BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL DEDECKER

Une théorie algébrique des équations approchées

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 331-364

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__331_0>

Bull. Soc. Math. France,
83, 1955, p. 331 à 364.

UNE THÉORIE ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS APPROCHÉES ;

PAR PAUL DEDECKER,

Institut de Mathématique de l'Université de Liège, Belgique.

Introduction. — Dans un grand nombre de cas, les équations qui régissent un phénomène physique sont d'une complication qui exclut toute possibilité de les résoudre effectivement sans procéder à un certain nombre de simplifications ou approximations. Cette difficulté se présente notamment en *Météorologie dynamique* dans la théorie du mouvement de l'air et de la prévision du temps par intégration des équations du mouvement.

Malheureusement, quiconque a quelque peu étudié des « équations approchées » n'a pas manqué d'observer qu'elles ne peuvent être manipulées conformément aux règles usuelles de calcul algébrique. Il serait donc fort souhaitable de construire un appareil algébrique adéquat basé sur quelques principes élémentaires maniables rendant possible un calcul rigoureux des « équations approchées ». En l'absence de ce formalisme algébrique, le « physicien théoricien » se livre à des calculs qui n'entraînent pas toujours la conviction du « mathématicien pur » ni même celle du « physicien mathématicien ».

Les simplifications usuelles de calcul se fondent sur la considération de ce que le physicien appelle l' « ordre de grandeur » des quantités intervenant dans le problème étudié. Hélas cette notion ne possède la plupart du temps aucune définition satisfaisante; il s'agit d'une espèce de *norme*, mais l'algébriste remarquera toutefois qu'on lui attribue — c'est du moins ce qui se passe en *Météorologie dynamique* — les propriétés essentielles d'une *filtration*, à savoir : 1° l'ordre de grandeur d'une somme ne dépasse pas l'ordre de grandeur du plus grand des termes; 2° l'ordre de grandeur d'un produit ne dépasse pas le produit des ordres de grandeur des facteurs. Il nous a dès lors paru utile d'expliciter en langage algébrique un calcul rigoureux des « équations approchées » fondé sur ces hypothèses : il s'agit essentiellement d'associer à une relation additive dans un anneau A un certain nombre de relations « approchées » lorsque l'anneau A est muni d'une filtration; nous indiquons également des règles de calcul de dérivation des « équations approchées ». Disons tout de suite que le problème de formalisation du « calcul approché » n'en est pas pour cela résolu. Nous avons dit en effet que l' « ordre de grandeur » ou filtration n'est pas défini avec précision et se rapproche d'une norme. S'il est possible de définir des filtrations sur un anneau tel que celui des fonctions indéfiniment différentiables sur l'espace euclidien, le problème reste ouvert d'en définir qui puissent être utilisées avec fruit en Physique théorique, par exemple en *Météorologie dynamique*. Indépendamment de cela, nos résultats appartiennent à la théorie mathématique des anneaux filtrés.

Comme on va le voir, les relations que nous appelons « approchées » sont parfaitement exactes mais elles sont définies dans un anneau $\mathfrak{A}$ distinct de l'anneau initial A et n'en reflétant qu'imparfaitement les propriétés, en ce sens que si tout élément a de A possède une « image » $\varphi(a)$ dans $\mathfrak{A}$, plusieurs éléments de A peuvent avoir même « image » dans $\mathfrak{A}$. En d'autres termes, *nos « équations approchées » sont des équations exactes dans un « anneau approché »* $\mathfrak{A}$, *alors que dans la conception habituelle, il s'agit de relations « approximativement exactes » dans l'anneau « exact »* A. Toute méthode mathématiquement correcte et maniable de « calcul approché » doit nécessairement, pensons-nous, s'inscrire dans une perspective analogue.

Le premier paragraphe de ce travail expose l'origine intuitive des notions utilisées. La technique algébrique proprement dite est développée à partir du paragraphe 2; on y définit les notions d'*anneau filtré* et d' *anneau gradué associé à un anneau filtré*. Nos définitions généralisent celles qui ont été introduites en *Topologie algébrique* par J. Leray [10] et J. L. Koszul [9]; nous les avons choisies de manière à placer nos théorèmes dans un cadre aussi général que possible; cette généralité ne peut que faciliter d'éventuelles applications à la Physique. Le calcul approché utilise essentiellement une application «canonique» φ d'un anneau filtré A dans l'anneau gradué associé $\mathfrak{A}$; cette application n'a pratiquement guère été utilisée jusqu'ici, probablement parce qu'elle ne respecte ni la multiplication, ni même l'addition; son étude conduit aux règles fondamentales du calcul approché (théorèmes I, II et III). Le paragraphe 3 étudie les règles de dérivation des équations approchées : à une dérivation d'un anneau filtré on fait correspondre une dérivation d'un anneau gradué dans un autre anneau gradué. Le paragraphe 4 utilise des filtrations plus générales que celles définies au paragraphe 2; la principale modification réside dans les démonstrations un peu plus compliquées et dans l'énoncé du théorème III qui devient le théorème III *bis*, en outre le théorème IV cesse d'être valable et n'admet pas de généralisation sans hypothèse supplémentaire. Enfin le paragraphe 5 donne quelques exemples d'anneaux filtrés.

La question des approximations dans les anneaux de fonctions est liée aux fondements du calcul différentiel mais celui-ci est de nature essentiellement locale et conduit à la notion d'*anneau local* comme l'a montré A. Weil [12]. Au contraire le problème que nous traitons est de nature globale; la dérivation des « équations approchées » se situe donc au carrefour du local et du global et ceci conduit à des anneaux locaux filtrés, comme nous l'esquissons brièvement en annexe. On aperçoit dès lors une possibilité de généralisation aux dérivations d'ordre supérieur (points proches de hauteur et largeur quelconques dans la terminologie d'A. Weil).

