BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS BRUHAT

Sur les représentations induites des groupes de Lie

Bulletin de la S. M. F., tome 84 (1956), p. 97-205
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1956__84__97_0>

Bull. Soc. Math. France,
84, 1956, p. 97 à 205.

SUR LES REPRÉSENTATIONS INDUITES DES GROUPES DE LIE;

PAR M. François BRUHAT.

INTRODUCTION.

La théorie des *représentations induites* des groupes finis a été fondée par FROBENIUS dans un Mémoire de 1899, où il démontrait son célèbre « théorème de réciprocité » [10]. BLICHFELDT, BURNSIDE, SPEISER, SHODA, ARTIN, BRAUER ont souvent utilisé cette notion et celle intimement liée de représentation imprimitive, pour l'étude des groupes finis. M. G. W. MACKEY devait en 1950 reprendre et unifier une grande partie de ces travaux en partant de l'étude du *produit tensoriel* de deux représentations induites [28] et donner une condition nécessaire et suffisante d'irréductibilité pour une représentation induite (condition déjà démontrée dans le cas des représentations monomiales par K. SHODA en 1933).

Il était naturel de chercher un équivalent de la notion de représentation induite dans la théorie des représentations des groupes localement compacts : mais il a fallu pour cela attendre que l'attention se porte sur les représentations unitaires de dimension infinie. Cependant, dès 1939, M. A. WEIL démontrait le théorème de réciprocité de FROBENIUS dans le cas des groupes compacts [38], tandis que M. E. WIGNER utilisait la notion de représentation induite pour l'étude des représentations unitaires du groupe de Lorentz inhomogène [40]. Enfin, M. MACKEY a donné, en 1949, une définition générale de la représentation unitaire d'un groupe localement compact séparable G induite par une représentation unitaire d'un sous-groupe fermé Γ [27], [29] et a montré les rapports de cette notion avec celle de système d'imprimitivité.

La théorie des représentations induites d'un groupe localement compact a pris beaucoup d'importance durant ces dernières années (nous renverrons aux travaux de MM. GELFAND et NAIMARK [14], [15], [16], GODEMENT [19], HARISH-CHANDRA [23], [24], [25], MACKEY [29], [30], MAUTNER [31], d'autant plus que presque toutes les représentations unitaires irréductibles de dimension infinie construites effectivement jusqu'à présent sont des représentations induites. Il semble en effet, après les travaux de MM. GELFAND et NAIMARK et de M. MACKEY, que toute représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie *résoluble* « suffisamment régulier » soit induite par une représentation de dimension 1, ou tout au moins que ces représentations soient les seules qu'on puisse espérer déterminer explicitement. D'autre part, MM. GELFAND et NAIMARK dans le cas des groupes classiques et HARISH-CHANDRA dans le cas général, ont montré que toute représentation unitaire irréductible d'un groupe semi-simple *complexe* (et même toute représentation complètement irréductible dans un espace de Banach) est « contenue » dans une représentation induite (au sens de M. MACKEY ou en un sens plus général qui rentrera dans nos définitions) par une représentation de dimension 1 d'un sous-groupe résoluble maximal. Enfin, dans le cas des groupes de Lie semi-simples réels, il semble probable (*voir* les travaux de MM. BARGMANN [**1**], GELFAND et GRAEV [**13**], HARISH-CHANDRA [**23**]) que toute représentation unitaire irréductible est « contenue dans une représentation induite, soit par une représentation de dimension finie, soit par une représentation de dimension infinie d'un type particulièrement simple de certains sous-groupes généralisant le sous-groupe résoluble maximal du cas complexe.

On conçoit donc l'intérêt d'avoir un critère d'*irréductibilité* pour une représentation induite : c'est l'objet des théorèmes **6**;**2** et **6**;**5** de ce travail, le premier donnant une condition nécessaire et suffisante d'irréductibilité pour une représentation induite par une représentation unitaire de dimension finie d'un sous-groupe distingué, le deuxième donnant une condition suffisante d'irréductibilité pour une représentation induite par une représentation de dimension quelconque unitaire mais dans le cas où il n'existe qu'une infinité dénombrable de doubles classes modulo le sous-groupe (cas qui est précisément celui d'un groupe semi-simple complexe par exemple et du sous-groupe résoluble maximal).

Un autre problème important de la théorie des représentations induites est l'extension du théorème de réciprocité de Frobenius; M. MACKEY en a déjà obtenu plusieurs généralisations; l'une [**29**] élucide complètement la question dans le cas où la représentation irréductible considérée de G est de dimension finie; une autre, qui semble la plus générale et qui recouvre en particulier celle donnée par M. MAUTNER dans le cas où Γ est compact, donne des renseignements sur la décomposition en somme continue de représentations irréductibles d'une représentation induite, moyennant certaines hypothèses sur les décompositions en somme continue de représentations factorielles des représentations régulières de G et de Γ [**30**]; enfin, une troisième [**28**] est valable dans le cas où Γ est *ouvert*. C'est cette dernière que nous généraliserons au paragraphe **6** au cas G de Lie, Γ fermé quelconque. Les résultats obtenus ne sont pas aussi précis qu'on aurait pu l'espérer, mais il nous paraît difficile de les améliorer dans le cas général.

L'outil essentiel que nous utiliserons dans ce travail est la théorie des distributions de M. L. SCHWARTZ : c'est ce qui explique que nous ne parlerons jamais que de *groupes de Lie*. Les problèmes fondamentaux de la théorie des représentations induites (irréductibilité et réciprocité de Frobenius) sont liés à l'étude des *opérateurs d'entrelacement*. Or, une représentation induite s'effectue au fond dans un espace de fonctions de carré sommable (à valeurs vectorielles) sur un certain espace homogène G/Γ : le « théorème des noyaux » de M. L. SCHWARTZ permet donc d'associer à tout opérateur d'entrelacement une *distribution* (à valeurs vectorielles) sur $G \times G$ et c'est l'étude de ces distributions qui nous conduira à nos résultats.

Le chapitre I est consacré (après quelques préliminaires) à l'étude, essentielle pour la suite, des distributions vectorielles sur un espace homogène présentant certaines propriétés d'invariance pour les opérations du groupe. Au paragraphe 1, nous rappelons brièvement les résultats de MM. WEIL, DIEUDONNÉ, MACKEY sur les *mesures quasi invariantes* sur un espace homogène (nº 1) puis quelques définitions et théorèmes de M. A. GROTHENDIECK sur les produits tensoriels topologiques (nº 2). Aux nºs 3 et 4, nous indiquons quelques propriétés des distributions à valeurs vectorielles et plus spécialement des formes linéaires sur l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact à valeurs dans un espace vectoriel E, formes que nous appellerons « E-distributions », ainsi que du produit de composition de telles distributions sur un groupe de Lie.

Il nous est apparu au cours de ce travail, que nos méthodes n'utilisaient que fort peu, et seulement pour l'interprétation des résultats, le fait que les représentations envisagées étaient des représentations unitaires dans des espaces de Hilbert (ou même des représentations continues dans des espaces de Banach) et que, bien au contraire, elles nécessitaient le remplacement de ces représentations unitaires par certaines représentations indéfiniment différentiables associées dans des espaces plus généraux : nous avons donc été amené à définir au paragraphe 2 la notion de représentation continue d'un groupe de Lie dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé quelconque et la notion de représentation différentiable. On trouvera également au paragraphe 2 quelques propositions sur les représentations contragrédientes et les produits tensoriels de représentations.

Le paragraphe 3 est relatif aux distributions quasi invariantes : soit M une variété sur laquelle opère un groupe de Lie G; une E-distribution T sur M sera dite quasi invariante de multiplicateur $A(m, x)$ si la transformée de T par un élément x de G se déduit de T par « multiplication » par $A(m, x)$. Le théorème 3;1, fondamental pour la suite de ce travail, donne dans le cas où M est un espace homogène une condition nécessaire et suffisante (sur le multiplicateur A) pour qu'il existe une telle distribution non nulle, et montre que ces distributions quasi invariantes sont en quelque sorte « absolument continues » par rapport à une mesure quasi invariante sur M. Nous donnons également au paragraphe 3 quelques indications sur le cas général où G n'est plus transitif sur M, et un lemme sur la décomposition de M dans le cas où il n'y a qu'une infinité dénombrable d'orbites.

L'étude générale des représentations induites fait l'objet du chapitre II : au paragraphe 4, nous donnons tout d'abord la définition de la représentation différentiable U^{L^0} induite par une représentation différentiable L^0 puis une définition très générale d'une représentation induite (notée U^L) par une représentation L, unitaire ou non, d'un sous-groupe fermé Γ du groupe de Lie G. Nous étudions à quelle condition U^L peut être une représentation dans un espace de Banach ou une représentation unitaire. Notre définition a l'avantage de comprendre comme cas particulier aussi bien les représentations unitaires induites définies par M. MACKEY que les représentations unitaires de la « série complémentaire » des groupes de Lie semi-simples introduites par MM. GELFAND et NAIMARK, représentations qui sont induites par des représentations non unitaires du sous-groupe Γ.

MM. WIGNER, GELFAND et NAIMARK dans des cas particuliers, puis M. MACKEY dans le cas général, ont montré que l'existence dans un groupe G d'un sous-groupe abélien distingué Γ permettait de construire pour toute représentation unitaire de G un système d'imprimitivité et de déterminer dans certains cas toutes les représentations unitaires irréductibles de G; ces démonstrations reposent essentiellement sur le théorème de résolution spectrale de Stone-Ambrose-Naimark-Godement (*voir* par exemple [17]) et par suite sur le rôle joué dans la théorie des représentations unitaires par les fonctions de type positif et sur le théorème de Bochner. Nous avons pu obtenir des résultats analogues dans le cas de certaines représentations non unitaires (par exemple des représentations bornées dans des espaces de Banach) des groupes de Lie, en utilisant au lieu du théorème de Bochner, les résultats de M. L. SCHWARTZ sur la transformation de Fourier des distributions : ceci fait l'objet du paragraphe 5. Après avoir quelque peu généralisé la notion de représentation tempérée d'un groupe de Lie abélien, notion due à M. L. SCHWARTZ, nous construisons pour toute représentation de G dont la restriction à Γ est tempérée, une distribution P sur le groupe dual $\hat{\Gamma}$ de Γ, à valeurs dans $L(E;E)$, qui possède des propriétés généralisant celles du système d'imprimitivité du cas classique. Moyennant certaines hypothèses de régularité sur la manière dont G opère sur $\hat{\Gamma}$, on peut alors déterminer les distributions P qui correspondent à des représentations irréductibles, et obtenir une généralisation du théorème de M. MACKEY : les représentations irréductibles envisagées de G sont induites (au sens du paragraphe 4) par certaines représentations des stabilisateurs dans G des différents points de $\hat{\Gamma}$.

Nous abordons au paragraphe 6 l'étude des nombres d'entrelacement $i(U^L, U^M)$ de deux représentations induites par les représentations L et M de deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 respectivement : nous en donnons une définition légèrement différente de celle donnée classiquement dans le cas unitaire, mais qui est mieux adaptée au passage aux représentations différentiables associées et à l'extension au cas non unitaire. Nous démontrons au n° 2 que ce nombre d'entrelacement est lié à la dimension d'un certain espace de distributions (vectorielles) sur G, quasi invariantes pour les translations à gauche par les éléments de Γ_1 et à droite par les éléments de Γ_2. On voit donc s'introduire naturellement les classes d'intransitivité de G pour ces translations, c'est-à-dire les *doubles classes* modulo $\Gamma_1:\Gamma_2$. Au n° 3, nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'irréductibilité pour une représentation unitaire induite par une représentation unitaire de dimension finie d'un sous-groupe distingué. Enfin, nous établissons au n° 4 une *majoration* de $i(U^L, U^M)$ (donc un critère d'irréductibilité pour les représentations unitaires) dans le cas où il n'y a qu'une infinité dénombrable de doubles classes modulo $\Gamma_1:\Gamma_2$, cas très important dans la pratique, puisque, comme nous l'avons signalé plus haut, c'est celui qui se présente dans l'étude des groupes semi-simples. Cette majoration nous permet également de démontrer une généralisation (malheureusement imparfaite) du théorème de réciprocité de Frobenius, qui contrairement à celle de M. Mackey dans [30], ne fait intervenir que les deux représentations envisagées et ne nécessite aucune hypothèse sur l'ensemble des représentations de G ou de Γ.

Le chapitre III est consacré à l'application des théorèmes du paragraphe 6 à l'étude des groupes de Lie semi-simples réels ou complexes. Nous rappelons brièvement au n° 1 les principaux résultats d'E. Cartan, H. Weyl et K. Iwasawa sur la structure des algèbres et groupes de Lie semi-simples et nous introduisons le sous-groupe Γ produit d'un sous-groupe résoluble « supplémentaire » d'un sous-groupe compact maximal K et du centralisateur de ce sous-groupe résoluble dans K. Pour pouvoir appliquer les théorèmes 6;3 et 6;5, il nous faut démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de doubles classes modulo $\Gamma:\Gamma$; cette démonstration, ainsi que celle de différents lemmes préliminaires, fait l'objet du n° 2 : nous y montrons que les doubles classes sont en correspondance biunivoque avec les éléments du groupe de Weyl de G. Les n^os^ 3 et 4 sont consacrés à la démonstration de l'irréductibilité de « presque toutes » les représentations unitaires de G induites par une représentation unitaire de dimension finie de Γ. Le n° 5 est relatif aux représentations de la « série complémentaire » et le n° 6 aux représentations de la « série dégénérée » : nous y étendons au cas général des définitions données par MM. Gelfand et Naimark dans le cas des groupes complexes classiques et y démontrons l'irréductibilité de « presque toutes » les représentations unitaires ainsi introduites.

Je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. H. Cartan, qui a bien voulu diriger mes recherches, à M. L. Schwartz et à M. R. Godement, qui m'ont constamment guidé de leurs conseils. Je suis heureux de pouvoir les remercier de toute l'aide qu'ils m'ont apportée par leurs remarques et leurs suggestions ainsi que par les encouragements qu'ils n'ont cessé de me donner. Je remercie également M. A. Lichnerowicz, qui a bien voulu se ioindre à eux pour constituer le Jury de cette Thèse.

CHAPITRE I.

Distributions quasi invariantes.

Paragraphe 1. — Préliminaires.

1. Groupes de Lie; mesures quasi invariantes sur un espace homogène — Dans tout ce travail, G désignera un *groupe de Lie* (¹), d'éléments x, y, ..., d'élément unité e. Nous supposerons toujours que G (et d'une manière générale *tous* les groupes et sous-groupes envisagés) est engendré par un voisinage compact de e, ce qui entraîne que la variété du groupe G est dénombrable à l'infini. Nous désignerons par $d_G(x)$ (ou plus simplement par dx si aucune confusion n'est à craindre) une mesure de Haar invariante à droite sur G, donnée une fois pour toutes, et par $\delta_G(y)$ [ou $\delta(y)$] la dérivée de Radon-Nikodym de $d_G(yx)$ par rapport à $d_G(x)$ (y fixe dans G); on sait que

$$(1;1) \qquad d_G(x^{-1}) = \delta_G(x)^{-1}\, d_G(x).$$

Soit Γ un sous-groupe fermé de G, d'éléments ξ, η, ..., et soit $M = G/\Gamma$ l'espace homogène des classes à droite modulo Γ dans G. On désignera par $x \to \pi(x)$ ou par $x \to (\dot{x})$ la projection canonique de G sur M. On sait qu'il n'existe pas en général sur M de mesure de Radon qui soit invariante par les opérations de G (*cf.* [38], p. 42-45). Cependant [9], [29], il existe sur M des mesures qui sont *équivalentes* à leurs transformées par G : on dit qu'une telle mesure est *quasi invariante* par G. D'après M. G. W. Mackey [29], on sait que deux mesures quasi invariantes sont équivalentes et qu'on les obtient *toutes* de la manière suivante : soit $\rho(x)$ une fonction borélienne strictement positive sur G, bornée inférieurement et supérieurement sur tout compact, et vérifiant pour tout $\xi \in \Gamma$:

$$(1;2) \qquad \rho(\xi x) = \frac{\delta_\Gamma(\xi)}{\delta_G(\xi)}\rho(x).$$

A cette ρ est associée une mesure μ quasi invariante sur G/Γ, définie par l'équation (²)

$$(1;3) \qquad \int_G f(x)\,\rho(x)\,d_G(x) = \int_M d\mu \int_\Gamma f(\xi x)\,d_\Gamma(\xi),$$

(¹) Tous les résultats de ce numéro sont d'ailleurs valables (sauf l'existence d'une fonction ρ différentiable) pour des groupes localement compacts.

(²) (1; 3) définit bien une mesure sur M car :

a. L'application $f \to \int f(\xi x)\,d\xi$ est épijective de l'espace des fonctions continues à support compact sur G sur l'espace analogue sur M ([38], p. 42);

b. $\int f(\xi x)\,d\xi = 0$ pour tout x de G entraîne $\int f(x)\rho(x)\,dx = 0$ ([29], p. 105).

on a

$$(1;4)\qquad d\mu(\dot{\widehat{xy}}) = \frac{\rho(xy)}{\rho(x)}\, d\mu(\dot{x}).$$

Il est facile de construire des fonctions ρ indéfiniment différentiables : soit $\{\Omega_i\}$ un recouvrement localement fini de M par des ouverts relativement compacts et $\{\alpha_i\}$ une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée à ce recouvrement ([33], p. 23). Pour tout indice i, il existe une fonction β_i indéfiniment différentiable positive sur G, à support compact contenu dans $\pi^{-1}(\Omega_i)$, et telle que $\alpha_i(\dot{x}) = \int_\Gamma \beta_i(\xi x)\, d\Gamma(\xi)$ (*cf.* [38] ou *infra* prop. 4; 1). Considérons la somme $\Sigma\beta_i$: tout point x de G n'est contenu que dans un nombre fini d'ensembles $\pi^{-1}(\Omega_i)$ donc un nombre fini seulement de termes ne sont pas nuls dans un voisinage de la classe à droite Γx : par suite $\beta = \Sigma\beta_i$ est une fonction indéfiniment différentiable positive sur G et pour tout x la fonction $\xi \to \beta(\xi x)$ est à support compact dans Γ et non nulle puisque $\int \beta(\xi x)\, d\Gamma(\xi) = 1$. Posons alors

$$(1;5)\qquad \rho(x) = \int_\Gamma \delta_\Gamma(\xi)^{-1}\, \delta_G(\xi)\, \beta(\xi x)\, d\Gamma(\xi)$$

Il est immédiat que $\rho(x)$ est indéfiniment différentiable (cf. *infra*, prop. 1 ; 2) et satisfait aux conditions de M. Mackey. Nous désignerons désormais par $\rho_\Gamma(x)$ une telle fonction choisie une fois pour toutes, vérifiant de plus $\rho_\Gamma(e) = 1$ $\left[\text{et par suite } \rho_\Gamma(\xi) = \dfrac{\delta_\Gamma(\xi)}{\delta_G(\xi)} \text{ pour tout } \xi \in \Gamma\right]$ et par $d\mu_\Gamma(\dot{x})$ la mesure quasi invariante associée sur G/Γ (³).

2. **Produits tensoriels topologiques.** — Nous allons dans ce numéro rappeler brièvement quelques définitions et résultats de M. A. Grotendieck [20], [21]. Soient $E_i (i = 1, 2)$ et F trois espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés, $\mathfrak{S}_i$ une famille de parties de E_i contenant les ensembles réduits à un point ainsi que les sous-ensembles d'un ensemble de la famille, stable pour les opérations de fermeture et de réunion finie. On dit [5] qu'une application bilinéaire u de $E_1 \times E_2$ dans F est « *hypocontinue relativement aux familles* $\mathfrak{S}_i$ » (ou plus simplement est $\mathfrak{S}_1$-$\mathfrak{S}_2$-hypocontinue) si sa restriction au produit d'un ensemble de $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) par E_2 (resp. E_1) est *continue* et si, pour a (resp. b) décrivant un borné appartenant à $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$), les applications linéaires $u_a : b \to u(a, b)$ [resp. $u_b : a \to u(a, b)$] sont équicontinues de E_2 (resp. E_1) dans F. D'après M. Grothendieck, il

(³) Remarquons que toute mesure > 0 qui, sur toute carte locale de G/Γ est équivalente à la mesure de Lebesgue (par exemple est le produit de la mesure de Lebesgue par une fonction indéfiniment différentiable > 0), est quasi invariante.

existe sur le produit tensoriel algébrique $E_1 \otimes E_2$ une topologie localement convexe séparée et une seule telle que, dans l'isomorphisme canonique entre applications bilinéaires de $E_1 \times E_2$ dans F et applications linéaires de $E_1 \otimes E_2$ dans F, se correspondent exactement :

a. les applications linéaires *continues* sur $E_1 \otimes E_2$ et les applications bilinéaires $\mathfrak{S}_1$-$\mathfrak{S}_2$-*hypocontinues*;

b. Les ensembles *équicontinus* d'applications linéaires et les ensembles d'applications bilinéaires qui sont *équicontinus* sur le produit d'un ensemble de $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) par E_2 (resp. E_1) et qui sont tels que les applications linéaires u_a (resp. u_b) soient équicontinues pour a (resp. b) décrivant un borné appartenant à $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) (ensembles « équi-$\mathfrak{S}_1$-$\mathfrak{S}_2$-hypocontinus »).

Nous désignerons par $E_1 \otimes_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2} E_2$ le produit tensoriel $E_1 \otimes E_2$ muni de cette topologie, et par $E_1 \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2} E_2$ son complété. Si $\mathfrak{S}_1$ est la famille des parties *finies* de E_i (resp. de toutes les parties de E_i), nous désignerons encore ce complété par $E_1 \overline{\otimes} E_2$ (resp. $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$). Si E_1 et E_2 sont des *espaces de Fréchet* (c'est-à-dire des espaces localement convexes métrisables et complets), tous ces espaces sont identiques d'après le théorème de Baire : nous les noterons simplement $E_1 \hat{\otimes} E_2$.

Soient $F_i (i = 1, 2)$ deux autres espaces localement convexes séparés, $\mathfrak{T}_i$ une famille de parties de F_i, u_i une application linéaire continue de E_i dans F_i : il est clair que si $u_i(A_i) \in \mathfrak{T}_i$ pour tout $A_i \in \mathfrak{S}_i$, alors l'application $u_1 \otimes u_2$ est continue de $E_1 \otimes_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2} E_2$ dans $F_1 \otimes_{\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2} F_2$. En particulier, $u_1 \otimes u_2$ est continue de $E_1 \overline{\otimes} E_2$ (respectivement $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$) dans $F_1 \overline{\otimes} F_2$ (resp. $F_1 \hat{\otimes}_\pi F_2$).

3. **Distributions vectorielles.** — Soit X une variété indéfiniment différentiable, dénombrable à l'infini. Nous utiliserons dans toute la suite de ce travail les notations de M. L. Schwartz [33] pour les différents espaces fonctionnels, par exemple $\mathcal{E}_X$ espace des fonctions complexes indéfiniment différentiables, $\mathcal{D}'_X$ espace des distributions, etc.

Soit E un espace vectoriel topologiqne localement convexe séparé *complet*. Nous noterons $\mathcal{E}_X(E)$ [ou $\mathcal{E}(E)$ si aucune ambiguïté n'est possible sur la variété considérée] l'espace des fonctions sur X indéfiniment différentiables à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de la fonction et de chacune de ses dérivées. Nous noterons $\mathcal{D}_X(E)$ [ou $\mathcal{D}(E)$] l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à valeurs dans E et à support compact, muni de la topologie limite inductive des topologies induites par $\mathcal{E}(E)$ sur les sous-espaces $\mathcal{D}_K(E)$ des fonctions à support dans un compact fixe arbitraire K de X. Les espaces $\mathcal{E}(E)$ et $\mathcal{D}(E)$ sont localement convexes séparés complets. Le produit tensoriel algébrique $\mathcal{E} \otimes E$ (resp. $\mathcal{D}_K \otimes E$, $\mathcal{D} \otimes E$) s'identifie naturellement à un sous-espace de $\mathcal{E}(E)$

[resp. $\mathcal{D}_K(E)$, $\mathcal{D}(E)$] et M. GROTHENDIECK a montré [21] qu'on a les identifications suivantes : $\mathcal{E}(E) = \mathcal{E} \hat{\otimes}_\pi E$ et $\mathcal{D}_K(E) = \mathcal{D}_K \hat{\otimes}_\pi E$. Pour $\mathcal{D}(E)$, on a les résultats suivants : la topologie induite par $\mathcal{D}(E)$ sur $\mathcal{D} \otimes E$ est *plus fine* que celle induite par $\mathcal{D} \hat{\otimes}_\pi E$ et *moins fine* que celle induite par $\mathcal{D} \overline{\otimes} E$. Cependant, si E est un *espace de Fréchet*, on a $\mathcal{D}(E) = \mathcal{D} \overline{\otimes} E$ algébriquement et topologiquement. $\mathcal{D}(E)$ est alors un espace $(\mathcal{LF})$ au sens de [10].

Nous appellerons [35], [37] « *distribution sur X à valeurs dans E* » une application linéaire continue de l'espace $\mathcal{D}_X$ dans E et «*E-distribution sur X* » une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}_X(E)$: l'espace des distributions à valeurs dans E (resp. des E-distributions) est donc l'espace $L(\mathcal{D}; E)$ [resp. $\mathcal{D}(E)'$] que nous munirons toujours de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de $\mathcal{D}$[resp. de $\mathcal{D}(E)$]. Plus généralement, nous appellerons « E-distribution à valeurs dans F » un élément de l'espace $L(\mathcal{D}(\mathcal{E}); F)$. Si T est une E-distribution à valeurs dans F, nous noterons indifféremment $T(f)$ ou $\int_X f(x)\, dT(x)$ l'image par T de l'élément f de $\mathcal{D}(E)$.

Une E-distribution T définit canoniquement une distribution à valeurs dans E' dual fort de E, à savoir l'application linéaire qui à $f \in \mathcal{D}$ fait correspondre la forme linéaire continue sur E : $a \to T(f, a)$. Réciproquement, soit $T \in L(\mathcal{D}; E')$: il lui correspond canoniquement une forme bilinéaire $(f, a) \to \langle a, T(f) \rangle$ sur $\mathcal{D} \times E$, évidemment séparément continue, donc une forme linéaire continue $\tilde{T}$ sur $\mathcal{D} \overline{\otimes} E$: si E est un espace de Fréchet, $\tilde{T}$ est bien une E-distribution puisque $\mathcal{D} \overline{\otimes} E = \mathcal{D}(E)$. D'une manière générale, $\tilde{T}$ sera une E-distribution si et seulement si sa restriction à tout $\mathcal{D}_K \otimes E$ est continue pour la topologie induite par $\mathcal{D}_K(E)$, c'est-à-dire si $\langle a, T(f) \rangle$ est continue sur $\mathcal{D}_K \times E$, d'où la

PROPOSITION 1 ; 1. — *a. Une distribution T à valeurs dans E′ définit canoniquement une E-distribution si et seulement si, pour tout compact K de X, il existe un voisinage de zéro dans $\mathcal{D}_K$ dont l'image par T est un ensemble équicontinu de formes linéaires sur E.*

b. Si E est un espace de Fréchet, toute distribution à valeurs dans E′ définit canoniquement une E-distribution.

On étend à ces distributions vectorielles les notions et théorèmes fondamentaux de la théorie des distributions scalaires :

1° Notion de *support*, principe de localisation, restriction d'une distribution à un ouvert : pas de difficultés.

2° *Produit multiplicatif.* — Pour $\alpha \in \mathcal{E}$, on pose

$$(\alpha T)(f) = T(\alpha f). \tag{1; 6}$$

D'où la définition de $T(f)$ si f est à support non compact mais coupant le support de T suivant un compact (*cf.* [33], p. 90).

3° *Dérivation.* — Si D est un champ de vecteurs indéfiniment différentiable sur X, on pose

$$DT(f) = -T(Df). \tag{1; 7}$$

Si D est un opérateur différentiel de la forme $\Sigma\lambda_{i_1,\ldots,i_p}(x)D_{i_1}\ldots D_{i_p}$, les fonctions scalaires $\lambda_{i_1,\ldots,i_p}$ étant différentiables et les D_{i_j} étant des champs de vecteurs différentiables, on pose

$$DT(f) = \Sigma(-1)^p T(D_{i_p}\ldots D_{i_1})(\lambda_{i_1,\ldots,i_p}(x)f(x)). \tag{1; 8}$$

Remarquons qu'*on n'a pas en général* $DT = \Sigma\lambda_{i_1,\ldots,i_p}D_{i_1}\ldots D_{i_p}T$. Si D est un opérateur différentiel arbitraire, on se ramène au cas précédent en utilisant une partition de l'unité.

4° *Ordre.* — Nous dirons qu'une distribution à valeurs dans E (resp. une E-distribution) est d'ordre inférieur ou égal à m, m entier positif, si elle est continue sur $\mathcal{D}$ [resp. $\mathcal{D}(E)$] muni de la topologie induite par $\mathcal{D}^m$ [resp. $\mathcal{D}^m(E)$]. Une distribution d'ordre zéro est une mesure vectorielle. On montre facilement (*cf.* [33], p. 82) que *toute E-distribution est d'ordre fini sur tout ouvert relativement compact* (l'énoncé analogue étant trivialement faux pour les distributions à valeurs dans E : prendre l'application identique de $\mathcal{D}$ dans lui-même).

5° *Distribution ayant pour support une sous-variété.* — Soit Y une sous-variété indéfiniment différentiable régulièrement plongée dans X : à toute distribution T sur Y correspond canoniquement une distribution sur X (que nous noterons encore T) appelée « extension à X de la distribution T », à savoir l'application linéaire qui à une fonction φ sur X fait correspondre la valeur de T sur la restriction de φ à Y.

Supposons qu'il existe $p+q$ champs de vecteurs différentiables $D_1, \ldots, D_p, D'_1, \ldots, D'_q$ formant en tout point de X une base de l'espace tangent à X, les D'_i formant en tout point de Y une base de l'espace tangent à Y (remarquons que de tels champs de vecteurs existent toujours si X est un *groupe de Lie* et Y un *sous-groupe fermé :* il suffit de prendre pour champs D'_i une base de la sous-algèbre de Lie correspondant à Y et pour champs D_j une base d'un supplémentaire de cette sous-algèbre dans l'algèbre de Lie de X identifiée à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur X.) Posons pour tout système $m = (m_1, \ldots, m_p)$ de p entiers $\geqq 0$, $D^m = D_1^{m_1}\ldots D_p^{m_p}$: pour toute distribution T sur Y, nous désignerons par $D^m T$ la distribution *sur* X obtenue en appliquant l'opérateur différentiel D^m à la distribution extension de T à X, et nous appellerons cette distribution une « dérivée transversale » de T. On démontre alors le résultat suivant [la démonstration donnée dans [33], p. 102) pour le cas scalaire et avec des champs commutants se transpose sans difficultés au cas vectoriel, et l'on passe facilement du cas des champs commutants au cas général] : *toute distribution d'ordre fini dont le support est contenu dans Y, admet une décomposition unique en combinaison linéaire finie de « dérivées transversales » d'extensions à X de distributions définies sur Y* ([**33**], p. 102) :

$$(1;9) \qquad T = \Sigma D^m T_m, \qquad T_m \in L(\mathcal{D}_Y; E) \qquad \text{ou} \qquad \in \mathcal{D}_Y(E)';$$

T sera souvent d'ordre fini seulement sur tout compact (par exemple si T est une E-distribution) et de plus on ne pourra trouver de dérivations D convenables qu'au voisinage de tout point de Y : on aura alors des décompositions de la forme (**1**; 9) au voisinage de tout point de Y.

6° *Produit direct.* — Soient X_i ($i=1, 2$) deux variétés : on sait que

$$\mathcal{D}_{X_1\times X_2} = \mathcal{D}_{X_1} \overline{\otimes} \mathcal{D}_{X_2} \quad [\mathbf{21}].$$

Soit $T_i \in L(\mathcal{D}_{X_i}; E_i)$: la définition du produit $T_1 \otimes T_2$ est immédiate [**35**] et donne un élément de $L(\mathcal{D}_{X_1\times X_2}; E_1 \overline{\otimes} E_2)$. Si T_i est une E_i-distribution, $T_1 \otimes T_2$ peut être considérée comme une $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$-distribution sur $X_1 \times X_2$; $T_1 \otimes T_2$ est en effet une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_{X_1}(E_1) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}_{X_2}(E_2)$, donc *a fortiori* sur $\mathcal{D}_{X_1\times X_2}(E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2)$.

7° L'application $T \to T \otimes 1$ plonge canoniquement $L(\mathcal{D}; E_1)$ dans $L(\mathcal{D} \hat{\otimes}_\pi E_2; E_1 \hat{\otimes}_\pi \hat{E}_2)$, donc *a fortiori* dans $L(\mathcal{D}(E_2); E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2)$. Si l'on se donne en plus une application bilinéaire continue u de $E_1 \times E_2$ dans F, on peut obtenir, à partir de T, une E_2-distribution à valeurs dans F, notée $f \to \int u(f(x), dT(x))$.

4. Distributions sur un groupe de Lie. Produit de composition. — L'existence sur un groupe de Lie G d'un élément de volume privilégié $d_G(x)$ permet de considérer une fonction f sur G, localement sommable pour $d_G(x)$, comme une distribution particulière, à savoir la distribution $\varphi \to \int \varphi(x) f(x)\, d_G(x)$: nous dirons qu'une telle distribution « est » une fonction localement sommable, indéfiniment différentiable, etc. L'espace $\mathcal{D}$ est ainsi identifié avec un sous-espace dense de $\mathcal{D}'_G$ et $\mathcal{E}(E)$ avec un sous-espace dense de $L(\mathcal{D}; E)$.

Soit T_i ($i=1, 2$) une distribution sur G à valeurs dans E_i : la définition du *produit de composition* $T_1 \star T_2$ donnée par M. A. Weil dans le cas des mesures [**38**], et dans le cas des distributions scalaires sur R^n par M. L. Schwartz [**34**], se généralise sans difficultés (*cf.* aussi [**19**] pour le cas scalaire sur un groupe de Lie) : on posera pour $f \in \mathcal{D}$:

$$(1;10) \qquad T_1 \star T_2(f) = \int_{G\times G} f(xy)\, dT_1(x) \otimes dT_2(y).$$

On obtiendra ainsi une *distribution à valeurs dans* $E_1 \overline{\otimes} E_2$ [4], à condition toutefois que (10) ait un sens : par exemple si le support de $T_1 \otimes T_2$ coupe suivant un compact le support de toute fonction $f(xy)$ dans $G \times G$, et en particulier si *l'une au moins des distributions T_i est à support compact*. Ce produit de composition possède la plupart des propriétés démontrées par M. L. Schwartz dans le cas des distributions scalaires sur R^n (à part bien entendu la commutativité). Il fait de $\mathcal{E}'$ une algèbre topologique d'élément unité ε_e mesure de Dirac au point e, et de $L(\mathcal{D}; E)$ un module topologique unitaire à gauche ou à droite sur cette algèbre. Nous aurons besoin de la propriété suivante de ce produit :

Proposition 1 ; 2. — *Soient T une distribution appartenant à $L(\mathcal{D}; E)$* [resp. $L(\mathcal{E}; E)$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$] *et α une fonction appartenant à $\mathcal{D}$* [resp. $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}(E)$, $\mathcal{E}(E)$] : *les produits de composition $\alpha \bigstar T$ et $T \bigstar \alpha$ sont des fonctions indéfiniment différentiables à valeurs dans E, données par*

$$\alpha \bigstar T(x) = \int_G \alpha(xy^{-1})\, dT(y), \tag{1; 11}$$

$$T \bigstar \alpha(x) = \int_G \alpha(y^{-1}x)\, \delta_G(y)^{-1}\, dT(y). \tag{1; 12}$$

De plus, les applications bilinéaires $(\alpha, T) \to \alpha \bigstar T$ et $(\alpha, T) \to T \bigstar \alpha$ sont séparément continues de $\mathcal{D} \times L(\mathcal{D}; E)$ [resp. $\mathcal{E} \times L(\mathcal{E}; E)$, $\mathcal{D}(E) \times \mathcal{D}'$, $\mathcal{E}(E) \times \mathcal{E}'$] *dans $\mathcal{E}(E)$.*

Nous laisserons au lecteur le soin de transposer la démonstration donnée par M. L. Schwartz dans le cas $G = R^n$ et $\dim E = 1$ ([34], p. 21-23).

Le produit de composition permet également d'interpréter les opérateurs différentiels invariants sur G (*cf.* [19], p. 356) : soit $\mathcal{E}'_e$ l'ensemble des distributions de support e : $\mathcal{E}'_e$ est une sous-algèbre de $\mathcal{E}'$ canoniquement isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G. Soit $D \in \mathcal{E}'_e$: l'opérateur $f \to f \bigstar D$ ($f \in \mathcal{E}$) est un opérateur différentiel invariant à gauche D, et l'on obtient ainsi *tous* les opérateurs différentiels invariants à gauche.

D'autre part, pour $f \in \mathcal{D}$ et $T \in L(\mathcal{D}; E)$, on a

$$T(f) = f' \bigstar T(e) = T \bigstar f''(e), \tag{1; 13}$$

en posant $f'(x) = f(x^{-1})$ et $f''(x) = \delta_G(x^{-1}) f(x^{-1})$. Les applications $f \to f'$ et $f \to f''$ sont des automorphismes involutifs de $\mathcal{D}$, « transposés » l'un de l'autre en ce sens que $\int f'_1(x) f''_2(x)\, dx = \int f''_1(x) f'_2(x)\, dx$. On est donc

[4] Si l'on se donne en plus une application bilinéaire séparément continue de $E_1 \times E_2$ dans F, c'est-à-dire une application linéaire continue u de $E_1 \overline{\otimes} E_2$ dans F, on obtiendra une distribution $T_1 \underset{u}{\bigstar} T_2$ à valeurs dans F définie par $T_1 \underset{u}{\bigstar} T_2(f) = u(T_1 \bigstar T_2(f))$.

amené à prolonger ces automorphismes en automorphismes involutifs de $\mathcal{D}'$ [ou plus généralement de $L(\mathcal{D}\,;\,E)$] en posant

$$(1;\,14)\qquad T'(f) = T(f''),\qquad T''(f) = T(f').$$

On vérifie aisément que $(T_1 \bigstar T_2)' = T'_2 \bigstar T'_1$ et $(T_1 \bigstar T_2)'' = T''_2 \bigstar T''_1$.

Soit en particulier D une distribution de support e correspondant à un élément de l'algèbre de Lie de G (autrement dit un vecteur tangent à G en e) et soit $\tilde{D}$ l'opérateur différentiel d'ordre 1 invariant à gauche correspondant : conformément à nos définitions générales, on a

$$(1;\,15)\quad \begin{aligned}(\tilde{D}T)(f) &= -\,T(\tilde{D}f) = -\,T\bigstar(\tilde{D}f)''(e) = -\,T\bigstar(f\bigstar D)''(e)\\ &= -\,T\bigstar D''\bigstar f''(e) = -\,(T\bigstar D'')(f).\end{aligned}$$

Or par définition même, $D''(f) = D(f')$ et l'on vérifie aisément que si D est un vecteur tangent en e, $D(f') = -\,D(f)$ et par suite $D'' = -\,D$: on a donc

$$(1;\,16)\qquad \tilde{D}T = T\bigstar D.$$

Or nous avons identifié une *fonction* f localement sommable sur G avec la *distribution* $f(x)\,dx$: si f est différentiable et si Δ est un opérateur différentiel quelconque sur G, la *distribution* à laquelle s'identifie la *fonction* Δf [c'est-à-dire la distribution $\Delta f(x)\,dx$] *n'est pas en général égale* à l'image $\Delta(f(x)\,dx)$ de la distribution $f(x)\,dx$ par l'opérateur Δ *pris au sens des distributions* précisé au n° 3, 3° ci-dessus (c'est-à-dire par transposition). Cependant la formule (1; 16) montre que :

PROPOSITION 1; 3. — *Si $\tilde{D}$ est un opérateur différentiel invariant à gauche, les distributions $\tilde{D}f(x)\,dx$ et $\tilde{D}(f(x)\,dx)$ coïncident pour toute fonction différentiable f : autrement dit, les dérivées de f au sens habituel s'identifient aux dérivées au sens distribution, pourvu qu'on se restreigne aux opérateurs différentiels invariants à gauche.*

Par contre, si Δ est par exemple un champ de vecteurs invariant *à droite*, on a

$$(1;\,17)\qquad \Delta(f(x)\,dx) = (\Delta f(x) + \Delta\delta_G(e)\,f(x))\,dx.$$

Paragraphe 2. — **Représentations d'un groupe de Lie.**

1. Généralités sur les représentations continues. — Soient G un groupe localement compact séparable et E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Une « *représentation* » de G dans E est un homomorphisme $x \to U_x$ de G dans le groupe des opérateurs continus inversibles de E. Il est naturel d'imposer à cet homomorphisme certaines conditions de *continuité* : si E est un espace de Banach, on impose classiquement la condition suivante :

(RC I) *Pour tout* $a \in E$, *l'application* $x \rightarrow U_x a$ *est continue de* G *dans* E.

Autrement dit, U_x est continue de G dans $L(E; E)$ muni de la topologie de la convergence simple ([5]). Dans le cas d'espaces E plus généraux, nous imposerons de plus à U la condition :

(RC II) *Pour tout compact* K *de* G, *l'ensemble des opérateurs* U_x *pour* $x \in K$, *est équicontinu dans* E.

Nous dirons que la représentation U est *continue* si elle vérifie (RC I) et (RC II) [ou, ce qui est équivalent, si l'application $(x, a) \rightarrow U_x a$ est continue de $G \times E$ dans E]. La condition (RC II) est une conséquence de (RC I) si l'espace E est *tonnelé* [5], un compact de $L_s(E; E)$ étant alors équicontinu, donc en particulier si E est un espace de Banach ou de Fréchet. D'autre part, si U satisfait à (RC II), il suffit pour montrer que U est continue, de vérifier (RC I) pour a décrivant un ensemble *total* dans E : cela résulte des propriétés classiques des ensembles équicontinus ([2]), p. 28-32).

Exemple. — *Représentations régulières.* — Si f est une fonction sur G à valeurs dans E, nous noterons $\tau_x f$ la fonction $y \rightarrow f(yx)$ pour $x, y \in G$. Soit F un espace de fonctions sur G à valeurs dans E tel que $\tau_x f \in F$ pour $f \in F$ et $x \in G$: la représentation $x \rightarrow \tau_x$ sera appelée « *représentation régulière de* G *dans* F ». On montre facilement que cette représentation est continue pour la plupart des espaces fonctionnels usuels : dans le cas des espaces $L^p(E)$, la démonstration donnée dans [38] pour le cas scalaire s'étend immédiatement au cas général. Prenons pour F l'espace $\mathcal{C}(E)$ des fonctions continues à support compact muni de sa topologie habituelle, limite inductive des topologies de la convergence uniforme sur les espaces $\mathcal{C}_K(E)$: (RC I) est une conséquence immédiate de la continuité uniforme d'une fonction de $\mathcal{C}(E)$. Pour démontrer (RC II), il suffit de montrer que pour tout compact K de G et tout voisinage V de O dans $\mathcal{C}(E)$, $W = \bigcap_{x \in K} \tau_x^{-1} V$ est un voisinage de O, ou encore d'après la définition même des voisinages de O dans $\mathcal{C}(E)$, que pour tout compact k de G, $W \cap \mathcal{C}_k(E)$ est un voisinage de O dans $\mathcal{C}_k(E)$. Or il existe un voisinage v de O dans E tel que les conditions $f \in \mathcal{C}_{kK^{-1}}(E)$, $f(y) \in v$ pour tout $y \in$ G entraînent $f \in V$, puisque $V \cap \mathcal{C}_{kK^{-1}}(E)$ est un voisinage de O dans $\mathcal{C}_{kK^{-1}}(E)$. Les conditions $f \in \mathcal{C}_k(E)$, $f(y) \in v$ pour tout $y \in G$ entraînent donc $\tau_x f \in V$ pour tout $x \in K$, donc $f \in W$; par suite $W \cap \mathcal{C}_k(E)$ est un voisinage de O dans $\mathcal{C}_k(E)$.

C. Q. F. D.

---

(5) Rappelons qu'on désigne par $L_s(E; E)$ [resp. $L_b(E; E)$] l'espace $L(E; E)$ muni de la topologie de la convergence simple (resp. de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de E).

Si G est un *groupe de Lie*, les représentations régulières de G dans $\mathcal{E}(E)$ et dans $\mathcal{D}(E)$ sont également *continues* : c'est immédiat pour $\mathcal{E}(E)$ et pour $\mathcal{D}(E)$, il suffit de reprendre le raisonnement fait ci-dessus pour $\mathcal{C}(E)$ en remplaçant la condition « il existe ν tel que $f(y) \in \nu$ » par la condition « il existe ν et un entier m tel que $D_1^{p_1} \dots D_q^{p_q} f(y) \in \nu$ pour tout système $(p_1, \dots, p_q)$ d'entiers $\geqq 0$ avec $p_1 + \dots + p_q \leqq m$ », $D_1, \dots, D_q$ étant une base de l'espace vectoriel des opérateurs différentiels d'ordre 1 invariants à gauche sur G.

Nous supposerons désormais E *complet* (6). Soient U une représentation continue de G dans E et μ une mesure à support compact sur G : il lui correspond un opérateur U_μ dans E défini par

$$(2;\ 1) \qquad U_\mu a = \int_G U_x a \, d\mu(x) \qquad (a \in E)$$

$\left[\text{c'est-à-dire } U_\mu = \int_G U_x d\mu(x) \text{ dans le complété de } L_s(E; E)\right]$. Si a tend vers zéro dans E, $U_x a \to 0$ uniformément sur tout compact d'après (RC II) : U_μ est donc un opérateur *continu* dans E. Si $f \in \mathcal{C}_G$ espace des fonctions continues à support compact sur G, nous noterons U_f l'opérateur associé à la mesure $f(x)\, d_G(x)$. Remarquons que si l'on prend comme mesure μ la mesure de Dirac ε_x au point x de G, on a $U_{\varepsilon_x} = U_x$. Il est immédiat que l'application $\mu \to U_\mu$ est une représentation dans $L(E; E)$ de l'algèbre (pour le produit de composition) $\mathcal{M}_G$ des mesures à support compact sur G. Cette représentation est continue de $\mathcal{M}$ dans $L_b(E; E)$ si l'on munit $\mathcal{M}$ de la topologie limite inductive des topologies définies par la norme $\int d|\mu|$ sur les sous-espaces $\mathcal{M}_K$ des mesures à support contenu dans le compact K de G : en effet si a décrit un borné de E et x un compact K de G, $U_x a$ décrit un borné B de E, d'enveloppe convexe équilibrée fermée $\check{B}$ bornée et pour toute $\mu \in \mathcal{M}_K$, on a

$$(2;\ 2) \qquad U_\mu a = \int U_x a \, d\mu(x) \in \left(\int d|\mu|\right) \check{B}$$

et $U_\mu a \to 0$ uniformément pour a borné quand $\mu \to 0$ dans $\mathcal{M}_K$ donc aussi quand $\mu \to 0$ dans $\mathcal{M}$. D'autre part, on déduit facilement de (RC II) que l'ensemble des opérateurs U_μ pour μ décrivant un borné $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire un borné d'un $\mathcal{M}_K$) est *équicontinu* dans $L(E; E)$. En restreignant cette représentation à l'algèbre $\mathcal{C}$, on obtient évidemment une représentation continue de $\mathcal{C}$ muni de sa topologie habituelle dans $L_b(E; E)$. Réciproquement :

Proposition 2; 1. — *Soit $f \to U_f$ une représentation continue de l'algèbre $\mathcal{C}$ dans $L_b(E; E)$. Elle correspond à une représentation continue de G dans E*

(6) Quasi complet suffirait.

si et seulement si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

a. les vecteurs de la forme $U_f a$ $(a \in E,\ f \in \mathcal{C})$ *forment un ensemble total dans* E;

b. l'ensemble des opérateurs U_f *pour* f *de support contenu dans un compact fixe arbitraire de* G *et telle que* $\int |f|\, dx \leqq 1$, *est équicontinu.*

La nécessité de b résulte de ce qui précède. D'autre part, pour tout voisinage V compact de l'élément x de G, considérons les fonctions g_V de $\mathcal{C}$, $\geqq 0$, à support dans V et telles que $\int g_V\, dx = 1$: on obtient ainsi quand V « converge vers x » un filtre Φ_x sur $\mathcal{C}$ et les mesures $g_V(x)\, dx$ convergent vaguement suivant Φ_x vers ε_x en restant bornées dans $\mathcal{M}$ (pour V suffisamment petit). Par suite $g_V \star f \to \varepsilon_x \star f$ pour toute $f \in \mathcal{C}$ et $U_{g_V} a \to U_x a$ pour tout $a \in E$: d'où la nécessité de a.

Réciproquement, soit $f \to U_f$ vérifiant a et b. Soit Ψ_x l'image de Φ_x par U et soit F le sous-espace (dense dans E) des vecteurs de la forme $\sum_{i=1}^{n} U_{f_i} a_i$ $(f_i \in \mathcal{C},\ a_i \in E)$; $U_{g_V}(\Sigma U_{f_i} a_i) = \Sigma_{g_V \star f_i} a_i$ converge suivant Φ_x vers $\Sigma U_{\varepsilon_x \star f_i} a_i$ et par suite $\Sigma U_{f_i} a_i = 0$ entraîne $\Sigma U_{\varepsilon_x \star f_i} a = 0$: on définit un opérateur U_x dans F en posant

$$U_x(\Sigma U_{f_i} a_i) = U_{\varepsilon_x \star f_i} a_i. \tag{2; 3}$$

Le filtre Ψ_x converge vers U_x sur l'ensemble total F : comme Ψ_x contient un ensemble *équicontinu* d'après b et que E est *complet*, U_x se prolonge en un opérateur continu dans E et Ψ_x converge vers U_x dans $L_s(E; E)$. Quand x décrit un compact K de G, l'ensemble des U_x est équicontinu comme contenu dans l'adhérence de l'ensemble équicontinu des U_{g_V} pour V voisinage compact de K. Enfin pour toute $f \in \mathcal{C}$, $x \to \varepsilon_x \star f$ est continue de G dans $\mathcal{C}$, donc $x \to U_x a$ est continue de G dans E pour $a \in F$: par suite $x \to U_x$ est une représentation continue de G dans E. Il ne reste plus qu'à montrer que U_f lui est bien associée, ce qui résulte immédiatement de la formule $f \star g(y) = \int \varepsilon_y \star g(x) f(x)\, dx$ dans G.

