. Définissons x, a_1, a_2, a comme au lemme 27. Soit U une représentation unitaire de Γ admettant un caractère χ non nul en a_1. Soit U' la restriction de U à Γ'. Alors, les vecteurs indéfiniment différentiables pour U et U' sont les mêmes.*

Démonstration. — Soient $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien où opère U, $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}'_1$ les sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{H}$ constitués par les vecteurs indéfiniment différentiables pour U et U'. On a évidemment $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}'_1$. D'après le lemme 27 (dont nous utilisons seulement une partie) il existe des éléments b_1, b_2 de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ tels que $iU(x) = U(b_1) + iU(b_2)$. Soient $b_1 = b_1^+ + b_1^-$, $b_2 = b_2^+ + b_2^-$ avec b_1^+, b_2^+ symétriques, b_1^-, b_2^- antisymétriques. Alors

$$iU(x) = (U(b_1^+) + iU(b_2^-)) + i(U(b_2^+) - iU(b_1^-))$$

est la décomposition de $iU(x)$ en parties hermitienne et antihermitienne; comme $iU(x)$ est hermitien, on a $iU(x) = U(b_1^+) + iU(b_2^-)$, donc $iU(x)$ admet un prolongement hermitien à $\mathfrak{H}'_1$, à savoir $U'(b_1^+) + iU'(b_2^-)$. Or $(iU(x))^* = T$ est autoadjoint ([23], théorème 1; en fait, d'après le théorème cité, même la restriction de $iU(x)$ au sous espace de Gårding de U est essentiellement autoadjoint). Donc T prolonge $U'(b_1^+) + iU'(b_2^-)$. Ainsi, T laisse stable $\mathfrak{H}'_1$. Donc ([21], p. 571) si $\xi \in \mathfrak{H}'_1$ et $\gamma \in \Gamma$, le vecteur

$$\lambda^{-1}[U(\gamma \exp(\lambda x)) - U(\gamma)]\xi = U(\gamma)\lambda^{-1}[U(\exp \lambda x) - 1]\xi$$

a une limite forte quand $\lambda \to 0$, limite égale à $-iU(\gamma)T\xi$. Par ailleurs, si $y \in \mathfrak{g}'$ et $\gamma \in \Gamma$, le vecteur

$$\lambda^{-1}[U(\gamma \exp(\lambda y)) - U(\gamma)]\xi = U(\gamma)\lambda^{-1}[U'(\exp \lambda y) - 1]\xi$$

a une limite forte quand $\lambda \to 0$, limite égale à $U(\gamma)U'(y)\xi$. Les résultats précédents entraînent, par récurrence sur n, que la fonction $\gamma \to U(\gamma)\xi$ sur Γ est n fois différentiable, quel que soit n. Donc $\xi \in \mathfrak{H}_1$ et finalement $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}'_1$.

Lemme 29. — *Soient Γ un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, p un entier > 0, U une représentation unitaire de Γ dans $\mathfrak{H} = L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$, $\mathfrak{K}$ le sous-espace de $\mathfrak{H}$ formé des vecteurs indéfiniment différentiables pour U. Soient $\mathfrak{H}_1$ le sous-espace de $\mathfrak{H}$ formé des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide au sens de* L. Schwartz *sur $\mathbf{R}^p$, D_j l'opérateur de dérivation par rapport à la $j^{ième}$ variable défini dans $\mathfrak{H}_1$, M_j l'opérateur de multiplication par la $j^{ième}$ variable défini dans $\mathfrak{H}_1$. On suppose que $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{K}$, et que l'ensemble des opérateurs $U(a) \mid \mathfrak{H}_1$, pour $a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, contient $D_1, M_1, D_2, M_2, \ldots, D_p, M_p$. Alors, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{K}$.*

Démonstration. — Soit $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Il existe $a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ tel que $D_j = U(a) \mid \mathfrak{H}_1$. Soit $a = a^+ + a^-$ avec a^+ symétrique et a^- antisymétrique. Alors, $U(a^+) \mid \mathfrak{H}_1$ et $iU(a^-) \mid \mathfrak{H}_1$ sont hermitiens. D'autre part, iD_j est hermitien. Donc $U(a^+) \mid \mathfrak{H}_1 = 0$, de sorte qu'on peut supposer a antisymétrique. Alors, $iU(a)$ est un prolongement hermitien de iD_j, donc $(iD_j)^*$ est un prolongement de $(iU(a))^*$ qui est lui-même un prolongement de $iU(a)$. Ainsi, $\mathfrak{K}$ est contenu dans l'ensemble de définition de D_j^* et est stable pour D_j^*. Or, l'ensemble de définition de D_j^* est l'ensemble des fonctions de $\mathfrak{H}$ dont la $j^{ième}$ dérivée partielle au sens des distributions appartient encore à $\mathfrak{H}$. On voit donc que, si $\xi \in \mathfrak{K}$, ses dérivées partielles de tous les ordres au sens des distributions sont des éléments de $\mathfrak{H}$, donc la fonction ξ est égale presque partout à une fonction indéfiniment différentiable. Raisonnant sur les M_j comme on a raisonné sur les D_j, on voit que, si $\xi \in \mathfrak{K}$, le produit de toute dérivée de ξ par tout polynome est de carré intégrable. Donc le produit de ξ par tout polynome appartient à l'espace $\mathcal{D}_{L^2}(\mathbf{R}^p)$ de Schwartz et est par suite borné. De même, le produit de toute dérivée de ξ par tout polynome est borné, donc ξ est une fonction indéfiniment différentiable à décroissance rapide.

Lemme 30. — *Soient p' un entier ≥ 0, $p = p' + 1$, $\mathfrak{H}'_1$ (resp. $\mathfrak{H}_1$) l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des fonctions complexes indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur $\mathbf{R}^{p'}$ (resp. $\mathbf{R}^p$), D'_j (resp. D_j) l'opérateur de* *dérivation par rapport à la $j^{\text{ième}}$ variable dans $\mathfrak{H}'_1$ (resp. $\mathfrak{H}_1$) pour $j = 1, 2, \ldots, p'$ (resp. $j = 1, 2, \ldots, p$), M'_j (resp. M_j) l'opérateur de multiplication par la $j^{\text{ième}}$ variable dans $\mathfrak{H}'_1$ (resp. $\mathfrak{H}_1$) pour $j = 1, 2, \ldots, p'$ (resp. $j = 1, 2, \ldots, p$), $\mathfrak{A}' = \mathbf{C}[D'_1, \ldots, D'_{p'}, M'_1, \ldots, M'_{p'}]$, $\mathfrak{A} = \mathbf{C}[D_1, \ldots, D_p, M_1, \ldots, M_p]$. Il existe un homomorphisme unique Φ de $\mathfrak{A}'$ dans $\mathfrak{A}$ tel que $\Phi(D'_j) = D_j$ et $\Phi(M'_j) = M_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, p'$.*

DÉMONSTRATION. — L'unicité de Φ est évidente. D'autre part, soit P un polynome non commutatif à coefficients complexes en $2p'$ variables tel que $P(D'_1, \ldots, D'_{p'}, M'_1, \ldots, M'_{p'}) = 0$. Pour $f \in \mathfrak{H}_1$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, soit f_λ l'élément de $\mathfrak{H}'_1$ obtenu en fixant dans f la $p^{\text{ième}}$ variable égale à λ. Alors

$$(P(D_1, \ldots, D_{p-1}, M_1, \ldots, M_{p-1})f)_\lambda = P(M'_1, \ldots, M'_{p-1}, D'_1, \ldots, D'_{p-1})f_\lambda = 0,$$

donc $P(D_1, \ldots, D_{p-1}, M_1, \ldots, M_{p-1})f = 0$, et finalement $P(D_1, \ldots, D_{p-1}, M_1, \ldots, M_{p-1}) = 0$. D'où l'existence de Φ.

LEMME 31. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente réelle, $\mathfrak{g}'$ un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1, Γ le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, Γ' le sous-groupe fermé de Γ correspondant à $\mathfrak{g}'$, x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$, Δ le sous-groupe fermé de Γ correspondant à la sous-algèbre $\mathbf{R}x$ de $\mathfrak{g}$. On identifie Γ au produit semi-direct de Γ' et Δ, et l'on identifie Δ au groupe $\mathbf{R}$ par l'application $\lambda \to \exp \lambda x$.*

D'autre part, soient p' un entier ≥ 0, $p = p' + 1$, $\mathfrak{H}'$ l'espace hilbertien $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^{p'})$, U' une représentation unitaire de Γ' dans $\mathfrak{H}'$, U la représentation unitaire de Γ induite par U', qui opère dans

$$\mathfrak{H} = L^2_{\mathfrak{H}'}(\Delta) = L^2_{\mathfrak{H}'}(\mathbf{R}) = L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^{p'} \times \mathbf{R}) = L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p).$$

On adopte les notations $\mathfrak{H}'_1$, $\mathfrak{H}_1$, D'_j, D_j, M'_j, M_j, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}$, Φ du lemme 30. *On suppose que les éléments de $\mathfrak{H}'_1$ sont indéfiniment différentiables pour U' et que les opérateurs $U'(a') \mid \mathfrak{H}'_1$, pour $a' \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, appartiennent à $\mathfrak{A}'$. Alors :*

(i) *Les éléments de $\mathfrak{H}_1$ sont indéfiniment différentiables pour U.*

(ii) *On a $U(x) \mid \mathfrak{H}_1 = D_p$.*

(iii) *Soient $a_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, et $a_j = (\mathrm{ad}\, x)^j a_0$, de sorte que $a_j = 0$ lorsque j dépasse un certain entier r. On a*

$$U(a_0) \mid \mathfrak{H}_1 = \Phi(U'(a_0) \mid \mathfrak{H}'_1) + \frac{1}{1!} M_p \Phi(U'(a_1) \mid \mathfrak{H}'_1) + \ldots + \frac{1}{r!} M_p^r \Phi(U'(a_r) \mid \mathfrak{H}'_1).$$

DÉMONSTRATION. — Nous diviserons la démonstration en plusieurs parties.

1° Soient $\xi \in \mathfrak{H}_1$, $\gamma \in \Gamma$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$\lambda^{-1}[U(\gamma \exp \lambda x) - U(\gamma)]\xi = U(\gamma)\lambda^{-1}[U(\exp \lambda x) - 1]\xi.$$

Or, ξ est une fonction de p variables réelles $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ et $U(\exp\lambda x)\xi$ est égal (compte tenu de la définition des représentations induites et de nos identifications) à la fonction $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p) \to \xi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p + \lambda)$. Il est alors immédiat que l'élément $\lambda^{-1}[U(\exp\lambda x) - 1]\xi$ a une limite forte dans $\mathfrak{H}$ quand $\lambda \to 0$, et que cette limite est $D_p\xi$. Donc $\lambda^{-1}[U(\gamma\exp\lambda x) - U(\gamma)]\xi$ a une limite forte dans $\mathfrak{H}$ quand $\lambda \to 0$ et cette limite est $U(\gamma)D_p\xi$.

2° Soit toujours $\xi \in \mathfrak{H}_1$. Soient $y \in \mathfrak{g}'$ et $\mu \in \mathbf{R}$. Pour calculer $U(\exp\mu y)\xi$, nous devons identifier ξ à une application η de $\mathbf{R}$ dans $\mathfrak{H}'$; $\eta(\varepsilon_p)$ est la fonction $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1}) \to \xi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$; écrivant

$$(\exp\varepsilon_p x)(\exp\mu y) = [(\exp\varepsilon_p x)(\exp\mu y)(\exp\varepsilon_p x)^{-1}](\exp\varepsilon_p x)$$

on voit que la transformée de η par $U(\exp\mu y)$ est l'application η' de $\mathbf{R}$ dans $\mathfrak{H}'$ définie par

$$\eta'(\varepsilon_p) = U'((\exp\varepsilon_p x)(\exp\mu y)(\exp\varepsilon_p x)^{-1})\eta(\varepsilon_p).$$

Considérons le second membre comme une fonction de μ à valeurs dans $\mathfrak{H}'$. Comme $\eta(\varepsilon_p) \in \mathfrak{H}'_1$ et que les éléments de $\mathfrak{H}'_1$ sont indéfiniment différentiables pour U' par hypothèse, cette fonction est indéfiniment différentiable; ses deux premières dérivées sont les fonctions

$$\mu \to U'((\exp\varepsilon_p x)(\exp\mu y)(\exp\varepsilon_p x)^{-1})\ U'((\exp\operatorname{ad}\varepsilon_p x).y)\ \ \eta(\varepsilon_p),$$
$$\mu \to U'((\exp\varepsilon_p x)(\exp\mu y)(\exp\varepsilon_p x)^{-1})[U'((\exp\operatorname{ad}\varepsilon_p x).y)]^2\eta(\varepsilon_p).$$

D'après la formule de Taylor pour les fonctions vectorielles ([2], p. 70), on a donc

$$(8)\qquad \mu^{-1}[U'((\exp\varepsilon_p x)(\exp\mu y)(\exp\varepsilon_p x)^{-1})\eta(\varepsilon_p) - \eta(\varepsilon_p)]$$
$$= U'((\exp\operatorname{ad}\varepsilon_p x).y)\eta(\varepsilon_p) + \mu^{-1}\int_0^\mu \mathrm{A}\,d\nu$$

avec

$$\mathrm{A} = (\mu - \nu)U'((\exp\varepsilon_p x)(\exp\nu y)(\exp\varepsilon_p x)^{-1})[U'((\exp\operatorname{ad}\varepsilon_p x).y)]^2\eta(\varepsilon_p).$$

Le deuxième terme du deuxième membre est majoré en norme par

$$|\mu|.\|[U'((\exp\operatorname{ad}\varepsilon_p x).y)]^2\eta(\varepsilon_p)\|.$$

Posons $(\operatorname{ad}x)^j y = y_j$, de sorte que $0 = y_{s+1} = y_{s+2} = \ldots$. On a

$$(\exp\operatorname{ad}\varepsilon_p x).y = y_0 + \frac{1}{1!}\varepsilon_p y_1 + \ldots + \frac{1}{s!}\varepsilon_p^s y_s.$$