Nous n'avons pas étudié les filtrations d'un anneau A en liaison avec une topologie éventuelle $\mathfrak{T}$ sur cet anneau. Indiquons simplement que toute filtration f induit sur A une topologie $\mathfrak{T}_f$ dont les sous-groupes A^p constituent un système fondamental $\mathfrak{A}$ de voisinages de l'élément nul. Cette topologie a ceci de particulier qu'elle possède (par définition) des sous-groupes arbitrairement petits ; s'il n'en est pas de même de la topologie $\mathfrak{T}$, une quantité variable dans A dont l'ordre de grandeur tend vers zéro (ou dont la filtration tend vers l'infini) n'a donc pas nécessairement pour limite zéro au sens de la topologie $\mathfrak{T}$. En langage plus précis : le filtre de base $\mathfrak{A}$ ne converge pas vers zéro au sens de la topologie $\mathfrak{T}$.

Afin de faciliter la lecture éventuelle de ce travail par des physiciens, nous avons reproduit brièvement quelques définitions élémentaires d'algèbre moderne.

1. **Considérations heuristiques.** — L'origine des difficultés qui s'introduisent dans les calculs approchés sont en ordre principal des trois types suivants :

a. La dérivée d'une fonction considérée comme négligeable peut très bien ne pas être négligeable. En d'autres termes, si des équations peuvent — moyennant certaines conventions — être considérées comme approchées, les dérivées de ces équations peuvent cesser d'être approchées.

b. Si la différence de deux quantités a et b est négligeable par rapport à chacune d'elles (par exemple, si $a - b$ est 1000 fois plus petit que a et b), on peut convenir que cette différence est *approximativement nulle* et écrire

$$a - b \sim 0 \qquad \text{ou} \qquad a \sim b.$$

Si l'on a de même

$$c \sim d,$$

on ne pourra pas en déduire que

$$a - c \sim b - d.$$

(Exemple : a et $c = 1000$, $b = 1001$, $d = 999$). Le signe $\sim$ ne jouit donc pas, vis-à-vis de l'addition et de la soustraction des propriétés d'une égalité. Même si la relation « $a \sim b$ » est une *relation d'équivalence* [1], celle-ci n'est pas compatible avec l'addition ni la soustraction. Admettons toutefois la propriété P suivante :

P. Si ε est une quantité négligeable devant a, alors tout produit $\varepsilon . b$ est négligeable devant $a . b$:

$$a \sim a + \varepsilon \qquad \text{entraîne} \qquad a.b \sim a.b + \varepsilon.b;$$

dans ces conditions l'équivalence $\sim$ est compatible avec la multiplication.

On pourrait définir abstraitement un « *élément approché* » comme un ensemble $\{a, b, \dots\}$ d'éléments tels que deux quelconques d'entre eux ont une différence approximativement nulle. Toutefois, en vertu de (a), ces éléments ne peuvent plus être dérivés; en vertu de (b), ils ne peuvent être additionnés ni

---

[1] C'est-à-dire si elle est *réflexive* (i.e. pour tout a, $a \sim a$), *symétrique* (i.e. $a \sim b$ entraîne $b \sim a$) et *transitive* (i.e. $a \sim b$ et $b \sim c$ entraînent $a \sim c$). Une relation d'équivalence $\sim$ est dite compatible avec une opération, par exemple l'addition $+$, si $a \sim b$ et $c \sim d$ entraînent $a + c \sim b + d$.

soustraits; en vertu de P, ils peuvent cependant être multipliés. La difficulté du calcul approché n'est pas ailleurs que là.

On va voir que les difficultés (a) et (b) ne s'opposent cependant pas à la construction d'un mécanisme algébrique approprié pourvu que l'on ait défini d'une manière cohérente quand un élément ε peut être « négligé » devant un autre a. Dans cette notion de cohérence, on exigera que la somme de deux éléments « négligeables » ou leur différence soit elle-même « négligeable », sans quoi, la relation $\sim$ ne peut être une relation d'équivalence. Ceci introduit une troisième difficulté :

(c) Si l'on exige que la somme de deux quantités négligeables devant un élément a soit elle-même négligeable, cela doit aussi être vrai pour toute somme finie. Si nous écrivons symboliquement

$$\varepsilon \prec a \quad \text{ou} \quad a \succ \varepsilon$$

pour exprimer que ε est négligeable devant a, cette relation impliquera donc

$$n\varepsilon \prec a$$

pour tout entier n. Autrement dit, la relation $\prec$ ne vérifie pas l'*axiome d'Archimède* d'après lequel « étant donné deux quantités ε, a telles que $0 \prec \varepsilon \prec a$, il existe un entier n tel que $n.\varepsilon \succ a$ ».

Comme on va le voir, si les équations considérées comme exactes sont des relations entre éléments d'un système algébrique A (en l'occurrence un anneau), nous interpréterons les équations approchées comme des relations entre éléments d'un autre anneau $\mathfrak{A}$ construit à partir de A; si l'on veut dériver, il faudra considérer en outre un anneau analogue $\overline{\mathfrak{A}}$ et l'on passera de relations dans $\overline{\mathfrak{A}}$ à des relations « dérivées » dans $\mathfrak{A}$. Avant d'en arriver là, étudions avec plus de détails la situation des équations approchées de la Météorologie dynamique.

Rapportons l'atmosphère au système d'axes rectangulaires $Ox_1x_2x_3$ dont l'axe Ox_1 est tangent à l'origine O au parallèle passant par ce point, dont l'axe Ox_2 est tangent au méridien passant par O et dont l'axe Ox_3 est dirigé suivant la verticale ascendante; on suppose ce système dextrogyre et l'axe Ox_1 dirigé d'Ouest en Est. En l'absence de frottement et de turbulence, les équations du mouvement de l'air s'écrivent

$$(1) \qquad \frac{dv_1}{dt} - 2\omega v_2 \sin\psi + 2\omega v_3 \cos\psi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - v\frac{\partial p}{\partial x_1},$$

$$(2) \qquad \frac{dv_2}{dt} + 2\omega v_1 \sin\psi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - v\frac{\partial p}{\partial x_2},$$

$$(3) \qquad \frac{dv_3}{dt} - 2\omega v_1 \cos\psi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - v\frac{\partial p}{\partial x_3}.$$

Dans ces équations, v_1, v_2, v_3 sont les composantes de la vitesse de l'air, ω et ψ la vitesse de rotation de la Terre et la latitude de l'origine; φ, v et p désignent le géopotentiel, le volume spécifique et la pression.