Remarque 2; 1. — La condition b entraîne que l'application $f \to U_f$ est continue de $\mathcal{C}_K$ dans $L_b(E; E)$ pour tout compact K, donc de $\mathcal{C}$ dans $L_b(E; E)$.

Remarque 2; 2. — La proposition 1 (ainsi que sa démonstration) est calquée sur celle donnée dans ([19], p. 502, note 1) pour les représentations dans des espaces de Banach.

2. Représentation contragédiente. Produit tensoriel. — Soit U une représentation continue de G dans E. On en déduit par transposition une représentation $U' : x \to {}^tU_x^{-1}$ de G dans E' muni de la topologie *forte* (7). U' satisfait à (RC II), car le transposé d'un ensemble équicontinu dans $L(E, E)$ est équicontinu dans $L(E'; E')$: en effet les voisinages de O dans E' sont les polaires B^0 des ensembles bornés B de E. L'ensemble des Aa pour $a \in B$ et A décrivant un équicontinu de $L(E; E)$ est un borné B_1 et ${}^tAB_1^0 \subset B^0$, ce qui montre que l'ensemble des ${}^tA$ est équicontinu. Malheureusement U' ne satisfait pas en général à (RC I). Soit alors $\check{E}$ le sous-espace formé des $a' \in E'$ tels que l'application $x \to {}^tU_x^{-1}a'$ soit continue de G dans E' : il est immédiat [puisque U' satisfait à (RC II)] que $\check{E}$ est *fortement fermé* dans E'.

Définition 2; 1. — *Nous appellerons « représentation contragrédiente » de la représentation U et nous noterons $\check{U}$ la représentation continue $x \to {}^tU_x^{-1}$ de G dans l'espace $\check{E}$.*

D'autre part, l'application $f \to {}^tU_{f'}$ est une représentation de $\mathcal{C}$ dans $L(E'; E')$ satisfaisant à la condition b de la proposition 2; 1, donc est continue de $\mathcal{C}$ dans $L_b(E'; E')$. Comme l'application $x \to \varepsilon_x \star f$ est continue de G dans $\mathcal{C}$, l'application $x \to {}^tU_{(\varepsilon_x \star f)'}a' = {}^tU_x^{-1}\,{}^tU_{f'}a'$ de G dans E' est continue pour tout $a' \in E'$. Par suite $\check{E}$ contient tous les éléments de E' de la forme ${}^tU_fa'$ pour $f \in \mathcal{C}$ et $a' \subset E'$. $\check{E}$ est même exactement l'adhérence dans E' (fort) du sous-espace engendré par ces éléments, car si $a' \in \check{E}$ et $f \in \mathcal{C}$, l'intégrale (faible) $\int f''(x)\,{}^tU_x^{-1}a'\,dx$ existe (a *priori* dans le dual algébrique du dual de $\check{E}$) et est égale à ${}^tU_fa'$ (prendre le produit scalaire avec un élément de E). Or si $f \to \varepsilon_e$ suivant le filtre Φ_e défini au numéro précédent, $\int f''(x)\,{}^tU_x^{-1}a'\,dx$ tend vers a' dans $\check{E}$, d'où $a' = \lim {}^tU_fa'$. Enfin $\check{E}$ est *faiblement dense* dans E' : sinon il existerait un $a \neq 0$ dans E orthogonal à $\check{E}$, donc tel que $U_fa = 0$ pour toute $f \in \mathcal{C}$: mais a est adhérent à l'ensemble des U_fa d'où

(7) Pour tout $a' \in E'$, l'application $x \to {}^tU_x^{-1}a'$ est continue de G dans E' muni de la topologie de la convergence *compacte* (noté E'_c), car si $x \to e$, $U_xa \to a$ uniformément sur tout compact de E d'après les propriétés d'équicontinuité des U_x. D'autre part les opérateurs ${}^tU_x^{-1}$ pour $x \in K$ compact de G, forment un équicontinu de $L(E'_c; E'_c)$ (ce qui ne serait pas vrai pour la topologie faible de E') car les voisinages de e dans E'_c sont les polaires des compacts de E et $U_x a$ décrit un compact quand x et a décrivent des compacts : $x \to {}^tU_x^{-1}$ est donc une représentation continue de G dans E'_c tout entier. Cette représentation est irréductible si et seulement si U l'est, car E est le dual de E'_c ([10], prop. 14) et par suite l'orthogonal d'un sous-espace invariant fermé non trivial de E'_c (resp. E) est un sous-espace invariant fermé non trivial de E (resp. E'_c).

une contradiction. Cependant on a en général $\check{E} \neq E'$ (prendre par exemple la représentation régulière de G dans L^1 : $\check{E}$ est le sous-espace de $E' = L^\infty$ formé des fonctions uniformément continues) sauf si E est semi-réflexif (c'est-à-dire coïncide algébriquement avec son bidual), car dans ce cas un sous-espace fortement fermé de E' est aussi faiblement fermé.

Représentation conjuguée. — Soit i un *antiisomorphisme* [c'est-à-dire un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel réel tel que $i(\lambda a) = \bar{\lambda} i(a)$ pour λ complexe] de E sur un espace $\overline{E}$: nous appellerons « représentation conjuguée » de U et nous noterons $\overline{U}$ la représentation continue $x \rightarrow i.U_x.i^{-1}$ de G dans $\overline{E}$. Si U est une représentation unitaire dans un espace de Hilbert, on a $\overline{U} = \check{U}$ (en prenant pour i l'antiisomorphisme canonique de E sur son dual.

Produit tensoriel. — Reprenons les notations du paragraphe 1 (n° 2) et soit U^i une représentation continue d'un groupe G_i dans E_i $(i = 1, 2)$:

PROPOSITION 2; 2. — *Si pour tout compact K de G_i et tout ensemble $A \in \mathfrak{S}_i$, l'ensemble des $U^i_x a$, pour $a \in A$ et $x \in K$, appartient à $\mathfrak{S}_i (i = 1, 2)$, l'application $(x_1, x_2) \rightarrow U^1_{x_1} \otimes U^2_{x_2}$ est une représentation continue de $G_1 \times G_2$ dans $E_1 \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2} E_2$, appelée « produit tensoriel » de U^1 et de U^2.*

Posons $H = E_1 \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2} E_2$. Montrons que les opérateurs $U^1_{x_1} \otimes U^2_{x_2}$ décrivent un ensemble équicontinu d'opérateurs (continus) dans H quand x_i décrit un compact K_i de G_i : soit V un voisinage de O dans H; le polaire V^0 de V est un équicontinu de H'. L'ensemble des formes bilinéaires $(a_1, a_2) \rightarrow B(U^1_{x_1} a_1, U^2_{x_2} a_2)$ pour $B \in V^0$, $x_i \in K_i$ est un équicontinu de H' car si par exemple a_1 décrit un ensemble de $\mathfrak{S}_1$, et x_1 le compact K_1, $U^1_{x_1} a_1$ décrit un ensemble A de $\mathfrak{S}_1$, les $U^i_{x_1}$ sont équicontinus pour $x_i \in K_1$ et les B sont équicontinues sur $A \times E_2$: c'est donc le polaire d'un voisinage V_1 de O dans H et on a immédiatement $U^1_{x_1} \otimes U^2_{x_2} V_1 \subset V$ pour $x_i \in K_i$: d'où l'équicontinuité cherchée.

Enfin l'application $(x_1, x_2) \rightarrow U^2_{x_1} \otimes U^2_{x_2} h$ est continue quand $h = a_1 \otimes a_2$ décrit l'ensemble total image canonique de $E_1 \times E_2$ dans H : soit Ω_1 un ouvert relativement compact de G_1 : $U_{x_1} a_1$ décrit un ensemble A de $\mathfrak{S}_1$ pour $x_1 \in \Omega_1$, l'application $(x_1, x_2) \rightarrow (U^1_{x_1} a_1, U^2_{x_2} a_2)$ est continue de $\Omega_1 \times G_2$ dans $A \times E_2$ et l'application canonique de $A \times E_2$ dans H est continue, d'où la continuité de l'application $(x_1, x_2) \rightarrow U^1_{x_1} \otimes U^2_{x_2} (a_1 \otimes a_2)$ sur $\Omega_1 \times G_2$, donc sur $G_1 \times G_2$.

On peut en particulier prendre comme famille $\mathfrak{S}_i$ la famille de tous les ensembles de E_i, la famille des ensembles bornés ou des ensembles compacts, ou encore, si U^i est la représentation contragrédiente d'une représentation continue, la famille des ensembles équicontinus de E_i ([8]).

([8]) La représentation $U^1 \otimes U^2$ est aussi continue pour la topologie ε de M. GROTHENDIECK [20].

Si $G_1 = G_2 = G$, nous appellerons encore, par abus de langage, « produit tensoriel », et nous noterons $U^1 \otimes U^2$, la représentation de G obtenue par restriction de la représentation $U^1 \otimes U^2$ de $G_1 \times G_2$ au sous-groupe « diagonal » $\tilde{G}$ des éléments de la forme (x, x) avec $x \in G$, identifié canoniquement à G.

3. Représentations différentiables. — G désigne de nouveau désormais un *groupe de Lie.*

Soit U une représentation continue de G dans E; nous dirons qu'un élément a de E est *différentiable* (pour U), si la fonction à valeurs dans E, $x \to U_x a$ est indéfiniment différentiable sur G. Soit $\tilde{a}$ cette fonction et soit E^0 le sous-espace des éléments différentiables : il est clair que E^0 est stable pour les opérateurs U_x. Soit μ une mesure à support compact : on a pour $a \in E$ et $y \in G$:

$$(2;\,4) \qquad U_y U_\mu a = \int U_{yx}\, a\, d\mu(x) = \tilde{a} \star \mu'(y).$$

Par suite, d'après la proposition (1; 2), si μ est une fonction indéfiniment différentiable, $U_\mu a$ est différentiable [12]. Or il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{D}_G$ telles que les mesures associées soient bornées dans $\mathcal{M}_G$ et convergent vaguement vers ε_e : pour tout $a \in E$, on a alors $a = \lim U_{f_n} a$ et par suite E^0 *est dense dans E.*

Soit α une distribution à support compact sur G : on peut définir un opérateur U_α par une formule analogue à (1), à condition que $a \in E^0$ et (4) est encore valable, ce qui montre que U_α est un opérateur *dans* E^0 : il est clair qu'on obtient ainsi une représentation de l'algèbre $\mathcal{E}'$.

Nous allons mettre sur E^0 une topologie : l'application $a \to \tilde{a}$ identifie E^0 à un sous-espace de $\mathcal{E}_G(E)$. Ce sous-espace est *fermé*, car si des $\tilde{a}_\iota$ convergent vers f dans $\mathcal{E}(E)$, on a $f(x) = U_x f(e)$ puisqu'on a $\tilde{a}_\iota(x) = U_x \tilde{a}_\iota(e)$, et f est la fonction $\tilde{a}$ associée à l'élément $a = f(e)$ de E^0. Nous considérerons désormais E^0 comme muni de la *topologie induite* par celle de $\mathcal{E}(E)$: E^0 est *complet* pour cette topologie et c'est un *espace de Fréchet* si E est un Fréchet (en particulier si E est un Banach).

D'après la proposition 1; 2, les opérateurs U_α pour $\alpha \in \mathcal{E}'$ sont *continus* dans E^0 et les opérateurs U_f pour $f \in \mathcal{D}$ sont continus de E dans E^0. En particulier les opérateurs U_x restreints à E^0 définissent une représentation de G dans E^0 qu'on peut considérer comme la restriction de la représentation régulière de G dans $\mathcal{E}(E)$ au sous-espace des fonctions $\tilde{a}$: par suite cette représentation est *continue* et de plus l'application $x \to U_x a$ est différentiable de G dans E^0 pour tout $a \in E^0$ [autrement dit $(E^0)^0 = E^0$] :

DÉFINITION 2; 2. — *Nous appellerons « représentation différentiable associée à U » et nous noterons U^0 la restriction de U au sous-espace E^0 muni de sa topologie.*

Proposition 2; 3. — *Les quatre conditions suivantes sont équivalentes.*

a. l'application $a \to \tilde{a}$ *est un isomorphisme topologique de* E *dans* $\mathcal{E}(E)$ [*autrement dit* $E = E^0$ *avec coïncidence des topologies* ([9])];

b. les opérateurs U_D (*pour* $D \in \mathcal{E}'_e$) *sont continus dans* E^0 *muni de la topologie induite par* E *et par suite se prolongent en opérateurs continus dans* E;

c. l'application $x \to U_x$ *est une fois différentiable de* G *dans* $L_s(E, E)$;

d. L'application $x \to U_x$ *est indéfiniment différentiable de* G *dans* $L_b(E; E)$.

Démonstration. — 1° a et b sont équivalentes : nous avons vu que a entraîne b. Réciproquement soit $D \in \mathcal{E}'_e$ et soit $\tilde{D}$ l'opérateur différentiel invariant à gauche associé à D. On a pour tout $a \in E^0$:

$$(2;\ 5) \qquad \tilde{D}(U_x a) = \tilde{a} \star D(x) = U_x(\tilde{a} \star D(e)) = U_x U_{D'} a.$$

Si maintenant des $a_i \in E^0$ convergent vers $b \in E$, les fonctions $\tilde{a}_i$ sont indéfiniment différentiables, convergent vers $\tilde{b}$ et chaque dérivée $\tilde{D}\tilde{a}_i$ converge uniformément sur tout compact vers la fonction continue $U_x U_{D'} b$ d'après (5) et la continuité des opérateurs $U_{D'}$. Par suite $\tilde{b}$ est indéfiniment différentiable (donc $E = E^0$) et la convergence de b vers O dans E entraîne [toujours d'après (5)] la convergence vers O, uniformément sur tout compact, de chaque dérivée de $\tilde{b}$, donc la convergence vers O de b dans E^0 : les topologies de E et de E^0 coïncident donc.

2° a et c sont équivalentes : nous avons vu que a entraîne c. Réciproquement si U satisfait à c, les opérateurs U_X sont continus dans E^0 muni de la topologie induite par E pour tout élément X de l'algèbre de Lie de G, ce qui entraîne b donc a puisque tout $D \in \mathcal{E}'_e$ est de la forme $\sum_{i=1}^{i=q} X_{i_1} \dots X_{i_p}$ avec X_{i_j} élément de l'algèbre de Lie de G.

3° a et d sont équivalentes : d entraîne b donc a, puisqu'on a

$$U_D = (\tilde{D}' U_x)_{x=e} \qquad \text{pour} \quad D \in \mathcal{E}'_e.$$

Réciproquement si U satisfait à a, l'application $x \to U_x$ est différentiable de G dans $L_s(E; E)$ puisque pour tout $a \in E$, $U_x a$ est différentiable. Or d'après un lemme de M. L. Schwartz [36], une application différentiable dans $L_s(E; E)$ est différentiable dans $L_b(E; E)$ si et seulement si ses dérivées sont continues dans $L_b(E; E)$: or pour tout $D \in \mathcal{E}'_e$, on a

([9]) Si E est un espace de Fréchet, $E^0 = E$ entraîne a, deux topologies comparables d'espaces de Fréchet étant identiques.

$\tilde{D}U_x = U_x U_{D'}$ [*cf.* (5)]. Par suite, il nous suffit de démontrer (puisque $U_{D'}$ est un opérateur continu) que l'application $x \to U_x$ est continue de G dans $L_b(E; E)$, ou encore que, quand $x \to e$, $U_x a \to a$ uniformément pour a décrivant un borné B de E. Or pour tout $D \in \mathcal{E}'_e$, les fonctions $\tilde{D}(U_x a) = U_x U_{D'} a$ sont uniformément bornées pour x décrivant un compact de G et a un borné de E, d'où résulte immédiatement (formule de Taylor) la convergence uniforme cherchée ([10]).

DÉFINITION 2; 3. — *Nous dirons que la représentation U est différentiable si elle vérifie l'une des quatre conditions équivalentes de la proposition* 2; 3.

La condition b montre immédiatement que la représentation régulière de G dans $\mathcal{E}(E)$ [ou dans $\mathcal{D}(E)$] est différentiable. Par suite, pour toute représentation continue U, la « représentation différentiable » associée U^0 est différentiable, ce qui justifie la terminologie adoptée.

PROPOSITION 2; 4. — *Si U est différentiable, on a $\check{E} = E'$ et $\check{U}$ est différentiable* ([11]).

La transposition est une application continue de $L_b(E; E)$ dans $L_s(E'; E')$: par suite $x \to \check{U}_x$ est continue de G dans $L_s(E'; E')$, ce qui entraîne $\check{E} = E'$, et même différentiable, ce qui entraîne $\check{E}^0 = E'$. Enfin les opérateurs $\check{U}_D$ sont continus comme transposés d'opérateurs continus et par suite $\check{U}$ est différentiable.

PROPOSITION 2; 5. — *Dans les hypothèses de la proposition* 2; 2, *si de plus U^i est différentiable et si pour toute distribution D_i de support e sur G_i, $U_{D_i}\,a$ décrit un ensemble de $\mathfrak{S}_i$ quand a décrit un ensemble de $\mathfrak{S}_i$, alors la représentation produit tensoriel $U^1 \otimes U_2$ de $G_1 \times G_2$ dans $H = E_1 \hat{\otimes}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2} E_2$ est différentiable.*

Soit $a_i \in E_i$, X_i un élément de l'algèbre de Lie de G_i, t un nombre réel : on a

$$(2;6)\quad \frac{1}{t}[U^1 \otimes U^2)_{\exp t(X_1, X_2)} - 1]\, a_1 \otimes a_2$$
$$= \left(\frac{1}{t}(U^1_{\exp t X_1} - 1)\, a_1\right) \otimes a_2 + (U^1_{\exp t X_1} \otimes 1)\, a_1 \otimes \left(\frac{1}{t}(U^2_{\exp t X_2} - 1)\, a_2\right).$$

([10]) Remarquons que $D(U_x) = U_x U_{D'}$ décrit un équicontinu de $L(E; E)$ quand x décrit un compact de G.

([11]) $\check{E}$ n'est pas en général *complet* : on peut cependant parler du sous-espace différentiable $\check{E}^0$ formé des $a' \in \check{E}$ tels que $x \to \check{U}_x a'$ soit différentiable. Pour toute $f \in \mathcal{D}$ et tout $a' \in \check{E}$, ${}^t U_f a' \in \check{E}^0$, ce qui montre que $\check{E}^0$ est toujours *dense* dans $\check{E}$. D'autre part, la proposition 2; 3 reste valable si l'on ne suppose pas E complet (pourvu que E^0 soit dense dans E pour la condition b).

Quand $t \to 0$, $\frac{1}{t}(U^1_{\exp tX_i} - 1)\,a_i$ tend vers $U_{X_i}a_i$ et les opérateurs $U^1_{\exp tX_1} \otimes 1$ décrivent un équicontinu dans H : par suite le premier membre de (6) tend vers $U^1_{X_1}a_1 \otimes a_2 + a_1 \otimes U^2_{X_2}a_2$ quand $t \to 0$, autrement dit tout élément de $E_1 \otimes E_2$ est une fois différentiable, ses dérivées appartenant encore à $E_1 \otimes E_2$: donc $E_1 \otimes E_2 \subset \mathrm{H}^0$ et la proposition sera démontrée si nous montrons que les opérateurs $U^1_{X_1} \otimes 1 + 1 \otimes U^2_{X_2}$ sont continus, ou encore que l'application bilinéaire $(a_1, a_2) \to U^1_{X_1}a_1 \otimes a_2 + a_1 \otimes U^2_{X_2}a_2$ est $\mathfrak{S}_1$-$\mathfrak{S}_2$-hypocontinue, ce qui est évident avec les hypothèses faites.

Proposition 2; 6. — *La représentation continue U est topologiquement irréductible si et seulement si la représentation différentiable associée U^0 l'est.*

Supposons *U réductible* et soit F un sous-espace invariant fermé non trivial : $F \cap E^0$ est un sous-espace invariant de E^0, fermé pour la topologie induite par E sur E^0 donc *a fortiori* fermé dans E^0. Pour toute $f \in \mathcal{D}$ et tout $a \in F$, $U_f a \in F \cap E^0$: par suite $F \cap E^0$ est dense dans F donc non nul et distinct de E^0 puisque son adhérence dans E, F, est distincte de l'adhérence E de E^0 : donc U^0 est réductible.

Supposons maintenant *U irréductible* et soit F^0 un sous-espace fermé invariant non nul de E^0; F^0 est dense dans E, pour tout $a \in E$ il existe un filtre d'éléments $a_\iota \in F^0$ tendant vers a dans E, donc tel que la fonction $\tilde{a}_\iota$ tende vers $\tilde{a}$ uniformément sur tout compact de G. Pour tout $f \in \mathcal{D}$, $\tilde{a}_\iota \star f$ tend vers $\tilde{a} \star f$ dans $\mathcal{E}(E)$ (prop. 1; 2) et par suite $U_f a_\iota$ tend vers $U_f a$ dans E^0 : F^0 contient donc tous les éléments de la forme $U_f a$, donc $F^0 = E^0$, U^0 est irréductible.

Paragraphe 3. — **Distributions quasi invariantes,**

1. Groupes d'homéomorphismes d'une variété. — Définition 3; 1. — *Nous dirons qu'un groupe localement compact (resp. un groupe de Lie) G est réalisé comme groupe d'homéomorphismes (resp. d'homéomorphismes analytiques) d'un espace localement compact (resp. d'une variété analytique réelle) M, ou plus simplement que G opère sur M, si l'on s'est donné une application continue (resp. analytique réelle) $(m, x) \to m.x$ de $M \times G$ dans M telle que :*

a. pour tout $x \in G$, l'application $m \to m.x$ est un homéomorphisme (resp. un homéomorphisme analytique) de M;

b. $(m.x_1).x_2 = m.(x_1 x_2)$ quels que soient $m \in M$, $x_1, x_2 \in G$.

Si f est une fonction sur M (à valeurs quelconques) nous noterons $\tau_x f$ la fonction $m \to f(m.x)$. Nous appellerons « *stabilisateur* » d'un point m de M et nous noterons Γ_m le sous-groupe de G formé des x tels que $m.x = m$.

Le but essentiel de ce numéro est de démontrer le lemme suivant :

LEMME 3; 1. — *Soit G un groupe localement compact dénombrable à l'infini (resp. un groupe de Lie) opérant sur un espace localement compact (resp. une variété analytique) M. Supposons qu'il n'y ait dans M qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable d'orbites suivant G. Pour toute orbite $Q = m.G$, il existe un ouvert Ω_Q de M, stable par G, dans lequel Q est un sous-ensemble fermé (resp. une sous-variété analytique fermée régulière). De plus, Q est homéomorphe (resp. isomorphe comme variété analytique) à l'espace homogène à droite G/Γ_m.*

Prenons d'abord le cas G et M localement compacts et soit U un voisinage compact de e dans G; pour tout $m \in M$, $m.U$ est un compact de l'orbite $Q = m.G$. Ou bien $m.U$ a un point *intérieur*, ce qui entraîne que l'orbite Q contient un ouvert, donc est *ouverte*, ou bien $m.U$ est *rare*, ce qui entraîne que Q est réunion dénombrable d'ensembles rares (de la forme $m.Ux$), c'est-à-dire est *maigre*. M étant un *espace de Baire*, la réunion des orbites ouvertes est un ouvert partout dense et la réunion des orbites est un ensemble fermé *rare*, ce qui montre qu'*une orbite est soit ouverte, soit rare*. Soit alors $Q = m.G$ une orbite : son adhérence $\overline{Q}$ est un espace localement compact sur lequel opère G et qui est réunion dénombrable d'orbites. Q étant dense dans $\overline{Q}$ n'est pas rare donc est *ouverte dans* $\overline{Q}$, l'ensemble Ω_Q réunion de Q et du complémentaire de $\overline{Q}$ est donc un ouvert de M, stable pour G, et dans lequel Q est fermée. D'autre part, l'application $x \to m.x$ définit une application continue biunivoque de G/Γ_m sur Q : pour montrer que cette application est un homéomorphisme, il suffit de montrer que l'image de tout voisinage compact U de e dans G est un voisinage de m dans Q. Soit V un voisinage compact de e tel que $VV^{-1} \subset U$: $m.V$ n'est pas rare dans $\overline{Q}$ (sinon Q serait maigre dans $\overline{Q}$) donc est un voisinage dans Q d'un de ses points $m.x$ ($x \in V$). Par suite $m.U$ qui contient $m.Vx^{-1}$ est un voisinage de m dans Q.

Supposons maintenant que G soit un groupe de Lie (dénombrable à l'infini suivant nos conventions générales) opérant analytiquement sur la variété analytique M. Pour fixer la terminologie nous dirons qu'un sous-ensemble E de M est un « *sous-ensemble analytique* » de M si pour tout point m de E il existe un voisinage ouvert U de m dans M tel que $E \cap U$ soit l'ensemble des zéros communs à un certain nombre de fonctions analytiques dans U. Si E est *fermé*, cette condition est alors réalisée pour tout point m *de* M et réciproquement. Un point m de E sera dit ***régulier*** si l'on peut choisir U et des coordonnées analytiques dans U de manière que les fonctions précédentes soient linéaires homogènes par rapport à ces coordonnées, *singulier* dans le cas contraire. E lui-même sera dit régulier si tous ses points le sont : E est alors muni naturellement d'une structure de variété analytique et nous dirons également que E est une *sous-variété régulière* de M (fermée ou non)

Nous dirons d'autre part qu'un sous-ensemble E de M est une « *sous-variété localement régulière* » s'il existe une variété analytique X dénombrable à l'infini et une application analytique φ de X dans M telle que $\varphi(X)=E$ et que pour tout point x *de* X il existe un voisinage V de x et un voisinage ouvert U de $m=\varphi(x)$ tels que $\varphi(V)$ soit une sous-variété régulière fermée de U. Un point m de E sera dit *régulier* s'il existe un voisinage ouvert U de m tel que $E\cap U$ soit une sous-variété régulière fermée de U.

Le lemme 3; 1 (dans le cas analytique) va résulter du lemme suivant :

Lemme 3; 2. — *Soit G un groupe de Lie opérant analytiquement sur une variété analytique M : les orbites de M suivant G sont des sous-variétés localement régulières.*

Soit m un point de M : l'application $x\to\varphi(x)=m.x$ est une application analytique de G dans M et $\varphi(G)$ est l'orbite $Q=m.G$. Il est clair que le jacobien de cette application est de rang constant, soit $p\leqq r=\dim M$. Le théorème des fonctions implicites montre alors que pour tout x de G, on peut trouver un voisinage ouvert V de x, un voisinage ouvert U de $m.x$ et des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_r$ analytiques dans U et nulles en $m.x$ tels que $\varphi(V)\cap U$ soit l'ensemble des solutions dans U des équations $z_k=\psi_k(z_1, \ldots, z_p)$ pour $p<k\leqq r$, les ψ_k étant analytiques dans un voisinage de l'origine dans R^p. On tire facilement le résultat cherché de ceci, en prenant comme nouvelles coordonnées locales dans U, $z'_i=z_i$ pour $1\leqq i\leqq p$ et $z'_k=z_k-\psi_k(z_1, \ldots, z_p)$ pour $p<k\leqq r$.

Revenons au lemme 1 dans le cas analytique : nous avons vu que l'application φ définit par passage au quotient un homéomorphisme $\tilde{\varphi}$ de G/Γ_m sur Q, ce qui entraîne que Q se réduit au voisinage de m à $\varphi(V)$, donc est une sous-variété régulière fermée de Ω_Q. Enfin Q est analytiquement isomorphe à G/Γ_m, car si le jacobien de $\tilde{\varphi}$ s'annulait en un point, il s'annulerait partout, ce qui est impossible puisque $\tilde{\varphi}$ est un homéomorphisme.

Nous allons démontrer un supplément au lemme 1 dans le cas analytique : soit M^1 le complémentaire dans M de la réunion des orbites ouvertes, M^2 le complémentaire dans M^1 de la réunion des orbites ouvertes dans M^1, etc. : M^i *est vide pour* $i>\dim M$ et plus généralement $\dim M^i\leqq\dim M-i$. Cela résultera du lemme suivant :

Lemme 3; 3. — *Soit E un sous-ensemble analytique d'une variété analytique : l'ensemble des points réguliers de E est un ouvert partout dense dans E et l'ensemble S des points singuliers est un ensemble de dimension topologique strictement plus petite que la dimension topologique de E.*

Il est clair que ce lemme est purement local : on peut donc supposer qu'on a affaire à un « germe de sous-ensemble analytique réel » à l'origine dans R^n. On peut alors plonger canoniquement R^n dans l'espace C^n et considérer le plus petit germe de sous-ensemble analytique complexe à l'origine contenant E, soit $\tilde{E}$: $\tilde{E}$ est le germe associé à l'idéal I des fonctions holomorphes à l'origine s'annulant sur E. Comme E est défini par des équations analytiques, il est clair que $E = \tilde{E} \cap R^n$. D'autre part $\tilde{E}$ est stable par le semi-automorphisme de C^n défini par R^n, car si $\varphi \in I$, la fonction $z \to \overline{\varphi(\bar{z})}$ appartient évidemment à I. Le germe $\tilde{E}$ est réunion (d'une manière et d'une seule si l'on suppose $\tilde{E}_i$ non contenu dans $\tilde{E}_j$ pour $i \neq j$) d'un nombre fini de germes irréductibles $\tilde{E}_i$. Chaque E_i est invariant par $z \to \bar{z}$: sinon l'image $\overline{\tilde{E}}_i$ de $\tilde{E}_i$ par cette transformation serait un germe analytique contenu dans un autre $\tilde{E}_j$ et la réunion des $\tilde{E}_k$ pour $k \neq i$ serait un germe analytique contenant E et strictement plus petit que $\tilde{E}$, ce qui est impossible. Nous dirons qu'un point z de $\tilde{E}$ est régulier s'il n'appartient qu'à un seul $\tilde{E}_i$ et est un point régulier de $\tilde{E}_i$ au sens de [7]. On sait (*cf.* [7], exposé IX) que les points réguliers forment un ouvert dense dans $\tilde{E}$ et que l'ensemble des points singuliers est un sous-ensemble analytique de dimension complexe strictement plus petite que la dimension complexe de $\tilde{E}$, notée $\dim_c \tilde{E}$.

Dans tout voisinage de O dans R^n, il y a des points de E qui sont des points réguliers de $\tilde{E}$: sinon le germe E serait contenu dans le germe des points singuliers de $\tilde{E}$, contrairement à l'hypothèse que $\tilde{E}$ est le plus petit germe contenant E. Or un point m de E qui est un point régulier de $\tilde{E}$ est un point régulier de E : en effet il existe des fonctions analytiques complexes $\psi_j(z_1, \ldots, z_n)$ $(1 \leq j \leq n)$ formant un système de coordonnées locales dans un voisinage U de m dans C^n telles que $\tilde{E} \cap U$ soit l'ensemble des solutions des équations $\psi_j = 0$ pour $1 \leq j \leq p$. Comme $\tilde{E}$ est invariante par $z \to \bar{z}$, on peut supposer que les ψ_j sont réelles pour z réel $\Big($remplacer les ψ_j par un système de coordonnées locales extrait du système $u_j = \psi_j(z) + \overline{\psi_j(\bar{z})}$; $v_j = i(\psi_j(z) - \overline{\psi_j(\bar{z})})$, système dont le jacobien est évidemment de rang n, puisque les $\psi_j = \frac{1}{2}(u_j - iv_j)$ forment un sytème de coordonnées$\Big)$. Les ψ_j forment alors un système de coordonnées réelles dans $U \cap R^n$ et $E \cap U$ est défini par l'annulation des p premières coordonnées : m est donc régulier et E est muni au voisinage de m d'une structure de variété analytique réelle de dimension topologique égale à la dimension complexe de $\tilde{E}$ au point m. Nous avons donc déjà démontré que l'ensemble E^0 des points de E qui sont des points réguliers de $\tilde{E}$ est un ouvert dense dans E de dimension topologique $\dim_c \tilde{E}$.

Soit alors F l'ensemble des points de R^n voisins de l'origine qui sont des points singuliers de $\tilde{E}$: $\tilde{E}$ est invariant par $z \to \bar{z}$, donc aussi l'ensemble de ses points singuliers et F est un germe de sous-ensemble analytique réel.

Soit $\tilde{F}$ le plus petit germe analytique complexe contenant F : on a $\dim_c \tilde{F} < \dim_c \tilde{E}$ et $\dim S \leq \dim F$. Nous allons montrer par récurrence sur $\dim_c \tilde{E}$ que $\dim E = \dim_c \tilde{E}$ et que $\dim S < \dim E$: c'est évident si $\dim_c \tilde{E} = 0$, car E est alors formé de points isolés (au voisinage de l'origine) et S est vide. Supposons donc les deux propriétés en question vraies pour $\dim_c \tilde{E} < p$ et soit E tel que $\dim_c \tilde{E} = p$: comme $\dim_c \tilde{F} < \dim_c \tilde{E}$, on a $\dim F \leq p - 1$ et par suite $\dim S \leq p - 1$. Comme $E = E^0 \cup S$ et que $\dim E^0 = \dim_c \tilde{E}$, on a $\dim E = \max\left(\dim S, \dim_c \tilde{E}\right) = \dim_c \tilde{E}$, d'où $\dim S < \dim E$.

Le lemme 3 permet d'étendre aux sous-ensembles analytiques un résultat classique dans $\mathbf{R}^n$ (et donc sur une variété topologique) : un sous-ensemble *rare* A d'un sous-ensemble analytique E est de dimension strictement plus petite que $\dim E$: en effet $A \cap E^0$ est rare dans E^0 d'où

$$\dim A = \max\left(\dim A \cap S, \dim A \cap E^0\right) < \dim E.$$

Revenons à notre assertion sur les M^i : nous allons démontrer par récurrence sur i que $\dim M^i \leq \dim M - i$ (d'où immédiatement $M^i = \emptyset$ pour $i > \dim M$) : c'est vrai pour $i = 0$ (en posant $M^0 = M$). Supposons donc $\dim M^i \leq \dim M - i$. Chaque orbite de M^i étant de dimension $\leq \dim \mathrm{M} - i$, M^i est contenu dans l'ensemble N^i des points m de M tels que l'application $x \to m.x$ de G dans M soit de rang $\leq \dim M - i$. N^i est un sous-ensemble analytique fermé de M, défini localement par l'annulation des mineurs d'ordre $> \dim \mathrm{M} - i$ du jacobien de $x \to m.x$ et N^i est de dimension $\leq \dim \mathrm{M} - i$ comme réunion dénombrable d'orbites de dimension $\leq \dim M - i$. M^{i+1} étant rare dans M^i l'est *a fortiori* dans N^i et par suite $\dim M^{i+1} \leq \dim N^i - 1 \leq \dim M - i - 1$. C. Q. F. D.

2. Distributions quasi invariantes. — Soit G un groupe de Lie opérant sur une variété analytique M et soit E un espace vectoriel localement convexe séparé complet.

DÉFINITION 3; 2. — *Nous appellerons « E-multiplicateur » sur M relativement à G une fonction $A(m, x)$ sur $M \times G$ à valeurs dans $L(E; E)$, vérifiant*

$$(3; 1) \qquad A(m, e) = 1;$$

$$(3; 2) \qquad A(m, xy) = A(my^{-1}, x)\, A(m, y) \qquad (m \in M;\ x, y \in G).$$

Nous dirons que A est « différentiable » si l'application $(m, x) \to A(m, x)$ est indéfiniment différentiable de $M \times G$ dans $L_s(E; E)$ et si l'image d'un compact de $M \times G$ par une dérivée quelconque de A est équicontinue dans $L(E; E)$.

Si U est une représentation différentiable de G dans E, la fonction $A(m, x) = U_x$ est un E-multiplicateur différentiable sur M.

Soit A un E-multiplicateur : on déduit de (1) et (2) en remplaçant x par y^{-1} dans (2) :

$$(3;\ 3)\qquad 1 = A(my^{-1}, y)\, A(m, y),$$

puis en remplaçant dans (3) m par $m.y$ et y par y^{-1} :

$$(3;\ 4)\qquad 1 = A(m, y)\, A(m.y^{-1}, y^{-1}).$$

Par suite $A(m, y)$ est *inversible*, d'inverse $A(m.y^{-1}, y^{-1})$.

D'autre part si $f \in \mathcal{C}_M(E)$ et si $B(m)$ est une fonction continue à valeurs dans $L_s(E;\ E)$ et telle que l'image d'un compact de M par B soit équicontinue dans $L(E;\ E)$, la fonction $m \to B(m) f(m)$ est continue à support compact et tend vers zéro dans $\mathcal{C}_M(E)$ avec f. On en déduit immédiatement que si A est un E-multiplicateur différentiable, l'application qui à $f \in \mathcal{D}_M(E)$ fait correspondre la fonction $m \to A^{-1}(m, x) f(m)$ est un *automorphisme* de $\mathcal{D}_M(E)$, ce qui justifie la définition suivante :

DÉFINITION 3; 3. — *Soit T une E-distribution et A un E-multiplicateur différentiable sur M. Nous dirons que T est quasi invariante de multiplicateur A si, pour toute $f \in \mathcal{D}_M(E)$ et tout $x \in G$, on a*

$$(3;\ 5)\qquad \int_M f(m.x)\, dT(m) = \int_M A^{-1}(m, x) f(m)\, dT(m).$$

REMARQUE 3; 1. — Si A est un E-multiplicateur différentiable sur M, l'application $\xi \to A(m, \xi)$ est, pour tout $m \in M$, une représentation différentiable du stabilisateur Γ_m dans E.

REMARQUE 3; 2. — On peut dans certains cas faire des hypothèses moins restrictives sur A dans la définition 3 : si par exemple T est une E-distribution d'ordre $\leq p$ $(0 \leq p < \infty)$, il suffit [pour que (5) ait un sens] de supposer que A est p fois différentiable, avec les conditions d'équicontinuité pour les dérivées d'ordre $\leq p$.

Nous commencerons notre étude des distributions quasi invariantes par le cas le plus simple : G opérant sur lui-même par les translations à droite et $A = 1$. On peut alors déterminer non seulement les E-distributions mais plus généralement les distributions à valeurs dans F invariantes par G (F espace localement convexe séparé complet) :

PROPOSITION 3; 1. — *Soit T une distribution à valeurs dans F* (resp. *une E-distribution*) *invariante par les translations à droite sur G : T est un « multiple » vectoriel de la mesure de Haar à droite, c'est-à-dire il existe un élément $a \in E$* (resp. $a' \in E'$) *tel que*

$$(3;\ 6)\qquad T(f) = a \int_G f(x)\, d_G(x) \qquad \left[\text{resp. } T(f) = \int \langle f(x), a' \rangle\, d_G(x)\right]$$

pour toute $f \in \mathcal{D}_G$ [resp. $f \in \mathcal{D}_G(E)$].

Soit en effet $T \in L(\mathcal{D}; F)$ invariante par les translations à droite : pour toute fonction $\alpha \in \mathcal{D}$, $\alpha \star T$ est une fonction indéfiniment différentiable sur G, à valeurs dans F et invariante par les translations à droite, donc constante. Or T est adhérente dans $L(\mathcal{D}, F)$ à l'ensemble des $\alpha \star T$, donc T est une constante. Si $T \in \mathcal{D}(E)'$, la proposition résulte immédiatement du plongement canonique de $\mathcal{D}(E)'$ dans $L(\mathcal{D}; E')$.

Plus généralement on a :

Proposition 3; 2. — *Soit $x \to U_x$ une représentation différentiable de G dans E et T une E-distribution sur G telle que*

$$(3;7) \qquad \int f(xy)\, dT(x) = \int U_y^{-1} f(x)\, dT(x).$$

Il existe un élément $a' \in E'$ et un seul tel que

$$(3;8) \qquad T(f) = \int \langle U_x f(x), a' \rangle\, dx.$$

En effet : U étant différentiable, l'application qui à $f \in \mathcal{D}(E)$ fait correspondre la fonction $U_x^{-1} f(x)$ est un automorphisme de $\mathcal{D}(E)$. Soit $\tilde{T}$ l'image de T par le transposé de cet automorphisme : on a

$$(3;9) \qquad \int f(xy)\, d\tilde{T}(x) = \int U_x^{-1} f(xy)\, dT(x) = \int U_y U_{xy}^{-1} f(xy)\, dT(x)$$
$$= U_y^{-1}(U_y U_x^{-1} f(x)\, dT(x) = \int f(x)\, d\tilde{T}(x),$$

$\tilde{T}$ est invariante par G, donc est une constante a' et l'on a

$$(3;10) \qquad T(f) = \int U_x f(x)\, dT(x) = \int \langle U_x f(x), a' \rangle\, dx.$$

Remarquons que la proposition 2 est encore valable si T est définie sur un ouvert Ω de G et vérifie (7) pour $f \in \mathcal{D}_\Omega(E)$ et y assez voisin de a : la distribution $\tilde{T}$ associée définie *a priori* elle aussi sur Ω, y sera invariante par translation, donc sera prolongeable à G tout entier, et le reste est sans changement. On peut même supposer que Ω est un voisinage ouvert de e et que U n'est qu'un « noyau de représentation » différentiable $x \to U_x$, défini dans Ω : la distribution associée $\tilde{T}$ sera encore une constante et (8) sera encore valable mais cette fois seulement pour $f \in \mathcal{D}_\Omega(E)$.

Le pas suivant dans notre étude des distributions quasi invariantes sera celui où G est *transitif* sur M : on peut alors identifier M à l'espace homogène des classes à droite modulo un sous-groupe fermé Γ, G opérant sur G/Γ par les translations à droite. Nous avons alors le théorème suivant, fondamental pour la suite de ce travail (pour les notations, *voir* § 1, n° 1) :

Théorème 3; 1. — *Soit T une E-distribution sur $M = G/\Gamma$ quasi inva-*

riante pour G, de E-multiplicateur différentiable A, c'est-à-dire vérifiant pour toute $f \in \mathcal{D}_{G/\Gamma}(E)$ et tout $y \in G$:

$$(3;\ 11) \qquad \int_{G/\Gamma} f(\dot{\widehat{xy}})\, dT(\dot{x}) = \int_{G/\Gamma} A^{-1}(\dot{x}, y) f(\dot{x})\, dT(\dot{x}).$$

Il existe un élément $a' \in E'$ et un seul, tel que

$$(3;\ 12) \qquad {}^tA(\dot{e}, \xi)\, a' = \rho_\Gamma(\xi)\, a' \qquad \text{pour tout } \xi \in \Gamma,$$

$$(3;\ 13) \qquad T(f) = \int_{G/\Gamma} \langle f(x), \rho_\Gamma(x)^{-1}\, {}^tA(\dot{x}, x)\, a' \rangle\, d\mu_\Gamma(\dot{x});$$

le second membre de (13) *ayant un sens, puisque d'après* (12), *le vecteur $\rho(x)^{-1}\, {}^tA(\dot{x}, x)\, a'$ ne dépend que de la classe $\dot{x}$.*

Démonstration. — Comme nous l'avons vu plus haut, l'application qui à $f \in \mathcal{D}_G(E)$ fait correspondre la fonction $x \to A^{-1}(\dot{x}, x) f(x)$ est un automorphisme de $\mathcal{D}_G(E)$: l'application $f \to \left(x \to \int_\Gamma A^{-1}(\dot{x}, \xi x) f(\xi x)\, d_\Gamma(\xi)\right)$ est donc *continue* de $\mathcal{D}_G(E)$ *sur* $\mathcal{D}_M(E)$ (*cf.* [38], p. 42, ou *infra*, prop. 4; 1). Soit $T \to \tilde{T}$ la transposée de cette application. On a

$$(3;\ 14) \qquad \int_G f(xy)\, d\tilde{T}(x) = \int_M dT(\dot{x}) \int_\Gamma A^{-1}(\dot{x}, \xi x) f(\xi x y)\, d\xi,$$

mais d'après (2) on a $A^{-1}(\dot{x}, \xi x) = A(\dot{\widehat{xy}}, y) A^{-1}(\dot{\widehat{xy}}, \xi xy)$; d'où

$$(3;\ 15) \qquad \int f(xy)\, d\tilde{T}(x) = \int dT(\dot{x}) \int A(\dot{\widehat{xy}}, y) A^{-1}(\dot{\widehat{xy}}, \xi xy) f(\xi xy)\, d\xi.$$

En appliquant (11) on trouve

$$(3;\ 16) \qquad \int f(xy)\, d\tilde{T}(x) = \int dT(\dot{x}) \int A^{-1}(\dot{x}, \xi x) f(\xi x)\, d\xi = \tilde{T}(f),$$

T est donc invariante par les translations à droite sur G, donc est de la forme $a' d_G(x)$ avec $a' \in E'$. Soit alors $\omega \in \Gamma$: on a d'une part :

$$(3;\ 17) \qquad \int f(\omega x)\, d\tilde{T}(x) = \int \langle f(\omega x), a' \rangle\, dx = \delta_G^{-1}(\omega)\, \tilde{T}(f)$$

et d'autre part :

$$(3;\ 18) \qquad \begin{aligned} \int f(\omega x)\, d\tilde{T}(x) &= \int dT(\dot{x}) \int A^{-1}(\dot{x}, \xi x) f(\omega\xi x)\, d_\Gamma(\xi) \\ &= \delta_\Gamma^{-1}(\omega) \int dT(\dot{x}) \int A^{-1}(\dot{x}, \omega^{-1}\xi x) f(\xi x)\, d\xi. \end{aligned}$$

Or $A^{-1}(\dot{x}, \omega^{-1}\xi x) = A^{-1}(\dot{x}, \xi x)\, A^{-1}(\dot{e}, \omega^{-1}) = A^{-1}(\dot{x}, \xi x)\, A(\dot{e}, \omega)$; d'où en comparant (17) et (18) :

$$(3;\ 19)\qquad \delta_G(\omega)^{-1}\int \langle f(x),\, a'\rangle\, dx = \delta_\Gamma^{-1}(\omega)\int \langle A(e, \omega) f(x),\, a'\rangle\, dx.$$

On déduit immédiatement (12) de (19) : rappelons que $\rho_\Gamma(\omega) = \dfrac{\delta_\Gamma(\omega)}{\delta_G(\omega)}$.

Pour démontrer (13), il suffit de vérifier que T et la distribution T_1 définie au second membre de (13) ont la même image par l'application $T \to \tilde{T}$ qui est biunivoque comme transposée d'une application sur. Or

$$(3;\ 20)\qquad \begin{aligned} \tilde{T}_1(f) &= \int_M d\mu(\dot{x}) \int_\Gamma \langle A^{-1}(\dot{x}, \xi x) f(\xi x),\, \rho_\Gamma(x)^{-1}\, {}^t A(\dot{x}, x)\, a'\rangle\, d_\Gamma(\xi) \\ &= \int d\mu \int \rho(x)^{-1} \langle f(\xi x),\, {}^t A^{-1}(\dot{x}, \xi x)\, {}^t A(\dot{x}, x)\, a'\rangle\, d\xi \\ &= \int d\mu \int \rho(x)^{-1} \langle f(\xi x),\, {}^t A^{-1}(\dot{e}, \xi)\, a'\rangle\, d\xi. \end{aligned}$$

D'où d'après (12) et la définition même de ρ et de $d\mu$ [formules (1; 2) et (1; 3)] :

$$(3;\ 21)\qquad \tilde{T}_1(f) = \int_M d\mu \int_\Gamma \rho(\xi x)^{-1} \langle f(\xi x),\, a'\rangle\, d\xi = \int_G \langle f(x),\, a'\rangle\, d_G = T(f).$$

Remarque 3; 3. — Comme pour la proposition 2, on a une généralisation de ce théorème au cas où la E-distribution T est définie **dans un voisinage** ouvert Ω de $\dot{e}$ dans M, le multiplicateur E étant défini et différentiable dans $\Omega \times \pi^{-1}(\Omega)$, T et A vérifiant respectivement (1), (2) et (5) pour $m \in \Omega$, $x \in \pi^{-1}(\Omega)$ et y suffisamment voisin de e : la démonstration du théorème se transpose sans grand changement : l'application

$$f \to \int A^{-1}(\dot{x}, \xi x) f(\xi x)\, d\xi$$

est continue de $\mathcal{D}_{\pi^{-1}(\Omega)}(E)$ sur $\mathcal{D}_\Omega(E)$, les formules (14) à (16) sont encore valables pour $f \in \mathcal{D}_{\pi^{-1}(\Omega)}(E)$, on en déduit que $\tilde{T}$ est une constante dans $\pi^{-1}(\Omega)$ et le reste est sans changement, (13) n'étant évidemment valable que pour $f \in \mathcal{D}_\Omega(E)$.

Remarque 3; 4. — Comme nous l'avons signalé plus haut, si l'on sait que T est d'ordre fini p, il suffit de supposer que A est p fois différentiable.