Donc

$$U'((\exp\operatorname{ad}\varepsilon_p x).y)\eta(\varepsilon_p) = U'(y_0)\eta(\varepsilon_p)$$
$$+ \frac{1}{1!}\varepsilon_p U'(y_1)\eta(\varepsilon_p) + \ldots + \frac{1}{s!}\varepsilon_p^s U'(y_s)\eta(\varepsilon_p).$$

Par hypothèse, $U'(y_0) \mid \mathfrak{H}'_1$, $U'(y_1) \mid \mathfrak{H}'_1$, ..., $U'(y_s) \mid \mathfrak{H}'_1$ appartiennent à $\mathfrak{A}'$. On voit alors que l'application $\varepsilon_p \to U'((\exp \operatorname{ad} \varepsilon_p x).y)\eta(\varepsilon_p)$ s'identifie à un élément ξ_1 de $\mathfrak{H}_1$, à savoir

$$(9) \qquad \begin{aligned} \xi_1 = {} & \Phi(U'(y_0) \mid \mathfrak{H}'_1)\xi \\ & + \frac{1}{1!} M_p \Phi(U'(y_1) \mid \mathfrak{H}'_1)\xi + \ldots + \frac{1}{s!} M_p^s \Phi(U'(y_s) \mid \mathfrak{H}'_1)\xi. \end{aligned}$$

De façon analogue, l'application $\varepsilon_p \to [U'((\exp \operatorname{ad} \varepsilon_p x).y)]^2 \eta(\varepsilon_p)$ s'identifie à un élément de $\mathfrak{H}_1$, donc la fonction $\varepsilon_p \to \| [U'((\exp \operatorname{ad} \varepsilon_p x).y)]^2 \eta(\varepsilon_p) \|$ est de carré intégrable. Or, la formule (8) prouve que

$$\| \mu^{-1}[U(\exp \mu y)\xi - \xi] - \xi_1 \|^2 \leqq \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \| [U'((\exp \operatorname{ad} \varepsilon_p x).y)]^2 \eta(\varepsilon_p) \|^2 \, d\varepsilon_p.$$

On voit donc que $\mu^{-1}[U(\exp \mu y)\xi - \xi]$ a une limite forte dans $\mathfrak{H}$ quand $\mu \to 0$; et cette limite est $\xi_1 \in \mathfrak{H}_1$. Par suite, pour $\gamma \in \Gamma$,

$$\mu^{-1}[U(\gamma \exp \mu y)\xi - U(\gamma)\xi]$$

a une limite forte dans $\mathfrak{H}$ quand $\mu \to 0$, égale à $U(\gamma)\xi_1$.

3° Par récurrence sur m, les résultats de 1° et 2° prouvent que la fonction $\gamma \to U(\gamma)\xi$ sur Γ, à valeurs dans $\mathfrak{H}$, est m fois différentiable quel que soit m; cette fonction est donc indéfiniment différentiable. Ainsi, ξ est un vecteur de $\mathfrak{H}$ indéfiniment différentiable pour U; on a prouvé (i), et l'on voit en outre que $\mathfrak{H}_1$ est stable pour les opérateurs $U(a)\,[a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})]$. Les résultats de 1° prouvent alors (ii). D'autre part, la formule (9) prouve (iii) lorsque $a_0 \in \mathfrak{g}'$. Pour achever d'établir le lemme, il suffit donc de montrer que, si (iii) est vrai pour des éléments a_0, b_0 de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, (iii) est vrai pour $a_0 b_0$. Or, on a (les sommes écrites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls)

$$\begin{aligned} U(a_0 b_0) \mid \mathfrak{H}_1 &= (U(a_0)\, U(b_0)) \mid \mathfrak{H}_1 = (U(a_0) \mid \mathfrak{H}_1)\,(U(b_0) \mid \mathfrak{H}_1) \\ &= \Sigma_{t,t'} \frac{1}{t!} M_p^t \Phi(U'(a_t) \mid \mathfrak{H}'_1) \frac{1}{t'!} M_p^{t'} \Phi(U'(b_{t'}) \mid \mathfrak{H}'_1) \\ &= \Sigma_{t,t'} \frac{1}{t!\,t'!} M_p^{t+t'} \Phi(U'(a_t b_{t'}) \mid \mathfrak{H}'_1) \\ &= \Sigma_u \frac{1}{u!} M_p^u \Phi\left(U'\left(a_0 b_u + \binom{u}{1} a_1 b_{u-1} + \ldots + a_u b_0 \right) \mid \mathfrak{H}'_1 \right). \end{aligned}$$

[On a posé $b_j = (\operatorname{ad} x)^j b_0$]. D'après la formule de Leibnitz, $a_0 b_u + \binom{u}{1} a_1 b_{u-1} + \ldots + a_u b_0 = (\operatorname{ad} x)^u (a_0 b_0)$. D'où notre assertion.

Théorème 2. — *Soient Γ un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, p le défaut de commutativité de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$. Soit $\mathfrak{H}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{H}$ formé des fonc-*

tions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur $\mathbf{R}^p$. *Soient* D_j, M_j *les opérateurs, définis dans* $\mathfrak{H}_1$, *de dérivation par rapport à la* $j^{\text{ième}}$ *variable et de multiplication par la* $j^{\text{ième}}$ *variable, et* $\mathfrak{A} = \mathbf{C}[D_1, \ldots, D_p, M_1, \ldots, M_p]$. *Il existe un élément classifiant* a *de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, *et, pour tout* $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, *une représentation unitaire irréductible* U_χ *de* Γ *dans* $\mathfrak{H}$ *de caractère* χ, *avec les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout* $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, *le sous-espace des éléments de* $\mathfrak{H}$ *indéfiniment différentiables pour* U_χ *est* $\mathfrak{H}_1$.

(ii) *Pour tout* $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, *l'algèbre des opérateurs* $U_\chi(c)$, *où* c *parcourt* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, *est* $\mathfrak{A}$.

(iii) *Pour tout* $c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, *il existe des éléments* $T_1, T_2, \ldots, T_r$ *de* $\mathfrak{A}$, *des éléments* $c_1, c_2, \ldots, c_r$ *de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, *et un entier* $s \geqq 0$, *indépendants de* χ, *tels que*

$$U_\chi(c) = \chi(a)^{-s}[\chi(c_1)\, T_1 + \chi(c_2)\, T_2 + \ldots + \chi(c_r)\, T_r]$$

quel que soit $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$.

Démonstration. — Pour pouvoir mener à bien une démonstration par récurrence, nous allons en fait démontrer le résultat plus précis suivant : soient Γ, $\mathfrak{g}$, p, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, D_j, M_j, $\mathfrak{A}$ comme dans l'énoncé du théorème. Soient en outre $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie nilpotente réelle contenant $\mathfrak{g}$ comme idéal, $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n)$ une suite d'idéaux de $\mathfrak{h}$ tels que $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ et $\dim \mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1} = 1$ pour $1 \leqq j \leqq n$ (une telle suite existe d'après le théorème d'Engel). Soit x_j un élément de $\mathfrak{g}_j$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}_{j-1}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Alors il existe un élément a de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ classifiant pour Γ, et, pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, une représentation unitaire irréductible U_χ de Γ dans $\mathfrak{H}$ de caractère χ, avec les propriétés suivantes :

(i) et (iii) : comme dans le théorème 2.

(iv) Pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$ et tout $c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on a $U_\chi(c) \in \mathfrak{A}$.

(v) Rangeons les indices mixtes (relativement à la suite $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$) par ordre de profondeurs croissantes, ce qui est possible d'après le lemme 14(i). Soit j le $k^{\text{ième}}$ de ces indices, q sa profondeur. Pour tout $c \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_q) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ et tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, on a $U_\chi(c) \in \mathbf{C}[M_k, M_{k+1}, \ldots, M_p]$. Il existe $c \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_q) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ tel que, pour tout $z \in \mathfrak{h}$, on ait $[z, c] \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_q) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j'})$ avec un indice j' de profondeur $> q$, et tel que, pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, $U_\chi(c) - \lambda_\chi M_k \in \mathbf{C}[M_{k+1}, M_{k+2}, \ldots, M_p]$ avec un scalaire λ_χ non nul.

(vi) Rangeons les indices libres par ordre croissant. Soit j le $k^{\text{ième}}$ de ces indices. Pour tout $c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ et tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, on a $U_\chi(c) \in \mathbf{C}[D_1, \ldots, D_k, M_1, \ldots, M_p]$. Pour tout $c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ et tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, on a $U_\chi(c) \in \mathbf{C}[D_1, \ldots, D_{k-1}, M_1, \ldots, M_p]$. Pour tout $c \in x_j + \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ et tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, on a $U_\chi(c) - \lambda_\chi D_k \in \mathbf{C}[D_1, \ldots, D_{k-1}, M_1, \ldots, M_p]$ avec un scalaire λ_χ non nul.

(vii) Pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, il existe un $c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, tel que $U_\chi(b) = i.1$.

Montrons d'abord comment (iv), (v), (vi), (vii) entraînent le (ii) du théorème 2. Soit $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$. Soit $\mathfrak{A}'$ l'algèbre des opérateurs $U_\chi(c)$, où c parcourt $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. D'après (vii), $\mathfrak{A}'$ est une algèbre sur $\mathbf{C}$. D'après (iv), $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$. La dernière assertion de (v) entraîne de proche en proche que M_p, M_{p-1}, ..., M_1 appartiennent à $\mathfrak{A}'$. Compte tenu de ce fait, la dernière assertion de (vi) entraîne de proche en proche que D_1, D_2, ..., D_p appartiennent à $\mathfrak{A}'$. D'où $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$.

Notons que (iv) résulte de (iii). Il nous reste donc à prouver l'existence d'un élément a et de représentations U_χ vérifiant (i), (iii), (v), (vi), (vii). Nous diviserons la démonstration en plusieurs parties.

1° L'existence de a et des U_χ est évidente lorsque Γ est de dimension 0 ou 1. Supposons l'existence de a et des U_χ établie lorsque $\dim \mathfrak{g} < n$. Posons $\mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}'$. Soient Γ' le sous-groupe de Γ correspondant à $\mathfrak{g}'$, p' le défaut de commutativité de $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{H}'$ l'espace hilbertien $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^{p'})$, $\mathfrak{H}'_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{H}'$ formé des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur $\mathbf{R}^{p'}$, D'_j et M'_j les opérateurs, définis dans $\mathfrak{H}'_1$, de dérivation par rapport à la $j^{\text{ième}}$ variable et de multiplication par la $j^{\text{ième}}$ variable, et $\mathfrak{A}' = \mathbf{C}[D'_1, \ldots, D'_{p'}, M'_1, \ldots, M'_{p'}]$. Nous allons appliquer l'hypothèse de récurrence à Γ', $\mathfrak{g}'$, p', $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}'_1$, D'_j, M'_j, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{h}$, à la suite d'idéaux $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$, ..., $\mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}'$, et aux éléments x_1, x_2, ..., x_{n-1}. Il existe donc un élément classifiant a' de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ et, pour tout $\chi' \in \Lambda_{a'}(\mathfrak{g}')$, une représentation unitaire irréductible $U'_{\chi'}$ de Γ' dans $\mathfrak{H}'$, de caractère χ', avec les propriétés analogues à (i), (iii), (v), (vi), (vii).

2° Supposons d'abord $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Alors, $p' = p$, $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'_1 = \mathfrak{H}_1$, $D'_j = D_j$, $M'_j = M_j$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$. D'après le lemme 21 (iii), dont nous adoptons les notations, le produit $a_1^\star$ de a' par un certain élément a_1 de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ est classifiant pour Γ. Pour tout $\chi \in \Lambda_{a_1^\star}(\mathfrak{g})$, soit U_χ une représentation unitaire irréductible de caractère χ de Γ. La restriction χ' de χ à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ appartient à $\Lambda_{a'}(\mathfrak{g}')$. D'après le lemme 21 (ii), la restriction de U_χ à Γ' est irréductible et de caractère χ', donc équivalente à $U'_{\chi'}$. En remplaçant U_χ par une représentation équivalente, on peut donc supposer désormais que U_χ opère dans $\mathfrak{H}$ et a $U'_{\chi'}$ pour restriction à Γ'. Montrons que $a_1^\star$ et les U_χ ainsi obtenus possèdent les propriétés (i), (iii), (v), (vi). La propriété (i) résulte du lemme 28 et de l'hypothèse de récurrence. La propriété (iii) résulte du lemme 27 et de l'hypothèse de récurrence. Les indices libres, les indices mixtes et leurs profondeurs, sont les mêmes pour les systèmes $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_{n-1}$ et $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$, ..., $\mathfrak{g}_n$; les propriétés (v) et (vi) résultent donc de l'hypothèse de récurrence. Enfin, soit a le produit de $a_1^\star$ par un élément non nul $a_2^\star$ du centre de $\mathfrak{g}$. Pour $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, on a $\chi(a_2^\star) \neq 0$, donc $\chi(a_2^\star)$ est un nombre imaginaire pur non nul, d'où la propriété (vii).

3° Dans toute la fin de la démonstration, nous supposerons $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$. On a $p = p' + 1$. D'après le lemme 26 et la remarque 4 qui le suit, il existe un élément classifiant $a_1^\star$ pour Γ et une application $\chi \to \chi'$ de $\Lambda_{a_1^\star}(\mathfrak{g})$ dans $\Lambda_{a_1^\star}(\mathfrak{g}')$ possédant les propriétés suivantes : (α) pour tout $\chi \in \Lambda_{a_1^\star}(\mathfrak{g})$,

χ' prolonge χ; (β) pour tout $c' \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, il existe un $c \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et un entier $s \geqq 0$ tels que $\chi'(c') = \chi(a_1^\star)^{-s}\chi(c)$ pour tout $\chi \in \Lambda_{a_1^\star}(\mathfrak{g})$; ($\gamma$) si $\chi \in \Lambda_{a_1^\star}(\mathfrak{g})$, toute représentation unitaire irréductible de Γ de caractère χ est équivalente à la représentation unitaire induite par une représentation unitaire irréductible de Γ' de caractère χ'; (δ) il existe un élément non nul $a_2^\star$ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et un entier $t_0 \geqq 0$ tels que $\chi'(a') = \chi(a_1^\star)^{-t_0}\chi(a_2^\star)$ pour tout $\chi \in \Lambda_{a_1^\star}(\mathfrak{g})$. D'autre part, puisque $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, il existe un indice mixte j de profondeur $n - 1$. D'après le lemme **14** (ii), il existe un élément d de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ n'appartenant pas à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ [donc n'appartenant pas à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$] et tel que $[z, d] \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ pour tout $z \in \mathfrak{h}$. D'après le lemme **12** (ii), on a $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$. Donc il existe un indice distingué j' tel que $[z, d] \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j'})$ pour tout $z \in \mathfrak{h}$. Puisque $d \notin \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, on a $a_3^\star = [x_n, d] \neq 0$. Soit enfin $a_4^\star$ un élément non nul du centre de $\mathfrak{g}$. Nous poserons $a = a_1^\star a_2^\star a_3^\star a_4^\star$, de sorte que a est classifiant pour Γ.