Ces équations sont souvent remplacées par les suivantes (ou par des équations analogues) connues sous le nom d'*équations approchées de la dynamique atmosphérique :*

$$(1')\qquad \frac{dv_1}{dt} \qquad -2\omega v_2 \sin\psi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - v\frac{\partial p}{\partial x_1},$$

$$(2')\qquad \frac{dv_2}{dt} + 2\omega v_1 \sin\psi \qquad = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - v\frac{\partial p}{\partial x_2},$$

$$(3')\qquad 0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - v\frac{\partial p}{\partial x_3}.$$

Dans la première équation, on néglige le terme $2\omega v_3 \cos\psi$ parce que la vitesse verticale de l'air est « très petite » devant les composantes de la vitesse horizontale (²). Dans la troisième, on néglige $2\omega v_1 \cos\psi$ qui est 10 000 fois plus petit que chacun des termes du second membre (³); quant au terme $\frac{dv_3}{dt}$, il est de 100 000 à 10 millions de fois plus petit.

Fixons particulièrement notre attention sur le passage de (3) à (3′). On conclut généralement que les accélérations verticales sont négligeables et que l'on peut utiliser avec confiance l'équation de la statique suivant la verticale [équation (3′)]. En fait il vaudrait mieux remplacer (3′) par

$$(4)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + v\frac{\partial p}{\partial x_3} \sim 0,$$

car si l'on pouvait mesurer avec une précision suffisante $\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$, v et $\frac{\partial p}{\partial x_3}$, on trouverait que

$$(5)\qquad K = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + v\frac{\partial p}{\partial x_3}$$

est une quantité approximativement égale à $2\omega v_1 \cos\psi$. Compte tenu de la petitesse de $\frac{dv_3}{dt}$ devant $2\omega v_1 \cos\psi$, on pourrait écrire une nouvelle équation approchée, à savoir

$$(6)\qquad K \sim 2\omega v_1 \cos\psi.$$

Ensuite, en calculant avec suffisamment de précision tous les termes de la somme

$$L = 2\omega v_1 \cos\psi - \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - v\frac{\partial p}{\partial x_3},$$

celle-ci serait nécessairement égale (donc approximativement égale) à $\frac{dv_3}{dt}$ et nous aurions une dernière équation approchée

$$(7)\qquad \frac{dv_3}{dt} \sim L \quad (^4).$$

Ceci montre que les accélérations verticales ne sont guère négligeables et que l'équation (3′) seule ne donne pas tous les renseignements. Malheureusement, il

(²) Ce qui n'est certainement pas vrai si $v_2 = 0$.
(³) Dans le système M. T. S., ils sont voisins de 10.
(⁴) Ces remarques sont esquissées à la fin de [4].

serait fort difficile de retrouver ceux-ci dans l'état actuel des méthodes de mesure, puisque c'est précisément à partir de l'équation (3′) que l'on détermine v et p grâce à la technique des ballons sondes. D'autre part une mesure plus précise de v et p par d'autres méthodes semble actuellement hors de portée. Cela s'exprime parfois en déclarant que les quantités K et L sont des « inobservables ».

Pour déterminer si une quantité est négligeable devant une autre, on se sert habituellement de la notion vague d' « *ordre de grandeur* », notion dont on ne peut trouver nulle part une définition satisfaisant le mathématicien. Habituellement, l'ordre de grandeur d'une quantité s'exprime au moyen d'une puissance (positive ou négative) de 10 [8]. C'est ainsi que l'on dit que — dans le système M. T. S. — la quantité $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ est de l'ordre de 10, que l'ordre de $2\omega v_1 \cos\psi$ varie entre 10^{-4} et 10^{-3} et que l'ordre de $\frac{dv_3}{dt}$ varie entre 10^{-5} et 10^{-6} [7], [3]. L'usage qui est fait de cet « ordre de grandeur » révèle qu'on lui attribue implicitement les propriétés suivantes :

1° L'ordre de grandeur d'une somme ne dépasse pas l'ordre de grandeur du plus grand des termes [il peut être strictement plus petit si les deux termes de signes contraires ont le même ordre de grandeur; exemple, la somme K(5)].

2° L'ordre de grandeur d'un produit ne dépasse pas le produit des ordres de grandeur des facteurs (on pourrait aussi admettre qu'il lui est égal, sans que cela gêne les calculs).

Dans ces conditions, une quantité ε est considérée comme négligeable devant une autre a si l'ordre de grandeur de ε est strictement inférieur à celui de a. La propriété 1° est alors équivalente à celle qui dit qu'une somme de quantités négligeables devant a est elle-même négligeable. La propriété 2° équivaut à la propriété P ci-dessus.

Désignons par A l'ensemble des « quantités » en considération, et par $\mathfrak{T}$ l'ensemble des puissances de 10. L'ordre de grandeur est une fonction $\mathfrak{o}$ définie sur A et prenant ses valeurs dans $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{o}: \quad A \to \mathfrak{T}.$$

Dans les énoncés 1° et 2° interviennent le fait que deux éléments de $\mathfrak{T}$ peuvent être comparés et le fait qu'ils peuvent être multipliés. Au lieu de $\mathfrak{T}$, on peut utiliser l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers (positifs négatifs ou nuls), une puissance 10^{-n} étant caractérisée par l'entier n. Au lieu de la fonction $\mathfrak{o}$, on utilise alors la fonction

$$f: \quad A \to \mathbf{Z}$$

définie par

$$f(a) = -\log_{10} \mathfrak{o}(a), \qquad a \in A.$$

Les énoncés 1° et 2° ont alors la traduction suivante :

$$f(a \pm b) \geqq \min(f(a), f(b)),$$
$$f(a.b) \geqq f(a) + f(b);$$

nous les résumerons en disant que f est une *filtration* (si dans la deuxième ligne $\geqq$ est remplacé par $=$, on dira *valuation*).

Nous pouvons maintenant passer à la formalisation.

2. La théorie abstraite. — Rappelons d'abord les notions algébriques fondamentales dont nous ferons usage ([1]).

A. Un *groupe abélien* G est un ensemble d'éléments a, b, c, ... entre lesquels on a défini une opération notée $+$, appelée addition (somme) et satisfaisant aux conditions suivantes : 1° $a+b=b+a$ (*commutativité*); 2° $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*associativité*); 3° il existe un élément o (zéro) (nécessairement unique) tel que $o+a=a$; 4° à tout élément a en correspond un autre $-a$ (nécessairement unique) tel que $a+(-a)=o$. On pose conventionnellement $a-b=a+(-b)$, $a+b+c=a+(b+c)$. On a $-(-a)=a$.