Si G n'est pas transitif sur M, le problème serait évidemment de décomposer la distribution T quasi invariante en « somme » de distributions extensions à M de distributions quasi invariantes sur les différentes orbites de M suivant G, « somme » relativement à une distribution sur l'espace quotient de M par G : poser ce problème est déjà indiquer qu'on ne peut guère espérer le résoudre que si les orbites sont des sous-variétés régulières de M et si l'espace quotient est muni d'une structure de variété différentiable. Plus précisément il faudrait supposer que G opérant sur M définit sur M une structure d'*espace fibré* différentiable, de base $B=M/G$, de fibre G/Γ, admettant G comme groupe structural et localement trivial : c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement ouvert de B par des ouverts Ω_i et des isomorphismes φ_i de $\Omega_i \times G/\Gamma$ sur l'image réciproque de Ω_i dans M, les φ_i vérifiant les conditions de compatibilité habituelles et « commutant » avec les opérations de G dans M et dans G/Γ. Nous nous contenterons de démontrer la proposition suivante dans le cas où M est un produit direct $B \times G/\Gamma$:

Proposition 3; 3. — *Soit T une E-distribution sur $B \times G/\Gamma$, quasi invariante pour G, de multiplicateur différentiable $A(b, \dot{x}; y)$. Il existe sur B une E-distribution S telle que*

$$(3;\ 22) \qquad \int_B A(b, \dot{e}; \xi) f(b)\, dS(b) = \rho_\Gamma(\xi) \int_B f(b)\, dS(b)$$

pour toute $f \in \mathcal{D}_B(E)$ et $\xi \in \Gamma$;

$$(3;\ 23) \qquad \int_{B\times G/\Gamma} f(b, \dot{x})\, dT(b, \dot{x}) = \int_{G/\Gamma} d\mu(\dot{x}) \int_B \rho_\Gamma(\dot{x})^{-1} A(b, \dot{x}; x) f(b, \dot{x})\, dS(b)$$

pour toute $f \in \mathcal{D}_{B\times G/\Gamma}(E)$.

Comme dans la démonstration du théorème 1, on se ramène au cas d'une distribution $\tilde{T}$ sur $B \times G$, invariante par les translations à droite suivant G en posant

$$(3;\ 24) \quad \int_{B\times G} f(b,x)\, d\tilde{T}(b,x) = \int_{B\times G/\Gamma} dT(b,x) \int_\Gamma A^{-1}(b,\dot{x};\xi x) f(b,\xi x)\, d\xi.$$

Nous déterminerons les $\tilde{T}$ possibles par la méthode utilisée par M. L. Schwartz dans le cas $G=R^n$, $B=R^m$ ([33], p. 112) : soit

$$\alpha \in \mathcal{D}_B(E),\ \beta \in \mathcal{D}_G : \beta \to T(\alpha(b)\,\beta(x))$$

est pour α fixé une distribution scalaire sur G, invariante par les translations à droite, donc de la forme $k(\alpha)\int \beta(x)\, d_G(x)$. En choisissant une β telle que $\int \beta(x)\, dx = 1$, on voit que $\alpha \to k(\alpha)$ est une E-distribution S sur B et l'on a

$$(3;\ 25) \qquad \int_{B\times G} \alpha(b)\beta(x)\, d\tilde{T}(b, x) = \left(\int_B \alpha(b)\, dS(b)\right)\left(\int_G \beta(x)\, dx\right).$$

D'où par continuité pour $f \in \mathcal{D}_{B\times G}(E)$:

$$\int f(b, x)\, d\tilde{T}(b, x) = \int d_G(x) \int f(b, x)\, dS(b). \tag{3; 26}$$

Nous laisserons au lecteur le soin de déduire (22) et (23) de (26) en adaptant les raisonnements qui nous ont conduit de (16) à (12) et (13), et de démontrer le corollaire suivant :

Corollaire. — *Supposons que G opérant sur M définisse sur M une structure d'espace fibré différentiable principal, localement trivial. Soit U une représentation différentiable de G dans E et T une E-distribution sur M, quasi invariante de multiplicateur $A(m, x) = U'_x$. Alors T est nulle sur le sous-espace de $\mathcal{D}_M(E)$ formé des fonctions f telles qu'on ait pour tout m de M* :

$$\int_G U_x f(m.x)\, d_G(x) = 0. \tag{3; 27}$$

Remarque 3; 5. — La proposition 2 et le théorème 1 deviennent inexacts si l'on considère des distributions à valeurs dans E et non plus des E-distributions : par exemple, l'application identique i de $\mathcal{D}_G$ dans lui-même est une distribution à valeurs dans $\mathcal{D}$ « quasi invariante » par rapport à la représentation régulière de G dans $\mathcal{D}$: $i(\tau_x\varphi) = \tau_x i(\varphi)$. Cependant, il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{D}$ telle que $i(\varphi) = \int_G \varphi(x)\, \tau_x f\, d_G(x)$: il faut prendre pour f la mesure de Dirac ε_e, qui n'est pas une fonction différentiable.

On peut cependant remarquer ceci :

1° Soit U une représentation continue de G dans E : l'application $a \to \tilde{a}$ définie au paragraphe 2 (n° 3) identifie E à un sous-espace topologique $\tilde{E}$ de l'espace $\mathcal{E}^0(E)$ des fonctions continues à valeurs dans E sur G. Toute distribution T sur G à valeurs dans E telle que $T(\tau_x\varphi) = U_x T(\varphi)$ est adhérente à $\tilde{E}$ dans $L(\mathcal{D}; E)$ (approcher T par ses régularisées $\alpha \star T$). On obtient un énoncé analogue à celui de la proposition 2, mais l'élément a trouvé n'appartient pas nécessairement à E, mais au complété de E pour une topologie moins fine (la topologie induite par $\mathcal{D}'$ sur $\mathcal{D}$ dans l'exemple ci-dessus).

2° Soit T une distribution à valeurs dans E, espace localement convexe complet, sur une variété M et soit B une fonction indéfiniment différentiable sur M à valeurs dans $L_s(E; E)$. Si T est *localement d'ordre fini*, on peut définir le *produit multiplicatif* de T par B : soit en effet Ω un ouvert relativement compact assez petit de M et soit (m_i) $(1 \leq i \leq n)$ un système de coordonnées locales dans Ω. T est dans Ω une somme finie de dérivées de fonctions continue à valeurs dans E :

$$dT(m) = \sum_{|q| \leq r} \frac{\partial_q}{\partial m_1^{q_1} \ldots \partial m_n^{q_n}} f_q(m)\, dm_1 \ldots dm_n \qquad [f_q \in \mathcal{E}^0(\Omega)]. \tag{3; 28}$$

On posera pour $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$:

$$(3;\ 29) \quad \varphi(m)\, d(B(m)\, T(m)) = \sum_{|q| \leq r} (-1)^{|q|} \times \int_\Omega \left(\frac{\partial^q}{\partial m^q} (\varphi B) \right)(m) f_q(m)\, dm_1 \ldots dm_n.$$

On vérifie facilement que (29) définit, sous les hypothèses indiquées, une distribution sur Ω et, par « recollement des morceaux », sur M.

On a alors la généralisation suivante du théorème 1 :

Théorème 3; 1 *bis*. — *Soit A un E-multiplicateur différentiable sur G/Γ et soit T une distribution à valeurs dans E sur G/Γ, localement d'ordre fini et telle que*

$$(3;\ 11\ bis) \qquad dT\left(\dot{\widehat{xy^{-1}}}\right) = d(A(\dot{x}, y)\, T(\dot{x}));$$

il existe alors un élément $a \in E$ et un seul tel que

$$(3;\ 12\ bis) \qquad a = \rho_\Gamma(\xi)\, A(e, \xi)\, a \qquad \text{pour tout } \xi \in \Gamma;$$

$$(3;\ 13\ bis) \quad T(\varphi) = \int_{G/\Gamma} \varphi(\dot{x}) \left(\rho_\Gamma(\dot{x})^{-1} A^{-1}(\dot{x}, x)\, a\right) d\mu_\Gamma(\dot{x}).$$

La démonstration du théorème 1 se transpose facilement : soit $\hat{T}$ l'image réciproque de T par l'application de $\mathcal{D}_G$ sur $\mathcal{D}_M$ qui à $\varphi \in \mathcal{D}_G$ fait correspondre la fonction $\dot{x} \to \int_\Gamma \varphi(\xi x)\, d\xi$. On posera

$$(3;\ 30) \qquad d\tilde{T}(x) = d\left(A(\dot{x}, x)\, \hat{T}(x)\right).$$

On a

$$\begin{aligned} d\tilde{T}(xy^{-1}) &= d\left(A\left(\dot{\widehat{xy^{-1}}}, xy^{-1}\right) \hat{T}(xy^{-1})\right) \\ &= d\left(A\left(\dot{\widehat{xy^{-1}}}, xy^{-1}\right) A(\dot{x}, y)\, \hat{T}(x)\right) = d\tilde{T}(x), \end{aligned}$$

d'où d'après la proposition 1, $dT(x) = ad_G(x)\ (a \in E)$. Enfin on a pour $\omega \in \Gamma$, $d\tilde{T}(\omega^{-1}x) = \delta_G^{-1}(\omega)\, adx = d\left(A(\dot{x}, \omega^{-1}x)\, \hat{T}(\omega^{-1}x)\right) = \delta_\Gamma^{-1}(\omega)\, A(\dot{e}, \omega^{-1})\, adx$, d'où (12 *bis*), (13 *bis*) se démontre comme (13), en remarquant que $T \to \tilde{T}$ est biunivoque puisque $A(\dot{x}, x)$ est inversible.

CHAPITRE II.

Représentations induites.

Paragraphe 4. — Généralités sur les représentations induites.

1. **Définitions.** — Soient G un groupe de Lie, g un sous-groupe fermé, E un espace vectoriel localement convexe séparé complet, L une représentation

différentiable de g dans E. Considérons l'espace $\mathcal{D}_G^L$ des fonctions sur G à valeurs dans E et vérifiant :

(RI 1) $f(\xi x) = \rho_g(\xi)^{\frac{1}{2}} L_\xi f(x)$ *pour tout* $\xi \in g$ *et* $x \in G$;

(RI 2) *l'image canonique dans* G/g *du support de* f *est compacte* (nous dirons que f est « *à support compact modulo* g ») ;

(RI 3) f *est indéfiniment différentiable.*

Les translations à droite définissent trivialement une représentation U^L de G dans $\mathcal{D}^L$: nous allons mettre sur $\mathcal{D}^L$ une topologie telle que cette représentation soit différentiable. Soient K un compact de G et $\mathcal{D}_K^L$ le sous-espace de $\mathcal{D}^L$ formé des fonctions de support contenu dans gK. Nous mettrons sur $\mathcal{D}_K^L$ la topologie induite par $\mathcal{E}(E)$, qui en fait un espace localement convexe séparé complet et même un espace de Fréchet si E est un Fréchet. Nous mettrons sur $\mathcal{D}^L$ la topologie limite inductive stricte [4] des topologies des $\mathcal{D}_K^L$. $\mathcal{D}^L$ est alors un espace localement convexe séparé complet et un espace $(\mathcal{LF})$ si E est un Fréchet.

Soit $f \in \mathcal{D}_G(E)$: posons

$$(4;\ 1) \qquad \tilde{f}(x) = \int_g \rho_g(\xi)^{-\frac{1}{2}} L_\xi^{-1} f(\xi x)\, d_g(\xi).$$

Proposition 4; 1. — *L'application* $f \to \tilde{f}$ *est un homomorphisme de* $\mathcal{D}(E)$ *sur* $\mathcal{D}_L$.

Démonstration. — Il est clair que $\tilde{f}$ vérifie (RI 1) et (RI 2). Soit X un élément de l'algèbre de Lie de G : on a

$$(4;\ 2) \quad \tilde{f} \star X(x) = \lim_{t \to 0} \int_g \rho(\xi)^{-\frac{1}{2}} L_\xi^{-1} \left[\frac{1}{t} \{ f(\xi x . \exp(tX')) - f(\xi x) \} \right] d\xi.$$

Or pour tout x de G, $\frac{1}{t}[f(\xi x . \exp(tX')) - f(\xi x)] \to \tilde{f} \star X(\xi x)$ uniformément en gardant son support dans un compact fixe de g, quand $t \to 0$. Par suite, grâce à l'équicontinuité des opérateurs L_ξ quand ξ décrit un compact de g, la limite du second membre de (2) existe : on en déduit aisément que $\tilde{f}$ est indéfiniment différentiable et que pour tout opérateur différentiel D invariant à gauche, on a

$$D\tilde{f}(x) = \int \rho(\xi)^{-\frac{1}{2}} L_\xi^{-1} (Df)(\xi x)\, d\xi.$$

Ceci montre que si $f \in \mathcal{D}_K(E)$, $\tilde{f} \in \mathcal{D}_K^L$. De plus, si x décrit un compact K de G, la fonction $\xi \to f(\xi x)$ garde son support dans le compact $k = KK'^{-1} \cap g$: posons $M = \int_k \rho(\xi)^{-\frac{1}{2}} d_g(\xi)$ et soit V un voisinage convexe équilibré fermé de O dans E. Il existe un voisinage W de O dans E tel que $a \in W$, $\xi \in k$ entraîne $L_\xi^{-1} a \in V$: alors $Df(x) \in W$ pour tout x entraîne $D\tilde{f}(x) \in MV$ pour $x \in \mathrm{K}'$: on en déduit immédiatement la continuité de l'application $f \to \tilde{f}$ de $\mathcal{D}_K(E)$ dans $\mathcal{D}_K^L$, donc de $\mathcal{D}(E)$ dans $\mathcal{D}^L$.

D'autre part, si $\alpha \in \mathcal{D}_{G/g}$ et $h \in \mathcal{D}^L$, il est clair que la fonction $x \to \alpha(\dot{x})\, h(x)$ appartient à $\mathcal{D}^L$: $\mathcal{D}^L$ est donc un module sur $\mathcal{D}_{G/g}$. Soit $\{\Omega_i\}$ un recouvrement de G/g par des ouverts assez petits pour qu'il existe une section indéfiniment différentiable $\dot{x} \to s_i(\dot{x})$ de $\pi^{-1}(\Omega_i)$ fibré par g, soit $\{\alpha_i\}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement et soit φ une fonction de $\mathcal{D}_g$ telle que $\int_g \rho(\xi)^{-\frac{1}{2}} \varphi(\xi)\, d\xi = 1$. Posons pour $h \in \mathcal{D}^L$:

$$h'(x) = \sum_i \alpha_i(\dot{x})\, \varphi(xs_i(\dot{x})^{-1})\, L_{xs_i(\dot{x})^{-1}} h(s_i(\dot{x})). \tag{4; 4}$$

On vérifie immédiatement que $h' \in \mathcal{D}(E)$, que $h \to h'$ est continue de $\mathcal{D}^L$ dans $\mathcal{D}(E)$ et que $\tilde{h}' = h$, ce qui montre que $h \to h'$ est un inverse à droite continu de $f \to \tilde{f}$, donc que $f \to \tilde{f}$ est bien un homomorphisme de $\mathcal{D}(E)$ sur $\mathcal{D}^L$.

La proposition 1 permet (l'application $f \to \tilde{f}$ commutant avec les translations à droite) de considérer la représentation U^L définie *a priori* comme restriction de la représentation régulière de G dans $\mathcal{E}(E)$ à un sous-espace non fermé, comme le *quotient* par un sous-espace invariant fermé de la représentation régulière $y \to \tau_y$ de G dans $\mathcal{D}(E)$: or nous avons vu que cette représentation τ est *différentiable* au sens du paragraphe 2, donc aussi U^L; ceci justifie la définition suivante :

Définition 4; 1. — *Nous appellerons « représentation différentiable de G induite par la représentation différentiable L de g » la représentation différentiable U^L de G dans $\mathcal{D}^L$.*

Remarque 4; 1. — La démonstration de la proposition 1 montre plus généralement que l'application $f \to \tilde{f}$ est un homomorphisme de $\mathcal{D}^m(E)$ sur l'espace $(\mathcal{D}^m)^L$ des fonctions m fois différentiables à valeurs dans E vérifiant (RI 1) et (RI 2), muni de la topologie évidente $(0 \leq m \leq +\infty)$. Si l'on prend en particulier pour L la représentation $\xi \to \rho(\xi)^{-\frac{1}{2}}$ ($\dim E = 1$), cet espace s'identifie canoniquement à l'espace $\mathcal{D}_{G/g}^m$: on retrouve ainsi un résultat de M. A. Weil [38] dont nous nous sommes servi au n° 1. Plus généralement, soit M une variété différentiable sur laquelle g opérant à gauche définit une structure d'espace fibré principal de fibre g et de base B : une formule analogue à (1) définit alors pour $L_\xi = \rho(\xi)^{\frac{1}{2}}$ un homomorphisme de $\mathcal{D}_M^m(E)$ sur $\mathcal{D}_B^m(E)$.

Remarque 4; 2. — Supposons qu'il existe une section indéfiniment différentiable $\dot{x} \to s(\dot{x})$ de G fibré par g. A toute $f \in \mathcal{D}_{G/g}(E)$, associons la fonction f' sur G définie par $f'(\xi s(\dot{x})) = \rho(\xi)^{\frac{1}{2}} L_\xi f(\dot{x})$; il est clair qu'on obtient ainsi un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}_{G/g}(E)$ sur $\mathcal{D}^L$. On peut par suite transporter à $\mathcal{B}_{G/g}(E)$ la représentation U^L : on obtient, en posant $s(\dot{x}) = w(\dot{x}, y)\, s(\widehat{\dot{xy}})$ (pour $x, y \in G$) :

$$(4;\ 5) \qquad U^L_y f(\dot{x}) = \rho(w(\dot{x}, y))^{\frac{1}{2}} L_{w(\dot{x},y)} f(\widehat{\dot{xy}}).$$

Si maintenant L est une représentation *continue* arbitraire de g, nous appellerons « représentation différentiable induite par L » la représentation différentiable induite par la représentation différentiable L^0 associée à L. Il est évident que cela n'est pas la définition la plus naturelle d'une représentation (continue) induite : il est plus normal de considérer la restriction de la représentation régulière de G à l'espace $\mathcal{C}^L = (\mathcal{D}^0)^L$ des fonctions continues à valeurs dans E vérifiant (RI 1) et (RI 2), muni de la topologie limite inductive des topologies de la convergence uniforme sur tout compact sur les sous-espaces des fonctions ayant leur support dans un ensemble gK fixe : (1) définit encore un homomorphisme de $\mathcal{C}(E)$ sur $\mathcal{C}^L$ (*cf.* remarque 1).

Si L est une représentation continue dans un espace de Banach, il est naturel de chercher à obtenir comme représentation induite une représentation continue dans un Banach : supposons tout d'abord qu'il existe une section de G fibré par g. La représentation U s'effectue alors dans l'espace $\mathcal{D}_{G/g}(E^0)$ et il est naturel de chercher à prolonger cette représentation à un espace $L^p(E)$ construit sur la mesure quasi invariante $d\mu_g(\dot{x})$; or on a

$$(4;\ 6) \qquad \int \| (U^{L^0}_y f)(\dot{x}) \|^p \, d\mu(\dot{x})$$
$$= \int \rho(w(\dot{x}, y))^{\frac{p}{2}} \left\| L_{w(\dot{x},y)} f(\widehat{\dot{xy}}) \right\|^p d\mu(\dot{x})$$
$$= \int \rho\left(w(\widehat{\mathring{x}y^{-1}}, y)\right)^{\frac{p}{2}-1} \left\| L_{w(\widehat{\dot{x}y^{-1}}, y)} f(\dot{x}) \right\|^p d\mu(\dot{x}).$$

On obtiendra donc une représentation continue dans $L^p(E)$ s'il existe des constantes $M \geq 0$ et k réel, telles que

$$(4;\ 7) \qquad \| L_\xi \| \leq M \rho(\xi)^k \qquad \text{pour tout } \xi \in g,$$

avec $k = \dfrac{2-p}{p}$, donc $\frac{1}{2} < k \leq \frac{1}{2}$.

Revenant au cas général, nous supposerons que L vérifie une inégalité de la forme (7) avec $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$: pour $k = -\frac{1}{2}$, les fonctions de $\mathcal{C}^L$ sont *bornées* sur G et U^L se prolonge en une représentation *bornée* dans l'espace de Banach complété de $\mathcal{C}^L$ pour la norme $\sup \| f(x) \|$. Pour

$-\frac{1}{2} < k \leqq \frac{1}{2}$, posons $p = \frac{2}{2k+1}$, et soit $f \in \mathcal{D}^{L^0}$, de support contenu dans gK, K compact de G. Posons

$$(4;8) \qquad N(f, x) = \sup_{\xi \in g} \rho(\xi x)^{-\frac{1}{p}} \| f(\xi x) \|,$$

$N(f, x)$ est une fonction réelle $\geqq 0$, semi-continue inférieurement, constante sur les classes suivant g, nulle en dehors de gK et

$$(4;9) \qquad \begin{aligned} N(f, x) &\leqq \sup_{y \in K} \sup_{\xi \in g} \rho(\xi y)^{-\frac{1}{p}} \rho(\xi)^{\frac{1}{2}} \| L_\xi f(y) \| \\ &\leqq \sup \rho(\xi y)^{-\frac{1}{p}} M \rho(\xi)^{k+\frac{1}{2}} \| f(y) \| \\ &\leqq \sup_{y \in K} M \rho(y)^{-\frac{1}{p}} \| f(y) \|, \end{aligned}$$

donc N est bornée : par suite $N(f, x)$ considérée comme fonction sur G/g est de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable pour μ.

Posons alors

$$(4;10) \qquad \| f \| = \left(\int_{G/g} N(f, x)^p \, d\mu(\dot{x}) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On vérifie aisément que $\| f \|$ est une *norme* sur $\mathcal{D}^{L^0}$. D'autre part on a

$$(4;11) \qquad N(U_y^{L^0} f(x) = \sup_{\xi \in g} \rho(\xi x)^{-\frac{1}{p}} f(\xi x y) \| = \left[\frac{\rho(xy)}{\rho(x)} \right]^{\frac{1}{p}} N(f, xy).$$

D'où $\| U_y^{L^0} f \| = \| f \|$: par suite U^{L^0} se prolonge en une représentation continue et même bornée de norme 1 dans l'espace de Banach complété de C^L.

En particulier, si L est *bornée*, on a une relation de la forme (7) avec $k = 0$, donc $p = 0$: si L est une représentation *unitaire* dans un espace de Hilbert H, on a $N(f, x) = \rho(x)^{-1} \| f(x) \|$ et la représentation induite introduite plus haut est exactement la représentation *unitaire* définie par M. G. W. Mackey [29], dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^L$ des fonctions sur G à valeurs dans E vérifiant (RI 1) et telles que

$$\int_{G/g} \rho(x)^{-1} \| f(x) \|^2 \, d\mu(\dot{x}) < +\infty \quad (^{12}).$$

Par contre, si L ne vérifie pas de condition de la forme (7) avec $|k| \leqq \frac{1}{2}$,

---

([12]) La définition de M. Mackey est légèrement différente, mais l'application $f \to \rho(x)^{-\frac{1}{2}} f(x)$ fait passer de notre définition à la sienne.

on ne peut pas en général prolonger de façon naturelle U^{L^0} en une représentation continue dans un Banach, sauf toutefois *si G/g est compact*, car $\mathcal{C}^{L^0}$ lui-même est alors un Banach, sa topologie pouvant être définie par la norme $\sup_{x \in K} \| f(x) \|$, K compact de G tel que $G = gK$. Plus généralement soit A un ensemble fermé de G tel que $G = gA$ et que $A \cap gK$ soit compact pour tout compact K de G (il est facile de construire un tel ensemble à partir d'un recouvrement localement fini de G/g par des compacts) : alors $\sup_{x \in A} \| f(x) \|$ est une norme sur $\mathcal{D}^{L^0}$ et l'on vérifie que U^{L^0} se prolonge en une représentation continue de G dans le Banach complété de $\mathcal{D}^{L^0}$ pour cette norme, pourvu que pour tout y de G, *il existe un compact k_y de g tel que $Ay \subset k_y A$* (si par exemple G est le produit semi-direct de g et d'un sous-groupe fermé A, ceci signifie que les orbites de g suivant G sont relativement compactes). Supposons en particulier que E soit un espace de Hilbert et que A soit l'adhérence de l'image de G/g par une section s mesurable de G fibré par g : l'hypothèse $Ay \subset k_y A$ entraîne alors (avec les notations de la remarque 2) que pour tout y de G, $w\left(\widehat{\dot{x}y}^{-1}, y\right)$ décrit un compact de g quand x décrit G/g et (6) montre alors que U^{L^0} se prolonge en une représentation continue dans l'espace de Hilbert $L^2_{G/g}(E)$.

Toutes ces considérations nous amènent à poser la définition suivante ([13]) :

Définition 4; 2. — *Soit L une représentation continue de g : Nous dirons qu'une représentation continue de G dans un espace F est « induite par la représentation différentiable associée L^0 » s'il existe une application linéaire continue biunivoque u de $\mathcal{D}^{L^0}$ sur un sous-espace dense de F telle que pour tout y de G, $u.U^L_y = U_y.u$. Nous dirons que U est « induite par L » (et nous noterons U^L une telle représentation) si u se prolonge en une application linéaire continue biunivoque de $\mathcal{C}^L$ dans F.*

Remarque 4; 3. — Les définitions 1 et 2 ne sont pas entièrement cohérentes : si L est différentiable, la représentation que nous avons appelée « représentation différentiable induite par L » dans la définition 1 n'est pas « induite par L » au sens de la définition 2. C'est pourquoi nous noterons désormais toujours U^{L^0} cette représentation, même si $L = L^0$: U^L signifiera désormais *une* représentation induite par L et U^{L^0} *la* représentation différentiable induite par L^0.

2. Quelques théorèmes sur les représentations induites. — Il est immédiat que la représentation conjuguée de U^{L^0} est la représentation $U^{\bar{L}^0}$ et plus généralement que la conjuguée d'une représentation induite par L est

([13]) *Voir* aussi au paragraphe 6 (n° 5) et chapitre III (n° 5) des exemples de représentations *unitaires* « induites » au sens de la définition 2 par une représentation L non unitaire, donc construites par un procédé différent de celui de M. Mackey.

induite par $\bar{L}$ [14]. D'autre part :

Proposition 4; 2. — (Représentation induite « par étages »). — *Soient $g_1 \subset g_2$ deux sous-groupes fermés de G, L une représentation continue de g_1. Les représentations différentiables de G induites par L^0 et par la représentation différentiable de g_2 induite par L^0 sont équivalentes.*

Démonstration. — Soient ρ_1, ρ_2 des fonctions ρ indéfiniment différentiables associées à g_1 et g_2 : La fonction $\rho_3(x) = \dfrac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}$ restreinte à g_2 est alors une fonction ρ différentiable sur g_2 associée à g_1.

Soit $g \in \mathcal{D}_G^{L^0}$ pour $x \in G$ et $y \in g_2$, posons

$$f_x(y) = \rho_2(y)^{-\frac{1}{2}} f(xy). \tag{4;12}$$

On a pour $\xi \in g_1$:

$$\begin{aligned} f_x(\xi y) &= \rho_2(\xi y)^{-\frac{1}{2}} f(\xi y x)) = \rho_2(\xi)^{-\frac{1}{2}} \rho_2(y)^{-\frac{1}{2}} \rho_1(\xi)^{\frac{1}{2}} L_\xi^0 f(yx) \\ &= \rho_3(\xi)^{\frac{1}{2}} L_\xi^0 f_x(y) \end{aligned} \tag{4; 13}$$

et il est clair que pour tout $x \in G$, f_x est une fonction infiniment différentiable sur g_2, à support compact modulo g_1 puisque f l'est. Par suite, $f_x \in \mathcal{D}_{g_2}^{L^0}$ pour tout $x \in G$.

D'autre part on a pour $z \in g_2$:

$$f_{zx}(y) = \rho_2(y)^{-\frac{1}{2}} f(yzx) = \rho_2(z)^{\frac{1}{2}} f(yz). \tag{4; 14}$$

L'application $x \to f_x$ étant différentiable de G dans $\mathcal{D}_{g_2}^{L^0}$ et à support compact modulo g_1, (14) montre que cette application est un élément de $\mathcal{D}_G^{V^0}$ (en désignant par V^0 la représentation différentiable de g_2 induite par L^0) : on a donc construit une application linéaire biunivoque de $\mathcal{D}_G^{L^0}$ dans $\mathcal{D}_G^{V^0}$ et il est clair que cette application est *continue.* Si $f \to 0$ uniformément sur tout compact en gardant son support dans un ensemble $g_1 K$ fixe (K compact), $f_k \to 0$ dans $\mathcal{D}_{g_2}^{L^0}$ uniformément sur tout compact et garde son support dans $g_2 K$; de même pour les dérivées car si D est un opérateur différentiel invariant à gauche, on a $D(f_x) = (Df)_x$.

Réciproquement soit $\varphi \in \mathcal{D}_G^{V^0}$: c'est une application $x \to \varphi_x$ de G dans $\mathcal{D}_{g_2}^{L^0}$. Posons $\psi(x) = \varphi_x(e)$: ψ est une fonction différentiable sur G, à valeurs

---

[14] Pour la représentation *contragrédiente*, les choses sont un peu plus compliquées : la représentation $(U^{L^0})^\vee$ s'effectue par les translations à droite dans l'espace H des E^0-distributions sur G, vérifiant $dT(\xi x) = (\delta_g(\xi)^{\frac{1}{2}}\, {}^tL_\xi^{-1}\, dT(x)$. Si E^0 est *tonnelé*, $\mathcal{D}^{L^\vee}$, s'identifie [par $\varphi \to \varphi(x)\, d_G(x)$] à un sous-espace dense de H et (U^{L^0}) est induite par L^0. Mais si E^0 n'est pas tonnelé, $\varphi(x) d_G(x)$ n'est pas nécessairement une E^0-distribution et l'on peut seulement dire qu'il existe dans H et dans $\mathcal{D}^{\check{L}^0}$ des sous-espaces denses invariants dans lesquels $U^{\check{L}^0}$ et $(U^{L^0})^\vee$ sont équivalentes (algébriquement).

dans F et l'on a pour $\xi \in g_1$:

$$(4;15)\qquad \psi(\xi x) = \psi_{\xi x}(e) = \rho_2(\xi)^{\frac{1}{2}}\, V^0_\xi \varphi_x(e) = \rho_2(\xi)^{\frac{1}{2}}\, \varphi_x(\xi)$$
$$= \rho_2(\xi)^{\frac{1}{2}}\, \rho_3(\xi)^{\frac{1}{2}}\, L^0_\xi \varphi_x(e) = \rho_1(\xi)^{\frac{1}{2}}\, L^0_\xi \psi(x).$$

Pour montrer que $\psi \in \mathcal{D}^{L^0}_G$, il ne reste qu'à montrer que ψ est à support compact modulo g_1 : or il existe un compact K tel que $\varphi = 0$ pour $k \notin g_2 K$ et l'application $x \to \varphi_x$ étant continue de G dans $\mathcal{D}^{L^0}_{g_2}$, l'image de K par cette application est un compact de $\mathcal{D}^{L^0}_{g_2}$ donc est formée de fonctions ayant leur support dans un ensemble $g_1 K'$ fixe, K' compact de g_2. On en déduit immédiatement que ψ a son support dans $g_1 K' K$. Par suite, nous avons construit une application linéaire biunivoque de $\mathcal{D}^{V^0}_G$ dans $\mathcal{D}^{L^0}_G$: on vérifie aisément que cette application est continue et que son composé avec l'application de $\mathcal{D}^{L^0}_G$ dans $\mathcal{D}^{V^0}_G$ construite à l'alinéa précédent est l'identité. D'où l'isomorphisme de $\mathcal{D}^{L^0}_G$ et $\mathcal{D}^{V^0}_G$, isomorphisme qui commute trivialement avec les translations à droite.

Corollaire. — *Si L est une représentation unitaire, la représentation unitaire induite par L est unitairement équivalente à la représentation unitaire de G induite par la représentation unitaire V de g_2 par L.*

$\mathcal{D}^{L^0}$ étant toujours dense dans $\mathcal{H}^L$, il suffit de vérifier l'égalité des normes $\|f\|_L$ et $\|f\|_V$ d'un élément $f \in \mathcal{D}^{L^0}_G = \mathcal{D}^{V^0}_G$ dans $\mathcal{H}^L$ et $\mathcal{H}^V$. Soient μ_1, μ_3, μ_3 les mesures quasi invariantes sur G/g_1, G/g_2, g_2/g_1 respectivement associées aux fonctions ρ_1, ρ_2, ρ_3, on a

$$(4;16)\qquad \int_G f(x)\rho_1(x)\,d_G(x) = \int_{G/g_1} d\mu_1(\dot{x}) \int_{g_1} f(\xi x)\,d_{g_1}(\xi)$$
$$= \int_G f(x)\rho_2(x)\rho_3(x)\,d_G(x) = \int_{G/g_2} d\mu_2(\dot{x}) \int_{g_2} f(yx)\rho_3(yx)\,d_{g_2}(y)$$
$$= \int_{G_2 g_2} d\mu_2(\dot{x}) \int_{g_2/g_1} d\mu_3(\dot{y}) \int_{g_1} f(\xi y x)\,d_{g_1}(\xi).$$

D'où

$$d\mu_1(\dot{x}) = d\mu_2(\dot{x})\,\frac{\rho_3(yx)}{\rho_3(y)}\,d\mu_2(\widehat{\dot{yx}}) \qquad \text{pour} \quad x \in G \quad \text{et} \quad y \in g_2.$$

Par suite

$$(4;17)\qquad \|f\|^2_L = \int \rho_1(x)^{-1}\,\|f(x)\|^2\,d\mu_1(\dot{x})$$
$$= \int d\mu_2(x) \int \rho_1(yx)^{-1}\,\frac{\rho_3(yx)}{\rho_3(y)}\,\|f(yx)\|^2\,d\mu_3(y)$$
$$= \int \rho_2(x)^{-1}\,d\mu_2(\dot{x}) \int \rho_2(y)^{-1}\,\rho_3(y)^{-1}\,\|f(yx)\|^2\,d\mu_3(\dot{y})$$
$$= \int \rho_2(x)^{-1}\,d\mu_2(\dot{x}) \int \rho_3(y)^{-1}\,\|f_x(y)\|\,d\mu_3(\dot{y})$$
$$= \|f\|^2_V, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

REMARQUE 4; 4. — Ce corollaire a été démontré par M. MACKEY dans le cas des groupes localement compacts ([29], t. 4; 1).

PROPOSITION 4; 3. — *Soient L (resp. M) une représentation continue d'un sous-groupe fermé g_1 (resp. g_2) du groupe de Lie G_1 (resp. G_2) dans un espace E (resp. F); la représentation $U^{L^0} \otimes U^{M^0}$ de $G_1 \times G_2$ dans $\mathcal{D}^{L^0} \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^{M^0}$ est une représentation induite par la représentation différentiable $L^0 \otimes M^0$ de $g_1 \times g_2$ dans $E^0 \hat{\otimes}_\pi F^0$* (15).

Soit $K_i (i = 1, 2)$ un compact de G_i assez petit pour qu'il existe une section différentiable d'un voisinage de $g_i K_i$ fibré par g_i; on voit, comme à la remarque 2, que l'espace $\mathcal{D}^{L^0}_{K_1}$ (resp. $\mathcal{D}^{M^0}_{K_2}$) s'identifie à l'espace

$$\mathcal{D}_{K_1}(E^0) = \mathcal{D}_{K_1} \hat{\otimes}_\pi E^0$$

[resp. $\mathcal{D}_{K_2}(F^0) = \mathcal{D}_{K_2} \hat{\otimes}_\pi F^0$] : on en déduit facilement une identification canonique de $\mathcal{D}^{L^0}_{K_1} \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^{M^0}_{K_1}$ avec $\mathcal{D}^{L^0 \otimes M^0}_{K_1 \times K_2}$, d'où une application linéaire continue de $\mathcal{D}^{L^0 \otimes M^0}_{G_1 \times G_2}$, sur un sous-espace dense de $\mathcal{D}^{L^0}_{G_1} \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^{M^0}_{G_2}$, qui commute avec les translations à droite et qui est biunivoque, car composée avec l'injection canonique de $\mathcal{D}^{L^0}_{G_1} \hat{\otimes}_\pi \mathcal{D}^{M^0}_{G_2}$ dans $\mathcal{E}(E^0) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}(F^0) = \mathcal{E}_{G_1 \times G_2}(E^0 \hat{\otimes}_\pi F^0)$ elle donne l'injection canonique de $\mathcal{D}^{L^0 \otimes M^0}$ dans $\mathcal{E}_{G_1 \times G_2}(E^0 \hat{\otimes}_\pi F^0)$ qui est biunivoque : d'où la proposition.

Paragraphe 5. — **Représentations irréductibles d'un groupe de Lie, Extension d'un groupe abélien.**

1. Représentation tempérée d'un groupe de Lie abélien. — Soit G un groupe de Lie *abélien*. Conformément à nos conventions générales, nous supposerons que G est engendré par un voisinage compact de e, autrement dit que G est un « groupe élémentaire » de la forme $R^n \times T^p \times Z^q \times \Phi$, Φ groupe fini. Soit E un espace localement convexe séparé complet et U une représentation continue de G dans E : nous allons examiner les hypothèses qu'il convient de faire sur U pour qu'on puisse utiliser la *transformation de Fourier* dans l'étude de U. On sait ([34], chap. VII) que la transformation de Fourier établit un isomorphisme F de l'espace $\mathcal{S}_{\hat{G}}$ des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur le groupe dual $\hat{G}$ sur l'espace

(15) Si E^0 et F^0 sont des Fréchets, la représentation $U^{L^0} \otimes U^{M^0}$ dans $\mathcal{D}^{L^0} \overline{\otimes} \mathcal{D}^{M^0}$ est exactement équivalente à la représentation différentiable induite par la représentation $L^0 \otimes M^0$ dans $E^0 \overline{\otimes} F^0 = E^0 \check{\otimes}_\pi E^0$.

analogue $\mathcal{S}_G$ sur le groupe G ([16]), d'où un isomorphisme, noté encore F, de l'espace $L(\mathcal{S}_G; E)$ sur $L(\mathcal{S}_{\hat{G}}; E)$ défini par

$$(5;\ 1) \qquad FT(\varphi) = T(F\varphi) \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{S}_{\hat{G}}.$$

Or pour tout $a \in E$, la représentation U définit une fonction continue $x \to U_x a$ sur G, à valeurs dans E, fonction qu'on peut identifier avec une distribution à valeurs dans E, soit T_a : Si ces T_a appartiennent à $L(\mathcal{S}_G; \mathrm{E})$, on peut définir $FT_a \in L(\mathcal{S}_{\hat{G}}; E)$. On a

$$(5;\ 2) \qquad FT_a(\varphi) = T_a(F\varphi) = \int_G F\varphi(x)\, U_x a\, d_G(x) \qquad (\varphi \in \mathcal{S}_{\hat{G}}).$$

D'où pour φ fixé un opérateur dans E que nous noterons $P(\varphi)$, à savoir $a \to FT_a(\varphi)$. On a évidemment

$$(5;\ 3) \qquad P(\varphi) = U_{F\varphi}.$$

La transformation de Fourier transformant le produit ordinaire dans $\mathcal{S}_{\hat{G}}$ en produit de composition dans $\mathcal{S}_G$, l'application $\varphi \to P(\varphi)$ sera une représentation continue de l'algèbre $\mathcal{S}_{\hat{G}}$ munie du produit ordinaire dans $L_b(E; E)$, pourvu que la représentation $f \to U_f$ de $\mathcal{D}_G$ se prolonge par continuité à $\mathcal{S}_G$. D'une manière précise, nous poserons la définition suivante :

Définition 5; 1. — *La représentation U sera dite « tempérée » si :* (RT 1) *pour tout $a \in E$, , la distribution T_a à valeurs dans E (définie par $T_a(f) = U_f a$ pour $f \in \mathcal{D}_G$) est continue dans $\mathcal{D}_G$ muni de la topologie induite par $\mathcal{S}_G$, et par suite se prolonge en une applicaton linéaire continue $f \to U_f a$ de $\mathcal{S}_G$ dans E.*

(RT 2) *les opérateurs U_f ainsi définis pour $f \in \mathcal{S}_G$ sont continus;*

(RT 3) *Il existe un voisinage V de zéro dans $\mathcal{S}_G$ dont l'image par l'application $f \to U_f$ est un ensemble équicontinu de $L(E; E)$* [*ce qui entraîne que cette application est continue de $\mathcal{S}_G$ dans $L_b(E; E)$*].

Si U est tempérée, l'application $\varphi \to P(\varphi) = U_{F\varphi}$ est une représentation continue de l'algèbre $\mathcal{S}_{\hat{G}}$ dans $L_b(E; E)$, donc en particulier est une *distribution tempérée à valeurs* dans $L_b(E; E)$. Cette distribution est *d'ordre fini ;* on peut en effet supposer que le voisinage V de (RT 3) est l'image par

---

([16]) Rappelons la définition de l'espace $\mathcal{S}_G$ ([34], chap. VII) : Une fonction f indéfiniment différentiable sur G est dite « à décroissance rapide » si pour tout polynome P sur $R^n \times Z^q$, considéré de la manière évidente comme fonction sur G, et tout opérateur différentiel invariant D sur G, la fonction $P(x)Df(x)$ est *bornée* sur G. Nous considérerons toujours $\mathcal{S}$ comme muni de sa topologie habituelle, définie par les semi-normes : $\sup |P(x)\, Df(x)|$ (P polynome sur $R^n \times Z^q$, D opérateur différentiel invariant sur G), topologie qui fait de $\mathcal{S}$ un *espace de Fréchet.*

la transformation de Fourier du voisinage $\hat{V}$ de O dans $\mathcal{S}_{\hat{G}}$ défini par les inégalités

$$(5;4) \qquad \sup_{\hat{x}\in\hat{G}} |Q_i(\hat{x}) D_i\varphi(\hat{x})| \leqq 1,$$

avec $i=1, \ldots, n$, Q_i polynome sur $\hat{G}$ et D_i opérateur différentiel invariant sur $\hat{G}$, d'ordre m_i. Or $\hat{V}\cap\mathcal{D}_{\hat{G}}$ est un voisinage de O dans $\mathcal{D}_{\hat{G}}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{D}^m_{\hat{G}}\left(m=\sup\limits_{1\leqq i\leqq n} m_i\right)$: l'image de $\hat{V}\cap\mathcal{D}_{\hat{G}}$ par P étant un ensemble équicontinu donc borné dans $L_b(E;E)$, P est continue de $\mathcal{D}_{\hat{G}}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{D}^m_{\hat{G}}$, dans $L_b(E;E)$, donc est *d'ordre* $\leqq m$.

REMARQUE 5; 1. — Les conditions (RT 1) et (RT 2) peuvent s'exprimer en disant que les distributions T_a appartiennent à $L(\mathcal{S}_G; E)$ et que l'application $a\to T_a$ est continue de E dans $L_s(\mathcal{S}_G; E)$. Si E est un *espace de Banach*, elles entraînent (RT 3) : en effet l'ensemble A des T_a pour $\|a\|<1$ est alors borné dans $L_s(\mathcal{S}_G; E)$, comme image continue d'un ensemble borné. Comme $\mathcal{S}_G$ est un espace de Fréchet, A est équicontinu dans $L(\mathcal{S}_G; E)$. Par suite, il existe un voisinage V de zéro dans $\mathcal{S}_G$ tel que $\|T_a(f)\|<1$ pour $f\in V$ et $\|a\|<1$: comme $T_a(f)=U_f a$, on a $\|U_f\|\leqq 1$ pour $f\in V$ et V est le voisinage cherché.

En particulier, si la fonction $\|U_x\|$ est à croissance lente, alors $\|U_x a\|\leqq\|U_x\|.\|a\|$, d'où la continuité de $a\to T_a$ de E dans $L_s(\mathcal{S}; E)$: U est donc tempérée. En particulier, une représentation *bornée* dans un espace de Banach est tempérée.

REMARQUE 5; 2. — Si U est une représentation *unitaire* dans un espace de Hilbert (donc tempérée d'après la remarque 1), P est également une représentation *unitaire* de l'$\bigstar$-algèbre $\mathcal{S}_{\hat{G}}$ munie de l'involution $\varphi\to\overline{\varphi}$ définie par passage à l'imaginaire conjuguée : on a en effet $F\overline{\varphi}(x)=\overline{(F\varphi)}(x^{-1})$ et par suite

$$P(\overline{\varphi})=\int\overline{(F\varphi)}(x^{-1})U_x\,dx=\int\overline{(F\varphi)}(x)\,U^*_x\,dx=P(\varphi)^*.$$

2. Système d'imprimitivité associé à un sous-groupe abélien distingué. — M. MACKEY a étendu dans [27] aux représentations unitaires des groupes localement compacts la notion de « système d'imprimitivité », classique dans le cas des représentations linéaires des groupes finis : Étant donnés un espace localement compact M, un groupe G réalisé comme groupe d'homéomorphismes de M et une représentation unitaire U de G dans un espace de Hilbert H, M. MACKEY appelle système d'imprimitivité de base M pour U une mesure borélienne sur M à valeurs dans l'ensemble des projecteurs de H vérifiant $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$ et $U_xP(A)U_x^{-1}=P(Ax)$ pour A_1, A_2, A sous-ensembles boréliens de M et $x\in G$. On sait que la donnée d'une mesure borélienne à valeurs dans l'ensemble des projecteurs de H est équivalente à la donnée d'une application linéaire continue de $\mathcal{C}_M$ dans $L(H; H)$ et l'on montre facilement que la donnée d'un système d'imprimitivité est équivalente à la donnée d'une représentation unitaire de l'$\bigstar$-algèbre $\mathcal{C}_M$ dans l'$\bigstar$-algèbre $L(H; H)$ telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_M$ et tout $x \in G$, on ait

(5; 5) $$U_x P(\varphi) U_x^{-1} = P(\tau_x \varphi).$$

[Rappelons que $\tau_x \varphi$ désigne la fonction $m \rightarrow \varphi(m.x)$].

Dans le cadre de notre étude de représentations dans des espaces plus généraux, mais de groupes de Lie, nous donnerons une définition un peu différente d'un système d'imprimitivité; soient M une variété analytique, G un groupe de Lie opérant sur M et U une représentation continue de G dans E.

Définition 5; 2. — *Nous appellerons « système d'imprimitivité de base M » pour U une représentation continue P de l'algèbre $\mathcal{D}_M$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur M dans $L_b(E; E)$, satisfaisant à la condition* (3). *Nous dirons que P est borné, s'il existe un voisinage de O dans $\mathcal{D}_M$ dont l'image par P est équicontinue dans $L(E; E)$.*

Nous allons voir que, comme dans le cas unitaire. l'existence dans G d'un *sous-groupe abélien distingué* Γ permet de construire un tel système, *pourvu que la représentation U restreinte à Γ soit tempérée*, ce que nons supposerons désormais. Γ étant distingué, G est réalisé comme groupe d'homéomorphismes de Γ, ou par dualité de $\hat{\Gamma}$. Nous poserons pour $x \in G$, $\xi \in \Gamma$, $\hat{\xi} \in \hat{\Gamma}$:

(5; 6) $$(\xi, \hat{\xi}.x) = (x\xi x^{-1}, \hat{\xi}),$$

$(\xi, \hat{\xi})$ désignant la valeur du caractère $\hat{\xi}$ au point ξ de Γ. D'autre part, nous avons vu au n° 1 que U restreinte à Γ détermine une distribution P sur $\hat{\Gamma}$, à valeurs dans $L(E; E)$ et P est une représentation continue de $\mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$ donc *a fortiori* de $\mathcal{D}_{\hat{\Gamma}}$. De plus, on a

(5; 7) $$U_x P(\varphi) U_x^{-1} = \int_\Gamma U_\xi (F\varphi)(x^{-1}\xi x)\, d_\Gamma(x^{-1}\xi x)$$

et

(5; 8) $$\begin{aligned}(F\varphi)(x^{-1}\xi x) &= \int_{\hat{\Gamma}} (x^{-1}\xi\, x, \hat{\xi})\varphi(\hat{\xi})\, d_{\hat{\Gamma}}(\hat{\xi}) \\ &= \int_{\hat{\Gamma}} (\xi, \hat{\xi})\varphi(\hat{\xi}.x)\, d_\Gamma(\hat{\xi}.x).\end{aligned}$$

Or $d_\Gamma(x^{-1}\xi x)$ est une mesure invariante sur Γ : on a donc

$$d_\Gamma(x^{-1}\xi x) = \lambda(x)\, d_\Gamma(\xi),$$

et la formule de Plancherel montre que $d_{\hat{\Gamma}}(\hat{\xi}.x) = \lambda^{-1}(x)\, d_{\hat{\Gamma}}(\hat{\xi})$: on tire alors de (7) et (8) :

$$(5;\ 9) \qquad U_x P(\varphi) U_x^{-1} = \int U_\xi (F\tau_x\varphi)(\xi)\, d_\Gamma(\xi) = P(\tau_x\varphi).$$

Par suite P est un *système d'imprimitivité de base* $\hat{\Gamma}$ *pour* U, *borné* [condition (RT 3) de la définition 1] et *d'ordre fini.*

Considérons la représentation différentiable U^0 associée à U : nous allons voir que P est encore un système d'imprimitivité pour U^0. Il nous faut montrer que :

1. $P(\varphi)E^0 \subset E^0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_{\hat{\Gamma}}$;

2. $P(\varphi)$ est continu dans E^0 et l'application $\varphi \to P(\varphi)$ est continue de $\mathcal{D}_{\hat{\Gamma}}$ dans $L_b(E^0; E^0)$.

Or la représentation $x \to \tau_x$ de G dans $\mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$ est différentiable ([17]), donc l'application $x \to P(\tau_x\varphi)$ est différentiable de G dans $L_b(E;\ E)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$. Par suite si $a \in E^0$, la fonction à valeurs dans E :

$$x \to U_x P(\varphi) a = P(\tau_x\varphi) U_x a$$

est différentiable, c'est-à-dire $P(\varphi)a \in E^0$, d'où la propriété 1.