Soit $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$. On a $\chi(a_2^\star) \neq 0$, donc $\chi'(a') \neq 0$. Nous avons donc introduit au 1° une représentation unitaire irréductible $U'_{\chi'}$ de Γ' dans $\mathfrak{H}'$ de caractère χ'. Soit U_χ la représentation unitaire de Γ induite par $U'_{\chi'}$. D'après la propriété (γ) ci-dessus, U_χ est irréductible et de caractère χ. Soit Δ le sous-groupe de Γ correspondant à la sous-algèbre $\mathbf{R}x_n$ de $\mathfrak{g}$. Le groupe Γ est produit semi-direct de Γ' et de Δ, et Δ s'identifie à $\mathbf{R}$ par l'application $\lambda \to \exp \lambda x_n$. Alors, U_χ opère dans

$$L^2_{\mathfrak{H}'}(\Delta) = L^2_{\mathfrak{H}'}(\mathbf{R}) = L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^{p'} \times \mathbf{R}) = L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p) = \mathfrak{H}.$$

Nous allons montrer que a et les U_χ ainsi construites possèdent les propriétés (i), (iii), (v), (vi), (vii).

Comme $\chi(a_4^\star) \neq 0$ pour $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, le même raisonnement qu'au 2° prouve déjà que la propriété (vii) est vérifiée. D'après le lemme **31** et l'hypothèse de récurrence, pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, les éléments de $\mathfrak{H}_1$ sont indéfiniment différentiables pour U_χ et $\mathfrak{H}_1$ est stable pour les opérateurs $U_\chi(c)$ pour $c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Nous allons prouver les propriétés (iii′), (v′), (vi′) obtenues en remplaçant dans (iii), (v), (vi) l'opérateur $U_\chi(c)$ par $U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1$. D'après un raisonnement déjà fait, ceci entraînera que l'algèbre des opérateurs $U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1$, où c parcourt $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, est $\mathfrak{A}$. Compte tenu du lemme **29**, l'ensemble des éléments de $\mathfrak{H}$ indéfiniment différentiables pour U_χ sera donc $\mathfrak{H}_1$. On aura donc prouvé (i). En même temps, les propriétés (iii), (v), (vi) deviendront identiques aux propriétés (iii′), (v′), (vi′) et seront donc établies.

Il nous reste donc à prouver que a et les U_χ vérifient (iii′), (v′), (vi′).

4° Prouvons (iii′). Il suffit de le faire pour $c = x_n$ et pour $c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. Or, on sait déjà que $U_\chi(x_n) \mid \mathfrak{H}_1 = D_p$ [lemme **31** (ii)]. Soit donc maintenant $c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. Soit $c_j = (\operatorname{ad} x_n)^j c$, de sorte que $c_j = 0$ pour j assez grand. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe, pour chaque j, des éléments $T_1^j, T_2^j, \ldots, T_{r_j}^j$ de $\mathfrak{A}'$, des éléments $c_1'^j, c_2'^j, \ldots, c_{r_j}'^j$ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, et un entier $s_j \geqq 0$, tels que, pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, on ait

$$U'_{\chi'}(c_j) = \chi'(a')^{-s_j}\left[\chi'(c_1'^j)\, T_1^j + \ldots + \chi'\left(c_{r_j}'^j\right) T_{r_j}^j\right].$$

D'après la propriété (β) de 3° il existe des $c_k^j \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ tels que $\chi'(c_k'^j)$ soit égal, pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, à $\chi(c_k^j)$ multiplié par une puissance entière négative de $\chi(a_1^\star)$. D'après la propriété (δ) de 3°, $\chi'(a')^{-s_j} = \chi(a_2^\star)^{-s_j}\chi(a_1^\star)^{t_0 s_j}$. Compte tenu du lemme **31** (iii), on a

$$U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1 = \chi(a)^{-s}[\chi(c_1)\, T_1 + \chi(c_2)\, T_2 + \ldots + \chi(c_r)\, T_r],$$

où s est un entier $\geqq 0$, où $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sont des éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, et où $T_1, T_2, \ldots, T_r \in \mathfrak{A}$ [$s, c_1, \ldots, c_r, T_1, \ldots, T_r$ étant indépendants de $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$].

5° Prouvons (v′). Rangeons les indices mixtes par ordre de profondeur croissante. Soit alors j le $k^{\text{ième}}$ indice mixte. Soit q sa profondeur. Soient $c \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_q) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j)$ et $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$. Supposons d'abord $q = n - 1$, donc $k = p$. Alors, c et ses transformés par $\mathrm{ad}\,x_n$, $(\mathrm{ad}\,x_n)^2, \ldots$ sont dans $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, donc les $U'_{\chi'}((\mathrm{ad}\,x_n)^j c)$ sont des opérateurs scalaires, donc $U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1 \in \mathbf{C}[M_p]$ d'après le lemme **31** (iii), et la première assertion de (v′) est établie. Prenons pour c l'élément désigné par d dans le premier alinéa de 3°; alors, pour tout $z \in \mathfrak{h}$, on a $[z, c] \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j'})$ avec un indice j' de profondeur $> q$; en particulier, $a_3^\star = [x_n, c] \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, donc $(\mathrm{ad}\,x_n)^2 c = 0$; d'après le lemme **31** (iii), on a

$$U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1 = \mu . 1 + M_p \chi'(a_3^\star) = \mu . 1 + \chi(a_3^\star) M_p \qquad (\text{où } \mu \in \mathbf{C});$$

or $\chi(a_3^\star) \neq 0$ puisque $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, et la deuxième assertion de (v′) est établie Ainsi, (v′) est établi pour $q = n - 1$. Supposons maintenant $q < n - 1$. Relativement à la suite $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_{n-1}$, l'indice j est encore mixte de profondeur q, et est encore le $k^{\text{ième}}$ indice dans la suite des indices mixtes rangés par ordre de profondeur croissante. Soit $c_l = (\mathrm{ad}\,x)^l c$, de sorte que $c_l = 0$ pour $l > r$. D'après l'hypothèse de récurrence, $U'_{\chi'}(c_l) = P_l(M'_k, M'_{k+1}, \ldots, M'_{p-1})$, P_l étant un certain polynome. Alors, d'après le lemme **31** (iii),

$$U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1 = P_0(M_k, \ldots, M_{p-1}) + \frac{1}{1!} M_p P_1(M_k, \ldots, M_{p-1}) + \ldots + \frac{1}{r!} M_p^r P_r(M_k, \ldots, M_{p-1}),$$

d'où la première assertion de (v′). D'après l'hypothèse de récurrence, on peut choisir c de manière que, pour tout $z \in \mathfrak{h}$, $[z, c] \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_q) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j'})$ avec un indice j' de profondeur $> q$, et tel que, pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, $U'_{\chi'}(c) - \lambda M'_k$ soit de la forme $P(M'_{k+1}, M'_{k+2}, \ldots, M'_{p-1})$, où P est un polynome et où λ est un scalaire $\neq 0$. On a en particulier $c_l \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_q) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j'})$

pour $l > 1$; d'après l'hypothèse de récurrence, $U'_{\chi'}(c_l)$ est de la forme $P_l(M'_{k+1}, \ldots, M'_{p-1})$ où P_l est un polynome. Alors, d'après le lemme **31** (iii),

$$U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1 = \lambda M_k + P(M_{k+1}, \ldots, M_{p-1})$$
$$+ \frac{1}{1!} M_p P_1(M_{k+1}, \ldots, M_{p-1}) + \ldots + \frac{1}{r!} M_p^r P_r(M_{k+1}, \ldots, M_{p-1}),$$

d'où la deuxième assertion de (v').

6° Prouvons (vi'). Soit j le $k^{\text{ième}}$ indice libre (les indices libres étant rangés dans l'ordre croissant). Supposons d'abord $j = n$, donc $k = p$. Alors, la première assertion de (vi') résulte de (iii') qui est déjà établi. Soit $c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$. D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, on a $U'_{\chi'}(c) \in \mathbf{C}[D'_1, \ldots, D'_{p-1}, M'_1, \ldots, M'_{p-1}]$; de même, si $c_l = (\mathrm{ad}\, x)^l c$, on a $c_l \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, donc $U'_{\chi'}(c_l) \in \mathbf{C}[D'_1, \ldots, D'_{p-1}, M'_1, \ldots, M'_{p-1}]$. Le lemme **31** (iii) montre alors que $U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1 \in \mathbf{C}[D_1, \ldots, D_{p-1}, M_1, \ldots, M_p]$, d'où la deuxième assertion de (vi'). Si $c \in x_n + \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1}) = x_n + \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$, ce qui précède et le lemme **31** (ii) montrent que

$$U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1 \in D_p + \mathbf{C}[D_1, \ldots, D_{p-1}, M_1, \ldots, M_p],$$

d'où la troisième assertion de (vi'). Ainsi, (vi') est établi pour $j = n$. Supposons maintenant $j < n$. Alors, j est le $k^{\text{ième}}$ indice libre relativement à la suite $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_{n-1}$. Soient encore

$$\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g}), \; c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j) \qquad \text{et} \qquad c_l = (\mathrm{ad}\, x_n)^l c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_j).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $U'_{\chi'}(c_l) \in \mathbf{C}[D'_1, \ldots, D'_k, M'_1, \ldots, M'_{p-1}]$. Donc, d'après le lemme **31** (iii), $U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1 \in \mathbf{C}[D_1, \ldots, D_k, M_1, \ldots, M_p]$. On voit de même que, si $c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$, on a

$$U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1 \in \mathbf{C}[D_1, \ldots, D_{k-1}, M_1, \ldots, M_p].$$

Enfin, supposons $c \in x_j + \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$. D'après l'hypothèse de récurrence, $U'_{\chi'}(c) - \lambda D'_k \in \mathbf{C}[D'_1, \ldots, D'_{k-1}, M'_1, \ldots, M'_{p-1}]$ avec un scalaire $\lambda \neq 0$; on a $[x_n, x_j] \in \mathfrak{g}_{j-1}$, donc $(\mathrm{ad}\, x_n)^l c \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j-1})$ pour $l > 0$; d'après le lemme **31** (iii) et les propriétés précédentes, on voit que

$$U_\chi(c) \mid \mathfrak{H}_1 \in \lambda D_k + \mathbf{C}[D_1, \ldots, D_{k-1}, M_1, \ldots, M_p].$$

D'où (vi'). Ceci achève la démonstration du théorème **2**.

Lemme **32**. — *Soient* $\mathbf{U}$ *l'ensemble des nombres complexes de module* 1, ψ *une application continue de* $\mathbf{U} - \{1\}$ *dans* $\mathbf{U}$. *Soient* $\mathfrak{H}$ *un espace hilbertien, E l'ensemble des opérateurs unitaires dont le spectre ponctuel ne contient pas* 1. *Alors, l'application* $U \rightarrow \psi(U)$ *de E dans l'ensemble des opérateurs unitaires de* $\mathfrak{H}$ *est fortement continue.*

Démonstration. — Soient $U_0 \in E$, $\xi \in \mathfrak{H}$, et $\varepsilon > 0$. Il faut montrer que, pour tout $U \in E$ suffisamment voisin de U_0 au sens de la topologie forte, on a $\|\psi(U)\xi - \psi(U_0)\xi\| \leqq \varepsilon$. Pour toute partie borélienne B de $\mathbf{U}$, notons P_B le projecteur spectral correspondant de U_0. Comme 1 n'appartient pas au spectre ponctuel de U_0, il existe un voisinage ouvert A de 1 dans $\mathbf{U}$ tel que $\|P_A\xi\| \leqq \frac{\varepsilon}{4}\cdot$ Soit A' un voisinage fermé de 1 dans $\mathbf{U}$ tel que $A' \subset A$. Il existe des fonctions θ_1, θ_2, définies et continues sur $\mathbf{U}$, possédant les propriétés suivantes :

(i) $0 \leqq \theta_1 \leqq 1$, $0 \leqq \theta_2 \leqq 1$, $\theta_1 + \theta_2 = 1$;

(ii) θ_1 est nulle sur A', θ_2 est nulle hors de A.