G et G′ étant deux groupes abéliens, une application $\alpha : G \to G'$ est dite *linéaire* (ou *homomorphe*) si

$$\alpha(a+b)=\alpha(a)+\alpha(b);$$

de là résulte

$$\alpha(o)=o, \qquad \alpha(-a)=-\alpha(a).$$

Si H est un sous-groupe de G les classes $a \bmod H$ formées des éléments de la forme $a+h$, $h \in H$ constituent un groupe G/H appelé *groupe quotient* si l'on pose

$$(a \bmod H)+(a' \bmod H)=(a+a') \bmod H$$

(ce qui est légitime); en outre l'application dite *canonique* $\gamma : G \to G/H$ définie par $\gamma(a)=a \bmod H$ est linéaire ([5]).

B. Un *anneau* est un ensemble A d'éléments entre lesquels on a défini deux opérations, une addition notée $+$ et une multiplication notée ., satisfaisant aux conditions suivantes : 1° A est un groupe abélien pour l'opération $+$; 2° $a.(b.c)=(a.b).c$; 3° $a.(b+c)=a.b+a.c$ et $(b+c).a=b.a+c.a$ (double distributivité de la multiplication par rapport à l'addition). De là on déduit : $o.a=o$ et $(-a).b=-(a.b)$. On dit que A possède une unité s'il existe un élément 1 (nécessairement unique) tel que $a.1=1.a=a$ pour tout $a \in A$. Un *idéal* dans A est un sous-ensemble I qui constitue un sous-groupe pour l'addition et tel que pour tout $a \in A$ et tout $i \in I$ on ait $a.i \in I$ et $i.a \in I$. Le groupe quotient A/I se munit d'une multiplication . qui en fait un anneau (dit *anneau quotient*) si l'on pose

$$(a \bmod I).(a' \bmod I)=(a.a') \bmod I,$$

ce qui est légitime. Une application α d'un anneau A dans un anneau A′ est un *homomorphisme* lorsque 1° elle est linéaire pour les structures de groupes additifs et lorsque 2° on a $\alpha(a.b)=\alpha(a).\alpha(b)$. (Dans un homomorphisme, l'ensemble des éléments envoyés sur le zéro de A′ est un exemple d'idéal) ([5]).

C. Un *monoïde* M est un ensemble d'éléments a, b, c, ... entre lesquelles on a défini une opération $\star$ appelée composition et satisfaisant à la condition suivante : $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$. On ne suppose pas la commutativité $a \star b = b \star a$: si elle est remplie, on dit que M est un *monoïde commutatif*.

Au lieu de monoïde, on dit aussi *demi-groupe* [5].

([5]) Pour plus de détails *voir* les traités classiques [1], [5], [11].

D. Un ensemble E d'éléments a, b, c, ... est dit ***totalement ordonné*** si l'on a défini pour les couples (a, b) d'éléments de E une relation notée $\preceq$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

Or 1 : quels que soient a et b dans E, on a

$$a \preceq b \quad (a \text{ inférieur à } b) \qquad \text{ou} \qquad b \preceq a;$$

Or 2 : si l'on a $a \preceq b$ et $b \preceq c$, on a aussi $a \preceq c$;
Or 3 : si $a \preceq b$ et $b \preceq a$, on a $a = b$.

Remarquons que du 1° résulte que $a \preceq a$ pour tout $a \in$ E. On convient d'écrire :

$a \prec b$ (a strictement inférieur à b) si $a \neq b$ et $a \preceq b$;
$a \succeq b$ (a supérieur à b) si $b \preceq a$;
$a \succ b$ (a strictement supérieur à b) si $b \prec a$.

E. Un *monoïde totalement ordonné* est un ensemble M muni à la fois d'une structure de monoïde et d'une structure d'ensemble totalement ordonné, ces deux structures étant en outre liées par les conditions suivantes, a, b, c et d étant des éléments quelconques de M :

MO : $a \prec b$ entraîne $a \star c \prec b \star c$ et $c \star a \prec c \star b$.

Cette condition est équivalente à la suivante :

MO_1 : $a \prec b$ et $c \preceq d$ entraînent $a \star c \prec b \star d$ et $c \star a \prec d \star b$

et elle implique la suivante, plus faible :

MO_2 : $a \preceq b$ entraîne $a \star c \preceq b \star c$ et $c \star a \preceq c \star b$.

M étant un monoïde totalement ordonné, on désignera par $\overline{\text{M}}$ et on appellera *complété* de M l'ensemble obtenu par adjonction à M d'un élément ∞. On fait de ce nouvel ensemble un ensemble totalement ordonné en convenant que pour tout $a \in$ M :

$$a \preceq \infty;$$

on en fait un monoïde en convenant que

$$a \star \infty = \infty \star a = \infty \star \infty = \infty.$$

La condition MO n'est pas vérifiée si $c = \infty$ et $\overline{\text{M}}$ n'est donc pas un monoïde totalement ordonné; cet ensemble vérifie cependant la condition :

MO' : $a \prec b$ et $c \prec \infty$ entraînent $a \star c \prec b \star c$ et $c \star a \prec c \star b$.

F. Soit M un monoïde ([6]). Un *anneau* M-*gradué* (quand aucune confusion n'est à craindre, on dira *anneau gradué*) est un anneau A dans lequel on a défini des sous-groupes additifs A_p affectés d'un indice variant dans M, les conditions suivantes étant satisfaites :

([6]) Dans [2], p. 7, C. Chevalley se limite au cas où M est un groupe abélien.