D'autre part, pour toute dérivation invariante à gauche D sur G, on a une « formule de Leibnitz » de la forme

$$(5;\ 10) \qquad D(fg) = \sum_{i=1}^{i=r} (D_i f)(D'_i g),$$

les D_i et les D'_i étant des dérivations invariantes à gauche d'ordre inférieur ou égal à celui de D et (10) est encore valable si g est à valeurs dans E et f à valeurs dans $L(E;\ E)$. D'où pour $a \in E^0$ et $\varphi \in \mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$:

$$(5;\ 11) \qquad D(U_x P(\varphi)a) = D(P(\tau_x\varphi)U_x a) = \Sigma P(D_i(\tau_x\varphi))\, D'_i(U_x a).$$

Or, si $\varphi \to 0$ dans $\mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$, $[D_i(\tau_x\varphi)]_{x=e} \to 0$ dans $\mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$, il existe donc (puisque P

([17]) En effet la représentation τ de G dans $\mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$ est la composée de la représentation de G dans le groupe Aut $\hat{\Gamma}$ des automorphismes de $\hat{\Gamma}$ qui à $x \in G$ fait correspondre l'automorphisme $\hat{\xi} \to \hat{\xi}.x$ et de la représentation τ de Aut $\hat{\Gamma}$ dans $\mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$. Or $\hat{\Gamma}$ étant de la forme $R^n \times T^p \times Z^q \times \Phi$, la composante connexe de e de Aut $\hat{\Gamma}$ se réduit à $GL(n,\ R)$ opérant sur R^n et laissant fixes les autres variables. Il suffit donc de démontrer que la représentation canonique σ de $GL(n,\ R)$ dans $\mathcal{S}_{R^n}$ est différentiable : Or si B est une distribution de support e dans $GL(n,\ R)$, $\sigma_D f$ est pour $f \in \mathcal{S}_{R^n}$ une combinaison linéaire finie de produits de polynomes par des dérivées de f. Par suite σ_D est continu dans $\mathcal{S}_{R^n}$, d'où la différentiabilité de σ.

est un système d'imprimitivité *borné* dans E) un voisinage V_i de O dans $\mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$ tel que les $P([D_i(\tau_x\varphi]_{x=e})$ soient équicontinus dans E pour $\varphi \in V_i$. On déduit alors de (11) que si a tend vers zéro *dans* E^0, $[D(U_xP(\varphi)a)|_{x=e} \to 0$ *dans* E uniformément pour $\varphi \in \bigcap_{i=1}^{i=r} V_i$: ceci implique que *l'application* $(\varphi, a) \to P(\varphi)$ *a est continue de* $\mathcal{S}_{\hat{\Gamma}} \times E^0$ *dans* E^0, d'où immédiatement **2.** *A fortiori*, $(\varphi;\, a) \to P(\varphi)a$ est continue de $\mathcal{D}_{\hat{\Gamma}} \times E^0$ dans E^0, donc définit une application linéaire continue que nous noterons $\hat{P}$ de $\mathcal{D}_{\hat{\Gamma}}(E^0)$ dans E^0 (*cf.* § 1, n° 2). On a

$$(5;\ 12) \qquad \hat{P}(\tau_x\psi) = U_x^0 P(U_x^{0-1}\psi), \qquad \psi \in \mathcal{D}_{\hat{\Gamma}}(E^0).$$

Remarque 5; 3. — L'application $(\varphi, a) \to P(\varphi)a$ est également continue de $\mathcal{S}_{\hat{\Gamma}} \times E$ dans E [grâce à l'équicontinuité des $P(\varphi)$ pour φ voisin de O].

Remarque 5; 4. — La démonstration que nous venons de faire revient sous une autre forme à démontrer que la restriction à Γ de la représentation U^0 satisfait aux conditions (RT 1) et (RT 2) de la définition 5; 1. Malheureusement U^0 restreinte à Γ ne satisfait pas en général à (RT 3) mais seulement à la condition plus faible :

(RT 3') *L'application* $(f, a) \to U_f^0 a$ *est continue de* $\mathcal{S}_\Gamma \times E^0$ *dans* E^0.

En particulier (RT 3') ne permet pas de conclure que la distribution $\varphi \to P(\varphi)$ à valeurs dans $L_b(E^0;\, E^0)$ est d'ordre fini.

3. Représentations irréductibles et systèmes d'imprimitivité transitifs. — Nous supposerons désormais que la représentation U est *topologiquement irréductible :* nous allons montrer que, comme dans le cas unitaire, le système d'imprimitivité P est en quelque sorte équivalent à un système basé sur un espace homogène de G, moyennant évidemment certaines hypothèses sur la manière dont G opère dans $\hat{\Gamma}$. Remarquons tout d'abord que si Ω est un *ouvert* de $\hat{\Gamma}$ stable pour G, la *restriction* de P à Ω est un système d'imprimitivité P_Ω de base Ω pour U (P_Ω étant éventuellement nul).

Lemme 5; 1. — *Si le support de la restriction* P_Ω *de* P *à un ouvert* Ω *de* $\hat{\Gamma}$ *stable pour* G *est contenu dans une sous-variété fermée régulière* V *de* Ω, P_Ω *est l'extension à* Ω *d'une distribution définie sur* V.

Démonstration. — P étant d'ordre fini, on peut parler de *l'ordre transversal* p de P_Ω sur V (*cf.* § 1, n° 3, 5°) : p est le plus petit entier tel que $P(\varphi) = 0$ si φ et toutes ses dérivées transversales d'ordre $\leqq p$ sont nulles sur V. Supposons $p \geqq 1$ et soit H le sous-espace de $\mathcal{D}_\Omega$ formé des fonctions ψ nulles ainsi que leurs dérivées transversales d'ordre $\leqq p - 1$

sur V. Comme V et Ω sont stables par G, H est invariant par la représentation τ de G dans $\mathcal{D}_\Omega$. Soit F le sous-espace de E engendré par les $P(\psi)a$, $\psi \in H$, $a \in E$: F n'est pas nul (car P serait d'ordre $\leqq p - 1$) et comme

$$U_x P(\psi) a = P(\tau_x \psi) U_x a,$$

F est invariant par U donc partout dense dans E. Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$, nulle sur V : pour $\psi \in H$, $\varphi\psi$ est nulle sur V ainsi que toutes ses dérivées transversales d'ordre $\leqq p$, et par suite $P(\varphi\psi) = 0$. Or $P(\varphi\psi) = P(\varphi)P(\psi)$; $P(\varphi)$ est donc nul sur F, donc sur E tout entier. Autrement dit, $\varphi = 0$ sur V entraîne $P(\varphi) = 0$, donc $p = 0$.

Lemme 5; 2. — *Supposons que l'espace quotient de $\hat{\Gamma}$ par la relation d'équivalence définie par G soit séparé ou dénombrable : alors le support de P est l'adhérence d'une orbite de $\hat{\Gamma}$ suivant G.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que le support de P est nécessairement une réunion d'orbites. Si $\hat{\Gamma}/G$ est *séparé*, les orbites de $\hat{\Gamma}$ suivant G sont des sous-variétés fermées régulières et deux orbites distinctes V et V' possèdent des voisinages ouverts Ω et Ω' disjoints et stables par G. Si $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$ et $\psi \in \mathcal{D}_{\Omega'}$, $\varphi\psi = 0$; donc $P(\varphi)P(\psi)$ est nul. Or $\mathcal{D}_\Omega$ et $\mathcal{D}_{\Omega'}$ sont stables par τ et par suite le sous-espace F de E engendré par les $P(\varphi)a$ pour $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$ et $a \in E$ est invariant par U, donc dense dans E si P_Ω n'est pas nulle : mais alors $P(\psi)$ est nul sur F donc sur E et $P_\Omega = 0$: par suite le support de P ne contient qu'une des deux orbites V et V'.

Si maintenant $\hat{\Gamma}/G$ est *dénombrable*, nous avons étudié au paragraphe 3 la structure des orbites de $\hat{\Gamma}$ suivant G : reprenons les notations du lemme 3; 1 (avec $M = \hat{\Gamma}$) : Supposons que le support de P soit contenu dans M^i mais non dans M^{i+1} : il existe alors une orbite V, ouverte dans M^i, telle que la restriction de P à l'ouvert associé Ω_V n'est pas nulle. D'après le lemme 1, cette restriction est une distribution sur V. Soit W le complémentaire de $\overline{V}$ dans M^i et posons $\Omega = \Omega_V \cup W$: Ω est un ouvert de $\hat{\Gamma}$ stable pour G et si le support de P n'était pas contenu dans V, le sous-espace de E engendré par les $P(\psi)a$ avec $\psi \in \mathcal{D}_\Omega$ nulle sur $\check{V}$ et $a \in E$, serait invariant par U et non nul, donc dense. Mais alors on aurait $P(\varphi) = 0$ pour φ nulle sur un voisinage de W dans Ω ce qui contredit le fait que la restriction de P à Ω_V n'est pas nulle : par suite, le support de P est contenu dans V.

On montre facilement que le lemme 2 est valable sous des conditions un peu plus larges : par exemple si Γ est « régulier » dans G au sens suivant :

Définition 5; 3. — *Nous dirons que Γ est régulier dans G s'il existe dans $\hat{\Gamma}$ une suite dénombrable d'ensembles fermés F^i stables par G, tels que :*

a. $F^0 = \hat{\Gamma}$, $F^{i+1} \subset F^i$, *l'intersection des F^i est vide;*

b. $F^i - F^{i+1}$ *est une sous-variété régulière fermée de l'ouvert* $\Omega_i = \complement F^{i+1}$;
c. l'espace quotient de $F^i - F^{i+1}$ *par* G *est séparé.*

Si Γ est régulier dans G, on voit que, si U est irréductible, il existe une orbite V qui est une sous-variété fermée régulière d'un ouvert stable Ω_V pour G et telle que P_{Ω_V} soit l'extension à Ω_V d'une distribution non nulle sur V. Or V est alors isomorphe à l'espace homogène quotient de G par le stabilisateur g d'un point arbitraire de V, cet isomorphisme commutant avec les opérations de G sur V et G/g, et cette distribution sur V peut être considérée comme une distribution sur G/g, d'où :

Proposition 5; 1. — *Si* Γ *est régulier dans* G, *à toute représentation irréductible de* G *dont la restriction à* Γ *est tempérée, est associée une orbite* V *de* $\hat{\Gamma}$ *suivant* G *et un système d'imprimitivité ayant pour base l'espace homogène quotient de* G *par le stabilisateur* g *d'un point de* V.

Remarque 5; 5. — Le système d'imprimitivité de base G/g (que nous noterons encore P) possède évidemment les mêmes propriétés de continuité que le système primitif : en particulier, il existe un voisinage de O dans $\mathcal{D}_{G/g}$ dont l'image par P est équicontinue, et l'application $(\varphi; a) \to P(\varphi)a$ se prolonge en une application linéaire $\hat{P}$ continue de $\mathcal{D}_{G/g}(E^0)$ dans E^0 [ou de $\mathcal{D}_{G/g}(E)$ dans E].

Corollaire (L. Schwartz, non publié). — *Une représentation irréductible tempérée d'un groupe de Lie abélien engendré par un voisinage compact de l'élément neutre, dans un espace vectoriel localement convexe séparé complet est de dimension* 1.

En effet si $G = \Gamma$, G laisse fixes les points de $\hat{\Gamma}$, et le système d'imprimitivité P est donc l'extension à $\hat{\Gamma}$ d'une distribution définie sur la variété réduite à un point χ, donc est de la forme $P(\varphi) = \varphi(\chi)\, A$, A opérateur fixe non nul dans E. On a donc pour toutes $\psi \in \mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$,

$$\int F\varphi(t)\, U_t\, d\Gamma(t) = \left(\int F\varphi(t)\,\chi(t)\, d\Gamma(t)\right) A,$$

d'où $U_t = \chi(t) A$, d'où $A = I$, $U_t = \chi(t) I$ et U étant irréductible, $\dim E = 1$.

4. Détermination des représentations irréductibles. — A un opérateur $A \in L(E; E)$, on peut faire correspondre la forme bilinéaire $(a, b') \to \langle Aa, b' \rangle$ sur $E \times E'$ ou la restriction de cette forme à $E \times \check{E}$ (pour la définition de $\check{E}$ et $\check{U}$, *voir* § 2, n° 2) : on obtient ainsi une forme hypocontinue relativement à la famille $\mathcal{B}$ des bornés de E et à la famille $\mathcal{E}$ des équicontinus de $\check{E}$ et à un ensemble équicontinu d'opérateurs correspond un ensemble équi-$\mathcal{B}$-$\mathcal{E}$-hypocontinu de formes bilinéaires : on définit donc ainsi une application linéaire u de $L(E; E)$ dans le dual de l'espace $F = E \hat{\otimes}_{\mathcal{B},\mathcal{E}} \check{E}$, application qui transforme un équicontinu de $L(E; E)$ en un équicontinu de F'. Remarquons d'autre part que la représentation $x \to U_x \otimes \check{U}_x$ est continue dans F, les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$ satisfaisant aux conditions de la proposition **2**; **2**.

Le système d'imprimitivité P composé avec u définit donc une application linéaire de $\mathcal{D}_{G/g}$ dans F', et cette application transforme un certain voisinage de O en un ensemble équicontinu dans F' : la proposition **1**; **1** assure l'existence d'une F-distribution $\tilde{P}$ sur G/g telle que

$$(5\,;\,13)\quad \tilde{P}(\varphi a \otimes a') = \langle P(\varphi) a, a' \rangle \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{D}_{G/g}, \quad a \in E, \quad a' \in \check{E}$$

et l'on a d'après (3) pour $x \in G$:

$$(5\,;\,14)\quad \tilde{P}(\tau_x \varphi a \otimes a') = \langle U_x P(\varphi) U_x^{-1} a, a' \rangle$$
$$= \langle P(\varphi) U_x^{-1} a, \check{U}_x^{-1} a' \rangle = P(\varphi U_x^{-1} a \otimes \check{U}_x^{-1} a'),$$

d'où par continuité pour $\psi \in \mathcal{D}_{G/g}(E)$:

$$(5\,;\,15)\qquad \tilde{P}(\tau_x \psi) = \tilde{P}(U_x^{-1} \otimes \check{U}_x^{-1} \psi).$$

Autrement dit $\tilde{P}$ est quasi invariante sur G/g, de multiplicateur $A(m, x) = U_x \otimes \check{U}_x$: malheureusement cette fonction n'a aucune raison d'être différentiable, ce qui nous empêche d'appliquer le théorème **3**; **1**; pour pouvoir le faire, nous allons passer aux représentations différentiables U^0 et $\check{U}^0$ ([18]). Nous munirons l'espace $E^0 \otimes \check{E}^0$ de la topologie tensorielle correspondant aux applications bilinéaires hypocontinues relativement à la famille des bornés de E^0 et à la famille $\mathcal{S}$ des ensembles S de $\check{E}^0$ tels que pour toute dérivation D invariante à gauche sur G, l'ensemble $\check{U}_D S$ soit équicontinu comme ensemble de formes linéaires sur E. Soit F^0 le complété de $E^0 \otimes \check{E}^0$ pour cette topologie ([19]) : l'application canonique de $E^0 \otimes \check{E}^0$ dans $E \otimes \check{E}$ se prolonge en une application linéaire continue de F^0 dans F et par suite P définit par transposition une F^0-distribution $\tilde{P}^0$ sur G/g, satisfaisant à

$$(5\,;\,16)\quad \tilde{P}^0(\tau_x \psi) = \tilde{P}^0(U^0_{x^{-1}} \otimes \check{U}^0_{x^{-1}} \psi) \qquad \text{pour} \quad \psi \in \mathcal{D}_{G/g}(F^0)$$

et cette fois nous sommes exactement dans les conditions d'application du théorème **3**; **1**, la représentation $U_x^0 \otimes \check{U}_x^0$ de G dans F^0 étant différentiable

---

([18]) On désigne par $\check{U}^0$ (resp. $\check{E}^0$) la représentation $(\check{U})^0$ [resp. l'espace $(\check{E})^0$] et non $(U^0)^\vee$ [resp. $(E^0)^\vee$].

([19]) F^0 n'est pas *a priori* le sous-espace différentiable de F.

d'après la proposition 2; 5. Par suite, il existe un élément q dans F^0, tel que

$$(5;\ 17)\qquad {}^t\big(U^0_\xi \otimes \check{U}^0_\xi\big)\,q = \rho_g(\xi)\,q \qquad \text{pour}\quad \xi \in g,$$

$$(5;\ 18)\qquad \tilde{P}^0(\psi) = \int_{G/g} \big\langle \psi(\dot{x}),\ \rho_g(x)^{-1}\,{}^t\big(U^0_x \otimes \check{U}^0_x\big)\,q\big\rangle\, d\mu_g(\dot{x}).$$

Mais l'élément q de $F^{0\prime}$ est une forme bilinéaire sur $E^0 \times \check{E}^0$, donc définit une application linéaire Q de E^0 dans $(\check{E}^0)'$, la $\mathcal{B}$-$\mathfrak{S}$-hypocontinuité entraînant la continuité de Q de E^0 dans $(\check{E}^0)'_{\mathfrak{S}}$. Remarquons que la dualité canonique entre E^0 et $\check{E}^0$ (comme sous-espace de E et E') est séparante, car E^0 est dense dans E et $\check{E}^0$ est dense dans $\check{E}$, lui-même faiblement dense dans E' : par suite E^0 s'envoie canoniquement dans $(\check{E}^0)'_{\mathfrak{S}}$, cette application étant biunivoque, et continue puisque les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont équicontinus dans E'. Autrement dit, E^0 peut être considéré comme un sous-espace faiblement dense de $(\check{E}^0)'_{\mathfrak{S}}$, muni d'une topologie plus fine. Posons $\bar{U}_x = {}^t\check{U}^{0-1}_x$: Les $\check{U}^0_x$ conservent la famille $\mathfrak{S}$, $\bar{U}_x$ est un opérateur continu dans $(\check{E}^0)'_{\mathfrak{S}}$, obtenu par prolongement par continuité faible de U^0_x et $\bar{U}_x$ décrit un équicontinu quand x décrit un compact de G. A l'élément ${}^t\big(U^0_x \otimes \check{U}^0_x\big)q$ de $F^{0\prime}$, correspond l'application linéaire continue $\bar{U}^{-1}_x\, Q U^0_x$ de E^0 dans $(\check{E}^0)'$. On a donc :

$$(5;\ 17\,bis)\qquad \bar{U}^{-1}_x\, Q U^0_x = \rho(\xi)\,Q \qquad \text{pour}\quad \xi \in G,$$

$\rho(x)^{-1}\,\bar{U}^{-1}_x\, Q U^0_x$ est en réalité défini sur G/g et l'on a pour $\varphi \in \mathcal{D}_{G/g}$, $a \in E^0$ et $a' \in \check{E}^0$:

$$(5;\ 19)\qquad \langle P(\varphi)a,\ a'\rangle = \int \big\langle a \otimes a',\ \rho(x)^{-1}\,{}^t\big(U^0_x \otimes \check{U}^0_x\big)\,q\big\rangle\,\varphi(\dot{x})\, d\mu$$
$$= \int \big\langle a',\ \rho(x)^{-1}\,\bar{U}^{-1}_x\, Q U^0_x a\big\rangle\, \varphi(\dot{x})\, d\mu_g(\dot{x}).$$

D'où l'égalité suivante, qui *a priori* n'a de sens que dans le complété $\tilde{E}$ de $(\check{E}^0)'_{\mathfrak{S}}$: pour $\varphi \in \mathcal{D}_{G/g}$ et $a \in E^0$:

$$(5;\ 20)\qquad P(\varphi)\,a = \int_{G/g} \big(\rho_g(x)^{-1}\,\bar{U}^{-1}_x\, Q U^0_x a\big)\,\varphi(\dot{x})\, d\mu_g(\dot{x}).$$

Or les deux membres de (20) se prolongent en des applications linéaires continues de $\mathcal{D}_{G/g}(E^0)$ dans $\tilde{E}$: pour le premier membre, cela a été vu à la fin du n° 2 et pour le second membre, cela résulte de l'équicontinuité des U^0_x et des $\bar{U}_x$ quand x décrit un compact : par suite on a pour $\psi \in \mathcal{D}_{G/g}(E^0)$:

$$(5;\ 21)\qquad \hat{P}(\psi) = \int_{G/g} \rho_g(x)^{-1}\,\bar{U}^{-1}_x\, Q U^0_x\, \psi(\dot{x})\, d\mu_g(\dot{x}).$$

Remarquons qu'*a priori* (21) n'a de sens que dans $\tilde{E}$, mais qu'en réalité $\hat{P}(\psi)$ appartient à E^0.

Nous n'avons encore utilisé que la quasi-invariance de la distribution $\tilde{P}^0$: il nous reste à traduire le fait que P est une représentation de l'algèbre $\mathcal{D}$: on a pour φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{D}$, $P(\varphi_2\varphi_1) = P(\varphi_2)P(\varphi_1)$ et par suite pour tout $a \in E^0$:

$$(5;\ 22) \qquad \int \rho(x)^{-1}\bar{U}_x^{-1}\,QU_x^0 a\,\varphi_1(\dot{x})\,\varphi_2(\dot{x})\,d\mu$$
$$= \int \rho(x)^{-1}\bar{U}_x^{-1}\,QU^0 P(\varphi_1)\,a\,\varphi_2(\dot{x})\,d\mu.$$

Considérons alors des fonctions φ_2 positives, de support contenu dans un compact fixe et telles que la mesure $\nu = \varphi_2(\dot{x})\,d\mu(\dot{x})$ converge vers la mesure de Dirac $\varepsilon_{\dot{\xi}}$ ([20]) : On sait ([3], p. 86) que dans ces conditions $\nu(f) \to f(\dot{e})$ pour toute fonction continue vectorielle f sur G/g. On déduit donc de (22) par continuité ([21]) :

$$(5;\ 23) \qquad \varphi_1(\dot{e})\,Qa = QP(\varphi_1)\,a,$$

d'où pour $\psi \in \mathcal{D}_{G/g}(E^0)$:

$$(5;\ 24) \qquad QP(\psi) = Q\,\psi(\dot{e}).$$

Nous avons maintenant tout ce qu'il nous faut pour construire une représentation L de g telle que U soit plus ou moins induite par L. Soit N le noyau de Q : C'est un sous-espace fermé de E^0, invariant par les opérateurs U_ξ^0 pour $\xi \in g$ d'après (17 *bis*), donc aussi par les opérateurs $\rho(\xi)^{-\frac{1}{2}}U_\xi^0$. Soit M l'espace quotient E^0/N et soit $\xi \to L_\xi^0$ la représentation différentiable de g dans M ([22]) quotient de la représentation $V^0 = \rho(\xi)^{-\frac{1}{2}}U_\xi^0$ de g dans E^0. Nous noterons π la projection canonique de E^0 sur M. Considérons l'espace $\mathcal{D}^{V^0}$ dans lequel s'effectue la représentation différentiable induite par V^0 : si $\varphi \in \mathcal{D}^{V^0}$, $\pi(\varphi) \in \mathcal{D}^{L^0}$ et l'on obtient ainsi une application linéaire $\tilde{\pi}$ continue de $\mathcal{D}^{V^0}$ dans $\mathcal{D}^{L^0}$ qui commute avec les translations à droite. Soit $\mathcal{N}_1$ le noyau de cette application $\tilde{\pi}$: c'est le sous-espace de $\mathcal{D}^{V^0}$ formé des fonctions à valeurs dans N.

D'autre part, si $\varphi \in \mathcal{D}^{V^0}$, la fonction $U_{x^{-1}}^0\,\varphi(x)$ est constante sur les classes à droite suivant g, donc s'identifie avec un élément φ' de $\mathcal{D}_{G/g}(E^0)$: on obtient

---

([20]) De telles fonctions φ_2 existent car le support de μ est G/g tout entier.

([21]) Remarquons que, comme distribution à valeurs dans $L(E^0, \tilde{E})$, P est une *fonction* [à savoir $\rho(x)^{-1}\bar{U}_x^{-1}\,QU_{x^{-1}}^0$] mais que (23) montre que P considéré comme distribution à valeurs dans $L(E^0, E^0)$ *n'est pas* une fonction.

([22]) M n'est pas en général complet.

donc une application linéaire continue de $\mathcal{D}^{\Gamma^0}$ dans E^0, soit ν, en posant

$$(5;\,25)\qquad \nu(\varphi) = \hat{P}(\varphi') = \int \big(\rho(x)^{-1}\,\bar{U}_x^{-1}\,Q U_x^0\big)\,(U_{x^{-1}}^0\,\varphi(x))\,d\mu(\dot{x})$$
$$= \int \rho(x)^{-1}\,\bar{U}_x^{-1}\,Q\,\varphi(x)\,d\mu(\dot{x}),$$

ν commute avec les représentations de G dans $\mathcal{D}^{\Gamma^0}$ et E^0 : en effet

$$(5;\,26)\qquad \nu(\tau_y\cdot\varphi) = \int \rho(x)^{-1}\,\bar{U}_x^{-1}\,Q\,\varphi(xy)\,d\mu(\dot{x})$$
$$= \int \rho(xy^{-1})^{-1}\,\bar{U}_y\,\bar{U}_x^{-1}\,Q\,\varphi(x)\,d\mu\big(\dot{\widehat{xy^{-1}}}\big)$$
$$= \bar{U}_y \int \rho(xy^{-1})^{-1}\,\bar{U}_x^{-1}\,Q\,\varphi(x)\,\frac{\rho(xy^{-1})}{\rho(x)}\,d\mu(\dot{x}) = \bar{U}_y\,\nu(\varphi) = U_y^0\,\nu(\varphi).$$

$\nu(\mathcal{D}^{\Gamma^0})$ est donc un sous-espace invariant de E^0, non nul, car il contient les $P(\psi)a$ pour $\psi \in \mathcal{D}_{G/g}$ et $a \in E^0$, donc partout dense dans E^0 et dans E.

Soit $\mathcal{N}_2$ le noyau de ν : d'après (25) $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$. Mais $\mathcal{D}^{\Gamma^0}$ est un module sur l'algèbre $\mathcal{D}_{G/g}$, le produit $f\varphi$ d'un élément φ de $\mathcal{D}^{\Gamma^0}$ par l'élément f de $\mathcal{D}_{G/g}$ étant la fonction $x \to f(\dot{x})\,\varphi(x)$. On a $(f\varphi)' = f\varphi'$, et par suite :

$$(5;\,27)\qquad \nu(f\varphi) = \hat{P}(f\varphi') = P(f)\,\hat{P}(\varphi') = P(f)\,\nu(\varphi).$$

Donc $\varphi \in \mathcal{N}_2$ entraîne $\nu(f\varphi) = 0$ pour toute f, autrement dit la distribution $\rho(x^{-1})\,\bar{U}_x^{-1}\,Q\,\varphi(x)\,d\mu(\dot{x})$ sur G/g à valeurs dans $\tilde{E}$ est nulle, ce qui entraîne que la fonction continue $\rho(x^{-1})\,\bar{U}_x^{-1}Q\,\varphi(x)$ est nulle, donc $Q\,\varphi(x) = 0$, $\varphi \in \mathcal{N}_1$: les noyaux de $\tilde{\pi}$ et ν coïncident et il existe une application linéaire biunivoque u de $\tilde{\pi}(\mathcal{D}^{\Gamma^0})$ sur $\nu(\mathcal{D}^{\Gamma^0})$, et il est clair que u « commute » avec les représentations U et U^{L^0} restreintes à $\nu(\mathcal{D}^{\Gamma^0})$ et $\tilde{\pi}(\mathcal{D}^{\Gamma^0})$. Nous pouvons alors énoncer le théorème :

Théorème 5; 1. — *Soit G un groupe de Lie extension d'un sous-groupe abélien fermé distingué Γ régulier dans G.*

1° *A toute représentation continue irréductible U dans un espace vectoriel localement convexe séparé complet E, dont la restriction à Γ est tempérée, est associée une orbite de $\hat{\Gamma}$ suivant G et une représentation différentiable irréductible L^0 du stabilisateur g d'un point arbitraire χ de cette orbite, dans un espace localement convexe séparé M, telle que $L_\xi^0 = \chi(\xi)\,I$ pour $\xi \in \Gamma$. Il existe dans E un sous-espace invariant dense F_1 et dans $\mathcal{D}^{L^0}$ un sous-espace invariant partout dense F_2 tels que les restrictions de U à F_1 et de U^{L^0} à F_2 soient algébriquement équivalentes.*

2° *Supposons de plus que E soit un espace de Fréchet : Alors M est un espace de Fréchet et il existe une application linéaire continue biunivoque* *u de* $\mathcal{D}^{L^0}$ *sur un sous-espace invariant dense de* E *telle que* $u.U_x^{L^0} = U_x u$ (*autrement dit,* U *est induite par* L^0).

3° *Si* E *est un espace de Banach,* L^0 *est la représentation différentiable associée à une représentation continue irréductible* L *de* g *dans un espace de Banach.*

4° *Si* U *est une représentation unitaire dans un espace de Hilbert,* L^0 *est la représentation différentiable associée à une représentation unitaire* L *de* g *dans un espace de Hilbert et* U *est unitairement équivalente à la représentation unitaire induite par* L.

DÉMONSTRATION. — 1° Les seules choses qui restent à démontrer sont que L^0 est irréductible et que $L_\xi^0 = \chi(\xi) I$ pour $\xi \in \Gamma$. Soit M_1 un sous-espace invariant non nul de M et soit H le sous-espace de $\mathcal{D}^{V^0}$ formé des fonctions prenant leurs valeurs dans $\pi^{-1}(M_1)$: H est un invariant par translation à droite, contient $\mathcal{N}_1$ et est distinct de $\mathcal{N}_1$. Par suite $\nu(H)$ est un sous-espace invariant non nul de F^0, donc dense dans E^0 et $\pi(\nu(H))$ est dense dans M : Or (24) montre que $\pi(\hat{P}(\psi)) = \pi(\psi(\dot{e}))$ pour $\psi \in \mathcal{D}_{G/g}(E^0)$, d'où $\pi(\nu(H)) = M_1$: M_1 est dense dans M, donc L^0 *est irréductible.*

D'autre part, si l'on désigne à nouveau par P le système d'imprimitivité original, de base $\hat{\Gamma}$, on a pour $\xi \in \Gamma$ et $\varphi \in \mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$:

$$(5;\ 28)\qquad U_\xi^0 P(\varphi) = \int_\Gamma F\varphi(\eta)\, U_{\xi\eta}^0\, d_\Gamma(\eta) = P(\varphi')$$

avec $\varphi'(s) = F^{-1}(F\varphi(\xi^{-1}\eta)) = \langle \xi, s \rangle \varphi(s)$. D'autre part, par construction même, les propriétés de la restriction de P à l'ouvert Ω_V de la proposition 1 sont exactement les mêmes que celles du système de base G/g, le point χ choisi sur l'orbite venant en $\dot{e}$: On a donc pour $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$, d'après (21) : $QP(\varphi)a = \varphi(\chi) Qa$, ou encore $P(\varphi)a$ est congru à $\varphi(\chi)a$ modulo N. On a donc les égalités suivantes *modulo* N :

$$(5;\ 29)\quad U_\xi^0\, \varphi(\chi)a = U_\xi^0\, P(\varphi)a = P(\varphi')a = \varphi'(\xi)a = \chi(\xi)\,\varphi(\chi)a,$$

d'où $U_\xi^0 a = \chi(\xi) a$ modulo N. Comme $\rho_g(\xi) = 1$ pour $\xi \in \Gamma$ [car Γ étant distingué dans G et g, on a $\delta_\Gamma(\xi) = \delta_g(\xi) = \delta_G(\xi)$] ; ceci entraîne $L_\xi^0 = \chi(\xi) I$ pour $\xi \in \Gamma$.

2° Si E est un espace de Fréchet, E^0 l'est aussi, donc aussi M qui en est un quotient. D'autre part, on sait que dans ces conditions, l'application canonique de $\mathcal{D}_G(E^0)$ dans $\mathcal{D}_G(M)$ est un homomorphisme sur (*cf.* [21], p. 43) : Or on vérifie facilement que $\tilde{\pi}$ composée avec l'homomorphisme canonique de $\mathcal{D}_G(E^0)$ sur $\mathcal{D}^{V^0}$ coïncide avec le composé de l'homomorphisme canonique de $\mathcal{D}_G(M)$ sur $\mathcal{D}^{L^0}$ avec cet homomorphisme : Par suite $\tilde{\pi}$ est aussi un homomorphisme sur, $\mathcal{D}^{L^0}$ s'identifie au quotient $\mathcal{D}^{V^0}/\mathcal{N}_1$, quotient qui s'envoie continûment et biunivoquement dans E^0.

3° Si maintenant E est un espace de Banach, $\check{E}$ est aussi un Banach, donc également l'espace $F = E \hat{\otimes}_{\mathcal{B}, \mathcal{S}} \check{E}$, qui d'ailleurs coïncide avec $E \hat{\otimes}_\pi \check{E}$. Comme P est d'ordre fini m, $\tilde{P}$ est continue sur $\mathcal{D}^m_{G/g} \hat{\otimes}_\pi F$. Or M. L. Schwartz a montré ([35], [37]), qu'une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}^m \hat{\otimes}_\pi F$ (F Banach arbitraire) était continue sur $\mathcal{D}^{m+n+1} \otimes F$ pour la topologie induite par $\mathcal{D}^{m+n+1}(F)$ (n dimension de la variété G/g) : par suite P est une $(E \hat{\otimes} \check{E})$-distribution d'ordre $\leq r = m + n + 1$ sur G/g et vérifie (15) pour $\varphi \in \mathcal{D}^r(E \hat{\otimes} \check{E})$. Mais la même difficulté que plus haut se présente : Le multiplicateur $U_x \otimes \check{U}_x$ n'est pas en général r fois différentiable, ce qui nous amène à introduire l'espace $E^{(r)}$ (resp. $\check{E}^{(r)}$) sous-espace des éléments $a \in E$ (resp. $a' \in \check{E}$), tels que la fonction $x \rightarrow U_x a$ (resp. $\check{U}_x a'$) soit r fois différentiable. Nous munirons $E^{(r)}$ (resp. $\check{E}^{(r)}$) de la topologie de la convergence dans E (resp. $\check{E}$) de a (resp. a') et de chacune de ses « dérivées à l'origine » jusqu'à l'ordre r, topologie qui fait de $E^{(r)}$ (resp. $\check{E}^{(r)}$) un espace de Banach, stable pour U (resp. $\check{U}$) et pour les opérateurs $P(\varphi)$. Posons $F^{(r)} = E^{(r)} \hat{\otimes} \check{E}^{(r)}$.

L'application $x \rightarrow U_x$ (resp. $\check{U}_x$) est r fois différentiable de G dans $L_b(E^{(r)}; E)$ [resp. $L_b(\check{E}^{(r)}; \check{E})$] [mais non de G dans $L_b(E^{(r)}; E^{(r)})$] donc l'application $x \rightarrow U_x \otimes \check{U}_x$ est r fois différentiable de G dans $L(F^{(r)}; F)$. Par suite si $\psi \in \mathcal{D}^r_G(F^{(r)})$, la fonction $\tilde{\psi}(x) = \int_\gamma U_\xi^{-1} \otimes \check{U}_\xi^{-1} \psi(\xi x)\, d_g(\xi)$ est r fois différentiable comme fonction sur G/g *à valeurs dans* F (mais non dans $F^{(r)}$) et l'on vérifie immédiatement que $\psi \rightarrow \tilde{P}(\tilde{\psi})$ est une $F^{(r)}$-distribution sur G, invariante par les translations à droite. Nous pouvons donc appliquer la proposition 3; 1 : On obtient une forme linéaire continue $\hat{q}$ sur $F^{(r)}$ et par suite un opérateur continu $\hat{Q}$ de $E^{(r)}$ dans $(\check{E}^{(r)})'$. Il est immédiat que $\hat{Q}$ est le prolongement par continuité à $E^{(r)}$ de l'opérateur Q déterminé plus haut [de E^0 dans $(\check{E}^0)'$]. Soit $\hat{N}$ le noyau de $\hat{Q}$: la représentation L cherchée est la représentation de g dans l'espace de Banach $\hat{M} = E^{(r)}/\hat{M}$, quotient par $\hat{N}$ de la représentation $\rho_g(\xi)^{-1} U_\xi$ de g dans $E^{(r)}$.

Il ne reste plus qu'à démontrer que L^0 coïncide avec la représentation différentiable $(L)^0$ de g associée à L, ce qui entraînera que L est irréductible (proposition 2; 6). Il suffit de montrer que M contient le sous-espace différentiable $(\hat{M})^0$; la réciproque étant triviale. Nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Lemme 5; 3. — *Soit V une représentation continue d'un groupe de Lie g dans un espace de Fréchet F, soit N un sous-espace fermé invariant de F et soit π la projection canonique de F sur F/N : le sous-espace différentiable $(F/N)^0$ de la représentation L quotient de V par N est l'image $\pi(F^0)$ de F^0 dans F/N.*

DÉMONSTRATION. — Il est clair que $(F/N)^0 \supset \pi(F^0)$. Réciproquement soit $a \in (F/N)^0$: F étant un espace de Fréchet, il existe une fonction $\psi \in \mathcal{E}_g(F)$ telle que $\pi(\psi(\xi)) = L_\xi a$ pour $\xi \in g$. Soit $k \in \mathcal{D}_g$, telle que $\int_g k(\xi)\, d\xi = 1$, et posons $\chi(\eta) = \int_g V^{-1}\psi(\xi\eta)\, k(\xi\eta)\, d\xi$ pour $\eta \in g : \chi \in \mathcal{E}_g(F)$ (*cf.* démonstration de la proposition 4; 1) et pour tout $\lambda \in g$, on a $\chi(\lambda\eta) = V_\lambda \chi(\eta)$, ce qui entraîne que $\chi(e) \in F^0$. Or

$$\pi(\chi(e)) = \int \pi(V_\xi^{-1}\psi(\xi))\, k(\xi)\, d\xi = \int L_\xi^{-1}\pi(\psi(\xi))\, k(\xi)\, d\xi = a\int k(\xi)\, d\xi = a,$$

donc $a \in \pi(F^0)$. C. Q. F. D.

Le lemme 3 montre que $(\hat{M})^0$ est le *quotient* du sous-espace différentiable $(E^{(r)})^0_g$ de $E^{(r)}$ $\left[\text{pour la représentation } V_\xi = \rho(\xi)^{-\frac{1}{2}} U \text{ de } g\right]$. Par suite si $a \in (\hat{M})^0$, il existe un élément $\varphi \in \mathcal{D}^{(V^r)^0}$ tel que $\pi(\varphi(e)) = a$. Or l'application $\hat{P}$ est continue de $\mathcal{D}_{G/g}(E^{(r)})$ dans $E^{(r)}$ [*cf.* démonstration de la continuité de P de $\mathcal{D}(E^0)$ dans E^0 au n° 2] et par suite l'application $\psi \to \nu(\psi) = \hat{P}(\psi')$ de $\mathcal{D}^{V^0}$ dans E^0 se prolonge en une application continue $\tilde{\nu}$ de $\mathcal{D}^{(V^r)^0}$ dans $E^{(r)}$ qui « commute » avec les représentations $U^{(V^r)^0}$ et U de G, ce qui entraîne que $\tilde{\nu}(\mathcal{D}^{(V^r)^0}) \subset E^0$. Or, on a d'après (24),

$$\pi(\tilde{\nu}(\varphi)) = \pi(\hat{P}(\varphi')) = \pi(\varphi'(e)) = \pi(\varphi(e)) = a,$$

ce qui montre que $a \in \pi(E^0) = M$, donc que $(\hat{M})^0 \subset M$. C. Q. F. D.

4° Supposons enfin que U soit une représentation unitaire dans un espace de Hilbert : c'est le cas traité par M. MACKEY et le 4° du théorème 5; 1 n'est autre que le théorème 14; 1 de [29]. Cependant nous allons le démontrer à partir des résultats précédents. Soit (a, b) le produit scalaire sesquilinéaire sur E. L'anti-isomorphisme canonique de E sur son dual E' transforme U en la représentation contragrédiente $\check{U}$. Par suite E^0 et $\check{E}^0$ sont eux aussi anti-isomorphes et il existe une forme sesquilinéaire canonique, notée également (a, b') sur $E^0 \times (\check{E}^0)'$, prolongeant le produit scalaire sur E^0. On a $(U^0_x a, b') = (a, \bar{U}_x^{-1} b')$ et par suite pour a et b dans E^0 et $\varphi \in \mathcal{D}_{G/g}$:

$$(5;30)\qquad (a, P(\varphi)b) = \int_{G/g} \rho_g(x)^{-1}\left(a, \bar{U}_x^{-1} Q U^0_x b\right)\varphi(\dot{x})\, d\mu_g(\dot{x}).$$

Or nous avons vu (remarque 5; 2) que U étant unitaire, la représentation P est également unitaire : $\varphi \geq 0$ entraîne donc $(a, P(\varphi)a) \geq 0$, ce qui exige que la fonction continue $x \to \left(a, \bar{U}_x^{-1} Q U^0_x a\right)$ soit *positive* : la forme sesquilinéaire (a, Qb) est donc une forme hermitienne positive sur E^0, dont le « noyau » est exactement N : par passage au quotient, on obtient donc une structure préhilbertienne sur $M = E^0/N$ et la représentation L^0 est alors préunitaire, car d'après (17) :

$$(5;\ 31)\qquad \left(\rho(\xi)^{-\frac{1}{2}} U_\xi^0 a,\ \rho(\xi)^{-\frac{1}{2}} Q U_\xi^0 b\right) = \left(a,\ \rho(\xi)^{-1} \bar{U}_\xi^{-1} Q U_\xi^0 b\right) = (a,\ Qb)$$

et par suite se prolonge en une représentation unitaire L dans l'espace de Hilbert $\hat{M}$ complété de M pour la norme $\| \pi(a) \|^2 = (a,\ Qa)$.

Enfin U est unitairement équivalente à U^L : Soit $\varphi \in \mathcal{D}^{V^0}$:

$$(5;\ 32)\qquad \| \nu(\varphi) \|^2 = \int_{G/g} \rho(x)^{-1} \left(\nu(\varphi),\ \bar{U}_x^{-1} Q \varphi(x)\right) d\mu(\dot{x})$$

d'après (25). Mais d'après (24), $Q\varphi(e) = Q\nu(\varphi)$ et par suite :

$$(5;\ 33)\qquad Q\varphi(x) = Q(\tau_x\varphi)(e) = Q\nu(\tau_x\varphi) = QU_x^0 \nu(\varphi).$$

D'où

$$(5;\ 34)\qquad \begin{aligned} \| \nu(\varphi) \|^2 &= \int \rho(x)^{-1} (U_x^0 \nu(\varphi),\ QU_x^0 \nu(\varphi))\, d\mu \\ &= \int \rho(x) \| \pi(U_x^0 \nu(\varphi)) \|^2\, d\mu. \end{aligned}$$

Mais $\pi(U_x^0 \nu(\varphi)) = \pi(\nu(\tau_x\varphi)) = \pi(\varphi(x))$: d'où

$$(5;\ 35)\qquad \| \nu(\varphi) \|^2 = \int_{G/g} \rho(x)^{-1} \| \pi(\varphi(x)) \|^2\, d\mu_g(\dot{x}),$$

ce qui exprime que l'application u de $\mathcal{D}^{L^0}$ dans E^0 est isométrique, d'où trivialement l'équivalence unitaire cherchée. L est irréductible, puisque U^L l'est. On montre d'ailleurs facilement que L^0 est la représentation différentiable associée à L soit comme au 3°, soit en construisant l'espace différentiable de U^L (espace des fonctions différentiables à valeurs dans M^0 dont les dérivées invariantes à gauche sont de carré sommable sur G/g).

Réciproquement, soit L une représentation continue irréductible de g dans un espace E, telle que $L_\xi = \chi(\xi) I$ pour $\xi \in \Gamma$:

PROPOSITION 5 ; 2. — *La représentation induite U^L dans $\mathcal{C}^L$ et la représentation différentiable U^{L^0} induite par la représentation différentiable associée à L, sont irréductibles.*

[Le théorème 5 ; 1 donne donc en quelque sorte une condition *nécessaire et suffisante* pour qu'une représentation U de G soit irréductible ([23])].

Remarquons que la représentation U^{L^0} dans $\mathcal{D}^{L^0}$ étant la représentation différentiable associée à U^L, il suffit de démontrer que U^L est irréductible.

([23]) En réalité, il n'est pas évident que *toute* représentation « *induite par L* » soit irréductible : elle le sera certainement si l'on peut identifier l'espace où elle s'effectue avec un sous-espace de $L(\mathcal{D}_G;\ E)$.

Tout d'abord, on a pour $\xi \in \Gamma$ et $f \in \mathcal{C}^L$:

$$(5;36)\quad Q^L_\xi f(y) = f(y\xi) = f(y\xi y^{-1}y) = \chi(y\xi y^{-1})f(y) = (\xi, \chi\cdot y)f(y),$$

donc U^L restreinte à Γ est bornée, donc tempérée, on peut former les opérarateurs $P(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}_{\hat{\Gamma}}$. On a

$$(5;37)\quad P(\varphi)f(y) = \int_\Gamma F\varphi(\eta)\chi(y\eta y^{-1})f(y)\,d_\Gamma(\eta) = \varphi(\chi\cdot y)f(y).$$

Mais l'application $y \rightarrow \chi.y$ envoie G/g sur l'orbite V de $\hat{\Gamma}$ passant par χ et une fonction $\psi \in \mathcal{D}_{G/g}$ s'identifie avec la trace sur cette orbite d'une fonction $\psi' \in \mathcal{D}_{\Omega_{\Gamma}}$: (37) montre que $P(\psi')$ ne dépend que de ψ, d'où une application linéaire continue de $\mathcal{D}_{G/g}$ dans $L(\mathcal{C}^L; \mathcal{C}^L)$, $\psi \rightarrow P(\psi') = P'(\psi)$ et il est clair que $P'(\psi)f(x) = \psi(\dot{x})f(x)$.

Soit alors H un sous-espace fermé invariant non nul de $\mathcal{C}^L$: H est invariant par les $P(\varphi)$, donc si $f \in H$, $\varphi(\dot{x})f(x) \in H$ pour $\varphi \in \mathcal{D}_{G/g}$. D'autre part $f \rightarrow f(e)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{C}^L$ dans E, non nulle (car H étant invariant par translation à droite, on aurait $H = \{0\}$) et qui « commute » avec U^L_ξ et $\rho(\xi)^{\frac{1}{2}}L_\xi$ pour $\xi \in g$, car

$$(5;38)\quad (U^L_\xi f)(e) = f(\xi) = \rho(\xi)^{\frac{1}{2}}L_\xi(f(e)).$$

Par suite l'ensemble des $f(x)$ pour x fixé dans G et f dans H est dense dans E.

La proposition 2 résulte alors d'un résultat plus général sur les sections d'un espace fibré à fibre vectorielle topologique : un tel espace fibré $\mathcal{X}$, de base un espace localement compact B, de fibre un espace localement convexe séparé F est défini de la manière habituelle par des cartes locales : soit p la projection de $\mathcal{X}$ sur B. On se donne un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de B et pour chaque indice i une application continue h_i de $p^{-1}(U_i)$ dans F telle que $k_i = (p, h_i)$ soit un homéomorphisme de $p^{-1}(U_i)$ sur $U_i \times F$ et que pour $b \in U_i \cap U_j$ et $a \in F$, on ait $k_i \circ k_j^{-1}(b, a) = A_{i,j}(b).a$, les $A_{i,j}$ étant les applications continues de $U_i \cap U_j$ dans $L_s(F; F)$, telles que l'image d'un compact de $U_i \cap U_j$ par $A_{i,j}$ soit équicontinue. Une *section continue* f de $\mathcal{X}$ est alors définie par les fonctions continues $\varphi_i = h_i \circ f$ sur U_i, à valeurs dans F et telles que $\varphi_i(b) = A_{i,j}(b).\varphi_j(b)$ pour $b \in U_i \cap U_j$.

Soit $S(\mathcal{X})$ (resp. $S_c(\mathcal{X})$) l'espace vectoriel des sections continues (resp. à support compact) de $\mathcal{X}$, muni de la topologie suivante : $f \rightarrow 0$ dans $S(\mathcal{X})$ si pour tout indice i, $\varphi_i = h_i \circ f \rightarrow 0$ dans F uniformément sur tout compact de U_i. L'espace $S_c(\mathcal{X})$ sera muni de la topologie limite inductive des topologies induites par $S(\mathcal{X})$ sur les sous-espaces $S_K(\mathcal{X})$ des sections à support dans le compact K de B. Les espaces $S(\mathcal{X})$ et $S_c(\mathcal{X})$ sont des modules topologiques sur $\mathcal{C}_B$. Si M est un sous-module de $S(\mathcal{X})$ ou de $S_c(\mathcal{X})$, on appelle sous-espace ponctuel de M en $b \in B$, l'ensemble des valeurs au point b des sections de M.

Proposition 5 ; 3. — *Tout sous-module fermé de $S(X)$ [resp. de $S_c(X)$] est caractérisé par ses sous-espaces ponctuels, qui sont fermés.*

Dans notre cas, on a $B = G/g$, $F =$ espace des fonctions sur g, à valeurs dans E et satisfaisant à $f(\xi) = \rho(\xi)^{\frac{1}{2}} L_\xi f(e)$, espace isomorphe à E par $f \to f(e)$. Pour tout point $b \in G/g$, soit U_b un voisinage ouvert de b assez petit pour qu'il existe une section continue $\dot{x} \to k_b(\dot{x})$ de G fibré par g au-dessus de U_b. L'espace fibré X est défini par le recouvrement $\{U_b\}$ et les applications $\dot{x} \to A_{b,b'}(\dot{x}) = \rho(k_b(\dot{x})\, k_{b'}(\dot{x})^{-1})^{\frac{1}{2}} L_{k_b(\dot{x})\, k_{b'}(\dot{x})^{-1}}$ de $U_b \cap U_{b'}$ dans $L(F; F)$. L'espace $\mathcal{C}^L$ s'identifie alors au module $S_c(X)$: H et $\mathcal{C}^L$ ont mêmes sous-espaces ponctuels donc sont identiques d'après la proposition 3, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.

Reste à démontrer la proposition 3 : on se ramène facilement par des partitions de l'unité au cas des sections à support compact d'un espace fibré trivial $X = B \times F$: on a alors $S_c(X) = \mathcal{C}_B(F)$.