Posons $\psi_1 = \psi\theta_1$, $\psi_2 = \psi\theta_2$. On a $\psi(U) = \psi_1(U) + \psi_2(U)$ pour $U \in E$. Or, ψ_1 se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{U}$ tout entier, de sorte que, d'après le lemme 3 de [15], on a $\|\psi_1(U)\xi - \psi_1(U_0)\xi\| \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ pour U assez voisin de U_0 au sens de la topologie forte. D'autre part, on a $|\psi_2| = \theta_2$, et θ_2 est majorée par la fonction caractéristique de A, donc

$$\|\psi_2(U_0)\xi\| = \|\theta_2(U_0)\xi\| \leqq \|P_A\xi\| \leqq \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{et} \qquad \|\psi_2(U)\xi\| \leqq \|\theta_2(U)\xi\|.$$

Enfin, comme θ_2 est une fonction continue, on a, pour U assez voisin de U_0 au sens de la topologie forte,

$$\|\theta_2(U)\xi - \theta_2(U_0)\xi\| \leqq \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \text{donc} \quad \|\theta_2(U)\xi\| \leqq \|\theta_2(U_0)\xi\| + \frac{\varepsilon}{4} \leqq \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Finalement, pour U assez voisin de U_0 au sens de la topologie forte,

$$\|\psi(U)\xi - \psi(U_0)\xi\| \leqq \|\psi_1(U)\xi - \psi_1(U_0)\xi\| \\ + \|\psi_2(U)\xi\| + \|\psi_2(U_0)\xi\| \leqq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Lemme 33. — *Soient $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien, $\mathfrak{H}'$ un sous-espace vectoriel partout dense de $\mathfrak{H}$, Z un espace topologique. Pour tout $\zeta \in Z$, soit T_ζ un opérateur défini dans $\mathfrak{H}'$ et essentiellement autoadjoint. On suppose que, pour tout $\xi \in \mathfrak{H}'$, l'application $\zeta \to T_\zeta\xi$ de Z dans $\mathfrak{H}$ est continue pour la topologie forte de $\mathfrak{H}$. Alors l'application $\zeta \to \exp(iT_\zeta^{**})$ de Z dans l'ensemble des opérateurs unitaires de $\mathfrak{H}$ est fortement continue.*

Démonstration. — Nous désignerons le transformé de Cayley de T_ζ^{**}, transformé qui est unitaire, par V_ζ. Pour tout $\xi \in \mathfrak{H}'$, V_ζ transforme $T_\zeta\xi - i\xi$ en $T_\zeta\xi + i\xi$. Or, les vecteurs $T_\zeta\xi - i\xi$ ($\xi \in \mathfrak{H}'$) sont, pour chaque ζ, partout denses dans $\mathfrak{H}$ puisque T_ζ est essentiellement autoadjoint; d'autre part, les applications $\zeta \to T_\zeta\xi - i\xi$, $\zeta \to T_\zeta\xi + i\xi$ sont, pour ξ fixé, fortement continues. Il en résulte que l'application $\zeta \to V_\zeta$ est fortement continue :

c'est un cas particulier de [11], proposition 9. L'opérateur V_ζ n'admet pas 1 pour valeur propre, et l'on a

$$\exp(iT_\zeta^{**}) = \exp(-(V_\zeta+1)(V_\zeta-1)^{-1}) = \psi(V_\zeta),$$

où ψ est la fonction $\lambda \to \exp[(1+\lambda)(1-\lambda)^{-1}]$ définie et de module 1 pour $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 32.

THÉORÈME 3. — *Soient Γ un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Choisissons $\mathfrak{H}$, a et les U_χ conformément au théorème 2.*

(i) *Soit μ une mesure bornée sur Γ. L'application $\chi \to U_\chi(\mu)$ définie sur $\Lambda_a(\mathfrak{g})$ est fortement continue [pour toute topologie sur $\Lambda_a(\mathfrak{g})$ rendant continues les applications $\chi \to \chi(b)$, où $b \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$].*

(ii) *Soit $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$. Si $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$ varie de manière que $|\chi(b_0)| \to +\infty$ pour un élément fixé b_0 de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, alors $\| U_\chi(f) \| \to 0$.*

DÉMONSTRATION. — Prouvons (i). Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. Pour $j = 1, 2, \ldots, n$, soient $T_1^j, T_2^j, \ldots, T_{r_j}^j$ des éléments de $\mathfrak{A}$ (on conserve les notations du théorème 2), $a_1^j, a_2^j, \ldots, a_{r_j}^j$ des éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, et s_j un entier ≥ 0, tels que $U_\chi(x_j) = \chi(a)^{-s_j}[\chi(a_1^j)\, T_1^j + \ldots + \chi(a_{r_j}^j)\, T_{r_j}^j]$ pour $\chi \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$ [théorème 2 (iii)]. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels, on a

$$U_\chi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = \Sigma_{j,k} \lambda_j \chi(a)^{-s_j} \chi(a_k^j)\, T_k^j.$$

Donc, pour tout $\xi' \in \mathfrak{H}^1$, l'application $(x, \chi) \to iU_\chi(x)\xi'$ de $\mathfrak{g} \times \Lambda_a(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{H}$ est fortement continue pour toute topologie sur $\Lambda_a(\mathfrak{g})$ rendant continues les applications $\chi \to \chi(b)$ $(b \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}))$. Donc (lemme 33), pour tout $\xi \in \mathfrak{H}$, l'application $(x, \chi) \to (\exp U_\chi(x)^{**})\xi$ de $\mathfrak{g} \times \Lambda_a(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{H}$ est fortement continue. Or, $\exp U_\chi(x)^{**} = U_\chi(\exp x)$. D'autre part, l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ sur Γ est un homéomorphisme. On voit donc que l'application $(\gamma, \chi) \to U_\chi(\gamma)\xi$ de $\Gamma \times \Lambda_a(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{H}$ est fortement continue. Par suite, quand $\chi \to \chi_0$, la fonction $\gamma \to U_\chi(\gamma)\xi$ tend vers la fonction $\gamma \to U_{\chi_0}(\gamma)\xi$ uniformément sur toute partie compacte de Γ. Si μ est une mesure à support compact sur Γ, on voit donc que $U_\chi(\mu)\xi$ tend fortement vers $U_{\chi_0}(\mu)\xi$. Ceci prouve (i) lorsqu'il s'agit de mesures à support compact. Enfin, si μ est une mesure bornée sur Γ, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une mesure μ' à support compact sur Γ telle que $\| \mu - \mu' \| \leq \varepsilon$; on a alors $\| U_\chi(\mu) - U_\chi(\mu') \| \leq \varepsilon$ pour tout χ; d'où facilement (i) en général.

Prouvons (ii). Soit $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction f' sur Γ indéfiniment différentiable à support compact telle que $\| f - f' \|_1 \leq \varepsilon$. On a alors $\| U_\chi(f) - U_\chi(f') \| \leq \varepsilon$ pour tout χ. Il suffit de prouver que $\| U_\chi(f') \| \to 0$ quand $|\chi(b_0)| \to +\infty$. Nous supposerons donc désormais que f est indéfiniment différentiable à support compact. Pour tout $\xi \in \mathfrak{H}$, $U_\chi(f)\xi$ est un vecteur indéfiniment différentiable pour U_χ, et $U_\chi(b_0)\, U_\chi(f)\xi = U_\chi(g)\xi$, où g se déduit de f par l'opérateur différentiel biinvariant que définit b_0. Donc $U_\chi(g) = \chi(b_0)\, U_\chi(f)$, d'où

$$|\chi(b_0)|.\| U_\chi(f)\| = \| U_\chi(g)\| \leqq \|g\|_1.$$

Quand $|\chi(b_0)| \rightarrow +\infty$, on voit que $\| U_\chi(f)\| \rightarrow 0$. D'où (ii).

CHAPITRE VIII.

La formule de Plancherel.

LEMME 34. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente réelle*, $(a_1, a_2, \ldots, a_q)$ *et* $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_q)$ *deux systèmes d'éléments symétriques ou antisymétriques de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, *chacun d'eux étant formé d'éléments algébriquement indépendants et engendrant le corps des fractions de* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. *Posons* $\tau_j = 1$ *si* a_j *est symétrique*, $\tau_j = i$ *si* a_j *est antisymétrique; soient* $a = P(a_1, a_2, \ldots, a_q)$ *un élément affine relativement à* $a_1, a_2, \ldots, a_q$, Ω *l'ensemble des points* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ *de* $\mathbf{R}^q$ *tels que* $P(\tau_1\lambda_1, \tau_2\lambda_2, \ldots, \tau_q\lambda_q) \neq 0$, Φ *la bijection* $\chi \rightarrow (\tau_1^{-1}\chi(a_1), \tau_2^{-1}\chi(a_2), \ldots, \tau_q^{-1}\chi(a_q))$ *de* $\Lambda_a(\mathfrak{g})$ *sur* Ω (*cf.* lemme 15). *Définissons de même* τ'_j, $a' = P'(a'_1, a'_2, \ldots, a'_q)$, Ω' *et* Φ' *relativement à* $a'_1, a'_2, \ldots, a'_q$. *Alors il existe une partie non vide* Ω_1 *de* Ω *ouverte pour la topologie de Zariski, et une partie non vide* Ω'_1 *de* Ω' *ouverte pour la topologie de Zariski, telles que la restriction de* $\Phi'\Phi^{-1}$ *à* Ω_1 *soit une bijection birégulière de* Ω_1 *sur* Ω'_1.

DÉMONSTRATION. — Il est clair que $\Phi'\Phi^{-1}$ est une application régulière de Ω dans $\mathbf{R}^q$ et que $\Phi\Phi'^{-1}$ est une application régulière de Ω' dans $\mathbf{R}^q$. On a

$$a' = P_1(a_1, a_2, \ldots, a_q)\, Q_1^{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_q),$$

P_1 et Q_1 étant des polynomes, et Q_1 étant une puissance de P. L'ensemble Ω_2 des points $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ de $\mathbf{R}^q$ tels que $(PP_1)(\tau_1\lambda_1, \tau_2\lambda_2, \ldots, \tau_q\lambda_q) \neq 0$ est une partie non vide de Ω ouverte pour la topologie de Zariski. Pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) \in \Omega_2$, on a $\Phi^{-1}(\lambda) \in \Lambda_{a'}(\mathfrak{g})$, donc $\Phi'\Phi^{-1}(\lambda) \in \Omega'$. On peut écrire

$$(PP_1)(a_1, a_2, \ldots, a_q) = P_2(a'_1, a'_2, \ldots, a'_q)\, Q_2^{-1}(a'_1. a'_2, \ldots, a'_q),$$

P_2 et Q_2 étant des polynomes, Q_2 étant une puissance de P'. Si $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_q) \in \mathbf{R}^q$ est tel que $(P'P_2)(\tau'_1\lambda'_1, \tau'_2\lambda'_2, \ldots, \tau'_q\lambda'_q) \neq 0$, on a $\Phi\Phi'^{-1}(\lambda') \in \Omega_2$. Donc l'image de Ω_2 par $\Phi'\Phi^{-1}$ contient une partie non vide Ω'_1 de Ω' ouverte pour la topologie de Zariski. Il existe une partie non vide Ω_1 de Ω_2, ouverte pour la topologie de Zariski, dont l'image par $\Phi'\Phi^{-1}$ est Ω'_1. D'où le lemme.

Lemme 35. — *Soient Z un espace localement compact dénombrable à l'infini, ν une mesure $\geqq 0$ sur Z, $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien $L^2_{\mathbf{C}}(Z, \nu)$, T un élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, τ une fonction complexe sur $Z \times Z$. On suppose que, pour tout $f \in \mathfrak{H}$ et tout $f' \in \mathfrak{H}$, la fonction $(\zeta, \zeta') \to \tau(\zeta, \zeta') f(\zeta) \overline{f'(\zeta')}$ sur $Z \times Z$ soit intégrable pour $\nu \otimes \nu$, et que*

$$\iint_{Z\times Z} \tau(\zeta, \zeta') f(\zeta) \overline{f'(\zeta')}\, d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta') = (Tf \mid f').$$

Alors, la fonction $(\zeta, \zeta') \to \tau(\zeta, \zeta')$ est mesurable pour $\nu \otimes \nu$, et l'on a

$$\mathrm{tr}(T^* T) = \iint_{Z\times Z}^{*} |\tau(\zeta, \zeta')|^2 d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta').$$

Démonstration. — L'hypothèse du lemme entraîne aussitôt que τ est mesurable et même localement intégrable pour $\nu \otimes \nu$. Si τ est de carré intégrable pour $\nu \otimes \nu$, le lemme est bien connu. Il suffit donc de montrer que, si $\iint_{Z\times Z}^{*} |\tau(\zeta, \zeta')|^2 d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta') = +\infty$, on a $\mathrm{tr}(T^* T) = +\infty$. Autrement dit, supposons $\mathrm{tr}(T^* T) < +\infty$, et montrons que τ est de carré intégrable. Puisque $\mathrm{tr}(T^* T) < +\infty$, il est connu qu'il existe une fonction $(\zeta, \zeta') \to \tau_1(\zeta, \zeta')$ de carré intégrable pour $\nu \otimes \nu$, et telle que $(Tf \mid f') = \iint_{Z\times Z} \tau_1(\zeta, \zeta') f(\zeta) \overline{f'(\zeta')}\, d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta')$ quels que soient $f \in \mathfrak{H}$, $f' \in \mathfrak{H}$. Soient ρ et ρ_1 les mesures sur $Z \times Z$ définies par

$$d\rho(\zeta, \zeta') = \tau(\zeta, \zeta')\, d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta') \qquad \text{et} \qquad d\rho_1(\zeta, \zeta') = \tau_1(\zeta, \zeta')\, d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta').$$

Alors, $\int f(\zeta) \overline{f'(\zeta')}\, d\rho(\zeta, \zeta') = \int f(\zeta) \overline{f'(\zeta')}\, d\rho_1(\zeta, \zeta')$ quelles que soient les fonctions f, f' continues à support compact sur Z. Donc $\rho = \rho_1$, et par suite $\tau = \tau_1$ presque partout pour $\nu \otimes \nu$ (puisque Z est dénombrable à l'infini). Donc τ est de carré intégrable pour $\nu \otimes \nu$.