AGr 1 : pour tout $p \in M$, il existe un A_p et un seul;

AGr 2 : le seul élément commun à deux A_p est le zéro de A;

AGr 3 : le produit d'un élément de A_p par un élément de A_q est dans $A_{p\star q}$:

$$a_p \in A_p \quad \text{et} \quad a_q \in A_q \quad \text{impliquent} \quad a_p . a_q \in A_{p\star q} \quad (p, q \in M)$$

(de là résulte que si A est commutatif et $A_p . A_q \neq 0$, $p \star q = q \star p$);

AGr 4 : tout élément $a \in A$ s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme d'une somme d'un nombre fini d'éléments $a_p \neq 0$, chacun de ceux-ci appartenant à un A_p; chacun de ces a_p est appelé *composante homogène* de *degré* p de a; si l'indice $q \in M$ n'est pas représenté dans cette décomposition, on dit que la composante homogène de degré q de a est nulle. Tout élément de A_p est dit *homogène*, de *degré* p.

F'. Lorsque A est un groupe abélien et que sont vérifiées les conditions AGr 1, 2 et 4, on dit qu'il s'agit d'un *groupe* M-*gradué*.

G. Soit M un monoïde totalement ordonné. Un *anneau* M-*filtré* (en abrégé, un *anneau filtré*) est un anneau A sur lequel on a défini une fonction $f(a)$, $a \in A$ à valeurs dans le complété $\overline{M}$ de M et satisfaisant aux conditions suivantes :

AF 1 : $f(a-b) \succeq \min(f(a), f(b))$;

AF 2 : $f(a.b) \succeq f(a) \star f(b)$;

AF 3 : $f(0) = \infty$;

auxquelles on ajoute habituellement la suivante :

AF 4 : $f(a) = \infty$ entraîne $a = 0$;

si elle est vérifiée, la filtration est dite *séparée*. La plupart des résultats qui suivent sont indépendants de AF 4.

Lorsqu'on voudra expliciter la filtration, l'anneau filtré sera noté (A, f); ceci devient nécessaire lorsqu'on considère plusieurs anneaux filtrés ou plusieurs filtrations sur un même anneau.

On désignera par $A^p (p \in M)$ l'ensemble des $a \in A$ tels que $f(a) \succeq p$, par B^p l'ensemble des $a \in A$ tels que $f(a) \succ p$. Pour $p \prec q$, on a

$$B^q \subset A^q \subset B^p \subset A^p.$$

En vertu de AF 1, et AF 3, on a $f(a) = f(-a)$; il s'ensuit que les A^p et B^p sont des sous-groupes additifs de A. De plus en vertu du 2° :

$$(8) \qquad a^p \in A^p \quad \text{et} \quad a^q \in A^q \quad \text{entraînent} \quad a^p . a^q \in A^{p\star q}.$$

$$(9) \qquad a^p \in A^p \quad \text{et} \quad b^q \in B^q \quad \text{entraînent} \quad a^p . b^q \in B^{p\star q}, \quad b^q . a^p \in B^{q\star p}.$$

Enfin si la filtration est séparée, les A^p ont en commun un et un seul élément, le zéro de A. La fonction $f : A \to \overline{M}$ est appelée M-*filtration* (en abrégé, *filtration*).

A tout anneau M-filtré A, on associe comme suit un anneau M-gradué $\mathfrak{A}$.

Soit $\mathbf{G}(A)$ l'ensemble des familles $(a^p)_{p\in M}$ (7) où $a^p \in A^p$ et où il n'y a qu'un

(7) On suppose qu'il y a un et un seul élément pour chaque $p \in M$; noter qu'il n'y a pas d'élément a_∞. De même, il n'y a pas de groupe A^∞.

nombre fini de valeurs p telles que $a^p \neq 0$. Pour deux telles familles (a^p) et (b^p), on pose

(10) $$(a^p)+(b^p)=(a^p+b^p),$$

ce qui fait de $\mathbf{G}(A)$ un groupe abélien. On notera $\mathbf{A}_p$ le sous-groupe formé des familles (a^q) pour lesquelles tous les a^q sont nuls pour $q \neq p$ et ψ_p la fonction qui associe à $\mathrm{a}^p \in A^p$ la famille $(a^q)_{q \in M}$ définie par

$$a^q = 0 \quad \text{si} \quad q \neq p, \qquad a^q = \mathrm{a}^p \quad \text{si} \quad q = p.$$

L'application ψ_p définie pour tout $p \in M$ est manifestement un isomorphisme de A^p sur $\mathbf{A}_p$ et tout élément de $\mathbf{G}(A)$ s'écrit d'une et d'une seule manière comme somme d'un nombre fini d'éléments appartenant aux $\mathbf{A}_p$; on exprime cette propriété en disant que $\mathbf{G}(A)$ est la *somme directe* des $\mathbf{A}_p$, ce qu'on écrit

$$\mathbf{G}(A)=\sum_{p\in M}\mathbf{A}_p.$$

Le groupe $\mathbf{G}(A)$ satisfait donc aux conditions AGr 1, 2 et 4, et constitue donc un *groupe gradué.*

Nous allons maintenant définir sur $\mathbf{G}(A)$ une structure multiplicative en faisant un anneau gradué. A cet effet, soient $\mathbf{a}_p$ et $\mathbf{b}_q$ deux éléments homogènes de $\mathbf{G}(A)$ de degrés respectifs p et q; il existe donc un élément $a \in A^p$ et un élément $b \in A^q$ tels que

$$\mathbf{a}_p=\psi_p(a) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b}_q=\psi_q(b).$$

Comme $a.b$ appartient à $A^{p\star q}$, il est légitime de définir un produit $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ en posant

$$\mathbf{a}_p.\mathbf{b}_q=\psi_{p\star q}(a.b),$$

en vertu de AGr 4, ceci permet de définir le produit de deux éléments quelconques de $\mathbf{G}(A)$; si

$$\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{r}\psi_{p_i}(a_i^{p_i}) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b}=\sum_{j=1}^{s}\psi_{p_j}(a_j^{p_j}), \qquad a_k^{p_k}\in A^{p_k},$$

on posera

(11) $$\mathbf{a}.\mathbf{b}=\sum_{i,j}\left[\psi_{p_i}(a_i^{p_i}).\psi_{q_j}(a_j^{p_j})\right];$$

cette formule prolonge par linéarité la multiplication déjà définie entre éléments homogènes. Il est clair que cette multiplication vérifie AGr 3 et que les $\mathbf{A}_p$ définissent sur $\mathbf{G}(A)$ une structure d'anneau M-gradué.