Soient donc M et M' deux sous-modules de $\mathcal{C}_B(F)$, ayant mêmes sous-espaces ponctuels et soit $f \in M$, de support compact K. Soit Ω un voisinage ouvert relativement compact de K et soit V un voisinage convexe de O dans F. Quel que soit $x \in \Omega$, il existe une fonction $f_x \in M'$ et un voisinage Ω_x de x tel que $f_x(y) - f(y) \in V$ pour tout $y \in \Omega_x$. On peut supposer que $\Omega_x \subset \Omega$. Soit $\Omega_1, \ldots, \Omega_p$ un recouvrement fini de K extrait du recouvrement $\{\Omega_x\}$, f_i la fonction f_x associée à Ω_i et soit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\complement K, \Omega_1, \ldots, \Omega_p$ de B. On a

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i(x) f(x), \text{ d'où}$$

$$(5; 39) \qquad f(x) - \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i(x) f_i(x) = \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i(x)\,(f(x) - f_i(x)) \in V.$$

Par suite, f est limite uniforme de fonctions $\Sigma \alpha_i(x) f_i(x) \in M'$, de support contenu dans $\bar{\Omega}$, d'où $f \in M'$ et par suite $M \subset M'$, d'où le résultat.

Cas d'un produit semi-direct. — Supposons que G soit le *produit semi-direct* de Γ et d'un sous-groupe fermé G_1 : alors g est le produit semi-direct de Γ et du sous-groupe fermé $g_1 = G_1 \cap g$. Soit L^1 la restriction de L^0 à g_1 : il est immédiat que L^1 est irréductible et que pour $\xi = \xi_1 t$, $\xi_1 \in g_1$, $t \in \Gamma$, on a $L^0_{\xi_1 t} = \chi(t) L^1_{\xi_1}$; réciproquement, cette formule détermine une représentation irréductible de g à partir d'une représentation irréductible de g_1. Par suite, la détermination des représentations irréductibles de G dans un espace vectoriel E (resp. dans un espace de Fréchet, resp. dans un espace de Banach) dont la restriction à Γ est tempérée, est ramenée à la détermination des représentations irréductibles dans un espace vectoriel (resp. un espace de Fréchet, resp. un espace de Banach) de G_1 et de certains de ses sous-groupes.

5. Exemples. — I. Soit G le « *groupe linéaire de la droite* », c'est-à-dire le groupe des transformations $x \to ax + b$ sur R (b réel, a réel > 0) : Γ est le sous-groupe des translations $x \to x + b$ et G_1 le sous-groupe des homothéties $x \to ax$; $\hat{\Gamma}$ est le groupe additif des réels et il y a trois orbites : le demi-axe positif, le demi-axe négatif et l'origine, les stabilisateurs g_1 dans G_1 étant $\{e\}$ pour les deux premières et G_1 tout entier pour la troisième. Par suite G n'admet comme représentations irréductibles tempérées sur Γ que les représentations de G_1 et des représentations de dimension infinie qui sont plus ou moins équivalentes à l'une des deux représentations unitaires irréductibles de G induites par les représentations $b \to \exp(\pm ib)$.

II. $G =$ *groupe des déplacements du plan* : Ici $\Gamma =$ sous-groupe des translations, $G_1 =$ sous-groupe des rotations autour de l'origine. Les orbites de $\hat{\Gamma} = R$ sont les cercles de centre l'origine, et le stabilisateur d'un point χ de $\hat{\Gamma}$ est $\{e\}$, si $\chi \neq 0$, G_1, si $\chi = 0$; G_1 étant compact, on peut dire qu'en un certain sens G n'a pas d'autres représentations irréductibles tempérées sur Γ (et en particulier de représentations bornées) que les représentations unitaires.

III. $G =$ *groupe de Lorentz inhomogène* : Ici encore $\Gamma =$ groupe des translations dans R^4, $G_1 =$ groupe de Lorentz homogène. On peut prendre comme forme bilinéaire sur $R^4 \times R^4$ réalisant la dualité entre Γ et $\hat{\Gamma}$ la forme $\exp i\varphi(x, y)$, avec $\varphi(x, y) = (-x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4)$: alors G opère sur $\hat{\Gamma} = R^4$ par les transformations de Lorentz et $\hat{\Gamma}$ se décompose en six sous-ensembles, chacun d'eux étant *fibré* par G, à savoir [**40**] :

F_+^+ : ensemble des y avec $\varphi(y, y) > 0$ et $y_4 > 0$;
F_-^+ : » » » $\varphi(y, y) > 0$ et $y_4 < 0$;
F_+^0 : » » » $\varphi(y, y) = 0$ et $y_4 > 0$;
F_-^0 : » » » $\varphi(y, y) = 0$ et $y_4 < 0$;
F_0^0 : » » » $\varphi(y, y) = 0$ et $y = 0$ ($F_0^0 = \{0\}$) ;
F^- : » » » $\varphi(y, y) < 0$.

Par suite Γ est régulier dans G et la détermination des représentations irréductibles de G se ramène à celle des représentations irréductibles des stabilisateurs dans G_1 des différents points de Γ à savoir [**40**] le groupe des rotations dans R^3 pour $y \in F_+^+$ ou F_-^+, le groupe de Lorentz homogène à trois variables pour $y \in F^-$ le groupe des déplacements du plan pour $y \in F_+^0$ ou F_0^-, et enfin le groupe de Lorentz homogène à quatre variables pour $y = 0$.

Paragraphe 6. — Nombres d'entrelacement.

1. Opérateurs et formes d'entrelacement. — Soit U (resp. V) une représentatiou *unitaire* d'un groupe G dans un espace de Hilbert E (resp. F) ;

la notion d'*opérateur d'entrelacement* de U avec V est classique (*cf.* [**28**]) . une application linéaire continue T de E dans F est appelée « opérateur d'entrelacement » si $TU_x = V_x T$ pour tout x de G. Alors T^* est un opérateur d'entrelacement de V avec U. Soit $I(U, V)$ la dimension de l'espace vectoriel de ces opérateurs : on a $I(U, V) = I(V, U)$ et il est classique (lemme de Schur) que U est irréductible si et seulement si $I(U, U) = 1$ et que deux représentations unitaires irréductibles U et V sont inéquivalentes si et seulement si $I(U, V) = 0$.

Dans le cas de représentations non unitaires, les choses ne sont plus aussi simples : on peut encore définir la notion d'opérateur d'entrelacement comme plus haut, mais la considération de ces opérateurs ne donnera plus de renseignements sur l'irréductibilité, mais seulement sur la possibilité de décomposer les représentations en somme directe, $I(U; U) = 1$ entraînant que U est « indécomposable ». D'autre part, si T est un opérateur d'entrelacement, de U avec V, ${}^tT$ est un opérateur d'entrelacement de $\check{V}$ avec $\check{U}$: on a en effet ${}^tT\,{}^tV_x^{-1} = {}^tU_x^{-1}\,{}^tT$ et si $a' \in \check{F}$, ${}^tU_x^{-1}({}^tTa')$ est égal à ${}^tT'\,V_x^{-1}a'$, donc est continue de G dans E : par suite ${}^tT$ applique $\check{F}$ dans $\check{E}$. On en déduit ($\check{F}$ étant faiblement dense dans F') $I(U, V) \leq I(\check{V}, \check{U})$, d'où si E et F *sont réflexifs*, $I(U, V) = I(\check{V}, \check{U})$. Par contre, $I(U, V)$ et $I(V, U)$ ne sont pas en général égaux ([24]) : Pour rétablir la symétrie entre U et V, nous allons introduire une notion légèrement différente, quoique équivalente dans le cas unitaire :

Définition 6; 1. — *Soit U (resp. V) une représentation continue d'un groupe G, dans un espace localement convexe séparé complet tonnelé E (resp. F) ([25]). Une forme bilinéaire séparément continue B sur $E \times F$ sera dite forme d'entrelacement de U avec V si elle satisfait pour tout x de G à la condition*

$$(6;\ 1) \qquad B(U_x a,\ V_x b) = B(a,\ b) \qquad (a \in E,\ b \in F).$$

Nous appellerons nombre d'entrelacement de U avec V et nous noterons $i(U, V)$ la dimension de l'espace vectoriel des formes d'entrelacement de U avec V.

Il est clair que $i(V, U) = i(U, V)$.

Une forme d'entrelacement B définit canoniquement une application linéaire T continue de E dans F' (fort puisque E et F sont tonnelés) : on a $\langle b, Ta \rangle = B(a, b)$, d'où $TU_x = {}^tV_x^{-1}\,T$: par suite T applique E dans $\check{F}$:

([24]) Prenons par exemple pour G un groupe de Lie abélien non compact, pour U la représentation régulière de G dans L et pour V la représentation $x \to \chi(x)$, χ caractère de G : il est immédiat par transformation de Fourier que $I(U, V) = 1$ et $I(V, U) = 0$.

([25]) Dans le cas général, il faudrait supposer B hypocontinue relativement aux bornés de E et F, ce qui est une conséquence de la continuité séparée quand E et F sont tonnelés ([5]).

une forme d'entrelacement définit canoniquement un opérateur d'entrelacement de U avec $\hat{V}$ et réciproquement. Donc $i(U, V) = I(U, \hat{V})$: Or si V est *unitaire*, on a $\check{V} = \overline{V}$ et par suite $i(U, V) = I(U, \overline{V})$.

PROPOSITION 6; 1. — *Soient U et V deux représentations unitaires de G : une condition nécessaire et suffisante pour que U soit irréductible est que $i(U, \overline{U}) = 1$. Si U est irréductible, $i(U, \overline{V})$ est le nombre de fois que V contient U comme composante directe discrète.*

Les formes d'entrelacement ont l'avantage sur les opérateurs d'entrelacement de posséder des propriétés de « transitivité » : Soit U^1 (resp. V^1) une représentation de G dans un espace E^1 (resp. F^1) et u (resp. v) un opérateur d'entrelacement de U^1 avec U (resp. de V^1 avec V) tel que $u(E^1)$ [resp. $v(E^1)$] soit *dense* dans E (resp. F). Si B est une forme d'entrelacement pour U et V, la forme $B_1(a, b) = B(u(a), v(b))$ est d'entrelacement pour U^1 et V^1, et $B_1 = 0$ entraîne $B = 0$. On en déduit

$$i(U, V) \leqq i(U^1, V^1), \tag{6; 2}$$

l'inégalité correspondante étant en général inexacte pour les L. En particulier on a $i(U, V) \leqq i(U^0, V^0)$ [26].

Enfin, remarquons que pour que U soit prolongeable en une représentation *unitaire*, il est *nécessaire* (mais non suffisant) que $i(U, \overline{U}) \neq 0$.

2. Nombre d'entrelacement de deux représentations induites. — Soit Γ_1 (resp. Γ_2) un sous-groupe fermé du groupe de Lie G et soit L (resp. M) une représentation continue de Γ_1 (resp. Γ_2) dans un *espace de Fréchet* E (resp. F). Soit U^L (resp. U^M) une représentation induite par L (resp. M) : nous allons dans ce numéro déterminer une *majoration* du nombre d'entrelacement $i(U^L, U^M)$. D'après (2) et la définition même d'une représentation induite (déf. 4; 2), il suffit de majorer le nombre d'entrelacement $i(U^{L^0}, U^{M^0})$ des représentations différentiables induites par L^0 et M^0. Rappelons (prop. 4; 1) qu'il existe un homomorphisme canonique π_1 de $\mathcal{D}_G(E^0)$ sur $\mathcal{D}^{L^0}$ [27]; il est défini par [28]

$$\pi_1(f)(x) = \int_{\Gamma_1} \rho_1(\xi)^{-\frac{1}{2}} L^0_\xi f(\xi x)\, d_1\xi \tag{6; 3}$$

et vérifie pour tout $y \in G$:

$$\pi_1(\tau_y f) = U^L_y \pi_1(f). \tag{6; 4}$$

---

[26] Dans ce cas, on a également $I(U, V) \leqq I(U^0, V^0)$.

[27] Ce qui montre que $\mathcal{D}^{L^0}$ est tonnelé comme quotient de l'espace $\mathcal{D}_G(E^0)$ qui est un espace $(\mathcal{LF})$.

[28] *Voir* paragraphe 1, n° 1 pour les notations ρ_Γ, δ_Γ, d_Γ, etc. On posera pour simplifier l'écriture $\rho_{\Gamma_i} = \rho_i$, etc. pour $i = 1, 2$.

On a de même un homomorphisme canonique π_2 de $\mathcal{D}_G(F^0)$ sur $\mathcal{D}^{M^0}$. Par suite, à une forme d'entrelacement B de U^{L^0} et U^{M^0}, correspond une forme bilinéaire séparément continue $\tilde{B}$ sur $\mathcal{D}_G(E^0)\times\mathcal{D}_G(F^0)$, définie par

$$(6;5)\qquad \tilde{B}(f, g) = B(\pi_1(f), \pi_2(g)).$$

Or, on a pour $\omega_i\in\Gamma_i (i=1, 2)$:

$$\begin{aligned}(6;6)\qquad \pi_1(f(\omega_1 x))(y) &= \int_{\Gamma_1}\rho_1(\xi)^{-\frac{1}{2}} L^0_{\xi^{-1}} f(\omega_1\xi y)\,d_1\xi\\ &= \int \rho_1(\omega_1^{-1}\xi)^{-\frac{1}{2}} L^0_{\xi^{-1}\omega_1} f(\xi y)\,d_1(\omega_1^{-1}\xi)\\ &= \rho_1(\omega_1)^{\frac{1}{2}}\delta_1(\omega_1^{-1})\int\rho_1(\xi)^{-\frac{1}{2}} L^0_{\xi^{-1}} L^0_{\omega_1} f(\xi y)\,d_1\xi\\ &= (\delta_G(\omega_1)\,\delta_1(\omega_1))^{-\frac{1}{2}}\pi_1(L^0_{\omega_1} f)(y)\end{aligned}$$

et de même $\pi_2(g(\omega_2 x)) = \delta_G(\omega_2)\,\delta_2(\omega_2))^{-\frac{1}{2}}\pi_2(M^0_{\omega_2} g)$. On tire alors de (4) et (6) :

$$(6;7)\qquad \tilde{B}(f(\omega_1 xs), g(\omega_2 ys)) = (\delta_G(\omega_1\omega_2)\,\delta_1(\omega_1)\,\delta_2(\omega_2))^{-\frac{1}{2}}\tilde{B}(L^0_{\omega_1} f, M^0_{\omega_2} g)$$

pour $s\in G$, $\omega_1\in\Gamma_i$.

D'autre part, $\mathcal{D}_G(E^0)$ [resp. $\mathcal{D}_G(F^0)$] est la limite inductive stricte d'une suite de sous-espaces $\mathcal{D}_K(E^0)$ [resp. $\mathcal{D}_K(F^0)$] (K compact de G) et E^0 étant un Fréchet, $\mathcal{D}_K(E^0) = \mathcal{D}_K\hat{\otimes}_\pi E^0$ est aussi un Fréchet, $\mathcal{D}_G(E^0)\overline{\otimes}\mathcal{D}_G(F^0)$ est donc ([21], chap. I, prop. 11) la limite inductive stricte de la suite des $\mathcal{D}_K(E^0)\overline{\otimes}\mathcal{D}_K(F^0) = (\mathcal{D}_K\hat{\otimes} E^0)\hat{\otimes}(\mathcal{D}_K\hat{\otimes} F^0) = (\mathcal{D}_K\hat{\otimes}\mathcal{D}_K)\hat{\otimes}(E^0\hat{\otimes} F^0)$. Or on sait que $\mathcal{D}_K\hat{\otimes}\mathcal{D}_K = \mathcal{D}_{K\times K}$ (*cf.* [21],]35], [37] : ce résultat est d'ailleurs l'essentiel du « théorème des noyaux » de M. L. Schwartz). Par suite, $\mathcal{D}_G(E^0)\overline{\otimes}\mathcal{D}_G(F^0)$ est la limite inductive des $\mathcal{D}_{K\times K}(E^0\hat{\otimes}F^0)$ c'est-à-dire par définition même $\mathcal{D}_{G\times G}(E^0\hat{\otimes}F^0)$:

$$(6;8)\qquad \mathcal{D}_G(E^0)\overline{\otimes}\mathcal{D}_G(F^0) = \mathcal{D}_{G\times G}(E^0\hat{\otimes}F^0).$$

Or par définition même du produit tensoriel topologique $\overline{\otimes}$, la forme bilinéaire séparément continue $\tilde{B}$ s'identifie à un élément du dual de $\mathcal{D}_G(E^0)\overline{\otimes}\mathcal{D}_G(F^0)$, c'est-à-dire d'après (8) à une *$E^0\hat{\otimes}F^0$-distribution, soit T, sur $G\times G$* : on a pour $f\in\mathcal{D}_G(E^0)$ et $g\in\mathcal{D}_G(F^0)$:

$$(6;9)\qquad \int_{G\times G} f(x)\otimes g(y)\,dT(x, y) = \tilde{B}(f, g).$$

D'où d'après (7)

$$\begin{aligned}(6;10)\qquad &\int f(\omega_1 xs)\otimes g(\omega_2 ys)\,dT(x, y)\\ &= (\delta_G(\omega_1\omega_2)\,\delta_1(\omega_1)\,\delta_2(\omega_2))^{-\frac{1}{2}}\,T(L^0_{\omega_1}f\otimes M^0_{\omega_2}g).\end{aligned}$$

En résumé, nous avons associé à toute forme d'entrelacement non nulle de U^{L^0} et U^{M^0} une $E^0 \hat{\otimes} F^0$-distribution T non nulle sur $G \times G$, invariante pour G opérant sur $G \times G$ par les translations à droite $(x, y) \to (xs, ys)$ et quasi invariante pour $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ opérant sur $G \times G$ par les translations à gauche $(x, y) \to (\omega_1 x, \omega_2 y)$: nous pouvons résumer ces propriétés par la formule qui traduit (10) :

$$(6;\ 11)\quad dT(\omega_1^{-1}xs, \omega_2^{-1}ys) = (\delta_G(\omega_1\omega_2)\delta_1(\omega_1)\delta_2(\omega_2))^{-\frac{1}{2}}\,{}^t(L^0_{\omega_1} \otimes M^0_{\omega_2})\,dT(x, y).$$

Il est classique que l'application $(x, y) \to (xy^{-1}, y)$ est un isomophisme (comme variété) de $G \times G$ sur lui-même. Cet isomorphisme transforme T en une distribution invariante par les opérations $(x, y) \to (x, ys)$ nous sommes alors exactement dans les conditions d'application de la proposition 3; 3 (avec $A = 1$ et $\Gamma = \{e\}$). Il existe donc sur G une $E^0 \hat{\otimes} F^0$-distribution $\tilde{T}$ telle que

$$(6;\ 12)\qquad \int_{G \times G} f(x, y)\, dT(x, y) = \int_G d_G(y) \int_G f(xy, y)\, d\tilde{T}(x),$$

équations que nous pouvons écrire symboliquement :

$$(6;\ 13)\qquad dT(x, y) = d_G(y)\, d\tilde{T}(xy^{-1}).$$

On a par suite,

$$(6;\ 14)\qquad \begin{aligned} dT(\omega_1^{-1}x, \omega_2^{-1}y) &= d_G(\omega_2^{-1}y)\, d\tilde{T}(\omega_1^{-1}xy^{-1}\omega_2) \\ &= d_G(\omega_2^{-1})\, d_G(y)\, d\tilde{T}(\omega_1^{-1}xy^{-1}\omega_2), \end{aligned}$$

tandis que (11) donne

$$(6;\ 15)\quad \begin{aligned} & dT(\omega_1^{-1}x, \omega_2^{-1}y) \\ &= (\delta_G(\omega_1\omega_2)\,\delta_1(\omega_1)\,\delta_2(\omega_2))^{-\frac{1}{2}}\,{}^t(L^0_{\omega_1} \otimes M^0_{\omega_2})\, dT(xy) \\ &= (\delta_G(\omega_1\omega_2)\,\delta_1(\omega_1)\,\delta_2(\omega_2))^{-\frac{1}{2}}\, d_G(y)\,{}^t(L^0_{\omega_1} \otimes M^0_{\omega_2})\, d\tilde{T}(xy^{-1}). \end{aligned}$$

En composant (14) et (15), il vient

$$(6;\ 16)\ (\mathrm{A}) :\ d\tilde{T}(\omega_1^{-1}x\omega_2) = (\delta_G(\omega_1\omega_2^{-1})\,\delta_1(\omega_1)\,\delta_2(\omega_2))^{-\frac{1}{2}}\,{}^t(L^0_{\omega_1} \otimes M^0_{\omega_2})\, d\tilde{T}(x).$$

Réciproquement, soit $\tilde{T}$ une $E^0 \hat{\otimes} F^0$-distribution sur G satisfaisant à la condition (A) : (13) définit une distribution T sur $G \times G$ qui vérifie (11). Le corollaire de la proposition 3; 3 montre alors que $T(f \otimes g) = 0$ si f par exemple appartient à $\pi_1^{-1}(0)$, autrement dit que la forme bilinéaire $\tilde{B}(f, g) = T(f \otimes g)$ sur $\mathcal{D}(E^0) \times \mathcal{D}(F^0)$ « passe au quotient » par les sous-espaces $\pi_i^{-1}(0)$, donc définit une forme bilinéaire B sur $\mathcal{D}^{L^0} \times \mathcal{D}^{M^0}$. L'invariance de T par les translations à droite par (s, s) montre immédiatement que B est d'entrelacement (non nulle si T n'était pas nulle). Enfin la correspondance entre B et T est évidemment linéaire.

Théorème 6; 1. — 1. *Le nombre d'entrelacement* $i(U^{L^0}, U^{M^0})$ *est égal à la dimension de l'espace vectoriel des* $E^0 \hat{\otimes} F^0$*-distributions* T *sur* G *satisfaisant à la condition* (A);

2. *Le nombre d'entrelacement* $i(U^L, U^M)$ *est inférieur ou égal à la dimension de l'espace vectoriel des* $E^0 \otimes F^0$*-distributions* T *sur* G *satisfaisant à la condition* (A) *et telles que l'application* $f \to \tilde{T}^L \bigstar f$ *soit continue de l'espace* $\mathcal{C}_G(E)$ *dans l'espace* $(\mathcal{C}_G(F))'$ *des F-mesures sur G.*

Démonstration. — L'énoncé 1 résulte de ce qui précède. D'autre part, la $E^0 \hat{\otimes} F^0$- distribution F s'identifie canoniquement à une E^0-distribution à valeurs dans $F^{0\prime}$, à savoir l'application linéaire qui à $f \in \mathcal{D}(E^0)$ faitcorrespondre la forme linéaire $a \to \tilde{T}(f \otimes a)$ sur F^0. Ceci permet de définir le produit de compo- sition $\tilde{T}' \bigstar f$: on a [*cf.* formule (1; 12)] [29] :

$$(6;\ 17)\quad T' \bigstar f(y) = \int_G f(x_1^{-1} y)\, \delta_G(x_1^{-1})\, dT'(x) = \int_G f(xy)\, d\tilde{T}(x),$$

$T' \bigstar f$ est une fonction indéfiniment différentiable à valeurs dans $F^{0\prime}$, et l'on a d'après (8) et (13) :

$$(6;\ 18)\quad \tilde{B}(f, g) = \int_G \langle g(y),\ \tilde{T}' \bigstar f(y) \rangle\, d_G(y) \qquad [f \in \mathcal{D}(E^0),\ g \in \mathcal{D}(F^0)].$$

Si B est une forme d'entrelacement pour U^L et U^M, B est séparément continue sur $\mathcal{C}^L \times \mathcal{C}^M$. Or nous avons vu que les applications π_i sont aussi des homomorphismes de $\mathcal{C}_G(E)$ sur $\mathcal{C}^L$ et de $\mathcal{C}_G(F)$ sur $\mathcal{C}^M$: par suite B est séparément continue sur $\mathcal{D}(E^0) \times \mathcal{D}(F^0)$ pour les topologies induites respectivement par $\mathcal{C}(E)$ et $\mathcal{C}(F)$: la relation (18) montre que cela signifie que $f \to T' \bigstar f$ est continue de $\mathcal{C}(E)$ dans $(\mathcal{C}(F))'$.

Remarque 6; 1. — Si U^L et U^M sont les représentations induites dans $\mathcal{C}^L$ et $\mathcal{C}^M$, $i(U^L, U^M)$ est exactement égal à la dimension de l'espace vectoriel de la seconde partie du théorème.

Remarque 6; 2. — Prenons pour L (resp. M) la représentation triviale du sous-groupe $\{e\}$ dans E (resp. F) : Le théorème 1 signifie alors qu'une application linéaire continue de $\mathcal{D}_G(E)$ dans $\mathcal{D}_G(F))'$ muni de la topologie faible,

---

(29) On pourrait facilement faire rentrer ce produit de composition dans la théorie générale du paragraphe 1, n° 4 : $f \in L(\mathcal{D};\ E^0)$, $T' \in L(\mathcal{D};\ (E^0 \hat{\otimes} F^0)')$, donc $T' \bigstar f \in L(\mathcal{D};\ E^0 \overline{\otimes}\ (E^0 \hat{\otimes} F^0)')$. Mais $(E^0 \hat{\otimes} F^0)' = L(E^0;\ (F^0)')$ et par suite il existe une application linéaire continue canonique u de $E^0 \overline{\otimes}\ (E^0 \hat{\otimes} F^0)'$ dans $(F^0)'$ correspondant à l'application bilinéaire $(a, A) \to Aa$ de $E^0 \times L(E^0;\ (F^0)')$ dans $(F^0)'$. Le produit de composition utilisé dans toute la suite de ce paragraphe est le produit $\underset{u}{\bigstar}$ défini à la note (4) du paragraphe 1.

qui commute avec les translations à droite, est le produit de composition à gauche avec une $E \hat{\otimes} F$-distribution [*cf.* [34], (p. 18) pour le cas scalaire et $G = R^n$].

3. Représentations induites par une représentation d'un sous-groupe distingué. — Nous prendrons dans ce numéro $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ et supposerons que Γ est *distingué* dans G : On a alors $\delta_\Gamma(\xi) = \delta_G(\xi)$ pour $\xi \in \Gamma$ [38], p. 45) et l'on peut par suite supposer que $\rho_\Gamma = 1$. La condition (A) s'écrit

$$(6;\ 19)\qquad d\tilde{T}(\omega_1^{-1} x \omega_2) = \delta_G(\omega_1^{-1})^t (L^0_{\omega_1} \otimes M^0_{\omega_2})\, d\tilde{T}(x).$$

Soit x_0 un point de G : il existe un voisinage ouvert W de x_0 dans G/Γ tel que G fibré par les translations à droite par Γ ait une section indéfiniment différentiable, soit $\dot{x} \to k(\dot{x})$, au-dessus de W. L'application $(\dot{x}, \xi) \to k(\dot{x})\xi$ est un isomorphisme de $W \times \Gamma$ sur l'image réciproque $\Omega = k(W)\Gamma$ de W dans G, isomorphisme qui « commute » avec les translations à droite par les éléments de Γ. Enfin, la restriction de $\tilde{T}$ à Ω est quasi invariante pour Γ opérant sur Ω par ces translations, de multiplicateur $A(x, \xi) = 1 \otimes M^0_\xi$ qui est différentiable au sens du paragraphe 3, puisque la représentation M^0 est différentiable. On déduit alors de la proposition 3; 3 l'existence d'une $E^0 \hat{\otimes} F^0$-distribution T_W sur W telle que, pour toute $f \in \mathcal{D}_\Omega(E^0 \hat{\otimes} F^0)$, on ait

$$(6;\ 20)\qquad \tilde{T}(f) = \int_W dT_W(\dot{x}) \int_\Gamma (1 \otimes M^0_\xi) f(k(\dot{x})\xi)\, d_\Gamma(\xi).$$

Soit $\omega \in \Gamma$: On a d'après (20) :

$$(6;\ 21)\qquad \int_\Omega f(\omega^{-1}x)\, d\tilde{T}(x) = \int_W dT_W(\dot{x}) \int_\Gamma (1 \otimes M^0_\xi) f(\omega^{-1} k(\dot{x})\xi)\, d_\Gamma(\xi)$$
$$= \int dT_W(\dot{x})\, (1 \otimes M^0_{k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})}) \int (1 \otimes M^0_\xi) f(k(\dot{x})\xi)\, d_\Gamma(k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})\xi).$$

Mais $\delta_\Gamma(k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})) = \delta_G(k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})) = \delta_G(\omega)$. D'où

$$(6;\ 22)\qquad \int_\Omega f(\omega^{-1}x)\, d\tilde{T}(x) = \delta_G(\omega) \int_W dT_W(\dot{x})\, (1 \otimes M^0_{k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})}) \int_\Gamma (1 \otimes M^0_\xi) f(k(\dot{x})\xi)\, d\xi.$$

D'autre part, on a d'après (19) :

$$(6;\ 23)\qquad \int_\Omega f(\omega^{-1}x)\, d\tilde{T}(x) = \delta_G(\omega) \int_W dT_W(\dot{x}) \int_\Gamma (1 \otimes M^0_\xi)(L^0_{\omega^{-1}} \otimes 1) f(k(\dot{x})\xi)\, d\xi.$$

Mais $L^0_\omega \otimes 1$ et $1 \otimes M^0_\xi$ commutent, d'où

$$(6;\ 24)\qquad \int_\Omega f(\omega^{-1}x)\, d\tilde{T}(x) = \delta_G(\omega) \int_W dT_W(\dot{x})\,(L^0_{\omega^{-1}} \otimes 1) \int_\Gamma (1 \otimes M^0_\xi)\, f(k(\dot{x})\,\xi)\, d\xi.$$

En comparant (22) et (24), on obtient

$$(6;\ 25)\qquad {}^t(1 \otimes M^0_{k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})})\, dT_W(\dot{x}) = {}^t(L^0_{\omega^{-1}} \otimes 1)\, dT_W(\dot{x})$$

ou encore

$$(6;\ 26)\qquad {}^t(1 - L^0_\omega \otimes M^0_{k(\dot{\omega})^{-1}\omega k(\dot{x})})\, dT_W(\dot{x}) = 0 \qquad (\dot{x} \in W,\ \omega \in \Gamma).$$

Réciproquement, à une $M^0 \hat{\otimes} F^0$-distribution T_W sur W, vérifiant (26), on pourra par (20) faire correspondre une distribution T sur Ω, vérifiant (19) dans Ω : dans certains cas, on pourra prolonger T en une distribution *sur* G vérifiant (19), par exemple si T_W est à support compact dans W en la prolongeant par O dans le complémentaire de l'image réciproque du support de T_W. Supposons en particulier que le nombre d'entrelacement des représentations $\omega \to L^0_\omega$ et $\omega \to M^0_{k(\dot{x}_0)^{-1}\omega k(\dot{x}_0)}$ de Γ ne soit pas nul et soit b la forme linéaire sur $E^0 \hat{\otimes} F^0$ canoniquement associée à une forme d'entrelacement non nulle : il est immédiat que la distribution T définie par

$$(6;\ 27)\qquad T_W(\varphi) = b(\varphi(\dot{x}_0)) \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{D}_W(E^0 \hat{\otimes} F^0)$$

satisfait à (29) et est à support compact réduit au point $\dot{x}_0$. D'où (en notant, pour toute représentation N de Γ, par $x^{-1}Nx$ la représentation $\omega \to N_{x^{-1}\omega x}$) :

Proposition 6; 2. — *Soit $i(L^0, M^0, x)$ le nombre d'entrelacement des représentations L^0 et $x^{-1}M^0x$ de Γ* [30]. La relation $i(U^{L^0}, U^{M^0}) = 0$ *entraîne $i(L^0, M^0, x) = 0$ pour tout x de G.*

Corollaire. — *Soit L (resp. M) une représentation unitaire de Γ et soit U^L (resp. U^M) la représentation unitaire de G induite par L (resp. M); $i(U^L, U^M) = 0$ entraîne $i(L, M, x) = 0$ pour tout x de G.*

Démonstration. — Si $i(L, M, x) \neq 0$, on a *a fortiori* $i(L^0, M^0, x) \neq 0$, et par suite, il existe une forme d'entrelacement B non nulle de U^L et U^M, la distribution T_W correspondante étant donnée par (27) : on a alors, si b désigne une forme d'entrelacement non nulle de L et de $k(\dot{x})^{-1}Mk(\dot{x})$:

$$(6;\ 28)\qquad B(\pi_1(f), \pi_2(g)) = \int_G d_G(y) \int_\Gamma b(f(k(\dot{x})\,\xi y), M_\xi g(y))\, d_\Gamma(\xi).$$

[30] Il est clair que $i(L, M; \xi x) = i(L, M; x)$ pour $\xi \in \Gamma$.

En introduisant la mesure $d\mu(\dot{y})$ invariante sur G/Γ, on obtient

$$(6;\,29)\quad B(\pi_1(f),\,\pi_2(g)) = \int_{G/\Gamma} d\mu(\dot{y}) \int_\Gamma d\Gamma(\eta) \int_\Gamma b(f(k(\dot{x})\xi y), M_{\xi\eta^{-1}} g(y))\, d\Gamma(\xi).$$

Or b étant une forme d'entrelacement pour L_ω et $M_{k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})}$, on tire de (29) en posant $d\Gamma(k(\dot{x})\xi k(\dot{x})^{-1}) = c\,d\Gamma(\xi)$, c constante positive :

$$\begin{aligned}(6;\,30)\quad & B(\pi_1(f),\,\pi_1(g)) \\ & = \int d\mu \int d\eta \int b(L_{k(\dot{x})\xi^{-1}k(\dot{x})^{-1}} f(k(\dot{x})\xi y), M_\eta^{-1} g(\eta y))\, d\xi \\ & = c \int d\mu \int d\eta \int b(L_\xi^{-1} f(\xi k(\dot{x}) y),\, M_\eta^{-1} g(\eta y))\, d\xi \\ & = c \int_{G/\Gamma} b\left(\int_\Gamma L_\xi^{-1} f(\xi(k(\dot{x}) y)\, d\Gamma(\xi),\, \int_\Gamma M_\eta^{-1} g(\eta y)\, d\Gamma(\eta)\right) d\mu(\dot{y}) \\ & = c \int_{G/\Gamma} b(\pi_1(f)\,(k(\dot{x})\,y),\, \pi_2(g)\,(y))\, d\mu(\dot{y}).\end{aligned}$$

Comme b est séparément continue, donc continue sur $E \times F$, il existe une constante c' telle que $|b(a_1,\,a_2)| \leq c' \|a_1\| \|a_2\|$ ($\|\ \|$ désignant la norme dans les espaces de Hilbert E et F). Donc (30) donne :

$$(6;\,31)\quad |B(\pi_1(f),\,\pi_2(g))| \leq cc' \left(\int \|\pi_1(f)\,(k(\dot{x})\,y)\|^2\, d\mu(\dot{y})\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \|\pi_2(g)\|^2\, d\mu(\dot{y})\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais Γ étant distingué, $d\mu(\dot{\widehat{xy}})$ est proportionnelle à $d\mu(\dot{y})$: On déduit donc de (31) l'existence d'une constante k telle que

$$(6;\,32)\qquad |B(\pi_1(f),\,\pi_2(g))| \leq k \|\pi_1(f)\|.\|\pi_2(g)\|,$$

$\|\ \|$ désignant cette fois la norme dans les espaces de Hilbert $\mathcal{H}^L$ et $\mathcal{H}^M$.

La relation (32) entraîne que B se prolonge en une forme d'entrelacement pour U^L et U^M, donc que $i(U^L,\,U^M) \neq 0$. C. Q. F. D.

Il est évident que c'est une *réciproque* de cette proposition qui serait intéressante : nous allons l'établir dans le cas où L et M sont des représentations de *dimension finie* irréductibles de Γ. On a dans ce cas $L^0 = L$, $M^0 = M$ et $E^0 \hat{\otimes} F^0 = E \otimes F$ est un espace vectoriel de dimension finie. D'après le lemme de Schur, $i(L,\,M,\,x) = 1$ est égal à 1 si les représentations L et $x^{-1}\check{M}x$ sont *équivalentes*, sinon $i(L, M, x) = 0$. D'autre part, $i(L, M, x) = 0$ signifie que le sous-espace de $E \otimes F$ engendré par les vecteurs de la forme

$(1 - L_\omega \otimes M_{x^{-1}\omega x})\, a$ pour $\omega \in \Gamma$ et $a \in E \otimes F$ est $E \otimes F$ tout entier ([31]). Il existe donc un nombre fini p de vecteurs a_i de $E \otimes F$ et p points ω_i de Γ tels que les vecteurs $(1 - L_{\omega_i} \otimes M_{x^{-1}\omega_i x})\, a_i$ forment une *base* de $E \otimes F$: les vecteurs $(1 - L_{\omega_i} \otimes M_{y^{-1}\omega_i y})\, a_i$, qui sont des fonctions indéfiniment différentiables de y, formeront également une base de $E \otimes F$ pour tout y suffisamment voisin de x. Par suite, si $i(L, M, x) = 0$, il existe, en reprenant les notations de l'alinéa précédent, un voisinage $W' \subset W$ de x_0 tel que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}_{W'}(E \otimes F)$ admette une décomposition de la forme

$$(6;\,33)\quad \varphi(\dot{y}) = \sum_{i=1}^{p} \theta_i(\dot{y})\,(1 - L_{\omega_i} \otimes M_{k(\dot{y})^{-1}\omega_i k(\dot{y})})\, a_i \qquad (\theta_i \in \mathcal{D}_{W'}).$$

Si $T_{W'}$ est la distribution sur W associée à une forme d'entrelacement, on a donc d'après (33) et (26) :

$$(6;\,34)\quad T_{W'}(\varphi) = \sum_{i=1}^{p} \int \theta_i(\dot{y})\,(1 - L_{\omega_i} \otimes M_{k(\dot{y})^{-1}\omega_i k(\dot{y})})\, a_i\, dT_{W'}(\dot{y}) = 0.$$

Autrement dit, $T_{W'}$ est nulle au voisinage de x_0, x_0 n'appartient pas au support de $T_{W'}$: On en conclut que *le support de T est contenu dans l'ensemble S des points x de G tels que* $i(L, M, x) \neq 0$) ; d'où en particulier la :

Proposition 6;3. — *Soient L et M deux représentations irréductibles de dimension finie de* Γ. *Alors* $i(U^{L^0}, U^{M^0}) = 0$ *si et seulement si* $i(L, M, x) = 0$ *pour tout x de G, c'est-à-dire si les représentations L et $x^{-1}\check{M}x$ sont inéquivalentes.*

Plus généralement, supposons que $\pi(S)$ se compose d'un nombre fini de points x_i [si $\pi(S)$ est infini, il est clair [*cf.* (27)] que $i(U^{L^0}, U^{M^0})$ est infini]. $\tilde{T}$ se décompose alors en somme de distributions ayant leur support dans les différentes classes (isolées) Γx_i. Soit n_i la dimension de l'espace vectoriel des $E \otimes F$-distributions sur G satisfaisant à (A′) et de support contenu dans Γx_i : On a $i(U^{L^0}, U^{M^0}) = \Sigma n_i$. Nous avons vu [*cf.* (27)] que $n_i \geq 1$: nous allons montrer que, en réalité, on a $n_i = 1$.

Soit b la forme linéaire sur $E \otimes F$ canoniquement associée à une forme d'entrelacement de L et de $x_i^{-1}Mx_i$: b est (à un scalaire multiplicatif près) la seule forme linéaire sur $E \otimes F$ vérifiant

$$(6;\,35)\qquad {}^t(1 - L_\omega \otimes M_{x_i^{-1}\omega x_i})\, b = 0.$$

Soit W un voisinage de x_i suffisamment petit pour que $i(L, M, x) = 0$ pour $\dot{x} \in W$ et $\dot{x} \neq \dot{x}_i$ et pour qu'il existe une section différentiable $\dot{x} \to k(\dot{x})$

([31]) Dans le cas général, $i(L^0, M^0;\, x) = 0$ signifie que le sous-espace engendré par les vecteurs de cette forme est dense dans $E^0 \hat{\otimes} F^0$.

de G fibré par Γ au-dessous de W, avec $k(\dot{x}_i)=x_i$. Il nous faut démontrer que toute $E\otimes F$-distribution T sur W de support $\dot{x}_i$, et vérifiant (26) est proportionnelle à la distribution définie par (27). Or une telle distribution est une combinaison linéaire finie à coefficients dans $(E\otimes F)'$ de dérivées de la mesure de Dirac $\varepsilon_{\dot{x}_i}$. Soit $D_1, \ldots, D_p$ une base d'un supplémentaire de l'algèbre de Lie de Γ dans l'algèbre de Lie de G identifiée à l'algèbre des champs de vecteurs invariants à gauche sur G, telle que les vecteurs D_j forment au point x_i une base de l'espace tangent en x_i à la variété $k(W)$. Soit $\dot{D}_j$ l'image canonique de D_j dans G/Γ. Il existe un entier m et pour tout système $q=(q_1, \ldots, q_p)$ de p entiers $\geqq 0$ avec $|q|\leqq m$ un élément $a_q\in(E\otimes F)'$ tels qu'on ait, pour $\psi\in\mathcal{D}_W(E\otimes F)$ (avec comme toujours $\dot{D}^q=\dot{D}_1^{q_1}\ldots\dot{D}_p^{q_p}$) :

$$(6;\ 36)\qquad T(\varphi)=\sum_{|q|\leqq m}\langle\dot{D}^q\varphi(\dot{x}_i),\ a_q\rangle$$

et d'après (26) on a

$$(6;\ 37)\qquad \sum_{|q|\leqq m}\langle[\dot{D}^q\{(1-L_\omega\otimes M_{k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})})\varphi(\dot{x})\}]_{\dot{x}=\dot{x}_i},\ a_q\rangle=0$$

Il nous suffit de démontrer que les a_q sont nuls pour $|q|>0$ (c'est-à-dire que $m=0$), car dans ce cas, a_0 est nécessairement proportionnel à b d'après (35). Supposons donc $m>0$. Dans (37) prenons pour φ une fonction telle que $\dot{D}^q\varphi(\dot{x}_i)=0$ pour q différent d'un indice q_0 donné avec $|q_0|=m$: On a

$$(6;\ 38)\qquad \langle(1-L_\omega\otimes M_{k(\dot{x}_i)^{-1}\omega k(\dot{x}_i)})\,\dot{D}^{q_0}\varphi(\dot{x}),\ a_{q_0}\rangle=0$$

et comme $\dot{D}^{q_0}\varphi(\dot{x}_i)$ est arbitraire, a_{q_0} est proportionnel à b, autrement dit, on a $a_q=\lambda_q b$ pour $|q|=m$, λ_q scalaire.

Soit maintenant r un indice tel que $|r|=m-1$ et que $\lambda_{r^j}\neq 0$ pour un j au moins ($1\leqq j\leqq p$), en désignant par r^j l'indice $(r_1, \ldots, r_{j-1}, r_j+1, r_{j+1}, \ldots, r_p)$, et soit φ une fonction telle que $\dot{D}^q\varphi(\dot{x}_i)=0$ pour $q\neq r$. On tire de (37) :

$$(6;\ 39)\qquad -\sum_{j=1}^{p}\lambda_{r^j}\langle[\dot{D}_j(L_\omega\otimes M_{k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})})]_{\dot{x}=\dot{x}_i}\dot{D}^r\varphi(\dot{x}_i),\ b\rangle+\ldots$$
$$+\langle(1-L_\omega\otimes M_{x_i^{-1}\omega x_i})\,\dot{D}^r\varphi(\dot{x}_i),\ a_r\rangle=0.$$

D'où en posant $X=\Sigma\lambda_{r^j}D_j$, $\dot{X}=\Sigma\lambda_{r^j}\dot{D}_j$:

$$(6;\ 40)\qquad {}^t(1-L_\omega\otimes M_{x_i^{-1}\omega x_i})\,a_r={}^t(L_\omega\otimes(\dot{X}M_{k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})})_{\dot{x}=\dot{x}_i})\,b.$$

Soit A_r (resp. B) l'application linéaire de E dans F' correspondant canoniquement à a_r (resp. b) : (40) s'écrit encore :

$$(6;\ 41)\qquad A_r-{}^tM_{x_i^{-1}\omega x_i}A_rL_\omega-(\dot{X}\,{}^tM_{k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})})_{\dot{x}=\dot{x}_i}BL_\omega=0.$$

Or L_ω est inversible et B également comme opérateur d'entrelacement des représentations irréductibles L et $x_i^{-1}Mx_i$: D'où

$$(6;\,42)\qquad [\dot{X}\,{}^tM_{k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})}]_{\dot{x}=\dot{x}_i} = A_r L_\omega^{-1} B^{-1} - {}^tM_{x_i^{-1}\omega x_i} A_r B^{-1} = A_r B^{-1}\,{}^tM_{x_i^{-1}\omega x_i} - {}^tM_{x_i^{-1}\omega x_i} A_r B^{-1}.$$

Le dernier membre de (42) est le crochet des deux opérateurs (dans F') ${}^tM_{x_i^{-1}\omega x_i}$ et $A_r B^{-1}$: par suite l'opérateur $[\dot{X}\,{}^tM_{k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})}]_{\dot{x}=\dot{x}_i}$ est de trace nulle :

$$(6;\,43)\qquad [\dot{X}\,\mathrm{Tr}\,{}^tM_{k(\dot{x})^{-1}\omega k(\dot{x})}]_{\dot{x}=\dot{x}_i} = [X\,\mathrm{Tr}\,{}^tM_{k(\pi(x))^{-1}\omega k(\pi(x))}]_{\dot{x}=\dot{x}_i} = 0$$

ou encore, comme X est tangent à $k(W)$ au point x_i et que $k(\pi(x)) = x$ pour $x \in k(W)$:

$$(6;\,44)\qquad [X\,\mathrm{Tr}\,{}^tM_{x^{-1}\omega x}]_{x=x_i} = 0,$$

(44) est valable pour tout $\omega \in \Gamma$: mais comme, pour tout $y \in G$,

$$[X\,\mathrm{Tr}\,{}^tM_{x^{-1}\omega x}]_{x=x_i} = [X\,\mathrm{Tr}\,{}^tM_{x^{-1}y\omega y^{-1}x}]_{x=yx_i}$$

et que $y\omega y^{-1} \in \Gamma$, on a pour tout $\omega \in \Gamma$ et tout $x \in G$, $X\,\mathrm{Tr}\,{}^tM_{x^{-1}\omega x} = 0$, d'où en particulier :

$$\mathrm{Tr}\,{}^tM_{\exp(-tX)\omega\exp(tX)} = \mathrm{Tr}\,{}^tM_\omega \qquad \text{pour tout nombre réel } t.$$

Par suite, les représentations M et $\exp(-tX)M\exp(tX)$ ayant même caractère sont équivalentes pour tout t, ce qui contredit l'hypothèse que $\pi(S)$ est fini (non vide).

Finalement nous avons donc démontré la :

Proposition 6; 3 *bis*. — *Soient L et M deux représentations irréductibles de dimension finie de Γ et soit S l'ensemble des points x de G tels que $i(L, M, x) = 0$: le nombre d'entrelacement $i(U^{L^0}; U^{M^0})$ est égal au nombre (fini ou infini) de points de $\pi(S)$.*

Corollaire. — *Supposons de plus L et M unitaires et soient U^L et U^M les représentations unitaires de G induites par L et M : le nombre d'entrelacement $i(U^L, U^M)$ est égal au nombre de points de $\pi(S)$.*

Le corollaire résulte immédiatement de la démonstration du corollaire à la proposition 2. On en déduit le :

Théorème 6; 2 [32]. — *Soit L une représentation unitaire irréductible de*

[32] Ce théorème généralise des théorèmes dus à M. G. W. Mackey dans le cas où, G étant un groupe localement compact séparable quelconque, Γ est *abélien* ([27]) (*cf.* § 5) ou G/Γ *discret* ([28]). M. Mackey m'a signalé qu'il avait également démontré ce théorème sans supposer L de dimension finie ni G de Lie (mais seulement localement compact séparable), mais, par contre, en supposant que le groupe Γ n'a pas de représentations factorielles de type II ou III.

dimension finie du sous-groupe distingué fermé Γ. *La représentation unitaire induite* U^L *est irréductible si et seulement si les représentations* L *et* $x^{-1}Lx$ *sont inéquivalentes pour tout* x *de* G *non dans* Γ. *Deux telles représentations* U^L *et* U^M *sont inéquivalentes si et seulement si les représentations* L *et* $x^{-1}Mx$ *de* Γ *sont inéquivalentes pour tout* x *de* G.

4. Le cas d'une infinité dénombrable de doubles classes. — Reprenons les notations du n° 2. Nous supposerons désormais qu'il n'y a qu'un *nombre fini* ou plus généralement une *infinité au plus dénombrable de doubles classes modulo* Γ_1 et Γ_2 *dans* G. Si l'on considère le groupe $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ comme réalisé comme groupe d'homéomorphismes de la variété G en posant $x.(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^{-1}x\omega_2$, il n'y a donc dans G qu'une infinité dénombrable d'orbites et nous pouvons appliquer le lemme 3; 1 du chapitre I : G est une réunion d'orbites ouvertes P_i^0 et d'une sous-variété fermée M^1 ($\dim M^1 < \dim G$) elle-même réunion d'orbites P_j^1 ouvertes dans M^1 et d'une sous-variété M^2 (avec $\dim M^2 < \dim M^1$), etc. De plus, à chaque orbite P est associée un ouvert Ω_P réunion d'orbites dans lequel P est une sous-variété fermée sans singularités : Si P est ouverte dans M^i nous prendrons $\Omega_P = P \cup \complement M^i$.