Lemme 36. — *Soient Z un espace localement compact dénombrable à l'infini, ν une mesure $\geqq 0$ sur Z, $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien, $\mathfrak{K}$ l'espace hilbertien $L^2_{\mathfrak{H}}(Z, \nu)$, T un élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{K})$. Pour tout couple $(\zeta, \zeta') \in Z \times Z$, soit $T(\zeta, \zeta') \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. On suppose que, pour tout $f \in \mathfrak{K}$ et tout $f' \in \mathfrak{K}$, la fonction $(\zeta, \zeta') \to (T(\zeta, \zeta') f(\zeta) \mid f'(\zeta'))$ sur $Z \times Z$ soit intégrable pour $\nu \otimes \nu$, et que*

$$\iint_{Z\times Z} (T(\zeta, \zeta') f(\zeta) \mid f'(\zeta'))\, d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta') = (Tf \mid f').$$

Alors, la fonction $(\zeta, \zeta') \to \mathrm{tr}(T(\zeta, \zeta')^* T(\zeta, \zeta'))$ sur $Z \times Z$ est mesurable pour $\nu \otimes \nu$, et l'on a

$$\mathrm{tr}(T^* T) = \iint_{Z\times Z}^{*} \mathrm{tr}(T(\zeta, \zeta')^* T(\zeta, \zeta'))\, d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta').$$

DÉMONSTRATION. — Soient $(\xi_j)_{j\in J}$ une base orthonormale de $\mathfrak{H}$, $(f_k)_{k\in K}$ une base orthonormale de $L^2_{\mathbf{C}}(Z, \nu)$. Pour $\xi\in\mathfrak{H}$ et $f\in L^2_{\mathbf{C}}(Z, \nu)$, notons $f\xi$ l'élément $\zeta\to f(\zeta)\xi$ de $\mathfrak{K}$. Les $f_k\xi_j$ forment une base orthonormale de $\mathfrak{K}$. Soit $\tau_{jj'}(\zeta, \zeta') = (T(\zeta, \zeta')\xi_j \mid \xi_{j'})$. Quels que soient $f\in L^2_{\mathbf{C}}(Z, \nu)$ et $f'\in L^2_{\mathbf{C}}(Z, \nu)$, la fonction $(\zeta, \zeta')\to(T(\zeta, \zeta')f(\zeta)\xi_j \mid f'(\zeta')\xi_{j'}) = \tau_{jj'}(\zeta, \zeta')f(\zeta)\overline{f'(\zeta')}$ est intégrable pour $\nu\otimes\nu$, et d'intégrale $(T(f\xi_j)\mid f'\xi_{j'})$. Pour j et j' fixés dans J, il existe un $T_{jj'}\in\mathcal{L}(L^2_{\mathbf{C}}(Z, \nu))$ et un seul tel que $(T_{jj'}f\mid f') = (T(f\xi_j)\mid f\xi_{j'})$ quels que soient $f\in L^2_{\mathbf{C}}(Z, \nu)$, $f'\in L^2_{\mathbf{C}}(Z, \nu)$. D'après le lemme 35, la fonction $\tau_{jj'}$ est mesurable pour $\nu\otimes\nu$, et l'on a

$$\Sigma_{k,k'}\,|\,(T(f_k\xi_j)\mid f_{k'}\xi_{j'})\,|^2 = \iint^{\star}_{Z\times Z} |\,\tau_{jj'}(\zeta, \zeta')\,|^2\, d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta').$$

Donc

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(T^\star T) &= \Sigma_{k,k',j,j'}\,|\,(T(f_k\xi_j)\mid f_{k'}\xi_{j'})\,|^2\\ &= \Sigma_{j,j'}\iint^{\star}_{Z\times Z} |\,\tau_{jj'}(\zeta, \zeta')\,|^2\, d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta')\\ &= \iint^{\star}_{Z\times Z} (\Sigma_{jj'}\,|\,\tau_{jj'}(\zeta, \zeta')\,|^2)\, d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta')\\ &= \iint^{\star}_{Z\times Z} \operatorname{tr}(T(\zeta, \zeta')^\star T(\zeta, \zeta'))\, d\nu(\zeta)\, d\nu(\zeta').\end{aligned}$$

LEMME 37. — *Soient Γ un groupe localement compact dénombrable à l'infini, produit semi-direct d'un sous-groupe distingué fermé Γ' et d'un sous-groupe fermé Δ; on suppose que Δ est unimodulaire et que les automorphismes de Γ' définis par les éléments de Δ conservent la mesure de Haar à gauche de Γ'. Soient $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien, U' une représentation unitaire de Γ' dans $\mathfrak{H}$, U la représentation unitaire de Γ induite par U', qui opère dans $\mathfrak{K} = L^2_{\mathfrak{H}}(\Delta)$. Soit φ une fonction complexe continue à support compact sur Γ. Pour δ, $\delta'\in\Delta$, soit $\varphi_{\delta,\delta'}$ la fonction sur Γ' définie par $\varphi_{\delta,\delta'}(\gamma') = \varphi(\delta^{-1}\gamma'\delta')$. Alors, la fonction $(\delta, \delta')\to\operatorname{tr}(U'(\varphi_{\delta,\delta'})^\star U'(\varphi_{\delta,\delta'}))$ sur $\Delta\times\Delta$ est mesurable pour $d\delta\, d\delta'$, et l'on a*

$$\operatorname{tr}(U(\varphi)^\star U(\varphi)) = \iint_{\Delta\times\Delta} \operatorname{tr}(U'(\varphi_{\delta,\delta'})^\star U'(\varphi_{\delta,\delta'}))\, d\delta\, d\delta'.$$

DÉMONSTRATION. — Soit $f\in\mathfrak{K}$. La fonction $(\delta, \delta', \gamma')\to U'(\delta\gamma'\delta^{-1})f(\delta')$, définie sur $\Delta\times\Delta\times\Gamma'$ et à valeurs dans $\mathfrak{H}$, est fortement mesurable pour $d\delta\, d\delta'\, d\gamma'$: on le voit facilement en utilisant la définition de LUSIN de la mesurabilité et le fait que U' est fortement continue. Soit f' un autre élément de $\mathfrak{K}$. Alors, la fonction scalaire $(\delta, \delta', \gamma')\to(U'(\delta\gamma'\delta^{-1})f(\delta')\mid f'(\delta))\,\varphi(\gamma'\delta^{-1}\delta')$ est mesurable pour $d\delta\, d\delta'\, d\gamma'$. Il en résulte que la fonction

$$(\delta, \delta', \gamma')\to(U'(\delta\gamma'\delta^{-1})f(\delta\delta')\mid f'(\delta))\,\varphi(\gamma'\delta') \qquad (\delta\in\Delta,\ \delta'\in\Delta,\ \gamma'\in\Gamma')$$

est mesurable pour $d\delta d\delta' d\gamma'$, donc que la fonction

$$(\delta, \gamma) \to ((U(\gamma)f)(\delta) \,|\, f'(\delta))\varphi(\gamma) \qquad (\delta \in \Delta, \gamma \in \Gamma)$$

est mesurable pour $d\delta d\gamma$: on a en effet $(U(\gamma)f)(\delta) = U'(\delta\gamma'\delta^{-1})f(\delta\delta')$ si $\gamma = \gamma'\delta'$, par définition des représentations induites. Donc

$$\begin{aligned}
&\int^{\star} |((U(\gamma)f)(\delta) \,|\, f'(\delta))\varphi(\gamma)| \, d\delta d\gamma \\
&= \int^{\star} |\varphi(\gamma)| \, d\gamma \int^{\star} |((U(\gamma)f)(\delta) \,|\, f'(\delta))| \, d\delta \\
&\leqq \int^{\star} \| U(\gamma)f \|_2 . \| f' \|_2 . |\varphi(\gamma)| \, d\gamma = \| f \|_2 . \| f' \|_2 \int |\varphi(\gamma)| \, d\gamma < +\infty.
\end{aligned}$$

On voit donc que la fonction $(\delta, \gamma) \to ((U(\gamma)f)(\delta) \,|\, f'(\delta))\varphi(\gamma)$ est intégrable pour $d\delta d\gamma$. Son intégrale est égale à

$$\int \varphi(\gamma) d\gamma \int ((U(\gamma)f)(\delta) \,|\, f'(\delta)) d\delta = \int \varphi(\gamma)(U(\gamma)f \,|\, f') d\gamma = (U(\varphi)f \,|\, f').$$

Ce qui précède montre que la fonction

$$(\delta, \delta', \gamma') \to (U'(\delta\gamma'\delta^{-1})f(\delta\delta') \,|\, f'(\delta))\varphi(\gamma'\delta')$$

sur $\Delta \times \Delta \times \Gamma'$ est intégrable pour $d\delta d\delta' d\gamma'$ et que

$$(U(\varphi)f \,|\, f') = \int (U'(\delta\gamma'\delta^{-1})f(\delta\delta') \,|\, f'(\delta))\varphi(\gamma'\delta') \, d\delta d\delta' d\gamma'.$$

Il en résulte, utilisant les substitutions $\gamma' \to \delta^{-1}\gamma'\delta$ et $\delta' \to \delta^{-1}\delta'$, que la fonction

$$(\delta, \delta', \gamma') \to (U'(\gamma')f(\delta') \,|\, f'(\delta))\varphi(\delta^{-1}\gamma'\delta') = (U'(\gamma')f(\delta') \,|\, f'(\delta))\varphi_{\delta,\delta'}(\gamma')$$

sur $\Delta \times \Delta \times \Gamma'$ est intégrable pour $d\delta d\delta' d\gamma'$ et d'intégrale $(U(\varphi)f \,|\, f')$. Donc la fonction

$$(\delta, \delta') \to \int (U'(\gamma')f(\delta') \,|\, f'(\delta))\varphi_{\delta,\delta'}(\gamma') d\gamma' = (U'(\varphi_{\delta,\delta'})f(\delta') \,|\, f'(\delta))$$

sur $\Delta \times \Delta$ est intégrable pour $d\delta d\delta'$ et d'intégrale $(U(\varphi)f \,|\, f')$. Il suffit alors d'appliquer le lemme **36**.

Lemme **38**. — *Adoptons les notations du théorème* **3**. *Soit $M^1(\Gamma)$ l'espace des mesures bornées sur Γ, muni de la topologie définie par la norme. Munissons $\Lambda_a(\mathfrak{g})$ d'une topologie rendant continues les applications $\chi \to \chi(b)$ pour tout $b \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Alors la fonction $(\chi, \mu) \to \mathrm{tr}(U_\chi(\mu)^\star U_\chi(\mu))$ sur $\Lambda_a(\mathfrak{g}) \times M^1(\Gamma)$ est semi-continue inférieurement.*

DÉMONSTRATION. — Soient $\chi_0 \in \Lambda_a(\mathfrak{g})$, $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$, et $\xi \in \mathfrak{H}$. On a

$$U_\chi(\mu)\xi - U_{\chi_0}(\mu_0)\xi = (U_\chi(\mu) - U_\chi(\mu_0))\xi + (U_\chi(\mu_0) - U_{\chi_0}(\mu_0))\xi,$$

donc

$$\| U_\chi(\mu)\xi - U_{\chi_0}(\mu_0)\xi \| \leqq \| \mu - \mu_0 \| \cdot \| \xi \| + \| (U_\chi(\mu_0) - U_{\chi_0}(\mu_0))\xi \|.$$

Quand $\chi \to \chi_0$ et $\mu \to \mu_0$, $\| \mu - \mu_0 \| \to 0$, et $\| (U_\chi(\mu_0) - U_{\chi_0}(\mu_0))\xi \| \to 0$ d'après le théorème 3. Donc l'application $(\chi, \mu) \to \| U_\chi(\mu)\xi \|^2$ est continue (pour les topologies envisagées dans le lemme). Alors la fonction $(\chi, \mu) \to \mathrm{tr}(U_\chi(\mu)^* U_\chi(\mu))$, enveloppe supérieure de fonctions continues, est semi-continue inférieurement.

LEMME 39. — *Soient Γ un groupe localement compact, Ω un espace localement compact, ν une mesure $\geqq 0$ sur Ω. Pour tout $\lambda \in \Omega$, soit U_λ une représentation unitaire de Γ. On suppose que, pour toute fonction complexe f_1 sur Γ continue et à support compact, la fonction $\lambda \to \mathrm{tr}(U_\lambda(f_1)^* U_\lambda(f_1))$ sur Ω est ν-intégrable et que*

$$\int_\Gamma |f_1(\gamma)|^2 d\gamma = \int_\Omega \mathrm{tr}(U_\lambda(f_1)^* U_\lambda(f_1))\, d\nu(\lambda).$$

Alors, pour toute $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, la fonction $\lambda \to \mathrm{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))$ sur Ω est ν-intégrable, et $\int_\Gamma |f(\gamma)|^2 d\gamma = \int_\Omega \mathrm{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))\, d\nu(\lambda)$.

DÉMONSTRATION. — Soit $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$. Il existe une suite $(f_1, f_2, \ldots)$ de fonctions complexes continues à support compact sur Γ telle que $g_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ tende vers f dans $L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ et dans $L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, et telle que $\| f_j \|_2 \leqq 2^{-j}$. Posons $\varphi(\lambda) = \Sigma_1^\infty (\mathrm{tr}(U_\lambda(f_n)^* U_\lambda(f_n)))^{\frac{1}{2}}$. On a

$$\left(\int_\Omega^* \varphi(\lambda)^2 d\nu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \leqq \Sigma_1^\infty \left(\int_\Omega^* \mathrm{tr}(U_\lambda(f_n)^* U_\lambda(f_n))\, d\nu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \leqq \Sigma_1^\infty \| f_n \|_2 < +\infty.$$

Donc $\varphi(\lambda) < +\infty$ sauf sur un ensemble ν-négligeable N. Pour $\lambda \notin N$, $U_\lambda(g_n)$ converge au sens de la norme d'Hilbert-Schmidt. Par ailleurs, $\| U_\lambda(f) - U_\lambda(g_n) \| \leqq \| f - g_n \|_1 \to 0$, donc $U_\lambda(f)$ est un opérateur d'Hilbert-Schmidt et $U_\lambda(g_n)$ converge vers $U_\lambda(f)$ au sens de la norme d'Hilbert-Schmidt. En outre,

$$(\mathrm{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f)))^{\frac{1}{2}} \leqq \Sigma (\mathrm{tr}(U_\lambda(f_n)^* U_\lambda(f_n)))^{\frac{1}{2}} = \varphi(\lambda),$$

donc $\int^* \mathrm{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))\, d\nu(\lambda) < +\infty$. Comme $\mathrm{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))$ est limite, pour $\lambda \notin N$, de $\mathrm{tr}(U_\lambda(g_n)^* U_\lambda(g_n))$, donc fonction ν-mesurable de λ, on voit que la fonction $\lambda \to \mathrm{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))$ sur Ω est ν-intégrable. Enfin,

$$(\mathrm{tr}(U_\lambda(f) - U_\lambda(g_n))^* (U_\lambda(f) - U_\lambda(g_n)))^{\frac{1}{2}} \leqq \Sigma_{n+1}^\infty (\mathrm{tr}(U_\lambda(f_m)^* U_\lambda(f_m)))^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$\int_\Omega (\mathrm{tr}(U_\lambda(f) - U_\lambda(g_n))^*(U_\lambda(f) - U_\lambda(g_n)))^{\frac{1}{2}} d\nu(\lambda) \leq \Sigma_{n+1}^\infty 2^{-m} = 2^{-n};$$

donc $\int_\Omega \mathrm{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))\, d\nu(\lambda)$ est la limite de

$$\int_\Omega \mathrm{tr}(U_\lambda(g_n)^* U_\lambda(g_n))\, d\nu(\lambda) = \|g_n\|_2^2,$$

c'est-à-dire $\|f\|_2^2$. D'où le lemme.