On désignera par $\mathbf{H}(A)$ le sous-ensemble de $\mathbf{G}(A)$ obtenu en se limitant aux familles $(a^p)_{p\in M}$ pour lesquelles $a^p \in B^p$ et l'on posera

$$\mathbf{B}_p=\psi_p(B^p)\subset\mathbf{H}(A).$$

$\mathbf{H}(A)$ est un sous-groupe de $\mathbf{G}(A)$ et l'on constate en vertu de (9) que le produit d'un élément de $\mathbf{G}(A)$ par un élément de $\mathbf{H}(A)$ appartient à $\mathbf{H}(A)$: autrement dit, $\mathbf{H}(A)$ est un idéal de $\mathbf{G}(A)$ et nous noterons $\mathfrak{A}$ l'anneau quotient :

$$\mathfrak{A}=\mathbf{G}(A)/\mathbf{H}(A).$$

L'idéal $\mathbf{H}(A)$ est de plus homogène, c'est-à-dire que toute composante homogène d'un élément de $\mathbf{H}(A)$ appartient elle-même à $\mathbf{H}(A)$. Dès lors toute classe $\mathfrak{a}_p \in \mathcal{A}$ contenant un élément $\mathbf{a}_p = \psi_p(a^p)$, $a^p \in A^p$, contient une sous-classe d'éléments homogènes de dégré p : à savoir la classe de $\mathbf{a}_p$ dans $\mathbf{A}_p/\mathbf{B}_p$. Tout élément $\mathfrak{a}_p \in \mathcal{A}$ de ce type sera dit *homogène de degré* p; l'ensemble de ces éléments constitue un sous-groupe $\mathcal{A}_p$ et l'on voit que tout élément de $\mathcal{A}$ s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme d'une somme finie d'éléments appartenant aux différents $\mathcal{A}_p$. De plus le produit $\mathfrak{c}_{p\star q}$ d'un élément $\mathfrak{a}_p$ de $\mathcal{A}_p$ par un élément $\mathfrak{b}_q$ de $\mathcal{A}_q$ est dans $\mathcal{A}_{p\star q}$: si ces éléments proviennent respectivement de a^p et b^q dans A^p et A^q, $\mathfrak{c}_{p\star q}$ provient du produit $a^p . b^q \in A^{p\star q}$; autrement dit,

$$\mathfrak{a}_p = \psi_p(a^p) \operatorname{mod} H(A) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{b}_q = \psi_q(a^q) \operatorname{mod} H(A)$$

entraînent

$$\mathfrak{a}_p . \mathfrak{a}_q = \psi_{p\star q}(a^p . b^q) \operatorname{mod} H(A).$$

Les sous-groupes $\mathcal{A}_p$ définissent donc sur $\mathcal{A}$ une structure d'anneau M-gradué; on dit que $\mathcal{A}$ est l' *anneau* M-*gradué associé* à l'anneau M-filtré A.

Tout élément $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{A}$ s'identifie naturellement à une famille $(\alpha_p)_{p\in M}$, $\alpha_p \in \mathbf{A}_p/\mathbf{B}_p$ ([8]); par cette identification, la somme de deux éléments de $\mathcal{A}$ se définit par une formule analogue à (10) et le produit par une formule analogue à (11) compte tenu de

$$(\psi_p(a) \operatorname{mod} \mathbf{B}_p).(\psi_q(b) \operatorname{mod} \mathbf{B}_q) = \psi_{p\star q}(a.b) \operatorname{mod} \mathbf{B}_{p\star q}, \qquad \text{où} \quad a \in A^p, \qquad b \in A^q.$$

On va maintenant définir une application

$$\varphi :\ A \to \mathcal{A}.$$

Pour cela notons γ l'application canonique $\mathbf{G}(A) \to \mathcal{A}$, c'est-à-dire l'application qui associe à un élément de $\mathbf{G}(A)$ sa classe dans $\mathcal{A}$:

$$\gamma(a) = a \operatorname{mod} \mathbf{H}(A), \qquad a \in \mathbf{G}(A);$$

convenons en outre de désigner par Ψ_p l'application composée de γ et ψ_p. On a donc

$$\Psi_p(a^p) = \gamma(\psi_p(a^p)), \qquad a^p \in A^p,$$
$$\Psi_p(A^p) = \mathcal{A}_p;$$

cette application définie pour tout $p \in M$ est un homomorphisme de A^p sur $\mathcal{A}_p$. On notera en outre que pour $a \in A^p$ et $b \in A^q$, on a

$$\Psi_p(a).\Psi_q(b) = \Psi_{p\star q}(a.b). \tag{12}$$

Définition. — L'application φ est alors définie par les relations suivantes :

$$1^\circ \text{ si } f(a) = \infty, \qquad \varphi(a) = 0 \in \mathcal{A};$$
$$2^\circ \text{ si } f(a) = p \neq \infty, \qquad \varphi(a) = \Psi_p(a).$$

Si la filtration f est séparée, le zéro de A est donc le seul élément ayant pour

([8]) Si $\mathbf{a}$ est la classe modulo $\mathbf{H}(A)$ de la famille $(a^p)_{p\in M}$, on identifie $\mathbf{a}$ à la famille $(\alpha_p)_{p\in M}$ telle que $\alpha_p = \psi_p(a^p) \operatorname{mod} \mathbf{B}_p$.

image l'élément nul de $\mathcal{A}$; dans le cas général $\varphi(a) = 0$ est équivalent à $f(a) = \infty$. Pour simplifier, nous écrirons souvent (a) au lieu de $\varphi(a)$:

$$(a) = \varphi(a).$$

On appellera φ l'application *canonique* de A dans $\mathcal{A}$.

Comme on va voir, le calcul approché revient à remplacer chaque élément a de A par son image (a) dans $\mathcal{A}$. Les difficultés proviennent de ce qu'il ne s'agit pas là d'un homomorphisme, c'est-à-dire que l'on a en général

$$(a+b) \neq (a)+(b) \qquad \text{et} \qquad (a.b) \neq (a).(b) \quad (^9).$$

En ce qui concerne le produit, on a le

THÉORÈME I. — *Soit* A *un anneau* M-*filtré*, M *étant un monoïde totalement ordonné. Quels que soient les éléments* a, b *de* A, *on a dans* $\mathcal{A}$:

$$(a).(b) = (a.b) \qquad \text{ou} \qquad (a).(b) = 0.$$

suivant que

$$f(a.b) = f(a) \bigstar f(b) \qquad \text{ou} \qquad f(a.b) \succ f(a) \bigstar f(b).$$

En effet, soient $p = f(a)$, $q = f(b)$. On a

$$(a).(b) = \Psi_{p\star q}(a.b);$$

si $f(a.b) = p \bigstar q$, on a

$$(a.b) = \Psi_{p\star q}(a.b), \qquad \text{sinon} \quad \Psi_{p\star q}(a.b) = 0.$$

Nous allons maintenant étudier les conditions de validité de la relation $(a+b) = (a)+(b)$.