Posons pour simplifier les notations $H = E^0 \hat{\otimes} F^0$. Soit $\mathfrak{J}$ l'espace des H-distributions sur G vérifiant la condition (A) et soit $\mathfrak{J}_P$ l'espace des H-distributions sur Ω_P, vérifiant (A) dans Ω_P et de support contenu dans P. A toute $T \in \mathfrak{J}$ on peut associer sa *restriction* aux doubles classes ouvertes P_i^0 : ce sont des éléments de $\mathfrak{J}_{P_i^0}$ et si deux éléments T_1 et T_2 de $\mathfrak{J}$ ont même restriction à chaque P_i^0, $T_1 - T_2$ a son support contenu dans M^1 : d'où

$$\dim \mathfrak{J} \leqq \Sigma \dim \mathfrak{J}_{P_i^0} + \dim \mathfrak{J}_1, \tag{6; 45}$$

en désignant par $\mathfrak{J}_1$ l'espace des H-distributions sur G, de support contenu dans M^1 et satisfaisant à (A). De même, on peut associer à toute distribution de $\mathfrak{J}_1$ ses restrictions aux ouverts $\Omega_{P_j^1}$, ce sont des éléments de $\mathfrak{J}_{P_j^1}$ et si deux distributions de $\mathfrak{J}_1$ ont même restriction à chaque $\Omega_{P_j^1}$, leur différence appartient à l'espace des H-distributions sur G, de support contenu dans M^2 et satisfaisant à (A), etc. : d'où finalement (comme M^i est vide pour i assez grand) :

PROPOSITION 6; 4. — *Le nombre d'entrelacement* $i(U^{L^0}, U^{M^0})$ *est inférieur ou égal à la somme des dimensions des espaces* $\mathfrak{J}_P$ *associés aux différentes doubles classes* $P = \Gamma_1 x \Gamma_2$.

Soit alors P une double classe et x un point arbitraire de $P = \Gamma_1 x \Gamma_2$. Une translation à droite par x^{-1} transforme une distribution $T_0 \in \mathfrak{J}_P$ en une H-distribution T sur $\Omega = \Omega_P x^{-1}$, de support contenu dans $V = Px^{-1}$ et vérifiant pour $\xi \in \Gamma_1$, $\eta \in x\Gamma_2 x^{-1}$ et $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega(H)$:

$$(6;46)\qquad \int_\Omega \varphi(\xi^{-1}z\eta)\,dT(z) = \int_{\Omega_P} \varphi(\xi^{-1}zx^{-1}\eta)\,dT_0(z)$$
$$= \int_{\Omega_P} \varphi(\xi^{-1}z(x^{-1}\eta x)x^{-1})\,dT_0(z)$$
$$= (\delta_G(\xi x^{-1}\eta^{-1}x)\,\delta_1(\xi)\,\delta_2(x^{-1}\eta x))^{\frac{1}{2}}\,X$$

où $X = \int_{\Omega_P} L^0_{\xi^{-1}} \otimes M^0_{x^{-1}\eta^{-1}x}\varphi\,(zx^{-1})\,dT_0(z)$ ou encore

$$(6;47)\qquad (\mathrm{A}')\qquad dT(\xi z\eta^{-1}) = (\delta_G(\xi\eta^{-1})\,\delta_1(\xi)\,\delta_2(x^{-1}\eta x))^{\frac{1}{2}} \times {}^t(L^0_{\xi^{-1}} \otimes M^0_{x^{-1}\eta^{-1}x})\,dT(z).$$

Autrement dit, *l'espace $\mathfrak{J}_P$ est isomorphe à l'espace $\mathfrak{J}_x$ des H-distributions sur $\Omega = \Omega_P x^{-1}$, de support contenu dans $V = \Gamma_1 x \Gamma_2 x^{-1}$ et satisfaisant à la condition* (A').

Soit W un voisinage ouvert de e dans Ω, suffisamment petit pour que dans W existent $(p+q)$ champs de vecteurs analytiqnes commutant entre eux $D'_1, \ldots, D'_p, D_1, \ldots, D_q$ formant en tout point de W une base de l'espace vectoriel tangent à G, les $D'_1, \ldots, D'_q$ formant en tout point de $V \cap W$ une base de l'espace vectoriel tangent à V ([33]). Nous introduirons comme d'habitude les dérivations $D^l = D_1^{l_1}, \ldots, D_q^{l_q}$ et $D'^n = D_1'^{n_1}, \ldots, D_p'^{n_p}$ pour $l = (l_1, \ldots, l_q)$ et $n = (n_1, \ldots, n_p)$, l_i et n_j entiers $\geqq 0$. Pour ξ, η et z assez voisins de e dans Γ_1, $x\Gamma_2 x^{-1}$ et W respectivement, $\xi^{-1}z\eta$ appartient encore à W et l'application $z \to \xi^{-1}z\eta$ définit une transformation linéaire sur les dérivations $D'^n D^l$ au voisinage de e : nous poserons (pour ξ, η et z assez voisins de e) :

$$(6;48)\qquad \mathrm{D}^l[f(\xi^{-1}z\eta)] = \sum_{|m| \leqq |l|}\ \sum_{|n| \leqq |l|-|m|} \lambda^l_{m,n}(\xi^{-1}z\eta;\xi,\eta)(D'^n D^m f)(\xi^{-1}z\eta),$$

les $\lambda^l_{m,n}$ étant des fonctions analytiques de z, ξ, η.

D'autre part les D_i formant en tout point de $V \cap W$ une « base des dérivations transversales », une distribution $T \in \mathfrak{J}_x$ s'écrit dans W d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$(6;49)\qquad T = \sum_{|l| \leqq r} (-1)^{|l|}\,\mathrm{D}^l T_l,$$

les T_l étant des extensions à W de H-distributions sur $V \cap W$ et r étant l'ordre transversal de T dans W ([34]).

([33]) Si la double classe P est *ouverte*, on a $q = 0$ et il faut faire $r = 0$ dans toute la suite.

([34]) Cet ordre transversal est évidemment d'après (A') le même en tous les points de V.

Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}_W(H)$: pour ξ et η assez voisins de e, la fonction $\psi(z) = \varphi(\xi^{-1} z \eta)$ appartient encore à $\mathcal{D}_W(H)$. On a, d'après (49) et (48) :

$$(6;\ 50)\quad T(\psi) = \int_W \varphi(\xi^{-1} z \eta)\, dT(z) = \sum_{|l| \leqq r} \int_W D^l \varphi(\xi^{-1} z \eta)\, dT_l(z)$$

$$= \sum_{|l| \leqq n} \sum_{|m| \leqq r} \sum_{|n| \leqq |l| - |m|} \int_W \lambda^l_{m,n}(\xi^{-1} z \eta; \xi, \eta)\, (D'^n D^m \varphi)(\xi^{-1} z \eta)\, dT_l(z)$$

$$= \sum_{|m| \leqq r} \int_W (D^m \varphi)(\xi^{-1} z \eta) d \left[\sum_{|m| \leqq |l| \leqq r} \sum_{|m| \leqq |l| - |m|} D'^n (\lambda^l_{m,n}(\xi^{-1} z \eta; \xi, \eta) T_l(z)) \right].$$

Mais T satisfaisant à (A′), on a également

$$(6;\ 51)\qquad T(\psi) = \Delta(\xi, \eta) \int_W (L^0_{\xi^{-1}} \otimes M^0_{x^{-1}\eta x})\, \varphi(z)\, dT(z),$$

en posant

$$(6;\ 52)\qquad \Delta(\xi, \eta) = (\delta_G(\xi \eta^{-1})\, \delta_1(\xi)\, \delta_2(x^{-1} \eta x))^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant la décomposition (49), puis en remplaçant z par $\xi^{-1} z \eta$ au second membre, on obtient

$$(6;\ 53)\qquad T(\psi) = \Delta(\xi, \eta) \sum_{|m| \leqq r} X_m$$

où $X_m = \int_W (L^0_{\xi^{-1}} \otimes M^0_{x^{-1}\eta^{-1} x})\, (\mathrm{D}^m \varphi)\, (\xi^{-1} z \eta)\, dT_m(\xi^{-1} z \eta)$.

En comparant (50) et (53), on obtient [grâce à l'unicité des décompositions de la forme (49)] :

$$(6;\ 54)\quad \Delta(\xi, \eta)\, {}^t(L^0_{\xi^{-1}} \otimes M^0_{x^{-1}\eta x})\, dT_m(\xi^{-1} z \eta)$$
$$= \sum_{|m| \leqq |l| \leqq r} \sum_{|n| \leqq |l| - |m|} d[D'^n (\lambda^l_{m,n}(\xi^{-1} z \eta;\ \xi, \eta)\, T_l)[(z).$$

Si l'on prend dans (54) $|m| = r$, on obtient

$$(6;\ 55)\quad dT_m(z) = \Delta(\xi, \eta)^{-1}\, {}^t(L^0_\xi \otimes \mathrm{M}^0_{x^{-1}\eta x}) \sum_{|l| = r} \lambda^l_{m,0}(z;\ \xi, \eta)\, dT_l(\xi z \eta^{-1}).$$

Posons $\Gamma_x = \Gamma_1 \cap (x \Gamma_2 x^{-1})$ et soit $\tilde{\Gamma}_x$ le sous-groupe de $\Gamma_1 \times (x \Gamma_2 x^{-1})$ formé des éléments (ω, ω) avec $\omega \in \Gamma_x$: l'application $(\xi, \eta) \to \xi^{-1} \eta$ applique $\Gamma_1 \times (x \Gamma_2 x^{-1})$ sur V et l'on obtient ainsi en réalité une application analytique et biunivoque de l'espace homogène des classes à droite modulo $\tilde{\Gamma}_x$, soit M_x, sur V : Nous avons vu (lemme 3; 1) que cette application est même un isomorphisme de la variété analytique M_x sur V. On peut donc considérer les distributions T_m comme définies sur M_x et en particulier les $\binom{q+r-1}{r}$ distributions T_m pour $|m|=r$ comme une $H\otimes C_r$-distribution sur un voisinage de e dans M_x [en désignant par C_r l'espace vectoriel complexe à $\binom{q+r-1}{r}$ dimensions]. La condition (55) s'interprète alors comme une condition de *quasi-invariance* de cette $H\otimes C_r$-distribution sur M_x pour $\Gamma_1\times(x\Gamma_2x^{-1})$ opérant à droite sur M_x. De plus, nous sommes exactement dans les conditions d'application du théorème 3; 1 (ou plutôt de la remarque 3; 3 suivant ce théorème) : Le groupe G de ce théorème est ici le groupe $\Gamma_1\times(x\Gamma_2x^{-1})$, le sous-groupe Γ est $\tilde{\Gamma}_x$, l'espace E est $H\otimes C_r$ et le E-multiplicateur est la fonction $A(z;\xi,\eta)$ définie sur un voisinage de $(e;e,e)$ dans $V\times\Gamma_1\times(x\Gamma_2x^{-1})$, c'est-à-dire dans $M_x\times\Gamma_1\times(x\Gamma_2x^{-1})$ par

$$(6;56)\qquad A(z;\xi,\eta)=\Delta^{-1}(\xi,\eta)L^0_\xi\otimes M^0_{x^{-1}\eta x}\otimes{}^t\Lambda_r^{-1}(\xi z\eta^{-1};\xi,\eta),$$

Λ_r étant l'opérateur de matrice $\Lambda^l_m=\lambda^l_{m,0}$, rapport à la base canonique de C_r : A est bien indéfiniment différentiable au sens voulu au voisinage de $(e;e,e)$.

Il est clair que $d_1(\xi)\,d_2(x^{-1}\eta\, x)$ est une mesure de Haar sur $\Gamma_1\times(x\Gamma_2x^{-1})$; posons $\delta_x(\omega)=\delta_{\Gamma_x}(\omega)=\delta_{\tilde{\Gamma}_x}(\omega,\omega)$. Le théorème 3; 1 associe à toute $H\otimes C_r$-distribution non nulle vérifiant (55) un élément u de $(H\otimes C_r)'$ non nul tel qu'on ait pour tout $\omega\in\Gamma_x$:

$$(6;57)\qquad \delta_x(\omega)/(\delta_1(\omega)\,\delta_2(x^{-1}\omega x))u={}^tA(e;\omega,\omega)u$$

ou encore d'après (52) et (56) :

$$(6;58)\qquad u=(\delta_1(\omega)\,\delta_2(x^{-1}\omega x))^{\frac{1}{2}}\,\delta_x(\omega)^{-1}\,{}^t(L^0_\omega\otimes M^0_{x^{-1}\omega x})\otimes\Lambda_r(e;\omega,\omega)u.$$

Mais, à la forme linéaire u sur $H\otimes C_r$ est canoniquement associée une forme bilinéaire $\tilde{u}$ sur $H\times C_r$: (58) exprime exactement que cette forme $\tilde{u}$ est une *forme d'entrelacement* pour les représentations $\omega\to L^0_\omega\otimes M^0_{x^{-1}\omega x}$ et pour la représentation $\omega\to(\delta_1(\omega)\,\delta_2(x^{-1}\omega x))^{\frac{1}{2}}\,\delta_x(\omega)^{-1}\,{}^t\Lambda_r(e;\omega,\omega)$ de Γ_x. Si l'on pose :

$$(6;59)\qquad A_r(\omega)=(\delta_1(\omega)\,\delta_2(x^{-1}\omega x))^{-\frac{1}{2}}\,\delta_x(\omega)\Lambda_r^{-1}(e;\omega,\omega),$$

les raisonnements qui précèdent montrent que la correspondance qui à T fait correspondre la forme bilinéaire $\tilde{u}$ est une application linéaire de l'espace $\mathfrak{T}^r_x$, sous-espace de $\mathfrak{T}_x$ formé des distributions d'ordre transversal $\leq r$, dans l'espace des formes d'entrelacement des représentations $\omega\to L^0_\omega\otimes M^0_{x^{-1}\omega x}$ et $\omega\to\check{A}_r(\omega)$ de Γ_x et que le noyau de cette application est exactement l'espace $\mathfrak{T}^{r-1}_x$. Si nous notons $i(L^0, M^0; x, r)$ le nombre d'entrelacement des deux représentations en question de Γ_x, nous avons

$$(6;60)\qquad \dim(\mathfrak{J}_x^r/\mathfrak{J}_x^{r-1}) \leqq i(L^0, M^0; x, r)$$

et par suite :

$$(6;61)\qquad \dim \mathfrak{J}_x \leqq \sum_{r=0}^{\infty} i(L^0, M^0; x, r).$$

D'autre part, il est immédiat que $i(L^0, M^0; x, r)$ ne dépend que de la double classe P à laquelle appartient x, remplacer x par $\xi x \eta$ revenant à remplacer les représentations considérées par des représentations équivalentes : nous pouvons donc noter $i(L^0, M^0; P, r)$ ce nombre. La relation (61) jointe à la proposition 6; 4 nous permet alors d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 6; 3. — *Le nombre d'entrelacement* $i(U^{L^0}, U^{M^0})$ *est inférieur ou égal à la somme des nombres* $i(L^0, M^0; P, r)$ *pour* P *décrivant l'ensemble* (*dénombrable*) *des doubles classes modulo* $\Gamma_1 : \Gamma_2$ *et* r *décrivant l'ensemble des entiers positifs ou nuls* ([35]).

COROLLAIRE I. — *Supposons que* L *et* M *soient unitaires : si pour toute double classe* P *et tout entier* r, $i(L^0, M^0; P, r) = 0$, *alors les représentations unitaires induites* U^L *et* U^M *n'ont pas de sous-représentations équivalentes.*

En effet, d'après le théorème 3, les hypothèses entraînent $i(U^{L^0}, U^{M^0}) = 0$, donc $i(U^L, U^M) = 0$, ce qui exprime précisément que U^L et U^M n'ont pas de sous-représentations équivalentes.

COROLLAIRE II. — *Si pour tout* x *de* G *et tout* $r \geqq 0$, *il n'existe pas de composante irréductible de* $A_r(\omega)$ *qui soit un quotient de la représentation* $\omega \to L^0_\omega \otimes M^0_{x^{-1}\omega x}$ *de* Γ_x *dans* $E^0 \hat{\otimes} F^0$, *alors* $i(U^{L^0}, U^{M^0}) = 0$.

En effet, l'élément u vérifiant (55) peut aussi être considéré comme une application linéaire continue $\bar{u}$ de $H = E^0 \hat{\otimes} F^0$ dans C_r vérifiant pour tout $\omega \in \Gamma$:

$$(6;62)\qquad \bar{u} \circ (L^0_\omega \otimes M^0_{x^{-1}\omega x}) = A_r(\omega) \circ \bar{u}.$$

([35]) Si P est *ouverte*, on n'a à considérer que le nombre $i(L^0, M^0; P, 0)$ [ou prendre si l'on veut $i(L^0, M^0; P, r) = 0$ pour $r > 0$]. En particulier, si Γ_1 et Γ_2 sont ouverts dans G, on a $i(U^{L^0}, U^{M^0}) \leqq \sum_P i(L^0, M^0; P, 0)$. En réalité, on a même $i(U^L, U^M) \leqq \sum i(L, M; P, 0)$, les $E^0 \otimes F^0$-distributions du cas général se réduisant à des fonctions à valeurs dans $L(E; F)$: ce dernier résultat est dû à M. MACKEY ([28]) qui a également démontré les autres résultats de ce numéro dans le cas où Γ_1 et Γ_2 sont *ouvertes* dans G.

Soient alors I le plus petit sous-espace invariant fermé de C_r contenant $\overline{u}(H)$, J un sous-espace invariant maximal de I : la représentation de Γ_x dans I/J, quotient par J de la restriction de $A_r(\omega)$ à I, est une composante irréductible de $A_r(\omega)$, soit $A_r^i(\omega)$ et en composant u et la projection canonique de I sur I/J, on obtient une application linéaire continue $\hat{u}$ de H dans I/J, non nulle et telle que

$$(6;63) \qquad \hat{u}\circ(L_\omega^0\otimes M_{x^{-1}\omega x}^0) = A_r^i(\omega)\circ u,$$

$A_r^i(\omega)$ étant irréductible, $\hat{u}$ est nécessairement surjective, d'où le corollaire.

Corollaire III. — *Si L et M sont de dimension 1 et si pour tout x de G et pour tout $r \geqq 0$, la représentation $\omega \to L_\omega M_{x^{-1}\omega x}$ de Γ_x n'est pas contenue dans la représentation $A_r(\omega)$, alors $i(U^{L^0}, U^{M^0}) = 0$.*

C'est une conséquence immédiate de (62).

On peut déduire de ce qui précède une généralisation du théorème de réciprocité de Frobenius : Prenons $\Gamma_2 = G$: il n'y a qu'une seule double classe mod $\Gamma : G$, correspondant à $x = e$ et qui est évidemment ouverte et fermée. L'espace $\mathfrak{I}$ des H-distributions satisfaisant à la condition (A) se réduit alors à $\mathfrak{I}_e^0$ et l'on a $\dim\mathfrak{I} = \dim\mathfrak{I}_e^0 = i(L^0, M^0; e, 0)$. On déduit alors du théorème 1 :

Théorème 6; 4 (« Réciprocité de Frobenius »). — *Soit G un groupe de Lie, Γ un sous-groupe fermé, L (resp. M) une représentation irréductible différentiable de Γ (resp. G). Le nombre d'entrelacement de M et de la représentation différentielle U^{L^0} induite par L est égal au nombre d'entrelacement de la représentation $\xi \to \rho_\Gamma(\xi)^{-\frac{1}{2}} L_\xi$ de Γ et de la restriction de M à Γ.*

Si maintenant on considère une représentation *unitaire* irréductible L (resp. M) de Γ (resp. G), on obtient :

Corollaire. — *Le nombre de fois que la représentation unitaire induite par L contient M comme composante directe discrète est inférieur ou égal au nombre d'entrelacement de la représentation différentiable $\xi \to \rho_\Gamma(\xi)^{-\frac{1}{2}} L_\xi^0$ de Γ et de la restriction à Γ de la représentation différentiable M^0* (36).

---

(36) MM. Mackey ([29], [30]) et Mautner ([31]) ont démontré d'autres généralisations du théorème de Frobenius, la plus générale étant celle de M. Mackey dans [(30)]: mais le théorème de M. Mackey ne donne de renseignements que sur les rapports entre les décompositions en somme continue de « presque toutes » les représentations induites et les décompositions en somme continue de « presque toutes » les restrictions à des représentations irréductibles de G, ces « presque » étant relatifs au rôle joué par L et M dans la décomposition de la représentation régulière de Γ (resp. G). Il est donc en

Il est probable que les conditions du théorème 3 et en tous cas celles du corollaire *I* ne sont pas nécessaires. Cependant on peut démontrer la « réciproque » suivante :

PROPOSITION 6; 5. — *Soit L (resp. M) une représentation unitaire de Γ_1 (resp. Γ_2) et soit Φ l'ensemble des doubles classes P telles que pour un $x \in P$ (et par suite pour tout $x \in P$) il existe dans Γ_1/Γ_x et dans $\Gamma_2/(x^{-1}\Gamma_x x)$ des mesures invariantes finies. Soient U^L et U^M les représentations unitaires induites par L et M respectivement : On a $i(U^L, U^M) \geq \sum_{P \in \Phi} i(L, M; P, 0)$.*

COROLLAIRE. — *Si, dans les hypothèses du corollaire au théorème 4, il existe dans G/Γ une mesure invariante finie, alors U^L contient M au moins autant de fois que M restreinte à Γ contient L.*

DÉMONSTRATION. — Il suffit de montrer que si $x \in P$ et $P \in \Phi$, toute forme d'entrelacement des représentations L_ω et $M_{x^{-1}\omega x}$ de Γ_x est obtenue comme plus haut à partir d'une forme d'entrelacement de U^L et de U^M. Nous supposerons tout d'abord seulement qu'il existe dans $\Gamma_2/(x^{-1}\Gamma_x x)$ une mesure invariante finie, soit ν_2. On a alors $\delta_x(\omega) = \delta_2(x^{-1}\omega x)$ et l'on vérifie facilement que $\delta_1(\xi)^{-1}$ est une fonction ρ sur $\Gamma_1 \times (x\Gamma_2 x^{-1})$ relativement à Γ_x. Soit $d\mu_x$ la mesure quasi invariante associée sur M_x : on vérifie également que ([37]) :

$$d\mu_x(\xi, \eta) = \delta_1(\xi)^{-1}\, d\nu_2(x^{-1}\eta x)\, d_1(\xi). \tag{6; 64}$$

Considérons une forme d'entrelacement B de U^L avec U^M telle que la distribution associée ait son support dans l'adhérence de $P = \Gamma_1 x \Gamma_2$ et ait son ordre transversal nul (dans Ω_P) et soit T l'élément correspondant de $\mathcal{J}_x^0$. Nous avons vu que T est déterminée (si $B \neq 0$) par la donnée d'une forme d'entrelacement $u \neq 0$ de $L_\omega^0 \otimes M_{x^{-1}\omega x}^0$ avec $\check{A}_0(\omega)$; remarquons que $A_0(\omega)$ est de dimension 1, donc que u peut être considérée comme une forme linéaire sur $E^0 \hat{\otimes} F^0$ donc définit canoniquement une forme bilinéaire sur $E^0 \times F^0$, soit $\tilde{u}$. De plus, s'il existe sur Γ_1/Γ_x une mesure invariante,

---

général impossible à partir du théorème de M. MACKEY de déterminer les rapports entre une représentation induite et une représentation irréductible. De plus M. MACKEY suppose essentiellement que les représentations régulières de G et de Γ sont de type I, ou que celle de Γ est somme directe discrète d'une infinité dénombrable de représentations factorielles de type I (par exemple Γ compact, ce qui est le cas étudié par M. MAUTNER).

([37]) Nous notons dans tout ce qui suit une mesure quasi invariante sur un espace homogène comme si c'était une mesure sur le groupe : si f est constante sur les classes à droite, nous écrirons $\int f(\dot{y})\, d\mu_\Gamma(y)$ pour $\int \tilde{f}(y)\, d\mu_\Gamma(\dot{y})$ [en posant $\tilde{f}(y) = f(\dot{y})$]. Rappelons d'autre part que nous supposons toujours les mesures quasi invariantes normalisées par la condition $\rho_\Gamma(e) = 1$.

alors $\delta_x(\omega) = \delta_1(\omega)$ et, par suite, $A_0(\omega) = 1$: alors $\tilde{u}$ est une forme d'entrelacement de L^0_ω avec $M^0_{x^{-1}\omega x}$. De toute façon, T est donnée par (*cf.* théorème **3**; **1**, *b*) :

$$(6;65) \qquad T(f) = \int_{M_x} \langle f, {}^tA(\xi^{-1}\eta;\, \xi, \eta)u \rangle \delta_1(\xi)\, d\mu_x(\xi, \eta),$$

d'où d'après (56) et (64) :

$$(6;66) \qquad T(f) = \int_{\Gamma_2/x^{-1}\Gamma_x x} d\nu_2(\eta) X$$

où $X = \int_{\Gamma_1} \langle L^0_\xi \otimes M^0_\eta f, u \rangle \delta_G(\xi^{-1}\eta)^{\frac{1}{2}} \delta_1(\xi)^{-\frac{1}{2}} \delta_2(\eta)^{-\frac{1}{2}}\, d_1(\xi)$.

Si P est *fermée*, T est une distribution sur G tout entier et B est nécessairement donnée, d'après (5) et (13), pour $f \in \mathcal{D}_G(E^0)$ et $g \in \mathcal{D}_G(F^0)$, par

$$(6;67) \qquad B(\pi_1 f, \pi_2 g) = \int_G d_G(y) \int_{\Gamma_2/x^{-1}\Gamma_x x} d\nu_2(\eta) X$$

où $X = \int_{\Gamma_1} \tilde{u}[L^0_\xi f(\xi^{-1}x\eta y), M^0_\eta g(y)]\, \delta_G(\xi^{-1}\eta)^{\frac{1}{2}} (\delta_1(\xi)\, \delta_2(\eta))^{-\frac{1}{2}}\, d_1(\xi)$

et la fonction $\tilde{u}[L^0_\xi f(\xi^{-1}x\eta y), M^0_\eta g(y)]$ est continue à support compact sur $G \times M_x$, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Lebesgue-Fubini. On a

$$(6;68) \qquad B = \int d_G(y) \int X \rho_2(\eta)^{-\frac{1}{2}}\, d\nu_2(\eta)$$

où $X = \tilde{u}\Big(\int \rho_1(\xi)^{\frac{1}{2}} L^0_\xi f(\xi^{-1}x\eta y)\delta_1(\xi)^{-1}\, d_1(\xi), M^0_\eta g(y)\Big)$

donc

$$B = \int d_G(y) \int \tilde{u}[\pi_1 f(x\eta y), M^0_\eta g(y)]\, \rho_2(\eta)^{-\frac{1}{2}}\, d\nu_2(\eta).$$

En introduisant la mesure μ_2 quasi invariante sur G/Γ_2, on obtient

$$(6;69) \qquad B = \int_{G/\Gamma_2} d\mu_2(y) \int_{\Gamma_2} d_2(\zeta) X$$

où $X = \int_{\Gamma_2/x^{-1}\Gamma_x x} \tilde{u}[\pi_1 f(x\eta y), M^0_\eta g(\zeta y)]\, \rho_2(\eta)^{-\frac{1}{2}} \rho_2(\zeta y)^{-1}\, d\nu_2(\eta)$.

ou encore en appliquant Fubini et en remplaçant η par $\eta\zeta^{-1}$ [rappelons que ν_2 est invariante, donc que $d\nu_2(\eta\zeta^{-1}) = d\nu_2(\eta)$] :

$$(6;70) \qquad B = \int d\mu_2(y) \int X \rho_2(\eta)^{-\frac{1}{2}} \rho_2(y)^{-1} d\nu_2(\eta)$$

où $X = \tilde{u}\Big[\pi_1 f(x\eta y), M^0_\eta \int \rho_2(\zeta)^{-\frac{1}{2}} M^0_{\zeta^{-1}} g(\zeta y)\, d_2(\zeta)\Big]$

donc

$$B = \int d\mu_2(y) \int \tilde{u}[\pi_1 f(x\eta y), \pi_2 g(\eta y)]\, \rho_2(\eta y)^{-1}\, d\nu_2(\eta).$$

Mais ρ_2 est aussi une fonction ρ sur G relativement à $x^{-1}\Gamma_x x$; soit λ_2 la mesure quasi invariante associée : on a $d\lambda_2(\eta y) = d\mu_2(y)\, d\nu_2(\eta)$, d'où

$$(6;\ 71)\quad B(\pi_1 f, \pi_2 g) = \int_{G/x^{-1}\Gamma_x x} \tilde{u}[\pi_1 f(xz), \pi_2 g(z)]\, \rho_2(z)^{-1}\, d\lambda_2(z).$$

Ces calculs ont été faits sous l'hypothèse P fermée. Mais nous allons montrer que dans tous les cas, sous les hypothèses de la proposition 5, (71) définit une forme d'entrelacement, non nulle si $\tilde{u}$ est une forme d'entrelacement non nulle des représentations L_ω et $M_{x^{-1}\omega x}$ de Γ_x : La fonction à intégrer dans (71) étant continue, il suffit évidemment de démontrer que l'intégrale supérieure de sa valeur absolue est finie et tend vers zéro quand $\pi_1 f$ et $\pi_2 g$ tendent vers zéro dans $\mathcal{H}^L$ et $\mathcal{H}^M$ respectivement, car alors B est continue sur $\mathcal{H}^L \times \mathcal{H}^M$, on vérifie aisément que c'est une forme d'entrelacement, et qu'elle soit non nulle résulte de ce que la restriction à Ω_P de la distribution associée est précisément la distribution T définie par (65), qui, étant le produit de $d\mu_x$, mesure positive non nulle, par une fonction continue ne s'annulant pas, à valeurs dans $(E^0 \hat{\otimes} F^0)'$, n'est pas nulle.

Or, par hypothèse, $|\tilde{u}(a, b)| \leq k \| a \| . \| b \|$, $\| \ \|$ désignant la norme dans E ou F et k une constante. D'où pour $\psi \in \mathcal{D}^{L^0}$ et $\psi \in \mathcal{D}^{M^0}$:

$$(6;\ 72)\qquad |B(\varphi, \psi)| \leq k \left[\int \| \varphi(xz) \|^2 \rho_2(z)^{-1}\, d\lambda_2(z)\right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\int \| \psi(z) \|^2 \rho_2(z)^{-1}\, d\lambda_2(z)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Or pour $\eta \in \Gamma$,

$$\| \psi(\eta y) \|^2 = \| \rho_2(\eta)^{\frac{1}{2}} M_\eta \psi(y) \|^2 = \rho_2(\eta)\, \| \psi(y) \|^2.$$

D'où

$$(6;\ 73)\qquad \int \| \psi(z) \|^2 \rho_2(z)^{-1}\, d\lambda_2(z) = \left(\int d\nu_2(\eta)\right)\left(\int \| \psi(y) \|^2 \rho_2(y)^{-1}\, d\mu_2(y)\right).$$

De même, soit ν_1 une mesure invariante finie sur Γ_1/Γ_x et λ_1 la mesure quasi invariante sur G/Γ_x associée à la fonction ρ_1, qui est évidemment une fonction ρ sur G relativement à Γ_x : on a comme plus haut $d\lambda_1(\xi y) = d\mu_1(y)\, d\nu_1(\xi)$. D'autre part, il est clair que $d\lambda_2(x^{-1}zx)$ est une mesure quasi invariante sur G/Γ_x, associée à la fonction $\rho_2(x^{-1}zx)$: on a donc

$$d\lambda_1(z) = \frac{\rho_1(z)}{\rho_2(x^{-1}zx)}\, d\lambda_2(x^{-1}zx),$$

d'où

$$(6;74)\qquad \int \| \varphi(xz) \|^2 \rho_2(z)^{-1}\, d\lambda_2(z) = \int \| \varphi(zx) \|^2 \rho_1(z)^{-1}\, d\lambda_1(z).$$

On a comme plus haut $\| \varphi(\xi yx) \|^2 = \rho_1(\xi) \| \varphi(yx) \|^2$ pour $\xi \in \Gamma_1$, d'où

$$(6;75)\qquad \int \| \varphi(xz) \|^2 \rho_2(z)^{-1}\, d\lambda_2(z) = \Big(\int d\nu_1(\xi)\Big)\Big(\int \| \varphi(yx) \|^2 \rho_1(y)^{-1}\, d\mu_1(y)\Big).$$

D'où finalement, en notant encore $\|\ \ \|$ les normes dans $\mathcal{H}^L$ et $\mathcal{H}^M$:

$$(6;76)\qquad | B(\varphi, \psi) | \leq k \nu_1(\Gamma_1)^{\frac{1}{2}} \nu_2(\Gamma_2)^{\frac{1}{2}} \| \varphi \| . \| \psi \|$$

et ν_1 et ν_2 étant finies, B est continue sur $\mathcal{H}^L \times \mathcal{H}^M$, d'où la proposition. Quant au corollaire, il en résulte immédiatement.

Les calculs précédents permettent également de démontrer le résultat suivant, dû à M. G. W. Mackey ([29], théorème 8; 2) :

Proposition 6; 6. — *Dans les hypothèses du théorème 4, supposons de plus que M soit de dimension finie. U^L contient M exactement autant de fois que M restreinte à Γ contient L s'il existe dans G/Γ une mesure invariante finie; si une telle mesure n'existe pas, U^L ne contient pas de composante directe discrète de dimension finie.*

En effet, l'unique double classe modulo $\Gamma : G$ étant à la fois ouverte et fermée, toute forme d'entrelacement de U^L avec U^M est donnée [*cf.* (68) en intervertissant les rôles de Γ_1 et Γ_2] pour $f \in \mathcal{D}_G(E^0)$ et $b \in \mathcal{D}^{M^0} = F$, par

$$(6;77)\qquad B(\pi_1 f, b) = \int_G \tilde{u}(f(y), M_y b)\, d_G(y),$$

$\tilde{u}$ étant continue sur $E^0 \times F$ et vérifiant

$$(6;78)\qquad \tilde{u}(L^0_\omega a, M_\omega b) = \rho(\omega)^{\frac{1}{2}} \tilde{u}(a, b) \qquad \text{pour}\quad \omega \in \Gamma.$$

Prenons $f(y) = \alpha(y)\, a$, avec $a \in E^0$ et $\alpha \in \mathcal{D}_G$: On a

$$(6;79)\qquad B(\pi_1 f, b) = \tilde{u}(a, M_\alpha b).$$

Mais F étant de dimension finie, tout élément de F est de la forme $\Sigma M_{\alpha_i} b_i$ et (79) montre que $\tilde{u}$ est séparément continue sur $E^0 \times F$, E^0 étant muni de la topologie induite par E, ce qui entraîne que $\tilde{u}$ se prolonge en une forme bilinéaire continue sur $E \times F$: il existe donc une constante k telle que $| \tilde{u}(a, b) | \leq k \| a \| . \| b \|$. Mais d'après (78), on a aussi

$$| \tilde{u}(a, b) | \leq \rho(\omega)^{-\frac{1}{2}} k \| L_\omega a \| . \| M_\omega b \| = \rho(\omega)^{-\frac{1}{2}} k \| a \| . \| b \|$$

d'où $\tilde{u}=0$ si $\rho(\omega)$ n'est pas constant : autrement dit, nous avons déjà démontré que $i(U^L, M)=0$ s'il n'existe pas de mesure invariante sur G/Γ et que s'il existe une mesure invariante, $i(U^L, M)\leqq i(L, M; e, 0)$, ce qui, joint au corollaire à la proposition 5, démontre la proposition 6 dans le cas où il existe une mesure invariante finie.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $i(U^L, M)=0$ s'il existe une mesure μ invariante non finie. Or $\tilde{u}$ définit une application linéaire continue de F dans E, soit U, telle que (pour $\varphi\in\mathcal{D}^{L^0}$) [*cf.* (71)]

$$(6;80)\qquad B(\varphi, b)=\int_{G/\Gamma}\langle\varphi(y), UM_y b)\rangle\, d\mu(y),$$

ce qui entraîne que $\|UM_y b\|$ est de carré sommable sur G/Γ. Or si $\{b_i\}$ $(i=1, \ldots, n)$ est une base orthonormale de F, on a $\Sigma\|UM_y b_i\|\geqq\|U\|$: Donc $\|U\|$ doit être de carré sommable pour $d\mu$, d'où $\|U\|=0$, $B=0$ et $i(U^L, M)=0$, ce qui termine la démonstration.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de ce numéro.

Théorème 6; 5. — *Soit L une représentation unitaire irréductible d'un sous-groupe fermé Γ d'un groupe de Lie G tel qu'il n'y ait qu'une infinité dénombrable de doubles classes modulo $\Gamma:\Gamma$. Si pour tout x de G non dans Γ et tout entier $r\geqq 0$, il n'existe pas de composante irréductible de la représentation $\omega\to A_r(\omega)$ de $\Gamma_x=\Gamma\cap x\Gamma x^{-1}$ qui soit un quotient de la représentation $\omega\to L^0_\omega\otimes\bar{L}^0_{x^{-1}\omega x}$ de Γ_x dans $E^0\hat{\otimes}\bar{E}^0$, alors la représentation unitaire induite U^L est irréductible.*

Démonstration. — Les hypothèses faites entraînent que pour tout x non dans Γ, $i(L^0, \bar{L}^0; x, r)=0$, donc [*cf.* démonstration du théorème 3, formule (60)] que toute $E^0\hat{\otimes}\bar{E}^0$-distribution T associée à une forme d'entrelacement de U^L avec $\bar{U}^L$ a son support dans Γ. De plus l'application $f\to T'\star f$ est continue de $\mathcal{C}(E)$ dans $(\mathcal{C}(E))'$, donc *a fortiori* de $\mathcal{C}(E^0)$ dans $(\mathcal{C}(E^0))'$: Nous verrons tout à l'heure (lemme 6; 1 ci-dessous) que ceci entraîne que T est l'extension à G d'une distribution sur Γ, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{J}^0_e$.

D'autre part, on a ici $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma_x=\Gamma$: Il existe donc des mesures invariantes finies dans Γ_1/Γ_x et $\Gamma_2/x^{-1}\Gamma_x x$ et la double classe Γ est fermée : nous avons vu au cours de la démonstration de la proposition 5 que dans ces conditions B était donnée par (71), c'est-à-dire par

$$(6;81)\quad B(f, g)=\int_{G/\Gamma}\tilde{u}(f(y), g(y))\rho_\Gamma(y)^{-1}\, d\mu(\dot{y})\qquad (f, g\in\mathcal{D}^{L^0}),$$

$\tilde{u}$ étant une forme d'entrelacement de L^0 avec $\bar{L}^0$.

Soit alors $y\to k(\dot{y})$ une section indéfiniment différentiable de G fibré par Γ au-dessus d'un voisinage W de $\dot{e}$ dans G/Γ. Soient $\alpha\in\mathcal{D}_W$, a, $b\in E^0$.

Posons

$$f(\xi k(\dot{y})) = \rho(\xi)^{\frac{1}{2}} L_\xi a\alpha(\dot{y}) \quad \text{et} \quad g(\xi k(\dot{y})) = \rho(\xi)^{\frac{1}{2}} L_\xi b\alpha(\dot{y}),$$

prolongeons f et g par zéro en dehors de $\Gamma k(W)$: f et g appartiennent à $\mathcal{D}^{L^0}$ et l'on a

$$(6;82) \qquad B(f, g) = \int_W \tilde{u}(f(k(\dot{y})), g(k(\dot{y})))\rho_\Gamma(k(\dot{y}))\, d\mu_\Gamma(\dot{y})$$
$$= \tilde{u}(a, b) \int_W |\alpha(y)|^2 \rho_\Gamma(k(\dot{y}))\, d\mu(\dot{y}).$$

Par suite, si B est continue sur $\mathcal{H}^L \times \mathcal{H}^M$, $\tilde{u}$ est continue sur $E \times \bar{E}$, donc est une forme d'entrelacement de L avec $\bar{L}$: comme L est unitaire irréductible, ceci détermine $\tilde{u}$ à une constante multiplicative près : par suite $i(U^L, \bar{U}^L) = 1$, U^L est irréductible.

En résumé, le théorème 5 sera complètement démontré quand nous aurons démontré le :

Lemme 6; 1. — *Soit g un sous-groupe fermé de G, E et F deux espaces de Fréchet, T une $E\hat{\otimes}F$-distribution sur G, de support contenu dans g. Si l'application $f \to \mathrm{T}' \star f$ de $\mathcal{D}_G(E)$ dans $\mathcal{D}_G(F')$ se prolonge en une application linéaire continue de $\mathcal{C}_G(E)$ dans $(\mathcal{C}_G(F))'$, alors T est l'extension à G d'une $E\hat{\otimes}F$-distribution définie sur g.*

La convergence dans $(\mathcal{C}_G(F))'$ étant locale et le produit de composition commutant avec les translations à droite, il suffit de démontrer le lemme au voisinage de e. Soit $X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_q$ une base de l'algèbre de Lie de G, les $Y_1, \ldots, Y_q$ formant une base de l'algèbre de Lie de g. L'application exponentielle étant un isomorphisme local, il existe un voisinage ouvert relativement compact Ω de e dans G et une sous-variété fermée V de Ω tels que :

a. L'application $(t_1, \ldots, t_p) \to \exp\left(\sum_{i=1}^{p} t_i X_i\right)$ est un isomorphisme d'un voisinage ouvert ω de O dans R^p sur V;

b. L'application $(\xi, t) \to \xi t$ est un isomorphisme de $(\Omega \cap g) \times V$ sur Ω.

Posons pour $m = (m_1, \ldots, m_p)$, m_i entiers ≥ 0, $D^m = X_1^{m_1}, \ldots, X_p^{m_p}$; T s'écrit *dans* Ω, d'une manière et d'une seule, sous la forme (*cf.* p. 7) :

$$(6;83) \qquad T = \sum_{|m| \leq r} \mathrm{T}_m \star D^m,$$

les T_m étant des extensions à Ω de $E\hat{\otimes}F$-distributions $\bar{T}_m$ sur $\Omega \cap g$ et r étant l'ordre transversal de T dans Ω : nous supposerons de plus que Ω a été choisi assez petit pour que r soit exactement l'ordre transversal de T au voisinage de e et que $r \neq 0$: Nous allons en déduire une contradiction.

Soit Ω' un voisinage symétrique de e dans G tel que $\Omega'^2 \subset \Omega$. Soit $f \in \mathcal{D}_{\Omega'}(E)$: pour $z \in \Omega'$, la fonction $x \to f(xz)$ est à support compact dans Ω et, par suite :

$$(6;84) \qquad T' \star f(z) = \int f(xz)\, dT(x) = \sum_{|m| \leq r} (T_m \star D^m)' \star f(z)$$
$$= \sum_{|m| \leq r} D^m \star T'_m \star f(z).$$

Soient alors ω' un voisinage ouvert de O dans R^p et W un voisinage ouvert de e dans g tels que $W \exp(\omega') \subset \Omega'$ et prenons f de la forme $f(\xi \exp t) = \varphi(t)\psi(\xi)$ avec $\varphi \in \mathcal{D}_{\omega'}$, $\psi \in \mathcal{D}_{W'}(E)$: on a pour $z = \eta \exp t \in \Omega'$:

$$(6;85) \qquad T'_m \star f(z) = \int_G f(xz)\, dT_m(x)$$
$$= \int_g \varphi(t)\, \psi(\xi\eta)\, d\overline{T}_m(\xi) = \varphi(t) \left(\overline{T}' \underset{g}{\star} \psi\right)(\eta),$$

$\underset{g}{\star}$ désignant le produit de composition sur g et $\overline{T} \to \overline{T}'$ l'application $'$ définie sur g. Soit a un élément de F : $\langle a, T' \star f \rangle$ est une fonction indéfiniment différentiable scalaire et l'on a

$$(6;86) \qquad \langle a, T' \star f(z) \rangle = \langle a, \Sigma D^{m'} \star T'_m \star f \rangle$$
$$= \Sigma D^{m'} \star (\varphi(t) \langle a, \overline{T}'_m \star \psi(\eta) \rangle).$$

Les hypothèses faites sur T entraînent que l'application $f \to \langle a, T' \star f \rangle$ se prolonge en une application linéaire continue de $\mathcal{C}_{\Omega'}(E)$ dans l'espace M_G des *mesures* scalaires sur G. Si nous fixons ψ dans $\mathcal{C}_{W'}(E)$ et si nous posons $\lambda_m(\eta) = \langle a, T' \star \psi(\eta) \rangle$, l'application linéaire $\varphi \to \Sigma D^{m'} \star (\varphi(t)\, \lambda_m(\eta))$ doit être continue de $\mathcal{C}_{\omega'}$ dans M_G. Or pour tout m, on a pour f :

$$(6;87) \qquad D^{m'} \star f = \sum_{|n| = |m|} a_{m,n}(t, \eta) \frac{\partial^{|n|}}{\partial t_1^{n_1} \dots \partial t_p^{n_p}} f(t, \eta) + \dots,$$

les termes non écrits ne faisant intervenir que des dérivations partielles par rapport à t d'ordre inférieur à $|m|$. D'où

$$(6;88) \qquad \sum_{|n| \leq r} D^{m'} \star (\varphi(t)\, \lambda_m(\eta))$$
$$= \sum_{|n| = r} \left(\sum_{|m| = r} a_{m,n}(t, \eta)\, \lambda_m(\eta) \right) \frac{\partial^r}{\partial t_1^{n_1} \dots \partial t_p^{n_p}} \varphi(t) + \dots,$$

les termes non écrits ne faisant intervenir que des dérivées de φ d'ordre $< r$.

Mais la mesure de Haar sur Ω est équivalente à la mesure $dt_1\, dt_2 \dots dt_p\, d_g(\xi)$ et par suite, pour toute fonction $\alpha \in \mathcal{D}_{W'}$, l'application

$$\varphi \to \left(\sum_{|n|=r} \left(\int_g \sum_{|m|=r} a_{m,n}(t, \eta)\, \lambda_m(\eta)\, \alpha(\eta)\, d_g(\eta) \right) \frac{\partial^r}{\partial t^n} \varphi(t) + \dots \right) dt_1 \dots dt_p$$

se prolonge en une application linéaire continue de $\mathcal{C}_\omega$ dans M_ω. Posons

$$(6;\ 89) \qquad a_n(t) = \int_g \sum_{|m|=r} a_{m,n}(t, \eta)\, \lambda_m(\eta)\, \alpha(\eta)\, d_g(\eta) \qquad \text{pour} \quad |n| = r.$$

Nous venons de montrer que les hypothèses faites sur T entraînent que pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_{\omega'}$ la distribution ([38]) :

$$(6;\ 90) \qquad \sum_{|n|=r} a_n(t) \frac{\partial^r}{\partial t^n} \varphi(t) + \dots$$

est une mesure sur R^p : les $a_m(t)$ étant des fonctions continues, ceci exige que $a_n(t) = 0$ pour tout n avec $|n| = r$ (rappelons qu'on a supposé $r > 0$), donc $\int_g \sum_{|m|=r} a_{m,n}(t, \eta)\, \lambda_m(\eta)\, \alpha(\eta)\, d_g(\eta) = 0$ pour toute $\alpha \in \mathcal{D}_{W'}$, donc $\sum_{|m|=r} a_{m,n}(t, \eta)\, \lambda_m(\eta) = 0$. Mais pour tout $(t, \eta) \in \Omega'$, on a dét $a_{m,n}(t, \eta) \neq 0$, car les dérivations D^m pour $|m| = r$ forment une base des dérivations transversales d'ordre r modulo celles d'ordre inférieur à r. Par suite on a $\lambda_m(\eta) = 0$ pour tout $\eta \in W'$, c'est-à-dire $\overline{T}'_m \underset{g}{\star} \psi(e) = 0$ pour $|m| = r$ et $\psi \in \mathcal{D}_{W'}(E)$, donc $\overline{T}_m$ est nulle dans W' pour $|m| = r$: autrement dit T est d'ordre $< r$ au voisinage de e, ce qui est la contradiction cherchée, T ayant été supposée d'ordre exactement r. Par suite T est au voisinage de e donc partout l'extension à G d'une distribution définie sur g.

Remarque 6; 3. — On peut démontrer le lemme suivant où n désigne la dimension du groupe G :

Lemme 6; 2. — *Soient E et F deux espaces de Fréchet, T une $E \hat{\otimes} F$-distribution sur G telle que l'application $f \to T' \star f$ soit continue de $\mathcal{C}(E)$ dans $(\mathcal{C}(F))'$: T est d'ordre fini, inférieur ou égal à $2n + 1$.*

Soit en effet $a \in E$, $b \in F$: posons pour $\varphi \in \mathcal{D}_G$, $T_{a,b}(\varphi) = T(\varphi a \otimes b)$; $T_{a,b}$ est une distribution scalaire et on a pour φ, $\psi \in \mathcal{D}$:

$$(6;\ 91) \qquad (T'_{a,b} \star \psi)(\varphi) = [T' \star (\psi a)](\varphi b).$$

([38]) Nous identifions dans R^p une fonction $\varphi(t)$ et la distribution $\varphi(t)\, dt_1 \dots dt_p$.

Par suite, l'application $\psi \rightarrow T'_{a,b} \star \psi$ est continue de $\mathcal{C}_G$ dans $\mathcal{C}'_G$: pour $\varphi \in \mathcal{D}^n_G$, toutes les dérivées de $T'_{a,b} \star \varphi$ jusqu'à l'ordre n sont donc des mesures, ce qui entraîne (*cf.* [34], chap. VI, théorème XVIII) que $T'_{a,b} \star \varphi$ est une fonction localement bornée pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^n$: on en déduit (*cf.* [34], chap. VI, théorème XX, remarque 1) que $T_{a,b}$ est d'ordre $\leqq n$. Pour tout compact K de G, T est donc séparément continue sur $\mathcal{D}^n_K \times E \times F$, donc continue sur $\mathcal{D}^n_K \hat{\otimes}_\pi (E \hat{\otimes} F)$, donc continue sur $\mathcal{D}^{2n+1}(E \hat{\otimes} F)$ d'après les résultats de M. L. Schwartz rappelés au paragraphe 5, n° 4.

On peut donc préciser le corollaire 1 au théorème 3 : soient U^L et U^M deux représentations induites par L et M respectivement (au sens de la définition 4; 2). On a

$$(6;97) \qquad i(U^L, U^M) \leqq \sum_P \sum_{r=0}^{2n+1} i(L^0, M^0; P, r).$$

De même, on peut remplacer dans l'énoncé du théorème 5 « pour tout entier $r \geqq 0$ » par « pour tout entier r compris entre 0 et $2 \dim G + 1$ ».

Remarque 6; 4. — On pourrait combiner en un certain sens les méthodes et résultats des n°ˢ 3 et 4 pour obtenir un critère d'irréductibilité dans des cas un peu plus larges, par exemple celui où il existe dans G une infinité dénombrable de sous-variétés P possédant les propriétés topologiques des doubles classes du n° 4, et telles que les translations $x \rightarrow \xi^{-1} x \eta$ définissent sur chaque P une structure d'espace fibré admettant $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ comme groupe structural au sens du chapitre I, proposition 3; 3.