Dans le théorème suivant, les parties (i) à (vi) ne font, essentiellement, que reformuler les théorèmes 1, 2 et 3. Par contre, les énoncés (vii), (viii), (ix) sont nouveaux : ils donnent la « formule de Plancherel » pour le groupe Γ et la décomposition de la double représentation régulière de Γ en doubles représentations unitaires irréductibles.

Théorème 4. — *Soient Γ un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Définissons $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{A}$ comme au théorème 2. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_q$ des éléments symétriques ou antisymétriques de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, algébriquement indépendants, engendrant le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$; posons $\tau_j = 1$ si a_j est symétrique, $\tau_j = i$ si a_j est antisymétrique. Il existe une partie non vide Ω de $\mathbf{R}^q$, ouverte pour la topologie de Zariski, et, pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) \in \Omega$, une représentation unitaire irréductible U_λ de Γ dans $\mathfrak{H}$ dont le caractère prend les valeurs $\tau_1\lambda_1$ en a_1, $\tau_2\lambda_2$ en $a_2, \ldots, \tau_q\lambda_q$ en a_q, avec les propriétés suivantes :*

(i) *Pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) \in \Omega$, toute représentation unitaire irréductible dont le caractère prend les valeurs $\tau_1\lambda_1$ en a_1, $\tau_2\lambda_2$ en $a_2, \ldots, \tau_q\lambda_q$ en a_q, est équivalente à U_λ.*

(ii) *Pour tout $\lambda \in \Omega$, le sous-espace des éléments de $\mathfrak{H}$ indéfiniment différentiables pour U_λ est $\mathfrak{H}_1$.*

(iii) *Pour tout $\lambda \in \Omega$, l'algèbre des opérateurs $U_\lambda(b)$, où b parcourt $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, est $\mathfrak{A}$.*

(iv) *Pour tout b fixé dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $U_\lambda(b)$ est une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathfrak{A}$ indépendants de λ, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de λ régulières sur Ω.*

(v) *Pour toute mesure bornée μ sur Γ, l'application $\lambda \to U_\lambda(\mu)$ est fortement continue sur Ω.*

(vi) *Pour toute $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, la fonction $\lambda \to \|U_\lambda(f)\|$ tend vers zéro à l'infini sur Ω.*

(vii) *Pour toute $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, la fonction ≥ 0 finie ou infinie $\lambda \to \mathrm{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))$ sur Ω est semi-continue inférieurement. Il existe une* *fonction rationnelle réelle F sur Ω et (à la multiplication près par -1) une seule, régulière sur Ω, telle qu'on ait, pour toute $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$,*

$$(10) \qquad \int_\Gamma |f(\gamma)|^2 d\gamma = \int_\Omega \operatorname{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f)) \, |F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)| \, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_q.$$

(viii) *Soit $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}' \otimes \mathfrak{H}$ où $\mathfrak{H}'$ désigne l'espace hilbertien conjugué de $\mathfrak{H}$. Soit ν la mesure ≥ 0 sur Ω définie par $d\nu(\lambda) = |F(\lambda)| \, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_q$. Il existe un isomorphisme Φ et un seul de l'espace hilbertien $L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ sur l'espace hilbertien $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$ qui transforme toute $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ en la fonction $\lambda \to U_\lambda(f)$. [Pour presque tout $\lambda \in \Omega$, $U_\lambda(f)$ est, d'après* (10), *un opérateur d'Hilbert-Schmidt dans $\mathfrak{H}$, donc s'identifie canoniquement à un élément de $\mathfrak{K}$.]*

(ix) *Soient $f_1 \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, $U(f_1)$ et $V(f_1)$ les opérateurs de convolution à gauche et à droite définis par f_1 dans $L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$. Alors, Φ transforme $U(f_1)$ [resp. $V(f_1)$] en l'opérateur de $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$ qui est défini par le champ d'opérateurs $\lambda \to 1 \otimes U_\lambda(f_1)$ [resp. $\lambda \to U_\lambda(f_1)^* \otimes 1$].*

DÉMONSTRATION. — Nous supposerons le théorème établi pour les groupes nilpotents simplement connexes de dimension $< \dim \Gamma$. Soient $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, Γ' le sous-groupe correspondant de Γ, x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$, Δ le sous-groupe de Γ correspondant à la sous-algèbre $\mathbf{R}x$ de $\mathfrak{g}$. Le groupe Γ est produit semi-direct de Δ et de Γ'. Nous identifierons souvent $\mathbf{R}$ à Δ par l'application $\mu \to \delta = \exp \mu x$, et nous supposerons la mesure de Haar sur Δ choisie de manière que $d\delta = d\mu$. Les mesures de Haar $d\gamma$ et $d\gamma'$ de Γ et Γ' peuvent être choisies de manière que $d\gamma = d\delta \, d\gamma'$ si $\gamma = \delta\gamma'$.

Nous diviserons la démonstration en plusieurs parties.

1° Dans les parties 1° à 3°, nous allons essentiellement prouver l'existence de Ω, des U_λ et de F satisfaisant à (10) (mais l'unicité de F ne sera établie que dans la partie 5°). Dans la partie 1°, nous ferons les hypothèses suivantes : 1° $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$; 2° $a_1, a_2, \ldots, a_q$ vérifient les propriétés du lemme 25; nous introduisons les notations a, b, c de ce lemme. Soit P un polynome en $(q-1)$ variables à coefficients réels tel que $a = P(a_1, a_2, \ldots, a_{q-1})$. Soient Ω_1 l'ensemble des

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) \in \mathbf{R}^q$$

tels que $P(\tau_1\lambda_1, \tau_2\lambda_2, \ldots, \tau_{q-1}\lambda_{q-1}) \neq 0$ et Ω'_1 l'ensemble des

$$\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}) \in \mathbf{R}^{q-1}$$

tels que $P(\tau_1\lambda_1, \tau_2\lambda_2, \ldots, \tau_{q-1}\lambda_{q-1}) \neq 0$, de sorte que $\Omega_1 = \Omega'_1 \times \mathbf{R}$. Pour tout $\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}) \in \Omega'_1$, soient $\chi'_{\lambda'}$ le caractère hermitien de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ qui prend les valeurs $\tau_1\lambda_1$ en a_1, $\tau_2\lambda_2$ en a_2, ..., $\tau_{q-1}\lambda_{q-1}$ en a_{q-1} (*cf.* lemme 15), et $U'_{\lambda'}$ la représentation unitaire de Γ' (bien déterminée à une équivalence près) de caractère $\chi'_{\lambda'}$. Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) \in \Omega_1$, soient χ_λ le caractère hermitien de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ qui prend les valeurs $\tau_1\lambda_1$ en a_1, $\tau_2\lambda_2$ en a_2, ..., $\tau_q\lambda_q$ en a_q, et U_λ la représentation unitaire de Γ (bien déterminée à une équivalence près) de caractère χ_λ ; on peut supposer que $U_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)}$ prolonge $U'_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})}$. Posons $b = R_1(a_1, a_2, \ldots, a_{q-1})$, où R_1 est une fraction rationnelle à coefficients réels dont le dénominateur est une puissance de P; pour tout $\lambda' \in \Omega'_1$, on a

$$\chi'_{\lambda'}(b) = R_1(\tau_1\lambda_1, \tau_2\lambda_2, \ldots, \tau_{q-1}\lambda_{q-1}) = -i\tau_q R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}),$$

où R est une fraction rationnelle régulière sur Ω'_1; la fraction R ne prend que des valeurs réelles pour les valeurs réelles des variables, d'après le lemme 4, donc peut être supposée à coefficients réels; et elle est non nulle sur Ω'_1 d'après la propriété (vi) du lemme 25.

Reprenons la partie 2° de la démonstration du théorème 2. On voit qu'en multipliant a par un élément convenable de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ (ce qui diminue Ω_1 et Ω'_1), on peut supposer que les représentations $U'_{\lambda'}$ et U_λ possèdent les propriétés du théorème 2, donc du théorème 3. Soit $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien où opèrent toutes ces représentations. Notons que, pour tout $c \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, la fonction $\lambda \to \chi_\lambda(c)$ est rationnelle régulière sur Ω_1, donc que la topologie naturelle sur Ω_1 rend continue cette fonction; alors, d'après le lemme 38, pour toute $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, la fonction $\lambda \to \operatorname{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))$ sur Ω_1 est semi-continue inférieurement; de même, pour toute $f' \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma')$, la fonction $\lambda' \to \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f')^* U'_{\lambda'}(f'))$ sur Ω'_1 est semi-continue inférieurement.

D'après l'hypothèse de récurrence, et compte tenu du fait qu'une partie de $\mathbf{R}^{q-1}$ fermée pour la topologie de Zariski et distincte de $\mathbf{R}^{q-1}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue, il existe une fonction rationnelle réelle F' régulière sur une partie non vide Ω' de Ω'_1 ouverte pour la topologie de Zariski, telle que, pour toute $f' \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma') \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma')$, on ait

$$(11) \qquad \int_{\Gamma'} |f'(\gamma')|^2 \, d\gamma'$$
$$= \int_{\Omega'} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f')^* U'_{\lambda'}(f')) \, |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})| \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{q-1}$$

Posons $\Omega = \Omega' \times \mathbf{R} \subset \Omega_1$. Nous allons montrer que, si $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, on a

$$(12) \qquad \int_{\Gamma} |f(\gamma)|^2 \, d\gamma$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \operatorname{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f)) \, |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})$$
$$\times R^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})| \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_q.$$

D'après le lemme 39, il suffit d'envisager le cas où f est continue à support compact. Soient $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)\in\Omega$, $\lambda'=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})\in\Omega'$, et $\xi\in\mathfrak{H}$. La fonction $\gamma\to f(\gamma)\,U_\lambda(\gamma)\xi$ sur Γ est continue à support compact sur Γ; pour $\delta\in\Delta$, notons f_δ la fonction continue à support compact sur Γ' définie par $f_\delta(\gamma')=f(\delta\gamma')$; on a

$$\begin{aligned}
U_\lambda(f)\xi &= \int_\Gamma f(\gamma)\,U_\lambda(\gamma)\xi\,d\gamma = \iint_{\Gamma'\times\Delta} f(\delta\gamma')\,U_\lambda(\delta)\,U_\lambda(\gamma')\xi\,d\delta\,d\gamma' \\
&= \int_\Delta U_\lambda(\delta)\,d\delta\int_{\Gamma'} f(\delta\gamma')\,U_\lambda(\gamma')\xi\,d\gamma' \\
&= \int_\Delta U_\lambda(\delta)\,d\delta\int_{\Gamma'} f_\delta(\gamma')\,U'_{\lambda'}(\gamma')\xi\,d\gamma' = \int_\Delta U_\lambda(\delta)\,U'_{\lambda'}(f_\delta)\xi\,d\delta.
\end{aligned}$$

Soient $\lambda^0=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}, 0)\in\Omega$, $\mu\in\mathbf{R}$, et $\delta_\mu=\exp\mu x$. D'après la formule (6) du chapitre VI, on a

$$\begin{aligned}
U_\lambda(\delta_\mu) &= \left(\exp\frac{\mu\chi_\lambda(a_q)}{\chi_\lambda(b)}\right)U_{\lambda^0}(\delta_\mu) = \left(\exp\frac{\tau_q\lambda_q\mu}{-i\tau_q R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})}\right)U_{\lambda^0}(\delta_\mu) \\
&= (\exp i\mu\lambda_q R^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}))\,U_{\lambda^0}(\delta_\mu).
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\xi'\in\mathfrak{H}$,

$$\begin{aligned}
(U_\lambda(f)\xi\,|\,\xi') &= \int_\Delta (\exp i\mu\lambda_q R^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}))\,(U_{\lambda^0}(\delta_\mu)\,U'_{\lambda'}(f_{\delta_\mu})\xi\,|\,\xi')\,d\delta_\mu \\
&= \int_{\mathbf{R}} (\exp i\mu'\lambda_q)\,(U_{\lambda^0}(\exp\mu' R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})x) \\
&\qquad \times U'_{\lambda'}(f_{\exp\mu' R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})x})\xi\,|\,\xi')\,R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})\,d\mu'.
\end{aligned}$$

La démonstration précédente prouve en outre que la fonction

$$\delta\to(U_\lambda(\delta)\,U'_{\lambda'}(f_\delta)\xi\,|\,\xi')$$

est intégrable pour $d\delta$, donc que la fonction

$$\mu'\to(U_{\lambda^0}(\exp\mu' R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})x)\,U'_{\lambda'}(f_{\exp\mu' R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})x})\xi\,|\,\xi')$$

est intégrable pour la mesure de Lebesgue. D'après la formule de Plancherel ordinaire, on a donc

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}} |(U_\lambda(f)\xi\,|\,\xi')|^2\,d\lambda_q \\
&\quad = 2\pi R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})^2\int_{\mathbf{R}} |(U_{\lambda^0}(\exp\mu' R(\lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1})x) \\
&\qquad\qquad \times U'_{\lambda'}(f_{\exp\mu' R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})x})\xi\,|\,\xi')|^2\,d\mu' \\
&\quad = 2\pi\,|R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})|\int_{\mathbf{R}} |(U_{\lambda^0}(\exp\mu x)\,U'_{\lambda'}(f_{\exp\mu x})\xi\,|\,\xi')|^2\,d\mu.
\end{aligned}$$

Écrivons cette formule pour tous les ξ et tous les ξ' d'une base orthonormale de $\mathfrak{H}$. En ajoutant, on obtient

$$(13)\quad \begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} &\operatorname{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))\,d\lambda_q \\ &= 2\pi\,|R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})| \\ &\quad\times \int_{\mathbf{R}} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f_{\exp \mu x})^* U_{\lambda^0}(\exp \mu x)^* U_{\lambda^0}(\exp \mu x)\, U'_{\lambda'}(f_{\exp \mu x}))\,d\mu \\ &= 2\pi\,|R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})| \int_{\Delta} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f_\delta)^* U'_{\lambda'}(f_\delta))\,d\delta.\end{aligned}$$

Compte tenu de (11), on a d'autre part

$$(14)\quad \begin{aligned}\int_{\Gamma} &|f(\gamma)|^2\,d\gamma \\ &= \int_{\Delta} d\delta \int_{\Gamma'} |f_\delta(\gamma')|^2\,d\gamma' \\ &= \int_{\Delta} d\delta \int_{\Omega'} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f_\delta)^* U'_{\lambda'}(f_\delta))\,|F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})|\,d\lambda_1\,d\lambda_2 \ldots d\lambda_{q-1}.\end{aligned}$$

Comme f est continue à support compact, le lemme **38** entraîne que la fonction $(\lambda', \delta) \to \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f_\delta)^* U'_{\lambda'}(f_\delta))$ sur $\Omega' \times \Delta$ est semi-continue inférieurement. Alors (14) entraîne

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} &|f(\gamma)|^2\,d\gamma \\ &= \int_{\Omega'} |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})|\,d\lambda_1\,d\lambda_2 \ldots d\lambda_{q-1} \int_{\Delta} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f_\delta)^* U'_{\lambda'}(f_\delta))\,d\delta\end{aligned}$$

ou, compte tenu de (13),

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} &|f(\gamma)|^2\,d\gamma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega'} |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}) R^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1})|\,d\lambda_1\,d\lambda_2 \ldots d\lambda_{q-1} \\ &\quad\times \int_{\mathbf{R}} \operatorname{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))\,d\lambda_q.\end{aligned}$$

Comme la fonction $\lambda \to \operatorname{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))$ sur $\Omega = \Omega' \times \mathbf{R}$ est semi-continue inférieurement, on a bien prouvé (12).