LEMME I. — *Pour tout* $a \in$ A, *on a* $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.

En effet, nous avons vu que $f(a) = f(-a)$, soit $= p$; d'autre part la relation $a - a = 0$ dans A^p donne

$$\Psi_p(a) + \Psi_p(-a) = 0:$$

d'où la propriété puisque

$$\varphi(a) = \Psi_p(a), \qquad \varphi(-a) = \Psi_p(-a) = -\Psi_p(a).$$

LEMME II. — *Soient* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *des éléments de même filtration :* $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_k) = p$ *tels que*

(13) $$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 0$$

dans A; *on a dans ces conditions*

(14) $$(a_1) + (a_2) + \ldots + (a_k) = 0$$

dans $\mathcal{A}$.

(9) Le théorème I montre que l'on a toujours $(a, b) = (a).(b)$ dans le cas d'un anneau *valué*.

En effet, tous les termes de la somme (13) sont dans A^p et la relation (14) s'en déduit par l'homomorphisme Ψ_p puisque l'on a pour tout $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$(a_i) = \Psi_p(a_i).$$

On ne peut plus écrire cette dernière égalité si tous les a_i ne sont pas de filtration p; la relation (14) est alors en général fausse.

LEMME III. — *Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ une suite d'éléments de* A *rangés par ordre de filtration croissante :*

$$f(a_1) \preceq f(a_2) \preceq \ldots \preceq f(a_k).$$

Si l'on a $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 0$, il en résulte nécessairement

$$f(a_1) = f(a_2) \quad \text{et} \quad (a_1) + (a_2) = 0.$$

Démonstration. — Posons $b = a_3 + \ldots + a_k$. On a donc

$$f(a_1) \preceq f(a_2) \preceq f(b) \quad \text{et} \quad a_1 + a_2 + b = 0,$$

d'où $f(a_1) = f(a_2 + b) \succeq f(a_2)$, ce qui démontre la première assertion. La seconde en découle compte tenu de la définition de l'application φ.

THÉORÈME II. — *Soient* M *un monoïde totalement ordonné et* A *un anneau* M-*filtré. Pour qu'une relation $a + b + c = 0$ dans* A *entraîne $(a) + (b) + (c) = 0$ dans $\mathfrak{A}$, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit remplie : ou bien $f(a) = f(b) = f(c)$ ou bien l'un au moins des trois éléments a, b, c est de filtration infinie. Pour que l'on ait $(a + b) = (a) + (b)$, il faut et il suffit que $f(a + b) = f(a) = f(b)$ ou que l'un des éléments $a + b$, a, b soit de filtration infinie.*

Démonstration. — Les deux assertions de l'énoncé sont équivalentes en vertu du lemme I; nous nous bornerons donc à établir la première. Supposons que l'on ait à la fois $a + b + c = 0$, $(a) + (b) + (c) = 0$ et $f(c) \succ f(a) = p$; il résulte alors du lemme III que $f(b) = p$. Or on a $\Psi_p(a) + \Psi_p(b) + \Psi_p(c) = 0$ ou $(a) + (b) + \Psi_p(c) = 0$; comme $\Psi_p(c) = 0$, il en résulte $(c) = 0$, d'où $f(c) = \infty$. La condition est donc nécessaire et on vérifiera de même qu'elle est suffisante compte tenu des lemmes II et III.

THÉORÈME III (*Décomposition spectrale*). — *Soit dans l'anneau* A :

$$S \equiv a + b + \ldots + l = 0$$

une relation additive. Désignons par $p_1 \prec p_2 \prec \ldots \prec p_n$ l'ensemble des filtrations des termes de cette relation et par

$$a_{1i}, \quad \ldots, \quad a_{k_i i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

l'ensemble des termes de filtration p_i rangés dans un ordre quelconque. Soient en outre s_i la somme partielle des termes de filtration strictement inférieure à p_i dans S :

$$s_1 = 0 \quad \text{et,} \quad \text{pour } i = 2, \ldots n : \quad s_i = \sum_{j=1}^{i=1} \Sigma_{t_j} a_{t_j j}$$

et s_i' *l'élément de* A *défini par*

$$s_i' = -s_i \quad \text{si } f(s_i) = p_i, \qquad s_i' = 0 \quad \text{si } f(s_i) \neq p_i.$$

La relation S *entraîne dans ces conditions les* n *relations suivantes dans l'anneau* $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\equiv (a_{11}) + (a_{21}) + \ldots + (a_{k_1 1}) = 0, \\ \Sigma_2 &\equiv (a_{12}) + (a_{22}) + \ldots + (a_{k_2 2}) = (s_2'), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Sigma_n &\equiv (a_{1n}) + (a_{2n}) + \ldots + (a_{k_n n}) = (s_n'). \end{aligned}$$

Nous dirons que ces n relations constituent les *équations approchées* déduites de S ou encore le *spectre* de S.