Remarque 6; 5. — La représentation $A_r(\omega)$ se déduit simplement de la réprésentation $A_1(\omega)$: On peut en effet écrire $D^p = D_{i_1} \ldots D_{i_r}$ avec $1 \leqq i_1 \leqq \ldots i_r \leqq q$ et de même $D^m = D_{j_1} \ldots D_{j_r}$ avec $1 \leqq j_1 \leqq \ldots j_r \leqq q$. On vérifie alors facilement que $\lambda^l_{m,0} = \sum_\sigma \lambda^{i_1}_{\sigma(j_1)} \ldots \lambda^{i_r}_{\sigma(j_r)}$ la somme étant étendue à toutes les permutations σ *distinctes* des entiers $j_1, \ldots, j_r$. Autrement dit (ce qui était d'ailleurs prévisible *a priori*) l'opérateur $\Lambda_r(e; \omega, \omega)$ est la restriction au sous-espace des tenseurs symétriques de $\overset{r}{\otimes} C^q$ du produit tensoriel $\overset{r}{\otimes} \Lambda_1(e; \omega, \omega)$.

Si en particulier Γ_x est *résoluble*, les composantes irréductibles de $A_r(\omega)$ sont de dimension 1 et sont de la forme

$$(6;93) \qquad \psi \rightarrow (\delta_1(\omega)\, \delta_2(x^{-1} \omega x))^{\frac{1}{2}} \delta_x(\omega)^{-1} \prod_k \chi_k(\omega)^{s_k},$$

les $\chi_k(\omega)$ étant les valeurs propres de $\Lambda_1(e; \omega, \omega)$ et les s_k des entiers positifs.

Remarque 6; 6. — Comme nous l'avons signalé au paragraphe 4, il peut arriver que, pour une représentation continue *non unitaire* L de Γ, la représentation U^{L^0} se prolonge en une représentation *unitaire*, soit U^L : ceci implique $i(U^{L^0}, \overline{U^{L^0}}) \neq 0$ et le théorème 3 donne une condition *nécessaire* de possibilité d'un tel prolongement. Supposons donc qu'il existe une forme B d'entrelacement de U^{L^0} avec $\overline{U^{L^0}}$ définissant un vrai *produit scalaire* sur $\mathcal{D}^{L^0}$ (autrement dit, B est une forme hermitienne *définie positive* sur $\mathcal{D}^{L^0}$). Le théorème 3 montre que U^L sera certainement irréductible toutes les fois que la somme $\sum_P \sum_r i(L^0, \overline{L^0}; P, r)$ sera égale à 1. On pourra dans certains cas améliorer cette condition : Si par exemple B est continue sur $\mathcal{C}^L$, il suffira pour être sûr de l'irréductibilité de U^L, de savoir que

$$i(L, \overline{L}; e, 0) + \sum_{P \neq e} \sum_{r=0}^{2n+1} i(L^0, \overline{L^0}; P, r) = 1.$$

CHAPITRE III.

Paragraphe 7. — Représentations induites des groupes semi-simples.

1. Rappels sur la structure des algèbres de Lie semi-simples. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur le corps C des nombres complexes, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ ([39]). La forme de Killing $B(x, y)$ induit sur $\mathfrak{h}$ une forme quadratique non dégénérée qui permet d'identifier $\mathfrak{h}$ et son dual : si φ est une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$, nous noterons $\mathbf{h}_\varphi$ l'élément de $\mathfrak{h}$ tel que $(B\mathbf{h}_\varphi, \mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{h})$ pour tout $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}$. Soit Δ le système des racines non nulles de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$: on sait que les combinaisons linéaires à coefficients réels des $\mathbf{h}_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$ forment un espace vectoriel $\mathfrak{h}_r$ de dimension réelle égale à la dimension complexe de $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire au rang l de $\mathfrak{g}$, et sur lequel B induit une métrique euclidienne. Nous désignerons désormais par $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_l$ une *base* (sur R) de $\mathfrak{h}$: c'est aussi une base (sur C) de $\mathfrak{h}$ et $\alpha(\mathbf{h}_i)$ est réel pour toute racine α. On peut alors ordonner totalement les formes linéaires sur $\mathfrak{h}$ qui sont réelles sur $\mathfrak{h}$ par l'ordre lexicographique relatif à cette base : nous désignerons par Σ le système des racines strictement positives pour cet ordre et par Π le système des racines positives *simples* (c'est-à-dire qui ne sont pas somme de deux racines de Σ). On sait que Π se compose de l racines linéairement indépendantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, que toute racine α s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients *entiers* tous de même signes des α_i et qu'il existe une base de $\mathfrak{g}$ formée des vecteurs $\mathbf{h}_i$ et de vecteurs $\mathbf{e}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) vérifiant les égalités

([39]) Pour les définitions et résultats de ce numéro, *voir* [39], [26] et [23].

suivantes :

$$(7;1)\qquad [\mathbf{h}, \mathbf{e}_\alpha] = \alpha(\mathbf{h})\mathbf{e}_\alpha \qquad \text{pour } \mathbf{h} \in \mathfrak{h},$$

$$(7;2)\qquad [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_{-\alpha}] = -\mathbf{h}_\alpha,$$

$$(7;3)\qquad [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = N_{\alpha,\beta}\mathbf{e}_{\alpha+\beta} \qquad \text{pour } \beta \neq -\alpha,$$

les $N_{\alpha,\beta}$ étant des nombres réels tels que $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$, étant entendu que si $\alpha+\beta$ n'est pas racine ($\mathbf{e}_{\alpha+\beta}$ n'est alors pas défini) on convient d'écrire encore (3) avec $N_{\alpha,\beta} = 0$. Par contre, si $\alpha+\beta$ est racine, alors $N_{\alpha,\beta} \neq 0$. Une telle base de $\mathfrak{g}$ sera appelée « *base de Weyl* » de $\mathfrak{g}$.

H. Weyl a montré [39] que l'ensemble des éléments $\mathbf{x}$ de $\mathfrak{g}$ de la forme

$$(7;4)\qquad \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{l} i\lambda_j \mathbf{h}_j + \sum_{\alpha\in\Sigma}(u_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \overline{u}_\alpha \mathbf{e}_{-\alpha}) \qquad (\lambda_j \in R,\ u_\alpha \in C,\ i^2 = -1)$$

est une sous-algèbre (réelle) $\mathfrak{g}_u$ de $\mathfrak{g}$, sur laquelle la forme de Killing induit une forme définie négative : $\mathfrak{g}_u$ est donc une forme *réelle compacte* de $\mathfrak{g}$, que nous appellerons forme compacte associée à la base de Weyl considérée.

Soit maintenant $\mathfrak{g}_0$ une algèbre de Lie semi-simple *réelle*, $\mathfrak{g}$ sa complexifiée θ le semi-automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$ défini par $\mathfrak{g}_0$. Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace complexe de $\mathfrak{g}$, nous noterons $\mathfrak{a}_0$ le sous-espace (réel) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}_0$. Il existe (*cf.* [26]) une base de Weyl de $\mathfrak{g}$ telle que :

1° θ laisse globalement invariante la forme compacte $\mathfrak{g}_u$ associée à cette base de Weyl et y induit un automorphisme involutif θ_u. Alors $\mathfrak{g}_u$ se décompose en somme directe de deux sous-espaces $\mathfrak{g}_u^+$ et $\mathfrak{g}_u^-$, où $\mathfrak{g}_u^+ = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_u$ est l'ensemble des points fixes de θ_u, et $\mathfrak{g}_u^-$ l'ensemble des $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}_u$ tels que $\theta\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Enfin $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_u^+ + i\mathfrak{g}_u^-$.

2° θ_u s'étend canoniquement en un *automorphisme* involutif $\tilde{\theta}$ de $\mathfrak{g}$. Les applications θ et $\tilde{\theta}$ laissent $\mathbf{h}$ invariante. On a

$$(7;5)\qquad \begin{cases} \tilde{\theta}(\mathbf{h}_j) = -\mathbf{h}_j & \text{pour } 1 \leq j \leq m, \\ \theta(\mathbf{h}_j) = \mathbf{h}_j & \text{pour } j > m. \end{cases}$$

3° si $\mathfrak{h}^+$ (resp. $\mathfrak{h}^-$) désigne la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par les $\mathbf{h}_j$ pour $j > m$ (resp. $1 \leq j \leq m$), $\mathfrak{h}^- \cap \mathfrak{g}_u$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}_u^-$; de plus $\mathfrak{h}_0^+$ et $\mathfrak{h}_0^-$ sont respectivement sous-tendues (sur R) par les $i\mathbf{h}_j$ pour $j > m$ et les $\mathbf{h}_j$ pour $1 \leq j \leq m$.

4° θ (resp. $\tilde{\theta}$) permet d'associer à toute racine α de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$ une racine $\theta\alpha$ (resp. $\tilde{\theta}\alpha$) définie par

$$(7;6)\qquad \theta\alpha(\mathbf{h}) = \overline{\alpha(\theta)(\mathbf{h}))} \qquad \text{et} \qquad \theta\alpha(\mathbf{h}) = \alpha(\tilde{\theta}(\mathbf{h})).$$

On vérifie facilement que $\theta\alpha = -\tilde{\theta}\alpha$ et que Σ se décompose en deux parties Σ'

et Σ'' : Σ' est l'ensemble des racines $\alpha \in \Sigma$ telles que $\tilde{\theta}\alpha < 0$ (où $\theta\alpha > 0$) et Σ'' l'ensemble des racines $\alpha \in \Sigma$ telles que $\tilde{\theta}\alpha = \alpha$ (ou $\theta\alpha = -\alpha$). La relation $\alpha \in \Sigma''$ est équivalente à $\alpha(\mathbf{h}_j) = 0$ pour $1 \leq j \leq m$ ou encore à α nulle sur $\mathfrak{h}_0^-$ et l'on a alors $\tilde{\theta}\mathbf{e}_\alpha = \theta\mathbf{e}_{-\alpha} = \mathbf{e}_\alpha$ et $\tilde{\theta}\mathbf{e}_{-\alpha} = \theta\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_{-\alpha}$; enfin $\tilde{\theta}\mathbf{e}_\alpha$ (resp. $\theta\mathbf{e}_\alpha$) est toujours proportionnel à $\mathbf{e}_{\tilde{\theta}\alpha}$ (resp. $\mathbf{e}_{\theta\alpha}$).

Soit $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{h} \lambda_j \mathbf{h}_j + \sum_{\alpha \in \Delta} u_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ un élément de $\mathfrak{g}$ et soit $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}$:

$$[\mathbf{h}, \mathbf{x}] = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(\mathbf{h}) u_\alpha \mathbf{e}_\alpha. \tag{7; 7}$$

On a donc $[\mathbf{x}, \mathbf{h}] = 0$ (ou même $[\mathbf{h}, \mathbf{x}] \in \mathfrak{h}$) si et seulement si u_α est nul pour toute racine α non nulle en $\mathbf{h}$: comme les racines nulles sur $\mathfrak{h}_0^-$ sont précisément les racines de Σ'' et leurs opposées, on voit que le *centralisateur* de $\mathfrak{h}_0^-$ est $\mathfrak{m} + \mathfrak{h}^-$, $\mathfrak{m}$ étant le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathfrak{h}^+$ et les $\mathbf{e}_\alpha$ et $\mathbf{e}_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma''$. On vérifie aisément que $\mathfrak{m}$ est une sous-algèbre; en oûtre $\mathfrak{m} + \mathfrak{h}_-$ est également le *normalisateur* de $\mathfrak{h}_0^-$ dans $\mathfrak{g}$. Soit

$$\mathbf{m} = \sum_{j=m+1}^{l} \lambda_j \mathbf{h}_j + \sum_{\alpha \in \Sigma''} (u_\alpha \mathbf{e}_\alpha + u_{-\alpha}\mathbf{e}_{-\alpha}),$$

$$\theta\mathbf{m} = -\sum_{j=m+1}^{l} \lambda_j \mathbf{h}_j + \sum_{\alpha \in \Sigma''} (\bar{u}_\alpha \mathbf{e}_{-\alpha} + \bar{u}_{-\alpha}\mathbf{e}_\alpha). \tag{7; 8}$$

Par suite, $\theta\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ si et seulement si les λ_j sont imaginaires purs et si $u_\alpha = \bar{u}_\alpha$: $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_0$ est donc contenu dans $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_u$, c'est à la fois le centralisateur et le normalisateur de $\mathfrak{h}_0^-$ dans $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_u$; donc $\mathfrak{m}_0$ est une sous-algèbre de l'algèbre compacte $\mathfrak{g}_u$, donc est réductive et est somme directe de son centre et d'une algèbre semi-simple compacte. D'autre part, (8) montre que $\mathfrak{m}$ est invariante par θ, donc est le sous-espace complexe engendré par $\mathfrak{m}_0$.

Soit d'autre part $\mathfrak{n}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les $\mathbf{e}_\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma'$. Si α et $\beta \in \Sigma'$ et si $\alpha + \beta \in \Sigma$, on a $\theta(\alpha + \beta) = \theta\alpha + \theta\beta > 0$ donc $\alpha + \beta \in \Sigma'$. Si maintenant $\alpha \in \Sigma'$ et $\beta \in \Sigma''$, les formes linéaires $\alpha \pm \beta$ sont positives puisque β est nulle et α non nulle sur les m premiers $\mathbf{h}_j$ et si $\alpha \pm \beta \in \Sigma$, $\theta(\alpha \pm \beta) = \theta\alpha \mp \beta$ est elle aussi positive, donc $\alpha \pm \beta \in \Sigma'$: on en déduit immédiatement que $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$, que $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ est une sous-algèbre résoluble et que $[\mathfrak{m} + \mathfrak{h}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$. Soit $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_0$: comme $\theta\alpha \in \Sigma'$ pour $\alpha \in \Sigma'$, $\mathfrak{n}$ est invariante par θ et est donc le sous-espace complexe engendré par $\mathfrak{n}_0$.

Posons enfin $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{h}_0^- + \mathfrak{n}_0$: il est clair que $\mathfrak{r}_0$ est une *sous-algèbre* de $\mathfrak{g}_0$. On a $[\mathfrak{r}_0, \mathfrak{n}_0] = [\mathfrak{h}_0^-, \mathfrak{n}_0] = \mathfrak{n}_0$ et $\mathfrak{r} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}^- + \mathfrak{n}$ est le sous-espace complexe engendré par $\mathfrak{r}_0$.

2. Groupes de Lie semi-simples réels. Le sous-groupe Γ. — Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. Iwasawa a démontré les résultats suivants [26] : soit H (resp. N) le sous-groupe analytique engendré par $\mathfrak{h}_0^-$ (resp. $\mathfrak{n}_0$) dans G; H (resp. N) est un *sous-groupe fermé simplement connexe abélien* (resp. *nilpotent*) et l'application exponentielle est un homéomorphisme de $\mathfrak{h}_0^-$ sur H et de $\mathfrak{n}_0$ sur N. Le groupe N est invariant dans HN, sous-groupe fermé simplement connexe résoluble, de groupe dérivé N. Soit Z le centre de G; $G^\star = G/Z$ s'identifie au groupe adjoint de $\mathfrak{g}_0$; le sous-groupe analytique $K^\star$ de $G^\star$ engendré par $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_u$ est un sous-groupe compact maximal de G. Soit K l'image réciproque de $K^\star$ dans G : l'application $(k, h, n) \rightarrow khn$ est un *homéomorphisme* de $K \times H \times N$ sur G.

Soit M le centralisateur et $\hat{M}$ le normalisateur de H dans K : ce sont deux sous-groupes fermés de K contenant Z et M est invariant dans $\hat{M}$. De plus M et $\hat{M}$ ont tous deux $\mathfrak{m}_0$ comme algèbre de Lie, donc ont même composante connexe de e : par suite $W = \hat{M}/M$ est *discret*. D'autre part puisque $Z \subset M \subset \hat{M}$, $\hat{M}/Z$ s'identifie à un sous-groupe fermé de $K^\star$ donc est compact : *a fortiori* W est compact donc *fini*: nous appellerons ce groupe fini W le « groupe de Weyl restreint » de G.

Si x est un élément de G, nous noterons comme d'habitude $\mathrm{ad}\,x$ (ou $\mathrm{ad}_G x$ dans le cas où plusieurs groupes interviendraient), l'automorphisme de $\mathfrak{g}_0$ (ou de l'algèbre complexifiée $\mathfrak{g}$) correspondant à l'automorphisme intérieur $y \rightarrow xyx^{-1}$ de G. Si $x \in \hat{M}$, on a $xHx^{-1} = H$ et par suite $\mathrm{ad}\,x$ conserve $\mathfrak{h}_0^-$ (et réciproquement). Comme $\mathrm{ad}\,x$ laisse invariante la forme de Killing, $\mathrm{ad}\,x$ restreinte à $\mathfrak{h}_0^-$ est alors une *rotation* pour la métrique euclidienne définie par B sur $\mathfrak{h}_0^-$. Si cette rotation est l'identité, l'automorphisme $y \rightarrow xyx^{-1}$ laisse invariants tous les points de H et $x \in M$: on a donc obtenu une *représentation fidèle* de W dans le groupe des rotations de l'espace euclidien $\mathfrak{h}_0^-$. D'autre part, on a une représentation canonique de W dans le groupe des automorphismes de M modulo les automorphismes intérieurs : on ne peut donc pas en général faire opérer W sur M, mais on peut par exemple faire opérer W sur les *classes d'équivalence* de représentations de M : si L est une représentation de M (ou de MH), nous noterons ${}^sL$ une représentation appartenant à la classe transformée de la classe de L par l'élément s de W.

Il est clair que M^0HN est le sous-groupe analytique de G correspondant à la sous-algèbre $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{h}_0^- + \mathfrak{n}_0$: on a en particulier $xNx^{-1} \subset N$ pour $x \in M^0$, puisque $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{n}_0] \subset \mathfrak{n}_0$. Soit d'autre part x un élément de $\hat{M}$: $\mathfrak{h}_0^+$ et $\mathrm{ad}\,x.\mathfrak{h}_0^+$ sont deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{m}_0$, algèbre de Lie du groupe compact image de M^0 dans $G^\star$. Il existe donc un élément $m \in M^0$ tel que : $\mathrm{ad}(mx)\,\mathfrak{h}_0^+ = \mathfrak{h}_0^+$: dans toute classe de $\hat{M}$ modulo M^0 il y a un élément x tel que $\mathrm{ad}\,x$ conserve à la fois $\mathfrak{h}_0^-$ et $\mathfrak{h}_0^+$, donc aussi $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_r$. Donc $\mathrm{ad}\,x$ induit sur $\mathfrak{h}$ une rotation pour la forme de Killing et la transposée (que nous noterons ${}^t\mathrm{ad}\,x$)

de cette rotation permute entre elles les racines : en effet, on a pour $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}$ et $\alpha \in \Delta$:

$$(7;9) \qquad [\operatorname{ad} x^{-1}.\mathbf{h}, \operatorname{ad} x^{-1}.\mathbf{e}_\alpha] = \alpha(\mathbf{h}) \operatorname{ad} x^{-1}.\mathbf{e}_\alpha = ({}^t\operatorname{ad} x.\alpha)(\operatorname{ad} x^{-1}.\mathbf{h}) \operatorname{ad} x^{-1}.\mathbf{e}_\alpha,$$

donc $\beta = {}^t\operatorname{ad} x.\alpha$ est bien une racine et $\operatorname{ad} x^{-1}.\mathbf{e}_\alpha$ est un multiple non nul de $\mathbf{e}_\beta$. De plus, $\operatorname{ad} x$ conservant $\mathfrak{h}_0^-$, ${}^t\operatorname{ad} x$ permute entre elles les racines non nulles sur $\mathfrak{h}_0^-$, c'est-à-dire les racines appartenant à $\Sigma' \cup (-\Sigma')$: d'où $\operatorname{ad} x.\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n} + \mathfrak{n}'$, ou $\mathfrak{n}'$ désigne la sous-algèbre engendrée par les $\mathbf{e}_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma'$.

Si maintenant x appartient de plus à M, $\operatorname{ad} x$ est l'identité sur $\mathfrak{h}_0$ et ${}^t\operatorname{ad} x.\alpha$ est positive pour $\alpha \in \Sigma'$, donc appartient à Σ' : on a $\operatorname{ad} x.\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}_0$ et par suite $xNx^{-1} \subset N$: comme nous avons vu plus haut que l'on avait également $yNy^{-1} \subset N$ pour tout $y \in M^0$, on en déduit que M est contenu dans le normalisateur de N et par suite que $\Gamma = MHN$ *est un sous-groupe de* G d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_0$. L'image canonique Γ^* de Γ dans G^* est un sous-groupe *fermé* comme produit du sous-groupe compact M/Z par le sous-groupe analytique engendré par $\mathfrak{h}_0^- + \mathfrak{n}_0$, qui comme nous l'avons dit plus haut, est un sous-groupe fermé simplement connexe, d'ailleurs isomorphe à HN. Comme Γ contient Z, Γ est l'image réciproque de Γ^* et par suite Γ est un sous-groupe *fermé* de G.

Nous allons dans ce chapitre essentiellement étudier les représentations de G induites par une représentation irréductible de dimension finie de Γ : nous verrons que ces représentations sont « presque toutes » irréductibles. Soit U une représentation unitaire irréductible de Γ dans un espace vectoriel E de dimension finie. Dans tout ce qui suit, m, h, n représentent des éléments arbitraires de M, H, N respectivement. Comme HN est un groupe résoluble connexe, il existe d'après le théorème de Lie (*cf.* [**19**]) un vecteur a non nul dans E et une représentation χ de dimension 1 de HN tels que $L_{hn}a = \chi(hn)a$. Comme N est le sous-groupe des commutateurs de HN, on a nécessairement $\chi(n) = 1$ et χ est un caractère unitaire de H. D'autre part, on a

$$(7;10) \qquad L_{hn}L_m a = L_m L_h L_{m^{-1}nm} a = \chi(h) L_m a.$$

Le sous-espace vectoriel sous-tendu par les $L_m\, a$ est donc invariant par L, donc coïncide avec E tout entier et L_{hn} se réduit au scalaire $\chi(h)$: autrement dit, une représentation unitaire irréductible de dimension finie de Γ s'obtient en partant d'une représentation unitaire irréductible de dimension finie ([40])

([40]) M/M^0 étant fini et M^0 étant un revêtement connexe d'un groupe compact, toute représentation irréductible de M est de dimension finie.

Remarquons que des raisonnements analogues permettent plus généralement de determiner les représentations irréductibles de dimension finie d'un groupe de Lie G connexe : supposons G simplement connexe. Il existe alors dans G deux sous-groupes de M, soit $m \to L_m$, et d'un caractère unitaire χ de H et en posant

$$L_{mhn} = \chi(h) L_m. \tag{7; 11}$$

Pour pouvoir appliquer aux représentations de G induites par ces représentations de Γ les résultats du chapitre II, il nous faut montrer qu'il n'y a qu'une infinité dénombrable de doubles classes modulo $\Gamma:\Gamma$; d'une manière précise, nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 7; 1. — *Toute double classe modulo $\Gamma:\Gamma$ rencontre $\hat{M}$ suivant une classe modulo M. Par suite, il n'y a qu'un nombre fini de telles doubles classes; elles correspondent biunivoquement aux éléments du groupe de Weyl restreint W de G* (41).

La démonstration repose sur plusieurs lemmes préliminaires. Posons pour $x \in G$, $\mathfrak{r}_x = \mathfrak{r}_0 \cap \mathrm{ad}\, x . \mathfrak{r}_0$.

LEMME 7; 1. — *Pour tout x de G, on a $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_x + \mathfrak{n}_0$.*

DÉMONSTRATION. — On a évidemment $\mathfrak{r}_x + \mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{r}_0$; il suffit donc de démontrer que $\dim(\mathfrak{r}_x + \mathfrak{n}_0) = \dim \mathfrak{r}_0$. Comme x est de la forme uhn avec $u \in K$, $h \in H$ et $n \in N$ et que $\mathrm{ad}(hn).\ \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0$, on peut supposer que *$x$ appartient à K.* Posons pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{g}$:

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -B(\mathbf{a}, \tilde{\theta}\mathbf{b}), \tag{7; 12}$$

Q restreinte à $\mathfrak{g}_0$ est une forme bilinéaire réelle symétrique : on a en effet pour $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathfrak{g}_u^+$ et $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathfrak{g}_u^-$:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2) &= -B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) - iB(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) \\ &+ iB(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2) - B(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = -B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) - B(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \end{aligned} \tag{7; 13}$$

car $\mathfrak{g}_u^+$ et $\mathfrak{g}_u^-$ sont orthogonaux (sous-espaces propres correspondant à la valeur propre $+1$ et -1 de θ_u). De plus, $Q(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ est une forme quadratique *définie positive* sur $\mathfrak{g}_0$ puisque B est définie négative sur $\mathfrak{g}_u$. Enfin $\mathrm{ad}\, x$ pour $x \in K$ conserve $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_u$, donc commute avec $\tilde{\theta}$ ce qui montre que Q est *invariante par* $\mathrm{ad}\, x$.

---

fermés simplement connexes R et S, R distingué résoluble, S semi-simple, tels que G soit le produit semi-direct de R et S. Soit L une représentation irréductible de dimension finie de G : il existe un vecteur $a \neq 0$ et un caractère χ de R tels que $L_r a = \chi(r) a$; L étant de dimension finie, χ n'a qu'un nombre fini de transformés par les automorphismes $r \to xrx^{-1}$ de $R (x \in G)$, donc, puisque G est connexe, est *invariant* par ces automorphismes et L est de la forme $L_{sr} = \chi(r) L'_s (r \in R,\ s \in S)$, L' étant une représentation irréductible de dimension finie de S.

(41) La démonstration qui suit m'a été communiquée par M. HARISH-CHANDRA. Ma démonstration originelle [6] reposait sur une vérification explicite de ce théorème dans le cas des quatre grandes classes de groupes simples complexe et n'était valable que pour les groupes semi-simples réels dont l'algèbre de Lie complexifiée est un produit d'algèbres simples classiques.

Pour toute racine $\beta \neq 0$, $\operatorname{ad} \mathbf{e}_\beta$ transforme un élément de $\mathfrak{g}$ appartenant à la racine α en un élément (éventuellement nul) appartenant à la racine $\alpha + \beta$ [*cf.* (2) et (3)] : par suite $B(\mathbf{a}, \mathbf{e}_\beta) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} \mathbf{a} . \operatorname{ad} \mathbf{e}_\beta) = 0$ si $\mathbf{a}$ rapporté à la base de Weyl de $\mathfrak{g}$ ne contient pas de termes en $\mathbf{e}_{-\beta}$: d'où pour $\mathbf{a} \in \mathfrak{r}_0$ et $\alpha \in \Sigma'$:

$$(7;\ 14) \qquad Q(\mathbf{a}, \tilde{\theta}\mathbf{e}_\beta) = -B(\mathbf{a}, \mathbf{e}_\alpha) = 0.$$

L'orthogonal $\mathfrak{r}_0^\perp$ de $\mathfrak{r}_0$ dans $\mathfrak{g}_0$ pour Q contient donc $\tilde{\theta}\mathfrak{n}_0$. Or

$$(7;\ 15) \qquad \dim \mathfrak{r}_0^\perp = \dim \mathfrak{g}_0 - \dim \mathfrak{r}_0 = \dim \mathfrak{n}_0 = \dim \tilde{\theta}\mathfrak{n}_0,$$

d'où

$$\mathfrak{r}_0^\perp = \tilde{\theta}\mathfrak{n}_0 \qquad \text{et} \qquad (\mathfrak{r}_0 + \operatorname{ad} x . \mathfrak{r}_0)^\perp = \tilde{\theta}(\mathfrak{n}_0 \cap \operatorname{ad} x . \mathfrak{n}_0).$$

Or $\mathfrak{n}_0$ est exactement le sous-espace de $\mathfrak{r}_0$ formé des $\mathbf{a}$ tels que $\operatorname{ad} \mathbf{a}$ soit nilpotent donc $\mathfrak{n}_0 \cap \operatorname{ad} x . \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{r}_x \cap \mathfrak{n}_0$ et

$$(7;\ 16) \quad \dim(\mathfrak{r}_0 + \operatorname{ad} x . \mathfrak{r}_0) = 2 \dim \mathfrak{r}_0 - \dim \mathfrak{r}_x = \dim \mathfrak{g}_0 - \dim(\mathfrak{r}_x \cap \mathfrak{n}_0).$$

D'où finalement

$$(7;\ 17) \quad \begin{aligned} \dim(\mathfrak{r}_x + \mathfrak{n}_0) = \dim \mathfrak{r}_x + \dim \mathfrak{n}_0 - \dim(\mathfrak{r}_x \cap \mathfrak{n}_0) &= \dim \mathfrak{n}_0 \\ + 2 \dim \mathfrak{r}_0 - \dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{r}_0, & \end{aligned} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LEMME 7; 2. — *Pour qu'un* $\mathbf{a} \in \mathfrak{r}_0$ *appartienne à* $\mathfrak{h}_0^- + \mathfrak{n}_0$, *il faut et il suffit que les valeurs propres de* $\operatorname{ad} \mathbf{a}$ *dans* $\mathfrak{g}$ *soient réelles.*

DÉMONSTRATION. — Soit $\mathbf{a} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{m}_0$, $\mathbf{w} \in \mathfrak{h}_0^- + \mathfrak{n}_0$. Comme $\mathfrak{h}_0^+$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}_0$, algèbre de Lie d'un groupe *compact* M/Z, il existe un m dans M tel que $\operatorname{ad} m . \mathbf{v} \in \mathfrak{h}_0^+$, donc $\operatorname{ad} m . \mathbf{a} = \mathbf{h} + \mathbf{n}$, $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}_0$, $\mathbf{n} \in \mathfrak{n}_0$ Les valeurs propres de $\operatorname{ad} \mathbf{a}$ sont donc 0 et $\alpha(\mathbf{h})$ pour $\alpha \in \Delta$. Or les racines prennent des valeurs réelles sur $\mathfrak{h}_0^-$ et imaginaires pures sur $\mathfrak{h}_0^+$: par suite $\operatorname{ad} \mathbf{a}$ a des valeurs propres réelles si et seulement si $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}_0^-$ donc si et seulement si $\mathbf{a} = \operatorname{ad} m^{-1} . (\mathbf{h} + \mathbf{n})$ appartient à $\mathfrak{h}_0^- + \mathfrak{n}_0$.

Rappelons enfin le lemme suivant (*cf.* [6] p. 551 et [25], lemme 8) : nous dirons qu'un $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}_0^-$ est « régulier dans $\mathfrak{h}_0^-$ » si $\alpha(\mathbf{h}) \neq 0$ pour toute racine $\alpha \in \Sigma'$

LEMME 7; 3. — *Soit* $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}_0^-$, *régulier dans* $\mathfrak{h}_0^-$: *quel que soit* $\mathbf{n} \in \mathfrak{n}_0$, *il existe un* $n \in N$ *tel que* $\operatorname{ad} n . \mathbf{h} = \mathbf{h} + \mathbf{n}$.

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème 7; 1 : soit $\mathbf{h}$ un élément régulier dans $\mathfrak{h}_0^-$; le lemme 1 montre qu'il existe un $\mathbf{n} \in \mathfrak{n}_0$. tel que $\mathbf{h} + \mathbf{n} \in \mathfrak{r}_x$, donc d'après le lemme 3 il existe un $n_1 \in N$ tel que $\operatorname{ad} n_1 \mathbf{h} \in \mathfrak{r}_x$ donc tel que $\mathbf{a} = \operatorname{ad} x^{-1} n_1 . \mathbf{h} \in \mathfrak{r}_0$. Mais les valeurs propres de $\operatorname{ad} \mathbf{a}$ sont réelles car ce sont les mêmes que celles de $\operatorname{ad} \mathbf{h}$: $\mathbf{a}$ est donc de la forme $\mathbf{h}' + \mathbf{n}'$, $\mathbf{h}' \in \mathfrak{h}_0^-$, $\mathbf{n}' \in \mathfrak{n}_0$, et les valeurs propres de $\operatorname{ad} \mathbf{h}'$ sont les mêmes que celles de ad $\mathbf{h}$, d'où $\alpha(\mathbf{h}') \neq 0$ pour $\alpha \in \Sigma'$. Il existe donc d'après le lemme 3 un n_2 dans N tel que $\mathbf{h}' = \operatorname{ad} n_2 . \mathbf{a} = \operatorname{ad}(n_2 x^{-1} n_1) . \mathbf{h}$; $\operatorname{ad}(n_1^{-1} x n_2^{-1})$ transforme le centralisateur de $\mathbf{h}'$ en celui de $\mathbf{h}$, c'est-à-dire conserve $\mathfrak{h}_0^- + \mathfrak{m}_0$. Comme $\mathfrak{h}_0^-$ est l'ensemble des $\mathbf{b} \in \mathfrak{h}_0^- + \mathfrak{m}_0$ tels que ad $\mathbf{b}$ ait ses valeurs propres réelles, $\operatorname{ad}(n_1^{-1} x n_2^{-1})$ conserve $\mathfrak{h}_0^-$ et par suite $y = n_1^{-1} x n_2^{-1}$ appartient au normalisateur de H, c'est-à-dire à $\hat{M}$. Donc toute double classe modulo N (et *a fortiori* toute double classe modulo Γ) rencontre $\hat{M}$.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer que si deux éléments z_1 et z_2 de $\hat{M}$ appartiennent à la même double classe $\Gamma \times \Gamma$, ils sont congrus modulo M (la réciproque étant évidente) : on peut supposer que ad z_i conserve $\mathfrak{h}_0^-$ et $\mathfrak{h}_0^+$, car il y a un tel élément dans toute classe de $\hat{M}$ modulo M^0 (*cf. supra*) et nous avons vu que dans ces conditions, $\operatorname{ad} z_1 . \mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n} + \mathfrak{n}'$. Soient alors t_1 et t_2 deux éléments de Γ tels que $t_1 z_1 = z_2 t_2$ et soit $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}_0^-$: on a

$$(7;\ 18) \qquad \operatorname{ad}(t_1 z_1) . \mathbf{h} = \operatorname{ad} z_1 . \mathbf{h} + \mathbf{n}_1,$$

$$(7;\ 19) \qquad \operatorname{ad}(z_2 t_2) . \mathbf{h} = \operatorname{ad} z_2 . (\mathbf{h} + \mathbf{n}_2) = \operatorname{ad} z_2 . \mathbf{h} + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}'_3,$$

avec $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3 \in \mathfrak{n}$ et $\mathbf{n}'_3 \in \mathfrak{n}'$. Comme $(\mathfrak{n} + \mathfrak{n}') \cap \mathfrak{h}_0^- = \{0\}$, on déduit de $t_1 z_1 = z_2 t_2$, $\operatorname{ad} z_1 . \mathbf{h} = \operatorname{ad} z_2 . \mathbf{h}$: donc $\operatorname{ad} z_1 z_2^{-1}$ laisse $\mathfrak{h}_0^-$ invariante point par point, donc $z_1 z_2^{-1} \in M$, C. Q. F. D.

3. **Les représentations** $A_r(\omega)$. — Le théorème 7; 1 montre que nous pouvons appliquer aux représentations de G induites par une représentation de Γ le théorème 5; 6 du chapitre II : il nous faut donc déterminer maintenant les nombres $i(L, \overline{L}; x, r)$ et par conséquent étudier les représentations $A_r(\omega)$ introduites au paragraphe 6 des différents sous-groupes $\Gamma_x = \Gamma \cap x\Gamma x^{-1}$ de Γ : il suffit bien entendu de faire cette étude pour x parcourant un système de représentants des doubles classes modulo $\Gamma : \Gamma$. Or nous venons de voir qu'on peut choisir dans chaque double classe un élément $x \in \hat{M}$ et tel que ad x conserve à la fois $\mathfrak{h}_0^-$ et $\mathfrak{h}_0^+$: dans toute la suite de ce numéro, x désigne un élément fixe de G satisfaisant à ces conditions.

Étudions tout d'abord le groupe Γ_x : l'automorphisme intérieur $y \to xyx^{-1}$ conserve à la fois H et M; donc $\Gamma_x = MHN_x$ avec $N_x = \Gamma_x \cap N$. Or $\mathfrak{n}_0$ est l'ensemble des $\mathbf{a} \in \mathfrak{r}_0$ tels que ad $\mathbf{a}$ soit nilpotent : comme $N = \exp \mathfrak{n}_0$, il est clair que $N \cap x\Gamma x^{-1} \subset xNx^{-1}$, d'où $N_x = N \cap xNx^{-1} = \exp \mathfrak{n}_x$ avec $\mathfrak{n}_x = \mathfrak{n}_0 \cap \operatorname{ad} x . \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{r}_x \cap \mathfrak{n}_0$. D'autre part nous avons vu plus haut que la transposée ${}^t\!\operatorname{ad} x$ de ad x restreinte à $\mathfrak{h}$ permute entre elles les racines appartenant à $\Sigma' \cup (-\Sigma')$. Posons $\Sigma'_x = \Sigma' \cap {}^t\!\operatorname{ad} x^{-1}(\Sigma')$ et soit Σ_x^0 le complémentaire de Σ'_x dans Σ' : ${}^t\!\operatorname{ad} x^{-1}(\Sigma')$ est la réunion de Σ'_x et de racines négatives qui sont nécessairement les opposées des racines de Σ_x^0, puisque Σ' [donc aussi ${}^t\!\operatorname{ad} x^{-1}(\Sigma')$] ne contient pas de couple de racines opposées. Comme $\mathfrak{n}$ est engendré par les $\mathbf{e}_\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma'$, ad $x . \mathfrak{n}$ est engendré par les $\mathbf{e}_\alpha$ avec $\alpha \in {}^t\!\operatorname{ad} x^{-1}(\Sigma')$ et $\mathfrak{n} \cap \operatorname{ad} x . \mathfrak{n}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par les $\mathbf{e}_\alpha$ avec $\alpha \in \Sigma'_x$. Enfin, comme $\mathfrak{n}$ est le sous-espace complexe engendré par $\mathfrak{n}_0$, $\mathfrak{n} \cap \operatorname{ad} x . \mathfrak{n}$ est le sous-espace complexe engendré par

$$\mathfrak{n}_x = \mathfrak{n}_0 \cap \operatorname{ad} x . \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n} \cap \operatorname{ad} x . \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_0.$$

La représentation $A_r(\omega)$ se compose de deux facteurs : l'un $\left[\text{qui est d'ailleurs la représentation } A_0(\omega) = (\delta_\Gamma(\omega)\, \delta_\Gamma(x^{-1}\omega x))^{-\frac{1}{2}}\, \delta_{\Gamma_x}(x)\right]$ ne dépend que des fonctions δ sur Γ et Γ_x, l'autre est un produit tensoriel symétrique de la représentation $A_0^{-1} A_1$. Nous allons tout d'abord démontrer que $A_0(\omega) = 1$; nous utiliserons le

LEMME 7; 4. — *Soit S un groupe de Lie connexe : on a $\delta_S(y) = \text{dét}\,(\operatorname{ad}_s y)$.*

DÉMONSTRATION. — Soit Ω un voisinage de O dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ de S tel que l'application exponentielle soit un homéomorphisme de Ω sur un voisinage de e dans S. Soit $d\mathbf{a}$ la mesure de Lebesgue sur l'espace vectoriel réel $\mathfrak{s}$: on sait que pour $\mathbf{a} \in \Omega$, on a $d_S(\exp \mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{a})\, d\mathbf{a}$, φ étant une fonction analytique ne s'annulant pas dans Ω (*cf.* par exemple [1]). D'où pour y fixe et $a = \exp \mathbf{a}$ suffisamment voisin de e :

$$(7;\ 20)\qquad \delta_S(y)\, d_S a = d_S(y a y^{-1}) = d_S(\exp \operatorname{ad} y . \mathbf{a}) = \varphi(\operatorname{ad} y . \mathbf{a})\, d(\operatorname{ad} y . \mathbf{a}).$$

D'où $\delta_S(y)\, \varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\operatorname{ad} y . \mathbf{a})\ \text{dét}\,(\operatorname{ad}_s y)$ et en prenant $\mathbf{a} = 0$:

$$(7;\ 21)\qquad \delta_S(y) = \text{dét}\,(\operatorname{ad}_s y).$$

COROLLAIRE. — *Soit S un groupe de Lie connexe, A et B deux sous-groupes fermés tels que $S = AB$, $A \cap B = \{e\}$; on a, à un facteur constant près* (*cf.* [23], lemme 27) : $d_S(ab) = \text{dét}\,(\operatorname{ad}_s a)/\text{dét}\,(\operatorname{ad}_A a)\, d_A a\, d_B b$.

En effet, B est une section de S fibré par A : la fonction ρ correspondante est $\rho(ab) = \dfrac{\delta_A(a)}{\delta_S(a)}$ et le corollaire est une conséquence immédiate du lemme 4 et de la formule (1; 3).

Appliquons le lemme 4 à la détermination de la fonction δ_Γ : tout d'abord $\delta_\Gamma(m) = 1$ pour $m \in M$, car $m \to \delta_\Gamma(m)$ est en réalité une représentation du groupe *compact* M/Z dans le groupe des réels positifs. De plus, $\delta_\Gamma(n) = 1$ sur le groupe des commutateurs de HN, c'est-à-dire sur N. Il ne reste donc qu'à calculer $\delta_\Gamma(h)$ pour $h = \exp \mathbf{h}$, $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}_0^-$: on a

$$(7;\ 22)\qquad \delta_\Gamma(h) = \text{dét}\, \operatorname{ad}_\Gamma(\exp \mathbf{h}) = \text{dét}\, \exp\,(\operatorname{ad}_{\mathfrak{r}_0} \mathbf{h}) = \exp(\operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{r}_0} \mathbf{h})),$$

$\mathfrak{r} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}^- + \mathfrak{n}$ étant le sous-espace complexifié de $\mathfrak{r}_0$, $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{r}_0} \mathbf{h}) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{r}} \mathbf{h})$. Or les valeurs propres de $\operatorname{ad} \mathbf{h}$ dans $\mathfrak{r}$ sont 0 un certain nombre de fois et $\alpha(\mathbf{h})$ pour $\alpha \in \Sigma'$: d'où

$$(7;\ 23)\qquad \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{r}_0} \mathbf{h}) = \sum_{\alpha \in \Sigma'} \alpha(\mathbf{h}) \qquad \text{et} \qquad \delta_\Gamma(h) = \prod_{\alpha \in \Sigma'} \exp \alpha(\mathbf{h}).$$

Pour simplifier les notations, nous poserons pour α racine de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$ et $h = \exp \mathbf{h}$, $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}_0$:

(7; 24) $$h(\alpha) = \exp \alpha(\mathbf{h}).$$

On a donc $h(-\alpha) = h(\alpha)^{-1}$. On tire alors de (23) :

(7; 25) $$\delta_\Gamma(mhn) = \prod_{\alpha \in \Sigma'} h(\alpha).$$

Des raisonnements analogues permettent de déterminer δ_{Γ_x} : soit $m \in M$, $h \in H$, $n \in N_x$; on a pour les mêmes raisons que plus haut :

(7; 26) $$\delta_{\Gamma_x}(m) = \delta_{\Gamma_x}(n) = 1$$

et si $h = \exp \mathbf{h}$, $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}_0^-$, on a $\delta_{\Gamma_x}(h) = \exp \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_{\Gamma_x} \mathbf{h})$. Les valeurs propres de $\operatorname{ad} \mathbf{h}$ dans le sous-espace $\mathfrak{m} + \mathfrak{h}^- + (\mathfrak{n} \cap \operatorname{ad} x . \mathfrak{n})$ complexifié de $\mathfrak{r}_x$ sont o un certain nombre de fois et $\alpha(\mathbf{h})$ pour $\alpha \in \Sigma'_x$, d'où finalement

(7; 27) $$\delta_{\Gamma_x}(mhn) = \prod_{\alpha \in \Sigma'_x} h(\alpha)$$

D'autre part on a

$$\delta_\Gamma(x^{-1} mhnx) = \delta_\Gamma(x^{-1} mxx^{-1} hxx^{-1} nx) = \prod_{\alpha \in \Sigma'} (x^{-1} hx)(\alpha).$$

Or si $h = \exp \mathbf{h}$, $x^{-1} hx = \exp(\operatorname{ad} x^{-1} . \mathbf{h})$ et $(x^{-1} hx)(\alpha) = h({}^t\operatorname{ad} x^{-1} . \alpha)$. D'où

(7; 28) $$\delta_\Gamma(x^{-1} mhnx) = \prod_{\alpha \in \Sigma'} h({}^t\operatorname{ad} x^{-1} . \alpha) = \prod_{\alpha \in {}^t\operatorname{ad} x^{-1}(\Sigma')} h(\alpha).$$

Or on a

$$\Sigma' = \Sigma'_x \cup \Sigma^0_x \qquad \text{et} \qquad {}^t\operatorname{ad} x^{-1}(\Sigma') = \Sigma'_x \cup (-\Sigma^0_x).$$

D'où

(7; 29) $$\delta_\Gamma(mhn)\, \delta_\Gamma(x^{-1} mhnx) = \prod_{\alpha \in \Sigma'_x} h(\alpha)^2 = \delta_{\Gamma_x}(mhn)^2.$$

D'où finalement le résultat cherché :

Proposition 7; 1. — *Quel que soit $x \in G$ et $\omega \in \Gamma_x$, on a $A_0(\omega) = 1$.*

Passons maintenant à l'étude de $A_r(\omega)$: nous nous contenterons de déterminer les composantes irréductibles de $A_r(\omega)$ restreinte à H. Remarquons tout d'abord que $A_1(\omega)$ n'est pas autre chose [puisque $A_0(\omega) = 1$] que le quotient de la représentation $\omega \to \varepsilon_\omega \star D \star \varepsilon_{\omega^{-1}}$ de Γ_x dans l'espace des dérivations d'ordre 1 au point e par le sous-espace des dérivations tangentes à $\Gamma x \Gamma x^{-1}$: en identifiant les dérivations en e avec l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{g}$, on voit que $A_1(\omega)$ est le quotient de la représentation adjointe de Γ_x dans $\mathfrak{g}$ par le sous-espace stable $\mathfrak{r}_0 + \mathrm{ad}\, x.\mathfrak{r}_0$. Or $\mathfrak{r}_0 + \mathrm{ad}\, x.\mathfrak{r}_0$ contient $\mathfrak{h}$, les $\mathbf{e}_\alpha$ et $\mathbf{e}_\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma''$, les $\mathbf{e}_\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma'$ et les $\mathbf{e}_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma_x^0$: un supplémentaire de $\mathfrak{r}_0 + \mathrm{ad}\, x.\mathfrak{r}_0$ est donc sous-entendu par les $\mathbf{e}_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma'_x$. Or $\mathbf{e}_{-\alpha}$ est vecteur propre de la représentation adjointe de H dans $\mathfrak{g}$, de valeur propre $h(\alpha)^{-1}$: par suite, les *composantes* irréductibles de $A_1(\omega)$ restreinte à H sont les représentations $h \to h(\alpha)^{-1}$ pour $\alpha \in \Sigma'_x$.

On a alors immédiatement les composantes irréductibles de $A_r(\omega)$ restreinte à H (*cf.* remarque 6; 6) : ce sont les représentations $h \to \prod_{\alpha \in \Sigma'_x} h(\alpha)^{-n_\alpha}$, n_α entiers positifs, $\Sigma n_\alpha = r$.

Or les racines $\alpha \in \Sigma'$ restreintes à $\mathfrak{h}_0^-$ sont strictement positives pour l'ordre lexicographique défini par $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_m$ (car elles sont positives comme appartenant à Σ et $\alpha = 0$ sur $\mathfrak{h}_0^-$ entraîne $\alpha \in \Sigma''$). Par suite, quels que soient les entiers positifs non tous nuls n_α, $\Sigma n_\alpha\, \alpha$ est une forme linéaire *réelle* positive et *non nulle* sur $\mathfrak{h}_0^-$: comme $H = \exp \mathfrak{h}_0^-$, on en déduit la :

Proposition 7; 2. — *Les composantes irréductibles de $A_r(\omega)$ restreinte à H sont de la forme $h \to \prod_{\alpha \in \Sigma'} h(\alpha)^{-n_\alpha}$, n_α entiers ≥ 0, de somme r. Ce sont des représentations de H dans le groupe multiplicatif des nombres positifs, distinctes de la représentation unité pour $r > 0$* [42].

4. Irréductibilité et équivalence des représentations U^L. — Soient L^1 et L^2 deux représentations unitaires irréductibles de dimension finie de Γ : rappelons que L^i restreinte à M est encore irréductible et que L^i restreinte à H est de la forme $h \to L_h^i = \chi^i(h)\, I$, χ^i caractère unitaire du groupe abélien H (I désignant l'opérateur identique). Soit U^{L^i} la représentation unitaire de G induite par L^i : pour déterminer $i(U^{L^1}, \overline{U^{L^2}})$, il nous faut étudier les nombres $i(L^1, \overline{L}^2;\, x, r)$ pour x parcourant un système de représentants des doubles classes modulo Γ et r entier ≥ 0. Nous avons vu qu'on obtenait un tel système de représentants en choisissant pour chaque élément s du groupe de Weyl $W = \hat{M}/M$ un élément x_s dans la classe modulo M image réciproque de s dans $\hat{M}$. On peut de plus supposer que $\mathrm{ad}\, x_s.\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Pour $r > 0$, les composantes irréductibles de $A_r(\omega)$ restreinte à H sont réelles $\neq 1$: or la représentation $\omega \to L^1_\omega \otimes \overline{L}^2_{x_s^{-1}\omega x_s}$, étant unitaire, n'a pas (une fois restreinte à H) de composantes irréductibles réelles $\neq 1$. Par suite, on a $i(L^1, \overline{L}^2;\, x_s, r) = 0$ pour $r > 0$.