2° Dans la partie 2°, nous ferons les hypothèses suivantes : 1° $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$; 2° il existe $a_{q+1} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ et $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ tels que $a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}, a$ possèdent les propriétés du lemme **26**; nous introduisons la notation b de ce lemme. Soit P un polynome en q variables à coefficients réels tel que $a = P(a_1, a_2, \ldots, a_q)$. Soient Ω_1 l'ensemble des $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) \in \mathbf{R}^q$ tels que $P(\tau_1\lambda_1, \tau_2\lambda_2, \ldots, \tau_q\lambda_q) \neq 0$, et Ω'_1 l'ensemble des $\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1}) \in \mathbf{R}^{q+1}$ tels que $P(\tau_1\lambda_1, \tau_2\lambda_2, \ldots, \tau_q\lambda_q) \neq 0$, de sorte que $\Omega'_1 = \Omega_1 \times \mathbf{R}$. Pour tout $\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1}) \in \Omega'_1$, soient $\chi'_{\lambda'}$ le caractère hermitien de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ qui prend les valeurs $\tau_1\lambda_1$ en a_1, $\tau_2\lambda_2$ en a_2, $\ldots$, $\tau_{q+1}\lambda_{q+1}$ en a_{q+1} (on pose $\tau_{q+1} = 1$ si a_{q+1} est symétrique, $\tau_{q+1} = i$ si a_{q+1} est antisymétrique), et $U'_{\lambda'}$ la représentation unitaire de Γ' (bien déterminée à une équivalence près) de caractère $\chi'_{\lambda'}$. Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) \in \Omega_1$, soient χ_λ le caractère hermitien de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ qui prend les valeurs $\tau_1\lambda_1$ en a_1, $\tau_2\lambda_2$ en a_2, $\ldots$, $\tau_q\lambda_q$ en a_q, et U_λ la représentation unitaire de Γ (bien déterminée à une équivalence près) de caractère χ_λ; quel que soit λ_{q+1}, $U_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)}$ est équivalente à la représentation unitaire induite par $U'_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1})}$. Posons $b = R_1(a_1, a_2, \ldots, a_q)$, où R_1 est une fraction rationnelle à coefficients réels dont le dénominateur est une puissance de P; pour tout $\lambda \in \Omega_1$, on a

$$\chi_\lambda(b) = R_1(\tau_1\lambda_1, \tau_2\lambda_2, \ldots, \tau_q\lambda_q) = \tau_{q+1} R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q),$$

où R est une fraction rationnelle régulière sur Ω_1; la fraction R ne prend que des valeurs réelles pour les valeurs réelles des variables, donc peut être supposée à coefficients réels; et elle est non nulle sur Ω_1 d'après la propriété (vi) du lemme 26.

Reprenons la partie 3° de la démonstration du théorème 2. On voit qu'en multipliant a par un élément convenable de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ (ce qui diminue Ω_1 et Ω'_1), on peut supposer que les représentations $U'_{\lambda'}$ et U_λ possèdent les propriétés du théorème 2, donc du théorème 3. D'après le lemme 38, pour $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ et $f' \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma')$, les fonctions $\lambda \to \mathrm{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))$ et $\lambda' \to \mathrm{tr}(U'_{\lambda'}(f')^* U'_{\lambda'}(f'))$ sur Ω_1 et Ω'_1 sont semi-continues inférieurement.

D'après l'hypothèse de récurrence, et compte tenu du fait qu'une partie de $\mathbf{R}^{q+1}$ fermée pour la topologie de Zariski et distincte de $\mathbf{R}^{q+1}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue, il existe une fonction rationnelle réelle F' régulière sur une partie non vide Ω' de Ω'_1 ouverte pour la topologie de Zariski, telle que, pour toute $f' \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma') \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma')$, on ait

$$(15) \qquad \int_{\Gamma'} |f'(\gamma')|^2 \, d\gamma' = \int_{\Omega'} \mathrm{tr}(U'_{\lambda'}(f')^* U'_{\lambda'}(f')) \, |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1})| \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{q+1}.$$

Nous allons montrer d'abord que F' est indépendante de la variable λ_{q+1}. Soit $\delta = \exp \mu x \in \Delta$. Considérons l'automorphisme $\gamma' \to \delta\gamma'\delta^{-1}$ de Γ'. Il définit un automorphisme A_μ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$ qui laisse fixes les points de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ et transforme a_{q+1} en $a_{q+1} + \mu b$. L'automorphisme A_μ transforme $\chi'_{\lambda'}$ en le caractère $A_\mu(\chi'_{\lambda'})$ qui prend les valeurs $\tau_1\lambda_1$ en a_1, $\ldots$, $\tau_q\lambda_q$ en a_q, $\tau_{q+1}\lambda_{q+1} - \mu\chi'_{\lambda'}(b)$ en a_{q+1}. On a

$$\tau_{q+1}\lambda_{q+1} - \mu\chi'_{\lambda'}(b) = \tau_{q+1}(\lambda_{q+1} - \mu R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)).$$

Notons encore A_μ la bijection

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1}) \to (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, \lambda_{q+1} - \mu R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q))$$

de Ω'_1 sur Ω'_1 ; elle est régulière et son jacobien est égal à 1. Pour $f' \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma') \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma')$, soit $A_\mu f'$ la fonction sur Γ' transformée de f' par l'automorphisme $\gamma' \to \delta\gamma'\delta^{-1}$ de Γ'. Par transport de structure, l'opérateur $U'_{\lambda'}(A_\mu f')$ est unitairement équivalent à l'opérateur $U'_{A_\mu\lambda'}(f')$, donc

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma'} |(A_\mu f')(\gamma')|^2 \, d\gamma' \\
&= \int_{\Omega'} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(A_\mu f')^* U'_{\lambda'}(A_\mu f'))\, |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1})|\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{q+1} \\
&= \int_{\Omega'} \operatorname{tr}(U'_{A_\mu\lambda'}(f')^* U'_{A_\mu\lambda'}(f'))\, |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1})|\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{q+1} \\
&= \int_{\Omega'} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f')^* U'_{\lambda'}(f'))\, |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, \\
&\qquad\qquad \lambda_{q+1} + \mu R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q))|\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{q+1}.
\end{aligned}$$

Enfin, comme Γ est nilpotent, les automorphismes intérieurs de Γ induisent dans Γ' des automorphismes qui conservent la mesure de Haar de Γ'. On a donc

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma'} |f'(\gamma')|^2 \, d\gamma' \\
&= \int_{\Omega'} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f')^* U'_{\lambda'}(f'))\, |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, \lambda_{q+1} \\
&\qquad\qquad + \mu R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q))|\, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{q+1}.
\end{aligned}$$

D'après la propriété d'unicité contenue dans l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, \lambda_{q+1}) = \pm F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, \lambda_{q+1} + \mu R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q))$$

quels que soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1}$. Or R n'est pas identiquement nulle, donc F'^2 est indépendante de λ_{q+1}, donc F' est indépendante de λ_{q+1}. Par abus de notation, nous noterons $F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ la valeur de F' en un point $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1})$.

Utilisant le fait qu'une partie de $\mathbf{R}^{q+1}$ fermée pour la topologie de Zariski et distincte de $\mathbf{R}^{q+1}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue, on voit que Ω' peut être supposé stable par les translations de vecteurs $(0, 0, \ldots, 0, \lambda_{q+1})$. On a alors $\Omega' = \Omega \times \mathbf{R}$, où Ω est une partie de Ω_1

ouverte pour la topologie de Zariski. Ceci posé, nous allons montrer que, si $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, on a

$$(16)\quad \int_\Gamma |f(\gamma)|^2\, d\gamma$$
$$= \int_\Omega \operatorname{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))\, |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)\, R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)|\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_q.$$

D'après le lemme 39, il suffit d'envisager le cas où f est continue à support compact. Pour $\delta \in \Delta$, notons f_δ, comme plus haut, la fonction continue à support compact sur Γ' définie par $f_\delta(\gamma') = f(\delta\gamma')$. On a

$$\int_\Gamma |f(\gamma)|^2\, d\gamma = \int_\Delta d\delta \int_{\Gamma'} |f_\delta(\gamma')|^2\, d\gamma' = \int_\Delta d\delta \int_{\Omega'} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f_\delta)^* U'_{\lambda'}(f_\delta))$$
$$\times\, |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)|\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{q+1}.$$

Comme dans la partie 1° de la démonstration, ceci peut s'écrire

$$(17)\quad \int_\Gamma |f(\gamma)|^2\, d\gamma = \int_\Omega |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)|\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_q$$
$$\times \iint_{\mathbf{R}\times\Delta} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f_\delta)^* U'_{\lambda'}(f_\delta))'\, d\lambda_{q+1}\, d\delta.$$

Dans l'intégrale double, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont fixés, faisons le changement de variable :

$$\lambda_{q+1} = -\mu R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q).$$

Posons $\lambda'^0 = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, 0)$. D'après ce qu'on a vu plus haut,

$$\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1}) = A_\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, 0) = A_\mu(\lambda'^0).$$

Donc

$$\iint_{\mathbf{R}\times\Delta} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f_\delta)^* U'_{\lambda'}(f_\delta))\, d\lambda_{q+1}\, d\delta$$
$$= \iint_{\mathbf{R}\times\Delta} \operatorname{tr}(U'_{A_\mu(\lambda'^0)}(f_\delta)^* U'_{A_\mu(\lambda'^0)}(f_\delta))\, |R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)|\, d\mu\, d\delta$$
$$= |R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)| \iint_{\mathbf{R}\times\Delta} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'^0}(A_\mu f_\delta)^* U'_{\lambda'^0}(A_\mu f_\delta))\, d\mu\, d\delta.$$

Posant $\exp \mu x = \delta'$, et utilisant les notations du lemme 37, on a

$$(A_\mu f_\delta)(\gamma') = f_\delta(\delta'\gamma'\delta'^{-1}) = f(\delta\delta'\gamma'\delta'^{-1}) = f_{\delta'^{-1}\delta^{-1}, \delta'^{-1}}(\gamma').$$

Donc

$$\iint_{\mathbf{R}\times\Delta} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f_\delta)^* U'_{\lambda'}(f_\delta))\, d\lambda_{q+1}\, d\delta$$
$$= |R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)| \iint_{\Delta\times\Delta} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'^0}(f_{\delta'^{-1}\delta^{-1}, \delta'^{-1}})^* U'_{\lambda'^0}(f_{\delta'^{-1}\delta^{-1}, \delta'^{-1}}))\, d\delta'\, d\delta$$
$$= |R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)| \iint_{\Delta\times\Delta} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'^0}(f_{\delta, \delta'})^* U'_{\lambda'^0}(f_{\delta, \delta'}))\, d\delta'\, d\delta.$$

Utilisant le lemme **37**, on obtient [en posant $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$]

$$\iint_{\mathbf{R}\times\Delta} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f_\delta)^* U'_{\lambda'}(f_\delta))\, d\lambda_{q+1}\, d\delta = |R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)| \operatorname{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f)).$$

La formule (17) donne alors la formule (16).