Pour $r = 0$, on a $A_0(\omega) = 1$; donc $i(L^1, \overline{L}^2;\, x_s, 0)$ est le nombre d'entre-

[42] Comme HN est un groupe résoluble connexe du groupe dérivé N_x cette proposition donne en réalité les composantes irréductibles de $A_r(\omega)$ restreinte à HN_x.

lacement des représentations $\omega \to L^1_\omega$ et $\omega \to \overline{L}^2_{x_s^{-1}\omega x_s}$ de Γ_{x_s}. Or Γ_{x_s} contient MH et L^1 et $L^2_{x_s^{-1}\omega x_s} = {}^sL^2_\omega$ sont des représentations irréductibles de MH. Comme $L^1_n = L^2_{x_s^{-1}nx_s} = 1$ pour $n \in N_x$, le lemme de Schur montre que $i(L^1, \overline{L}^2; x_s, 0) = 1$ si les représentations L^1 et ${}^sL^2$ de MH sont *équivalentes* et que sinon, $i(L^1, \overline{L}^2; x_s, 0) = 0$. En appliquant le théorème 6; 5, on voit que *le nombre d'entrelacement* $i(U^{(L^1)^0}, \overline{U^{(L^2)^0}})$ *est inférieur ou égal au nombre d'éléments s de W tels que les représentations* L^1 *et* ${}^sL^2$ *soient équivalentes.*

THÉORÈME 7; 2. — *a. Soit L une représentation unitaire irréductible de dimension finie de* $\Gamma = MHN$. *Si, pour tout élément* $s \neq e$ *du groupe de Weyl restreint W de G, les représentations L et* ${}^sL$ *de MH ne sont pas équivalentes, alors la représentation unitaire induite* U^L *est irréductible.*

b. Soient L^1 *et* L^2 *deux représentations irréductibles de dimension finie de* Γ *: les représentations unitaires induites* U^{L^1} *et* U^{L^2} *sont équivalentes si et seulement si il existe un* $s \in W$ *tel que les représentations* L^1 *et* ${}^sL^2$ *de MH soient équivalentes.*

Il est clair que la majoration précédente de $i(U^{(L^1)^0}, \overline{U^{(L^2)^0}})$ démontre les assertions du théorème 7; 2, sauf l'équivalence unitaire de U^L et $U^{{}^sL}$ [en désignant par ${}^sL$ la représentation $mhn \to {}^s\chi(h)\,{}^sL_m$ de Γ]. Remarquons tout d'abord que U^L (si elle n'est pas irréductible) se décompose en *somme directe d'un nombre fini de composantes irréductibles* [puisque $i(U^L, \overline{U}^L)$ est fini et même borné par l'ordre de W]. Désignons comme plus haut par Z le centre (discret) de G et par K le sous-groupe image réciproque dans G du sous-groupe compact maximal $K^\star$ de $G^\star = G/Z$ et soit $M^\star$ l'image de M dans $K^\star$. On sait qu'une représentation irréductible de dimension finie de K de caractère λ ([43]) n'intervient qu'un nombre fini de fois dans la restriction à K d'une représentation unitaire irréductible de G ([19], [23]) donc aussi dans la restriction à K de U^L : On peut donc utiliser les résultats de la théorie des fonctions sphériques ([19], [24]) : on appelle « fonction sphérique » d'espèce λ de la représentation U^L la fonction $x \to \varphi^L_\lambda(x) = \mathrm{Tr}(E(\lambda)\,U^L_x)$, $E(\lambda)$ étant le projecteur orthogonal sur le sous-espace (de dimension finie) des éléments qui se transforment par U^L restreinte à K suivant la représentation de caractère λ. Pour démontrer l'équivalence unitaire de U^L et de $U^{{}^sL}$, il suffit de démontrer que pour tout caractère λ de K, on a $\varphi^L_\lambda = \varphi^{{}^sL}_\lambda$: en effet soient $U^L = \sum n_i U^i$ et $U^{{}^sL} = \sum n'_j U'^j$ les décompositions en sommes directes (finies) de représentations unitaires irréductibles de U^L et $U^{{}^sL}$ et soient φ^i_λ et φ'^j_λ les fonctions sphériques d'espèce λ de U^i et U'^j. Si pour tout λ, on a $\varphi^L_\lambda = \varphi^{{}^sL}_\lambda$,

(43) Dans ce qui suit nous désignons par « caractère » d'une représentation L la fonction $\lambda(x) = (\dim L)^{-1}\,\mathrm{Tr}\,L_x$.

on a $\Sigma n_i \varphi^i_\lambda = \Sigma n'_j \varphi'^j_\lambda$. Or des fonctions sphériques non nulles de représentations inéquivalentes sont linéairement indépendantes ([24]) et deux représentations unitaires irréductibles sont équivalentes si elles ont en commun une fonction sphérique non nulle ([19], [24]) : en choisissant un λ tel que $\varphi^i_\lambda \neq 0$, on voit qu'il existe nécessairement un indice j tel que $U^i = U'^j$ et $n_i = n'_j$, d'où l'équivalence unitaire de U^L et U'^L.

Il nous faut donc démontrer que $\varphi^L_\lambda = \varphi'^L_\lambda$ pour tout λ. Remarquons tout d'abord que pour $z \in Z$, U^L_z se réduit au scalaire $\chi(z)$, χ désignant le caractère de L. Par suite, la représentation de K de caractère λ ne peut intervenir dans U^L que si $\lambda(z) = \chi(z)$ pour $z \in Z$: Pour une telle représentation, on a (*cf.* [24], p. 240) :

$$E(\lambda) = (\dim \lambda)^2 \int_{K^*} \lambda(k)\, U^L_{k^{-1}}\, dk^*, \tag{7; 30}$$

en désignant par dk^* la mesure de Haar sur le groupe compact K^* normalisée par $\int_{K^*} dk^* = 1$.

Dans [19], M. Godement a calculé (dans le cas ou le centre de G est fini) les fonctions sphériques d'une représentation induite par une représentation de dimension 1 d'un sous-groupe T tel que $G = KT$: nous nous trouvons à peu près dans le même cas, sauf que la représentation de T (qui est ici Γ) n'est plus de dimension 1 et que K n'est plus compact, mais extension de Z par le groupe compact K*. Cependant les calculs de M. Godement se généralisent facilement à notre cas [*voir* aussi dans [25] le calcul du caractère $f \rightarrow \psi(f) = \mathrm{Tr}(U^L_f)$ de la représentation U^L (théorème 1), d'où l'on déduit facilement la fonction sphérique $\varphi^L_\lambda(f) = (\dim \lambda)^2 \int_{K^*} \lambda(k)\, \psi(\varepsilon_{k^{-1}} \star f)\, dk^*$].

On obtient

$$\varphi^L_\lambda(x) = (\dim L) \int_{K^*} \Phi^L_\lambda(kxk^{-1})\, dk^*, \tag{7; 31}$$

la fonction Φ^L_λ étant définie pour $\xi \in \Gamma$ et $k \in K$ par

$$\Phi^L_\lambda(\xi k) = (\dim \lambda)^2 \int_{M^*} \chi(\xi m^{-1})\, \lambda(mk)\, dm^*, \tag{7; 32}$$

dm^* désignant la mesure de Haar sur M^*, normalisée par $\int dm^* = 1$. Remarquons que la quantité sous le signe $\int$ au second membre de (32) ne dépend que de m^* puisque $\lambda(z) = \chi(z)$ pour $z \in Z$; d'autre part (32) ne dépend que de ξk, puisque $\Gamma \cap K = M$.

Soit alors s un élément de W et x_s un élément de M d'image s dans W;

on a :

$$(7;\,33)\qquad \Phi_\lambda^{'L}(\xi k) = (\dim\lambda)^2 \int_{M^*} \chi(x_s \xi m^{-1} x_s^{-1})\,\lambda(mk)\,dm^*$$
$$= (\dim\lambda)^2 \int_{M^*} \chi(x_s \xi x_s^{-1} m^{-1})\,\lambda(m x_s k x_s^{-1})\,dm^*$$
$$= \Phi_\lambda^L(x_s \xi k x_s^{-1}).$$

D'où finalement

$$(7;\,34)\qquad \varphi_\lambda^{'L}(x) = (\dim L) \int_{K^*} \Phi_\lambda^L(x_s k x k^{-1} x_s^{-1})\,dk^*$$
$$= (\dim L) \int \Phi_\lambda^L(k x k^{-1})\,dk^* = \varphi_\lambda^L(x)$$

car dk^* est évidemment invariante pour K opérant à gauche sur K^*.

Remarque 7; 1. — Il semble très probable que la représentation U^L est *toujours* irréductible même si ${}^sL = L$ pour un $s \neq e$: c'est en tout cas ce qui se passe dans tous les cas particuliers étudiés jusqu'à présent [groupes complexes classiques [16], groupe unimodulaire réel ([1] et [13])]. M. Harish-Chandra a donné récemment [25] une démonstration de l'irréductibilité de « presque toutes » les représentations U^L quand G est un groupe semi-simple *complexe*, par des méthodes très différentes des nôtres : dans ce cas, le groupe M est un tore et L (qui est de dimension 1) se réduit au produit d'un caractère de M par un caractère χ de H. Cependant M. Harish-Chandra n'obtient l'irréductibilité de ces représentations induites que dans le cas où χ considéré comme forme linéaire sur h_0^- [par $\mathbf{h} \to \chi(\exp \mathbf{h})$] ne se trouve pas sur un ensemble de mesure nulle, réunion des ensembles de zéros d'une infinité dénombrable de fonctions polynomiales sur le dual de $\mathbf{h}_0^-$. Malheureusement ces fonctions polynomiales ne sont pas obtenues explicitement, ce qui empêche la comparaison avec nos résultats.

Remarque 7; 2. — Dans le cas où M^* est connexe (d'où $M = M^0 Z$), l'équivalence unitaire de U^L et $U^{'L}$ résulte de la détermination du caractère de la représentation U^L donnée dans ce cas par M. Harish-Chandra ([25], théorème 2 et lemme 12).

5. Les représentations de la série complémentaire. — Comme nous l'avons signalé au chapitre II, il peut exister des représentations *unitaires* de G induites par une représentation non unitaire d'un sous-groupe : nous appellerons (suivant une terminologie introduite par MM. Gelfand et Naimark dans le cas des groupes complexes classiques) représentations de la « série complémentaire » les représentations unitaires (s'il en existe) de G induites par une représentation irréductible L de dimension finie non unitaire du sous-groupe Γ. Supposons donc qu'il existe une forme d'entrelacement B de U^{L^0} avec elle-même telle que $B(f, g)$ soit une forme *hermitienne* *définie positive* (ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que U^{L^0} se prolonge en une représentation unitaire) et soit T la $E\otimes\bar{E}$-distribution sur G associée à B. Nous désignerons par $\varphi\to\varphi^\sigma$ l'antiautomorphisme involutif de $E\otimes\bar{E}$ [ou de $\mathcal{D}_G(E\otimes\bar{E})$] défini par

$$(a\otimes\bar{b})^\sigma=b\otimes\bar{a}\qquad\text{pour}\quad a,\, b\in E$$

et par $S\to S^\sigma$ l'antiautomorphisme « transposé » de $(E\otimes\bar{E})'$ [ou de $\mathcal{D}(E\otimes\bar{E})'$] : $S^\sigma(\varphi)=\overline{S(\varphi^\sigma)}$. On vérifie facilement que, pour f et $g\in\mathcal{D}(E)$ (44) on a $(f\star\bar{g})'=(g'\star\bar{f}')^\sigma$. Si π désigne l'homomorphisme canonique de $\mathcal{D}(E)$ sur $\mathcal{D}^{L^0}$, on a d'après (6; 18) :

$$(7;\ 36)\qquad \begin{aligned}B(\pi f,\, \pi g)&=\mathrm{T}'\star f(\bar{g})=\mathrm{T}'(f'\star\bar{g})\\&=\mathrm{T}\big((g'\star\bar{f})^\sigma\big)=\overline{\mathrm{T}^\sigma(g'\star\bar{f})}\end{aligned}$$

et $B(\pi g,\, \pi f)=T'(g'\star\bar{f})$: par suite B est hermitienne, si et seulement si $T'=T^\sigma$. En particulier, le *support* de T doit être invariant par la transformation $x\to x^{-1}$. Si ce support est l'adhérence d'une double classe $Q=\Gamma x\Gamma$, il est nécessaire que $x^{-1}\in Q$. Si l'on choisit pour x un élément de $\hat{M}$ tel que $\mathrm{ad}x.h=h$, ceci entraîne que x et x^{-1} sont congrus modulo M : on a $x^2=y\in M$ et la classe s de x dans W est d'ordre 2.

Nous sommes donc amenés à faire les hypothèses suivantes : soit s un élément d'ordre 2 de W et x un représentant de s dans $\hat{M}$, choisi comme toujours de manière que $\mathrm{ad}x.h=h$: on a alors $x^2=y\in M$. Soit L une représentation irréductible de dimension finie de Γ, de la forme $\lambda(\xi)L^1_\xi$, λ étant un homomorphisme non trivial de Γ dans le groupe des nombres réels positifs et L^1 une représentation unitaire de Γ (45). Nous supposerons que le nombre d'entrelacement $i(L,\, \bar{L};\, x,\, 0)$ est non nul, ce qui entraîne :

$$(7;\ 37)\qquad \left\{\begin{aligned}\lambda(x^{-1}\omega x)&=\lambda(\omega)^{-1}\\ L^1_{x^{-1}\omega x}&=A^{-1}L^1_\omega A\end{aligned}\right\}\ \text{pour}\quad \omega\in\Gamma_x,$$

A étant un opérateur inversible dans E. On a alors

$$(7;\ 38)\qquad L^1_{y^{-1}\omega y}=L^1_{x^{-2}\omega x^2}=A^2L^1_\omega A^{-2}=L^1_{y^{-1}}L^1_\omega L^1_y.$$

Or $x^2=y$ entraîne $y=x^{-1}yx$ d'où $\lambda(y)=\lambda(x^{-1}yx)=\lambda(y)^{-1}$, puisque $y\in M\subset\Gamma_x$, d'où $\lambda(y)=1$ et $L_y=L^1_y$. (38) montre que $A^2L_y^{-1}$ commute avec les opérateurs L_ω donc est un scalaire. Comme L^1 est unitaire, on peut supposer que A est un opérateur unitaire de carré L_y. Posons

$$(7;\ 39)\qquad u(a,\, b)=\langle a,\, A^{-1}b\rangle\qquad\text{pour}\quad a,\, b\in E.$$

---

(44) Rappelons que si f et $g\in\mathcal{D}(E)$, $f\star\bar{g}\in\mathcal{D}(E\otimes\bar{E})$ (*voir* § 1, n° 4).

(45) Ceci est d'ailleurs la forme générale d'une représentation irréductible de dimension finie de Γ si M est connexe.

On a pour $\omega \in \Gamma_x$:

$$(7;40)\quad u(L_\omega a, L_{x^{-1}\omega x} b) = \lambda(\omega)\lambda(x^{-1}\omega x)\langle L_\omega^1 a, A^{-1} L_{x^{-1}\omega x}^1 b\rangle = \langle a, A^{-1} b\rangle = u(a, b).$$

Par suite u est une forme d'entrelacement non nulle de L_ω et $L_{x^{-1}\omega x}$: les conditions (37) sont donc équivalentes à $i(L, \bar{L}; x, 0) \neq 0$. De plus on a

$$(7;41)\quad u(b, a) = \langle b, A^{-1} a\rangle = \overline{\langle A^{-1} a, b\rangle} = \overline{\langle A^{-2} a, A^{-1} b\rangle} = \overline{u(L_y^{-1} a, b)}.$$

Comme $\delta_{\Gamma_x}(\omega) = (\delta_\Gamma(\omega)\,\delta_\Gamma(x^{-1}\omega x))^{\frac{1}{2}}$, on voit facilement que la fonction

$$(\delta_\Gamma(\xi)\,\delta_\Gamma(x^{-1}\eta x))^{-\frac{1}{2}}\left[\text{resp.}\left(\frac{\rho_\Gamma(x^{-1}\xi x)}{\rho_\Gamma(\xi)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \text{ est une fonction } \rho \text{ sur } \Gamma \times x\Gamma x^{-1}$$

(resp. sur Γ) relativement à $\tilde{\Gamma}_x$ (resp. Γ_x). Soit $d\mu_x$ (resp. $d\nu_x$) la mesure quasi invariante associée : on vérifie sans difficultés que

$$d\mu_x(\xi, x\eta x^{-1}) = (\rho_\Gamma(x\eta x^{-1})\,\rho_\Gamma(\xi))^{-\frac{1}{2}} d\nu_x(\eta)\, d_\Gamma(\xi) = (\rho_\Gamma(x^{-1}\xi x)\,\rho_\Gamma(\eta))^{-\frac{1}{2}} d\nu_x(\xi)\, d_\Gamma(\eta).$$

Soit T la distribution sur l'ouvert Ω_Q associée à la forme d'entrelacement u : c'est une mesure sur $Q = \Gamma x \Gamma$, donnée par [*cf.* théorème 3; 1, b et formule (6; 66)] :

$$(7;43)\quad dT(\xi^{-1} x\eta) = {}^t(L_\xi \otimes \bar{L}_\eta)\tilde{u}(\delta_\Gamma(\xi)\,\delta_\Gamma(\eta))^{\frac{1}{2}} d\mu_x(\xi, x\eta x^{-1}),$$

en désignant par $\tilde{u}$ la forme linéaire sur $E \otimes \bar{E}$ canoniquement associée à u. On en déduit :

$$(7;44)\quad d\mathrm{T}'(\xi^{-1} x\eta) = d\mathrm{T}(\eta^{-1} x y^{-1}\xi) = {}^t(L_\eta \otimes \bar{L}_{y^{-1}\xi})\tilde{u}(\delta(\eta)\,\delta(y^{-1}\xi))^{\frac{1}{2}} d\mu_x(\eta, xy^{-1}\xi x^{-1}),$$

$$(7;45)\quad d\mathrm{T}'^\sigma(\xi^{-1} x\eta) = {}^t(L_{y^{-1}\xi} \otimes \bar{L}_\eta)\tilde{u}^\sigma(\delta(\eta)\,\delta(y^{-1}\xi))^{\frac{1}{2}} d\mu_x(\eta, xy^{-1}\xi x^{-1}).$$

Or (41) s'écrit encore ${}^t(L_y^{-1} \otimes I)\tilde{u}^\sigma = \tilde{u}$ et (42) donne

$$(7;46)\quad d\mu_x(\eta, xy^{-1}\xi x^{-1}) = (\rho(xy^{-1}\xi x^{-1})\rho(\eta))^{\frac{1}{2}} d\nu_x(y^{-1}\xi)\, d_\Gamma(\eta) = \delta(y)^{\frac{1}{2}}(\rho(x^{-1}\xi x)\rho(\eta))^{\frac{1}{2}} d\nu_x(\xi)\, d_\Gamma(\eta) = \delta(y)^{\frac{1}{2}} d\mu_x(\xi, x\eta x^{-1}).$$

En reportant dans (45), on obtient $T' = T^\sigma$.

Supposons alors que T soit une mesure, non plus sur Ω_Q, mais sur G tout entier, c'est-à-dire que T soit continue sur $\mathcal{C}_{\Omega_Q}(E \otimes \overline{E})$ pour la topologie induite par $\mathcal{C}_G(E \otimes \overline{E})$; $(\pi f, \pi g) \to T'(f' \star \overline{g})$ est alors une forme d'entrelacement avec elle-même de la représentation induite par L dans $\mathcal{C}^L$ et comme $T' = T^\sigma$, cette forme B est *hermitienne*. Si de plus B est *définie positive*, alors cette représentation se prolongera en une représentation *unitaire* U^L de G induite par L, dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^L$ complété de $\mathcal{C}^L$ pour la norme $B(\pi f, \pi f)^{\frac{1}{2}}$: on obtiendra ainsi une représentation de la série complémentaire.

Nous allons montrer que cette représentation est en général *irréductible :* il suffit évidemment de montrer que $i(U^L, \overline{U}^L) = 1$, ou encore (*cf.* § 6, n° 4, remarque 6; 7) que, si $\{y_t\}$ est un système de représentants des doubles classes modulo $\Gamma : \Gamma$ avec $\operatorname{ad} x_t . h = h$, $i(L, \overline{L}; x_t, r) = 0$ pour $r > 0$ et $t \neq e$ et que $i(L, \overline{L}; x_t, 0) = 0$ pour $t \neq s$. Nous avons vu au n° 2 que L^1 restreinte à H était un multiple d'un caractère unitaire χ de H. Par suite $L_\omega \otimes \overline{L}_{x_t^{-1}\omega x_t}$ restreinte à H est un multiple de la représentation :

$$(7; 47) \qquad h \to \lambda(h)\,\lambda(x_t^{-1} h x_t)\,\chi(h)\,\overline{\chi(x_t^{-1} h x_t)}.$$

Si $t = s$, on a $\lambda(h) = \lambda(x_s^{-1} h x_s)$ et $\chi(h) = \chi(x_s^{-1} h x_s)$ et par suite $L_\omega \otimes \overline{L}_{x_s^{-1}\omega x_s}$ restreinte à H est un multiple de la représentation unité : la proposition 7; 2 montre donc que $i(L, \overline{L}; x_s, r) = 0$ pour $r > 0$. Si t est distinct de s et de e et si χ n'est pas invariant par la rotation $h \to x_t^{-1} h x$, le caractère (47) n'est pas réel et par suite $i(L, \overline{L}; x_t, r) = 0$ pour $r \geqq 0$. Enfin on a $i(L, \overline{L}; e, 0) = 0$ car si v était une forme d'entrelacement de L avec $\overline{L}$, on aurait

$$(7; 48) \qquad v(a, b) = v(L_\omega a, \overline{L}_\omega b) = \lambda(\omega)^2\, v(L_\omega^1 a, L_\omega^{-1} b)$$

et par suite :

$$(7; 49) \quad \| v \| = \sup \frac{|v(a, b)|}{\|a\| . \|b\|} = \lambda(\omega)^2 \sup \frac{|v(L_\omega^1 a, \overline{L}_\omega^1 b)|}{\|L_\omega^1 a\| . \|\overline{L}_\omega^1 b\|} = \lambda(\omega)^2 \| v \|,$$

d'où $\| v \| = 0$, λ n'étant pas trivial. Finalement nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 7; 3. — *Soit L une représentation de Γ de la forme $mhn \to \lambda(mh)\chi(h)L_m$, λ étant un homomorphisme non trivial de Γ dans le groupe multiplicatif des réels positifs, χ un caractère unitaire de H et L une représentation unitaire irréductible de M. Soit s un élément d'ordre 2 de W tel que ${}^s\lambda = \lambda^{-1}$, ${}^s\chi = \chi$, ${}^sL = L$. Si la représentation U^L de G dans $\mathcal{C}^L$ se prolonge en une représentation unitaire et si $\chi \neq {}^t\chi$ pour tout élément t de W distinct de s et de e, alors cette représentation unitaire est irréductible.*

REMARQUE 7; 3. — Dans le cas des groupes complexes classiques, MM. GELFAND et NAIMARK ont montré [16] qu'il existait effectivement des représentations de la série complémentaire, que ces représentations étaient toutes irréductibles même si $L = {}^tL$ pour certains $t \in W$, qu'une représentation de la série complémentaire et une représentation de la « série principale » étudiée au numéro précédent n'étaient jamais équivalentes et que deux représentations de la série complémentaire étaient équivalentes si et seulement si il existait un $t \in W$ avec $L = {}^tL'$. Si G est semi-simple réel quelconque mais avec $M^\star$ *connexe* (d'où $M = M^0 Z$), ces deux dernières propriétés d'équivalence résultent de la détermination donnée par M. HARISH-CHANDRA du caractère de U^L [25]. Nos méthodes (quoique valables dans tous les cas) donnent des résultats moins précis : par exemple si λ n'est pas de la forme $h \to \prod_{\alpha \in \Sigma'} h(\alpha)^{-n_\alpha}$, n_α entiers positifs, alors U^L n'est équivalente à aucune représentation de la série principale.

6. **Les représentations de la série dégénée.** — Le sous-groupe Γ considéré jusqu'ici a été obtenu comme produit de HN par le centralisateur M d'un élément *régulier* de $\mathfrak{h}_0^-$. Si l'on remplace dans cette définition l'élément régulier de $\mathfrak{h}_0^-$ par un élément *singulier* [c'est-à-dire tel que $\alpha(\mathbf{h}) = 0$ pour certaines racines $\alpha \in \Sigma'$], on obtient un sous-groupe $\Gamma' \supset \Gamma$ et l'on peut considérer les représentations unitaires de G induites par une représentation unitaire de dimension finie de Γ : on obtient ainsi ce que nous appellerons (toujours suivant la terminologie de MM. GELFAND et NAIMARK) la « série principale dégénérée » de représentation unitaire de G.

Partons d'un élément $\mathbf{h}$ singulier dans $\mathfrak{h}_0^-$ et soit Δ' l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$ nulles en $\mathbf{h}$ et soit $\mathfrak{h}'_0$ la sous-algèbre de $\mathfrak{h}_0^-$ orthogonale à Δ'. Nous choisirons la base de Weyl $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_l, \mathbf{e}_\alpha, \ldots, \mathbf{e}_{-\alpha}$ introduite au n° 1 de telle sorte que $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_j (1 \leq j < m)$ forment une base de $\mathfrak{h}'_0$ et $\mathbf{h}_{j+1}, \ldots, \mathbf{h}_m$ une base de l'orthogonal $\mathfrak{h}''_0$ de $\mathfrak{h}'_0$ dans $\mathfrak{h}_0^-$. Nous désignerons comme au n° 1 par Σ' (resp. Σ'') l'ensemble des racines positives non nulles (resp. nulles) sur $\mathfrak{h}_0^-$ et par Σ'_1 (resp. Σ'_2) l'ensemble des racines de Σ' non nulles (resp. nulles) sur $\mathfrak{h}'_0$. Il est immédiat que si α et $\beta \in \Sigma'_i (i = 1, 2)$ et si $\alpha + \beta$ est racine, alors $\alpha + \beta \in \Sigma'_i$; si $\alpha \in \Sigma'_1$, $\beta \in \Sigma'_2$ et $\alpha + \beta \in \Sigma'$, alors $\alpha + \beta \in \Sigma'_1$. Enfin on a $\theta\Sigma'_i = \Sigma'_i$.

Soit $\mathfrak{m}'$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathfrak{h}_0^+$, $\mathfrak{h}''_0$ et les $\mathbf{e}_\alpha$ et $\mathbf{e}_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma'' \cup \Sigma'_2$; $\mathfrak{m}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, stable par θ, donc engendré par $\mathfrak{m}'_0 = \mathfrak{m}' \cap \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{h}_0^+ + \mathfrak{h}''_0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}'_0$. On montre comme au n° 1 que $\mathfrak{m}'_0 + \mathfrak{h}'_0$ est le *centralisateur* de $\mathfrak{h}'_0$ dans $\mathfrak{g}_0$. D'autre part $\mathfrak{m}'$ est somme directe de la sous-algèbre $\mathfrak{p}$ (engendrée par les $\mathbf{h}_\alpha$, $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma'_2 \cup \Sigma''$) qui est semi-simple ([46]), et de son centre, qui est l'orthogonal

([46]) La semi-simplicité de $\mathfrak{p}$ résulte du lemme suivant : *soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple complexe*, $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Cartan*, Δ'_1 *l'ensemble des racines non* dans $\mathfrak{h}_0^+ + \mathfrak{h}_0''$ des $\mathbf{h}_\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma_2' \cup \Sigma''$. De même $\mathfrak{m}_0'$ est somme directe de son centre et de $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0$.

Soit $\mathfrak{n}'$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les $\mathbf{e}_\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma_1'$: $\mathfrak{n}'$ est une sous-algèbre stable par θ, donc engendrée par $\mathfrak{n}_0'$. On montre comme au n° 1 que $[\mathfrak{m}_0', \mathfrak{n}_0'] \subset \mathfrak{n}_0'$ et que $[\mathfrak{h}_0', \mathfrak{n}_0'] = \mathfrak{n}_0'$. Remarquons que $\mathfrak{n}'$ est aussi le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les $\mathbf{x}$ tels qu'il existe une forme linéaire λ strictement positive sur $\mathfrak{h}_0'$ (pour l'ordre lexicographique défini par la base $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_j$) telle que $[\mathbf{h}, \mathbf{x}] = \lambda(\mathbf{h})\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{h} \in \mathfrak{h}_0'$.

Posons $\mathfrak{r}_0' = \mathfrak{m}_0' + \mathfrak{h}_0' + \mathfrak{n}_0'$: $\mathfrak{r}_0'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{h}_0$ de complexifiée $\mathfrak{r}' = \mathfrak{m}' + \mathfrak{h}' + \mathfrak{n}'$. Comme $\mathfrak{r}' \supset \mathfrak{r}$, on a $\mathfrak{r}_0' \supset \mathfrak{r}_0$. On vérifie aisément que $\mathfrak{r}_0'$ est le normalisateur de $\mathfrak{n}_0'$.

Posons $H' = \exp \mathfrak{h}_0'$, $N' = \exp \mathfrak{n}_0'$: $H'N'$ est un sous-groupe fermé résoluble de G. Soit M'^0 le sous-groupe analytique engendré par $\mathfrak{m}_0'$: $M'^0 H'$ (resp. $M'^0 H' N'$) est un sous-groupe fermé de G, comme composante connexe de e dans le centralisateur de H' (resp. le normalisateur de N'). Soit $\tilde{M}'^0$ le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}_0'$: comme H' est simplement connexe, M'^0 est l'image de $\tilde{M}'^0$ dans l'application canonique de $\tilde{M}'^0 \times H'$ sur $M'^0 H'$, donc est un sous-groupe *fermé* de G. Soit enfin M_K' le centralisateur de H' dans K et posons $M' = M_K' M'^0$ et $\Gamma' = M'H'N'$: M' et Γ' sont des sous-groupes de G, ayant M'^0 et $M'^0 H' N'$ comme compo-

---

nulles de $\mathfrak{g}$ *suivant* $\mathfrak{h}$ *contenues dans un sous-espace vectoriel du dual de* $\mathfrak{h}$: *le sous-espace de* $\mathfrak{g}$ *engendré par les* $\mathbf{h}_\alpha$ *et les* $\mathbf{e}_\alpha$ *pour* $\alpha \in \Delta_1$ *est une sous-algèbre semi-simple de* $\mathfrak{g}$. En effet, il est clair que $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ (α, $\beta \in \Delta_1$ et $\alpha + \beta \in \Delta$ entraîne $\alpha + \beta \in \Delta_1$).

Soient $\mathbf{x}_i = \mathbf{h}_i + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \lambda_\alpha^i \mathbf{e}_\alpha$ ($i = 1, 2$) deux éléments de $\mathfrak{p}$, avec $\mathbf{h}_i = \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mu_\alpha \mathbf{h}_\alpha$ et soit B la forme de Killing de $\mathfrak{p}$: il est immédiat que $B(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = 0$ pour α, $\beta \in \Delta_1$ et $\alpha + \beta \neq 0$, d'où

$$B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = B(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) + \sum_{\alpha \in \Delta_1} (\lambda_\alpha^1 \lambda_{-\alpha}^2 + \lambda_{-\alpha}^1 \lambda_\alpha^2) B(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_{-\alpha}).$$

Or on a

$$\operatorname{ad} \mathbf{e}_{-\alpha} \operatorname{ad} \mathbf{e}_\alpha . \mathbf{e}_\beta = N_{-\alpha, \alpha+\beta} N_{\alpha,\beta} \mathbf{e}_\beta = - N_{\alpha,\beta}^2 \mathbf{e}_\beta$$

et

$$\operatorname{ad} \mathbf{e}_{-\alpha} \operatorname{ad} \mathbf{e}_\alpha (\Sigma \mu_\beta \mathbf{h}_\beta) = - \alpha(\Sigma \mu_\beta \mathbf{h}_\beta) \mathbf{h}_\alpha,$$

d'où

$$B(\mathbf{e}_{-\alpha}, \mathbf{e}_\alpha) = - \alpha(\mathbf{h}_\alpha) - \sum_{\beta \in \Delta_1} N_{\alpha,\beta}^2$$

et par suite, les $N_{\alpha,\beta}$ étant réels et $\alpha(\mathbf{h}_\alpha)$ réel > 0, $B(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_{-\alpha}) < 0$: $B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ pour tout $\mathbf{x}_2$ entraîne donc $\lambda_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_1$. De plus $B(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{\alpha \in \Delta_1} \alpha(\mathbf{h})^2$ est une forme quadratique définie positive sur l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des $\mathbf{h}_\alpha$, d'où l'on déduit facilement que B est non dégénérée, donc que $\mathfrak{p}$ est semi-simple.

sante connexe de e, et *fermés* car ils contiennent le centre Z de G et leur image dans G/Z est fermée comme produit d'un sous-groupe fermé par un sous-groupe compact M'_K/Z.

Comme $H' \subset H$, on a $M' \supset M$ et $M'H' \supset MH$. De plus $\mathfrak{c}'_0 \supset \mathfrak{n}_0$ et par suite $\Gamma' \supset N$, d'où finalement $\Gamma' \supset \Gamma$. On en déduit qu'il n'y a qu'un nombre fini de doubles classes modulo $\Gamma' : \Gamma'$, ce qui va nous permettre d'appliquer le théorème 6; 5 aux représentations de G induites par une représentation de Γ'. De plus, si pour un élément x de $\hat{M}$ on a $\mathrm{ad}\, x . \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ et si $\mathrm{ad}\, x$ laisse $\mathfrak{h}'_0$ invariante point par point, alors $x \in M'$ et la double classe correspondante est Γ'. Il existe donc un système de représentants des doubles classes modulo Γ formé de e et d'éléments x_s tels que $\mathrm{ad}\, x_s . \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ et que $\mathrm{ad}\, x_s$ ne soit pas l'identité sur $\mathfrak{h}'_0$. Il est clair que, si l'on désigne par W' l'image de M' dans W, à chaque double classe modulo W' dans W correspond au plus un élément de ce système de représentants ([47]).

Soit L une représentation unitaire irréductible de Γ' dans un espace de dimension finie E. On démontre exactement comme au nº 2 [*cf.* (7; 11)] que L est de la forme $mnh \to \chi'(h) L_m$ ($m \in M'$, $h \in H'$, $n \in N'$), χ' caractère unitaire de H' et L représentation unitaire irréductible de M'. Considérons un sous-espace E^1 non nul de E, invariant minimal pour la restriction à M'^0 de L et soit L^1 la représentation unitaire irréductible de M'^0 dans E^1 définie par L. Si $x \in M'$, nous désignerons par ${}^xL^1$ une représentation unitaire équivalente à la représentation $m \to L^1_{x^{-1}mx}$ de M'^0 dans E^1. Comme M'/M'^0 est fini, on montre aisément que L restreinte à M'^0 est la somme directe d'un certain nombre de représentations irréductibles ${}^xL$, x décrivant un système (fini) de représentants des classes à gauche de M' modulo le sous-groupe M'_1 formé des éléments de M' qui conservent E^1.

L^1 définit canoniquement une représentation unitaire irréductible du groupe simplement connexe $\tilde{M}'^0$, groupe qui est le produit direct de groupes simples compacts K_i, de groupes simples non compacts S_j et d'un groupe abélien A. Un groupe simple non compact n'ayant pas de représentations unitaires de dimension finie non triviales, L^1 se réduit à un scalaire sur l'image canonique S du produit $A \times \Pi S_j$. Or $H \cap M' = \exp \mathfrak{h}''_0$ est contenu dans S : comme $\mathfrak{h}''_0$ est orthogonale à $\mathfrak{h}^+_0$, il suffit de vérifier qu'un élément $\mathbf{h}$ de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}^+_0 + \mathfrak{h}''_0$ n'appartenant pas à $\mathfrak{h}^+_0$ engendre un sous-groupe à un paramètre d'adhérence non compacte dans $\tilde{M}'^0$, ce qui est évident puisque $\mathbf{h}$ engendre déjà dans G donc dans M'^0 un sous-groupe à un paramètre d'adhérence non compacte. L^1 se réduit donc à un scalaire $\chi^1(h)$ sur $H \cap M'$. Nous noterons désormais $\chi(h)$ le caractère unitaire $h_1 h_2 \to \chi^1(h_1)\chi'(h_2)$ de H($h_1 \in H \cap M'$, $h_2 \in H'$: rappelons que H est le produit direct de $H \cap M'$ et de H' puisque H est simplement connexe et que

---

([47]) Il semble probable que les doubles classes modulo correspondent biunivoquement aux doubles classes modulo W'.

$\mathfrak{h}_0^-$ est la somme directe de $\mathfrak{h}_0'' = \mathfrak{h}_0^- \cap \mathfrak{m}_0'$ et de $\mathfrak{h}_0'$). Comme ${}^x\chi = \chi$ pour $x \in M$, L restreinte à H est un multiple de la somme directe des caractères ${}^s\chi$, s décrivant un système de représentants des classes à gauche de $W' = \hat{M} \cap M'/M$ modulo le sous-groupe $\hat{M} \cap M_1' M/M$ ([48]).

Pour pouvoir appliquer le théorème 6; 5 à la représentation unitaire induite U^L, il nous faut étudier les représentations $A_r(\omega)$ des sous-groupes Γ'_{x_t} associés aux différentes doubles classes $\Gamma' x_t \Gamma'$: remarquons que $\Gamma'_{x_t} \supset \Gamma_{x_t} \supset MH$. On a

$$(7;\ 50)\qquad \mathbf{c}' = \mathbf{h} + \mathbf{m} + \sum_{\alpha \in \Sigma_2'} (\lambda_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \lambda_{-\alpha} \mathbf{e}_\alpha) + \sum_{\beta \in \Sigma_1'} \mu_\beta \mathbf{e}_\beta$$

et comme $\mathrm{ad}\, x_t$ conserve $\mathbf{h}$ et $\mathbf{m}$:

$$(7;\ 51)\qquad \mathrm{ad}\, x_t . \mathbf{c}' = \mathbf{h} + \mathbf{m} + \sum_{\alpha \in {}^t\mathrm{ad}\, x_t^{-1}(\Sigma_2')} (\lambda_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \lambda_{-\alpha} \mathbf{e}_{-\alpha}) + \sum_{\beta \in {}^t\mathrm{ad}\, x_t^{-1}(\Sigma_1')} \mu_\beta \mathbf{e}_\beta$$

et par suite un supplémentaire de $\mathfrak{c}' + \mathrm{ad}\, x_t . \mathfrak{c}'$ est engendré par les $\mathbf{e}_{-\alpha}$ avec $\alpha \in \Sigma_1' \cap {}^t\mathrm{ad}\, x_t^{-1} .\ \Sigma_1'$. On en déduit comme au n° 3 que les composantes irréductibles de la représentation $A_0^{-1} A_r(\omega)$ *restreinte* à H sont de la forme $h \to \prod_{\alpha \in \Sigma_1' \cap {}^t\mathrm{ad}\, x_t^{-1}(\Sigma_1')} h(\alpha)^{-n_\alpha}$, n_α entiers $\geqq 0$ et $\Sigma n_\alpha = r$, donc sont réelles positives. Comme il en est de même de la représentation

$$A_0(\omega) = \delta_{\Gamma_x'}(\omega)/(\delta_\Gamma(\omega)\, \delta_{\Gamma'}(x^{-1}\omega x))^{\frac{1}{2}},$$

on voit que les *composantes irréductibles de $A_r(\omega)$ restreinte à H sont des représentations de H dans le groupe multiplicatif des réels positifs* ([49]).

Or $L_\omega \otimes \overline{L}_{x_t^{-1}\omega x_t}$ restreinte à H est une somme de caractères unitaires de la forme ${}^s\chi(h)\, \overline{{}^{s'}\chi(x_t^{-1} h x_t)}$ avec s et $s' \in W'$. On ne peut donc avoir $i(L, \overline{L};\ x_t,\ r) \neq 0$ que s'il existe un s dans W' tel que

$$\chi(h) = {}^s\chi(x_t^{-1} h x_t) = {}^{ts}\chi(h).$$

Or si $t \notin W'$, on a $ts \notin W'$ et la rotation $h \to x_{ts}^{-1} h x_{ts}$ n'est pas l'identité

([48]) On a souvent ${}^s\chi = \chi$ pour $s \in W'$ et L restreinte à H est alors un scalaire : c'est évidemment le cas si M' est connexe (par exemple si G est un groupe classique complexe) ou si le centre de M' est discret (on a alors $\chi^1 = 1$).

([49]) Remarquons qu'on a pas en général $A_0(h) = 1$, mais

$$A_0(h) = \prod_{\alpha \in \Sigma_1' \cap \pm {}^t\mathrm{ad}\, x^{-1}\Sigma_2'} h(\alpha)^{\frac{1}{2}} \prod_{\beta \in \Sigma_2' \cap {}^t\mathrm{ad}\, x^{-1}\Sigma_1'} h(\beta)^{\frac{1}{2}} \prod_{\gamma \in \Sigma_2' \cap -{}^t\mathrm{ad}\, x^{-1}\Sigma_1'} h(\gamma)^{-\frac{1}{2}}$$

et qu'on ne peut plus affirmer *a priori* que les composantes irréductibles de $A_r(\omega)$ restreintes à H sont $\neq 1$ pour $r > 0$.

sur H' et l'on aura « en général » $\chi \neq {}^{ts}\chi$ pour tout $s \in W'$ et par suite :

$$(7;\,52)\qquad i(U^L, \overline{U}^L) \leqq i(L, \overline{L};\, e,\, 0) + \sum_{t \notin W'} i(L, \overline{L};\, x_t,\, r) = 1.$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 7; 4. — *Soit L une représentation unitaire irréductible de dimension finie de Γ' et soit χ le caractère unitaire associé de H. Si pour tout élément s de W n'appartenant pas à W', les caractères χ et ${}^s\chi$ de H sont distincts, alors la représentation unitaire de G induite par L est irréductible.*

La majoration (6; 92) de $i(U^L, \overline{U}^L)$ donnée à la remarque 6; 3 du paragraphe 6 n° 4 montre que U^L se décompose toujours en un nombre *fini* de représentations irréductibles. On peut donc utiliser pour l'étude de U^L la théorie des fonctions sphériques, ce qui permet de démontrer exactement comme au n° 4 qne la représentation unitaire induite par la représentation $\xi \to L_{x^{-1}\xi x}$ du sous-groupe $x\Gamma' x^{-1}$ est équivalente à $U^L(x \in \hat{M})$.

D'autre part, si $\chi \neq {}^s\chi$ pour $s \notin W'$, U^L (qui est irréductible) n'est équivalente à aucune représentation de la série principale, induite par une représentation $L'_{mhn} = \chi^1(h) L^1_m$ de $\Gamma = MHN$: en effet, les doubles classes modulo $\Gamma : \Gamma'$ correspondent biunivoquement aux classes à gauche de W modulo W' et l'on montre comme d'habitude que si $\chi \neq {}^s\chi^1$, alors $i(L, \overline{L}^1;\, x_s,\, r) = 0$ pour $r \geqq 0$. Il suffit d'écarter le cas $\chi = {}^s\chi^1$, mais comme U^{L^1} et $U^{{}^sL^1}$ sont équivalentes, on peut supposer que $\chi = \chi^1$ et par suite $\chi \neq {}^s\chi^1$ pour $s \notin W'$. On a alors $i(U^L, \overline{U}^{L^1}) \leqq \sum_{r=0}^{\infty} i(L, \overline{L}^1;\, e,\, r)$. Or on montre facilement par les mêmes méthodes que plus haut que les composantes irréductibles de la représentation $A_r(\omega)$ (correspondant à $x = e$) restreinte à H, sont de la forme $h \to \prod_{\alpha \in \Sigma'_2} h(\alpha)^{\frac{1}{2}} \prod_{\beta \in \Sigma'_1} h(\beta)^{-n_\beta}$, n_β entiers positifs de somme r, ce qui montre que ce sont des représentations de H dans le groupe des réels positifs, distinctes de la représentation unité pour $r > 0$ et même pour $r = 0$ si Σ'_2 n'est pas vide, c'est-à-dire si $\Gamma' \neq \Gamma$ ce que nous avons implicitement supposé : d'où immédiatement $i(U^L, \overline{U}^{L^1}) = 0$ ([50]).

([50]) On peut également considérer les représentations unitaires de la « série complémentaire dégénérée », induites par des représentations non unitaires $mhn \to \lambda(mh) L^1_{mh}$ de Γ', telles que ${}^s\lambda = \lambda^{-1}$ et ${}^sL^1 = L^1$ pour un élément s d'ordre 2 du centralisateur de W' dans W et démontrer un théorème analogue au théorème 7, 3 sur leur irréductibilité « en général ».

On trouvera enfin dans ([6], V) une généralisation du théorème 7, 4 à des représentations unitaires de G induites par certaines représentations unitaires de dimension infinie de Γ' (*cf.* aussi [1], [13] et [25 *bis*]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] V. Bargmann, *Irreducible unitary representations of the Lorentz group* (*Ann. Math.*, t. 48, 1947, p. 568-640).

[2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques* (*Topologie générale*, chap. IX, Paris, 1948).

[3] N. Bourbaki, *Ibid.* (*Intégration*, chap. I-IV, Paris, 1952).

[4] N. Bourbaki, *Ibid.* (*Espaces vectoriels topologiques*, chap. I-II, Paris, 1953).

[5] N. Bourbaki, *Sur certains espaces vectoriels topologiques* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 2, 1950, p. 15-16).

[6] F. Bruhat, *Sur les représentations induites des groupes de Lie* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 1478-1480 (I); t. 238, 1954, p. 38-40 (II), p. 437-439 (III), p. 550-553 (IV) et t. 240, 1955, p. 2196-2198 (V).

[7] H. Cartan, *Séminaire* 1951-1952, Paris.

[8] C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, I, Princeton, 1946.

[9] J. Dieudonné, *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym* (III) (*Ann. Univ. Grenoble*, t. 23, 1948, p. 25-53).

[10] J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces* ($\mathcal{F}$) *et* ($\mathcal{LF}$) (*Ann. Inst. Fourier*, t. 1, 1949, p. 61-101).

[11] G. Frobenius, *Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen* (*Sitz. Preus. Akad. Wiss.*, 1898, p. 501-515).

[12] L. Gårding, *Note on continuous representations of Lie groups* (*Proc. Nat. Acad. Sc., U. S. A.*, t. 33, 1947, p. 331-332).

[13] I. M. Gelfand et M. Graev, *Les représentations unitaires non dégénérées de la série principale du groupe réel unimodulaire* (*Izvestiya Acad. Nauk S.S.S.R.*, t. 17, 1953, p. 189-248).

[14] I. M. Gelfand et M. Naimark, *Représentations unitaires du groupe de Lorentz* (*Izvestiya Acad. Nauk S. S. S. R.*, t. 11, 1947, p. 411-504).

[15] I. M. Gelfand et M. Naimark, *La série principale des représentations irréductibles du groupe unimodulaire complexe* (*Doklady Acad. Nauk S. S. S. R.*, t. 56, 1947, p. 3-4).

[16] I. M. Gelfand et M. Naimark, *Représentations unitaires des groupes classiques* (*Trudy Nat. Inst. V. A. Steklova*, t. 36, 1950, p. 1-288).

[17] R. Godement, *Sur une généralisation d'un théorème de Stone* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 218, 1944, p. 901-903).

[18] R. Godement, *Sur la transformation de Fourier dans les groupes discrets* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 627-628).

[19] R. Godement, *A theory of spherical functions*, I (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 73, 1952, p. 496-556).

[20] A. Grothendieck, *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 4, 1952, p. 73-112).

[21] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 1955).

[22] Harish-Chandra, *Representations of semi-simple Lie groups* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 37, 1951, p. 170-173 et 362-369).

[23] Harish-Chandra, *Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space* [*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 75, 1953, p. 185-243 (I) et t. 76, 1954, p. 26-65 (II)].

[24] Harish-Chandra, *Representations of a semi-simple Lie group* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 76, 1954, p. 234-253).

[25] HARISH-CHANDRA, *Plancherel formula for complex semi-simple Lie groups* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 76, 1954, p. 485-528).

[25 *bis*] HARISH-CHANDRA, *The connection between the Cartan subgroups of a semi-simple Lie group and its irreducible unitary representations* (*Proc. Acad. Sc., U. S. A.*, 40, 1954, p. 1076-1080).

[26] K. IWASAWA, *On some type of topological groups* (*Ann. Math.*, t. 50, 1949, p. 507-558).

[27] G. W. MACKEY, *Imprimitivity for representations of locally compact groups* (*Proc. Nat. Acad. Math. U. S. A.*, t. 35, 1949, p. 537-545).

[28] G. W. MACKEY, *On induced representations of groups* (*Amer. J. Math.*, t. 73, 1951, p. 576-592).

[29] G. W. MACKEY, *Induced representations of locally compact groups*, I (*Ann. Math.*, t. 55, 1952, p. 101-140).

[30] G. W. MACKEY, *Induced representations of locally compact groups*, II (*Ann. Math.*, t. 56, 1953, p. 193-221).

[31] F. I. MAUTNER, *Induced representations* (*Amer. J. Math.*, t. 74, 1952, p. 737-758).

[32] S. MURAKAMI, *On the automorphism of a real semi-simple Lie algebra* (*J. Math. Soc. Japan*, t. 74, 1952, p. 103-133).

[33] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, I, Paris, 1950.

[34] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, II, Paris, 1951.

[35] L. SCHWARTZ, *Séminaire* 1953-1954.

[36] L. SCHWARTZ, *Un lemme sur la dérivation des fonctions vectorielles d'une variable réelle* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 2, 1950, p. 17-18).

[37] L. SCHWARTZ, *Distributions à valeurs vectorielles*, à paraître aux *Ann. Inst. Fourier*.

[38] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris, 1940.

[39] H. WEYL, *Theorie des Darstellungen kontinuierlicher halb-einfach Gruppen durch lineare Transformationen* (*Math. Z.*, t. 23, 1925, p. 271-309 et t. 24, 1925. p. 328-395).

[40] E. WIGNER, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group* (*Ann, Math.*, t. 40, 1939, p. 149-204).

(Manuscrit reçu en décembre 1955.)