3° Abandonnons les notations introduites dans 1° et 2°, mais conservons celles du début de la démonstration. D'après le 1° et le 2°, il existe : 1° des éléments $a'_1, a'_2, \ldots, a'_q$ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, symétriques ou antisymétriques, algébriquement indépendants, engendrant le corps des fractions de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$; on pose $\tau'_j = 1$ si a'_j est symétrique, $\tau'_j = i$ si a_j est antisymétrique; 2° un élément $a' = P'(a'_1, a'_2, \ldots, a'_q)$, affine relativement à $a'_1, a'_2, \ldots, a'_q$, et classifiant pour Γ; soit Ω'_1 l'ensemble des points $\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ de $\mathbf{R}^q$ tels que $P(\tau'_1\lambda_1, \tau'_2\lambda_2, \ldots, \tau'_q\lambda_q) \neq 0$; 3° pour tout $\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) \in \Omega'_1$, une représentation unitaire irréductible $U'_{\lambda'}$ de Γ dont le caractère prend les valeurs $\tau'_1\lambda_1$ en a'_1, $\tau'_2\lambda_2$ en a'_2, $\ldots$, $\tau'_q\lambda_q$ en a'_q, de manière que les propriétés du théorème **2**, donc du théorème **3**, soient vérifiées; 4° une fraction rationnelle réelle F' régulière sur Ω'_1 telle que, pour toute $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, on ait

$$(18) \qquad \int_\Gamma |f(\gamma)|^2\, d\gamma = \int_{\Omega'_1} \operatorname{tr}(U'_{\lambda'}(f)^* U'_{\lambda'}(f))\, |F'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)|\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_q.$$

D'autre part, on s'est donné dans l'énoncé du théorème des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_q$ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Soient $a = P(a_1, a_2, \ldots, a_q)$ un élément affine relativement à $a_1, a_2, \ldots, a_q$, Ω_1 l'ensemble des points $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ de $\mathbf{R}^q$ tels que $P(\tau_1\lambda_1, \tau_2\lambda_2, \ldots, \tau_q\lambda_q) \neq 0$, Φ la bijection

$$\chi \to (\tau_1^{-1}\chi(a_1), \tau_2^{-1}\chi(a_2), \ldots, \tau_q^{-1}\chi(a_q))$$

de $\Lambda_a(\mathfrak{g})$ sur Ω_1. Soit Φ' la bijection

$$\chi \to (\tau_1'^{-1}\chi(a'_1), \tau_2'^{-1}\chi(a'_2), \ldots, \tau_q'^{-1}\chi(a'_q))$$

de $\Lambda_{a'}(\mathfrak{g})$ sur Ω'_1. Alors (lemme **34**) il existe une partie non vide Ω de Ω_1 ouverte pour la topologie de Zariski, et une partie non vide Ω' de Ω'_1 ouverte pour la topologie de Zariski, telles que la restriction Ψ de $\Phi'\Phi^{-1}$ à Ω soit une bijection birégulière de Ω sur Ω'. Pour $\lambda \in \Omega$, posons $U_\lambda = U'_{\Psi(\lambda)}$. Alors, les propriétés (i) à (vi) du théorème **4** sont vérifiées. Pour toute $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, la fonction $\lambda \to \operatorname{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))$ sur Ω est semi-continue inférieurement. Comme le jacobien de Ψ est une fonction rationnelle régulière sur Ω, la formule (18) montre qu'il existe une fonction rationnelle réelle F sur Ω, régulière sur Ω, telle qu'on ait, pour toute $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, la formule (10).

4° Prouvons (viii) et (ix). Soit $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$. D'après (10), $U_\lambda(f)$ est, en dehors d'une partie ν-négligeable N de Ω, un opérateur d'Hilbert-

Schmidt dans $\mathfrak{H}$, donc s'identifie canoniquement à un élément de $\mathfrak{K}$. Le carré de sa norme, en tant qu'élément de $\mathfrak{K}$, est $\operatorname{tr}(U_\lambda(f)^* U_\lambda(f))$. Notons $\Phi(f)$ la fonction $\lambda \to U_\lambda(f)$, définie dans $\Omega - N$, à valeurs dans $\mathfrak{K}$. D'après (10), c'est un élément de $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$, et $\|\Phi(f)\|_2 = \|f\|_2$. Donc Φ se prolonge de manière unique en une application linéaire isométrique de $L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ sur un sous-espace vectoriel fermé $\mathfrak{K}_1$ de $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$.

Soit $f_1 \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$. On a

$$(19) \qquad \begin{aligned}(\Phi(U(f_1)f))(\lambda) &= (\Phi(f_1 \star f))(\lambda) \\ &= U_\lambda(f_1 \star f) = U_\lambda(f_1)\, U_\lambda(f) = (1 \otimes U_\lambda(f_1))((\Phi(f))(\lambda),\end{aligned}$$

$$(20) \qquad \begin{aligned}(\Phi(V(f_1)f))(\lambda) &= (\Phi(f \star f_1))(\lambda) \\ &= U_\lambda(f \star f_1) = U_\lambda(f)\, U_\lambda(f_1) = (U_\lambda(f_1)^* \otimes 1)(\Phi(f)(\lambda)).\end{aligned}$$

Soient $U^\sim = \int_\Omega^\oplus (1 \otimes U_\lambda)\, d\nu(\lambda)$ et $V^\sim = \int_\Omega^\oplus (U_\lambda \otimes 1)\, d\nu(\lambda)$, qui sont des représentations unitaires de Γ dans $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$. Les formules (19) et (20) prouvent d'abord que $\mathfrak{K}_1$ est stable pour les opérateurs $U^\sim(f_1)$, $V^\sim(f_1)$ $(f_1 \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma))$. Soit A l'algèbre de von Neumann engendrée dans $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$ par les $U^\sim(f_1)$ et les $V^\sim(f_1)$ $(f_1 \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma))$. Alors le projecteur $P_{\mathfrak{K}_1}$ appartient au commutant A' de A.

Montrons que A est l'algèbre de tous les opérateurs décomposables dans $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$. Soit $f_1, f_2, \ldots$ une suite d'éléments de $L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ partout dense dans $L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ au sens de la norme. Pour tout $\lambda \in \Omega$, U_λ est irréductible, donc l'algèbre de von Neumann engendrée par les $1 \otimes U_\lambda(f_i)$ et les $U_\lambda(f_i) \otimes 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$ est $\mathcal{L}(\mathfrak{K})$. Pour prouver que A est l'algèbre de tous les opérateurs décomposables, il suffit alors, en vertu d'un théorème de Mautner ([7], chapitre II, § 3, théorème 1 (ii)) de prouver que A contient l'algèbre des opérateurs diagonalisables. Or, pour tout $\lambda \in \Omega$, la représentation $1 \otimes U_\lambda$ admet le caractère correspondant à λ. D'après le lemme 20 (iii), $\tau_j^{-1} U^\sim(a_j)^{**}$ est l'opérateur autoadjoint défini par le champ d'opérateurs scalaires $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) \to \lambda_j . 1$. Or $U^\sim(a_j)^{**}$ commute à tout opérateur continu dans $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$ permutable à A. Donc $A'' = A$ contient tout opérateur décomposable défini par un champ $\lambda \to \varphi(\lambda_j) . 1$, où φ est une fonction borélienne bornée. Il en résulte bien que A contient tous les opérateurs diagonalisables, donc est l'algèbre des opérateurs décomposables.

Il résulte de là, d'après un théorème de von Neumann, ([7], chap. II, § 2, corollaire du théorème 1) que $P_{\mathfrak{K}_1}$ est un projecteur diagonalisable, donc défini par la fonction caractéristique d'une partie borélienne Ω^* de Ω. Montrons que $\Omega - \Omega^*$ est ν-négligeable. Soit $\lambda \in \Omega - \Omega^*$. Il existe $f_1 \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ telle que $U_\lambda(f_1) \neq 0$. D'après (v), on a $U_{\lambda'}(f_1) \neq 0$ pour tout λ' d'un voisinage Ω_0 de λ. D'autre part, $\Phi(f_1) \in \mathfrak{K}_1$, donc $U_{\lambda'}(f_1) = 0$ presque partout dans $\Omega - \Omega^*$. Donc $\Omega_0 \cap (\Omega - \Omega^*)$ est ν-négligeable. Vu l'arbitraire de λ, ceci prouve bien que $\Omega - \Omega^*$ est ν-négligeable.

On en conclut que $P_{\mathfrak{K}_1} = 1$, c'est-à-dire que $\mathfrak{K}_1 = L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$. Autrement dit, Φ est un isomorphisme de $L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ sur $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$. On a donc prouvé l'existence de Φ dans (viii). L'unicité de Φ est évidente. Enfin, les formules (19) et (20) prouvent (ix).

5° Nous allons enfin prouver le résultat d'unicité concernant F dans (vii). Supposons la formule (10) valable pour toute $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ lorsqu'on remplace F par une fonction rationnelle F_1 régulière sur Ω. Soit ν_1 la mesure $\geqq 0$ sur Ω définie par $d\nu_1(\lambda) = |F_1(\lambda)|\, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_q$. Le raisonnement du 4° prouve de la même manière qu'il existe un isomorphisme Φ_1 et un seul de $L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ sur $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu_1)$ qui transforme toute $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ en la fonction $\lambda \to U_\lambda(f)$. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\lambda \to U_\lambda(f)$ pour $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\Gamma)$. Alors, E est un sous-espace vectoriel partout dense de $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$ et de $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu_1)$, et le produit scalaire de deux éléments de E est le même dans $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$ et dans $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu_1)$. Or, l'application qui, à deux éléments $h \in L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$, $h' \in L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$, fait correspondre la fonction scalaire $\lambda \to (h(\lambda) \mid h'(\lambda))$, est une application bilinéaire continue de $L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu) \times L^2_{\mathfrak{K}}(\Omega, \nu)$ sur $L^1_{\mathbf{C}}(\Omega, \nu)$, comme on s'en rend compte aisément. On voit donc qu'il existe un sous-espace vectoriel partout dense E' commun à $L^1_{\mathbf{C}}(\Omega, \nu)$ et $L^1_{\mathbf{C}}(\Omega, \nu_1)$, et que l'intégrale des fonctions de E' est la même pour ν et ν_1. Soit alors g une fonction continue à support compact sur Ω. Il existe une suite $(g_1, g_2, \ldots)$ de fonctions de E' telle que la série $g_1 + g_2 + \ldots$ converge vers g dans $L^1_{\mathbf{C}}(\Omega, \nu)$ et telle que $\Sigma_j \int |g_j|\, d\nu < +\infty$. Alors, $g_1 + g_2 + \ldots$ converge vers g presque partout pour ν, donc pour la mesure de Lebesgue de Ω, donc pour ν_1. D'autre part, on a $\Sigma_j \int |g_j|\, d\nu_1 < +\infty$, donc $g_1 + g_2 + \ldots$ converge au sens de $L^1_{\mathbf{C}}(\Omega, \nu_1)$ vers un élément de $L^1_{\mathbf{C}}(\Omega, \nu_1)$ presque partout égal à g pour ν_1. Autrement dit, $g_1 + g_2 + \ldots$ converge vers g dans $L^1_{\mathbf{C}}(\Omega, \nu_1)$. Comme $\int g_j\, d\nu = \int g_j\, d\nu_1$ pour tout j, on voit que $\int g\, d\nu = \int g\, d\nu_1$. Donc $\nu = \nu_1$. Donc $|F(\lambda)| = |F_1(\lambda)|$ presque partout et par suite partout. Il en résulte qu'on a, soit $F = F_1$, soit $F = -F_1$. Ceci achève la démonstration du théorème 4.

Remarque 5. — Soient Γ un groupe de Lie nilpotent, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$, Γ' le groupe de recouvrement universel de Γ. Alors, Γ s'identifie à Γ'/Z, où Z est un sous-groupe discret central de Γ'. Les représentations unitaires irréductibles de Γ s'identifient aux représentations unitaires irréductibles de Γ' qui sont triviales sur Z, c'est-à-dire dont le caractère est de la forme ni, n entier, sur un certain sous-groupe additif discret de $\mathfrak{c}$.

Dans ces conditions, il n'est pas difficile de généraliser les théorèmes 1, 2 et 3 au groupe Γ. Par contre, on verra dans [9] que la formule de Plancherel ne se généralise pas (du moins sous la forme du théorème 4) aux groupes de Lie nilpotents non simplement connexes. Nous renvoyons également à [9] pour de nombreux exemples illustrant les résultats du présent article.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] V. BARGMANN, *On unitary ray representations of continuous groups* (*Ann. Math.*, t. 59, 1954, p. 1-46).

[2] N. BOURBAKI, Livre 4 : *Fonctions d'une variable réelle* (*Théorie élémentaire*), chap. 1-3, Paris, Hermann, 1949 (*Act. scient. et ind.*, n° 1074; *Éléments de Math.*, 9).

[3] N. BOURBAKI, Livre 6 : *Intégration*, chap. 1-4, Paris, Hermann, 1952 (*Act. scient. et ind.*, n° 1175; *Éléments de Math.*, 13); Livre 6 : *Intégration*, chap. 5, Paris, Hermann, 1957 (*Act. scient. et ind.*, n° 1244; *Éléments de Math.*, 21).

[4] F. BRUHAT, *Sur les représentations induites des groupes de Lie* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 84, 1956, p. 97-205).

[5] C. CHEVALLEY, *Théorie des groupes de Lie*, t. 3, Paris, Hermann, 1955 (*Act. scient. et ind.*, n° 1226).

[6] C. CHEVALLEY, *Géométrie algébrique* (à paraître).

[7] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

[8] J. DIXMIER, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, à paraître).

[9] J. DIXMIER, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, III (à paraître ultérieurement).

[10] I. GELFAND et M. NEUMARK, *Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen*, Berlin, Akademie-Verlag, 1957 (*Mathematische Monographien*, Band 6).

[11] R. GODEMENT, *Sur la théorie des représentations unitaires* (*Ann. Math.*, t. 53, 1951, p. 68-124).

[12] R. GODEMENT, *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires* (*J. Math. pures et appl.*, t. 30, 1951, p. 1-110).

[13] HARISH-CHANDRA, *On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra* (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 70, 1951, p. 28-96).

[14] HARISH-CHANDRA, *The Plancherel formula for complex semi-simple Lie groups* (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 76, 1954, p. 485-528).

[15] I. KAPLANSKY, *A theorem on rings of operators* (*Pacific J. Math.*, t. 1, 1951, p. 227-232).

[16] C. KURATOWSKI, *Topologie*, I, Warszawa-Lwow, 1932 (*Monografie Matematyczne*, 3).

[17] G. W. MACKEY, *Imprimitivity for representations of locally compact groups*, I (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 35, 1949, p. 537-545).

[18] G. W. MACKEY, *Induced representations of locally compact groups*, I (*Ann. Math.*, t. 55, 1952, p. 101-139).

[19] G. W. MACKEY, *Borel structure in groups and their duals* (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 85, 1957, p. 134-165).

[20] F. I. MAUTNER, *Unitary representations of locally compact groups*, II (*Ann. Math.*, t. 52, 1950, p. 528-556).

[21] J. von Neumann, *Über einen Satz von Herrn M. H. Stone* (*Ann. Math.*, t. 33, 1932, p. 567-573).

[22] I. E. Segal, *Hypermaximality of certain operators on Lie groups* (*Proc. Amer. math. Soc.*, t. 1, 1952, p. 13-15).

[23] I. E. Segal, *A class of operator algebras which are determined by groups* (*Duke math. J.*, t. 18, 1951, p. 221-265).

[24] I. E. Segal, *An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups* (*Ann. Math.*, t. 52, 1950, p. 272-292).

Manuscrit reçu le 30 septembre 1957.