Démonstration. — Soit r_i la somme des termes de filtration strictement supérieure à p_i dans S :

$$r_i = \sum_{j=i+1}^{n} \Sigma_{r_j} a_{r_j j} \qquad (r_n = 0).$$

On a donc pour chaque i :

$$s_i + a_{1i} + \ldots + a_{k_i i} + r_i = 0. \tag{15}$$

En vertu du lemme III, la filtration de s_i ne peut être strictement inférieure à p_i; tous les termes de la somme (15) appartiennent donc à A^{p_i} et nous pouvons leur appliquer l'application linéaire Ψ_{p_i}, ce qui donne lieu à la relation Σ_i puisque

$$(s_i') = -\Psi_{p_i}(s_i), \qquad \Psi_{p_i}(r_i) = 0,$$
$$(a_{1i}) = \Psi_{p_i}(a_{1i}), \qquad \ldots, \qquad (a_{r_i i}) = \Psi_{p_i}(a_{r_i i}).$$

Tous les termes de la somme Σ_i sont dans $\mathfrak{A}_{p_i}$ et comme dans un anneau gradué une somme de termes homogènes ne peut être nulle sans que les sommes partielles des termes de chaque degré soient elles-mêmes nulles, les n relations Σ_i sont équivalentes à l'unique relation

$$(a) + (b) + \ldots + (k) = (s_2') + (s_3') + \ldots + (s_n').$$

Si l'on multiplie les termes de S par un même facteur $x \in A$, on obtient une nouvelle relation; dans le cas d'un anneau filtré quelconque il n'y a pas de relation simple entre les spectres des deux relations. Toutefois, dans le cas d'un anneau valué, on a toujours $(x.a) = (x).(a)$ et le spectre de la nouvelle relation s'obtient simplement en multipliant par (x) les relations du spectre initial.

Remarque. — Le « calcul approché » usuel consiste à écrire des relations

$$a + b + \ldots + k \sim a' + b' + \ldots + h'$$

si la différence $a + b + \ldots + k - a' - b' - \ldots - h'$ est de filtration supérieure au minimum des filtrations des éléments en présence (le signe $\sim$ se lisant « approximativement égal à »). De telles « approximations » ne peuvent être manipulées suivant les règles habituelles du calcul algébrique : par exemple on ne peut remplacer une somme partielle par sa valeur, deux quantités approximativement égales à une troisième ne sont pas nécessairement approximativement égales, etc. Notre méthode au contraire consiste à écrire dans l'anneau gradué $\mathfrak{A}$ des équations qui obéissent à toutes les règles classiques de calcul; ces équations sont parfaitement « exactes » mais elles donnent moins d'informations que les équations dites exactes de l'anneau A. C'est en quelque sorte l'anneau $\mathfrak{A}$ qui constitue une approximation de l'anneau initial A; la graduation empêche tout mélange subversif de termes de filtrations différentes.

3. **Dérivation des équations approchées.** — Nous allons maintenant étudier le cas où les équations exactes peuvent êtres dérivées, c'est-à-dire où l'anneau A est muni d'une dérivation D.

Rappelons qu'une dérivation dans un anneau A est une application linéaire D de A en lui-même telle que

$$D(a.b) = (Da).b + a(Db)$$

[on écrira Da pour D(a)]. Plus généralement, soient A et A′ deux anneaux, χ un homomorphisme de A dans A′. On appellera *χ-dérivation* de A dans A′ une application linéaire D : A $\to$ A′ telle que

$$D(a.b) = Da.\chi b + \chi a.Db \quad (^{10}) \qquad [\chi a = \chi(a)].$$

La notion classique correspond évidemment au cas A $=$ A′ et $\chi =$ l'application identique A $\to$ A. Lorsque les anneaux A et A′ sont M-gradués (M étant un monoïde quelconque), on distingue (a) les *dérivations neutres* et (b) les *dérivations homogènes* de *degré* $p \in$ M. Pour les premières, on suppose que χ et D conservent les degrés, c'est-à-dire transforment un élément homogène en un élément homogène de même degré. Pour les secondes, on suppose que le monoïde M est commutatif, que χ conserve les degrés et que D transforme un élément homogène de degré q en un élément homogène de degré $q \star p$. Lorsque le monoïde M est commutatif et lorsque son opération $\star$ possède un élément neutre o (tel que $p \star o = p$ pour tout $p \in$ M), une dérivation neutre est aussi une dérivation homogène de degré o.

Si A est muni d'une M-filtration — M désignant pour le moment un monoïde totalement ordonné — nous allons voir que la donnée d'une dérivation D dans A permet de définir sur A une nouvelle M-filtration. Pour cela, il s'avérera commode de considérer la fonction min(p, q) comme définissant une loi de composition interne que nous noterons $\cup$ dans M; autrement dit, nous poserons

$$p \cup q = \min(p, q).$$

Ainsi M est muni des deux lois de composition (opérations) $\star$ et $\cup$.

L'opération $\cup$ (lire *réunion*) jouit entre autres des propriétés suivantes :

1° $\qquad p \cup q = q \cup p \qquad$ (commutativité);

2° $\qquad (p \cup q) \cup r = p \cup (q \cup r) \qquad$ (associativité);

---

(10) *Voir* une généralisation de la notion de dérivation en annexe.

on peut dès lors poser $p \cup q \cup r = (p \cup q) \cup r$.

3° $\quad a \preceq a', b \preceq b'$ entraînent $a \cup b \preceq a' \cup b'$.

4° $a_1 \cup a_2 \cup \ldots a_{k-1} \cup a_k \preceq a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_{k-1}$ quels que soient $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$.

Les opérations $\bigstar$ et $\cup$ sont en outre liées par la propriété :

5° $$(p \cup q) \bigstar (r \cup s) = (p \bigstar r) \cup (p \bigstar s) \cup (q \bigstar r) \cup (q \bigstar s)$$
(distributivité de $\bigstar$ par rapport à $\cup$).

Théorème IV. — *Soient* $f : \mathrm{A} \to \overline{\mathrm{M}}$ *une* M-*filtration sur l'anneau* A *et* D *une dérivation de cet anneau. La fonction* $\bar{f} : \mathrm{A} \to \overline{\mathrm{M}}$ *définie par*

$$\bar{f}(a) = f(a) \cup f(\mathrm{D}a)$$

est une M-*filtration sur* A.

Démonstration. — L'axiome AF 3 est manifestement vérifié de même que AF 4 si f est séparée; reste donc à vérifier AF 1 et AF 2. On a

$$\bar{f}(a - a') = f(a - a') \cup f(\mathrm{D}a - \mathrm{D}a');$$

or

$$f(a - a') \succeq f(a) \cup f(a') \qquad \text{et} \qquad f(\mathrm{D}a - \mathrm{D}a') \succeq f(\mathrm{D}a) \cup f(\mathrm{D}a').$$

Il en résulte en tenant compte des trois premières propriétés ci-dessus :

$$\bar{f}(a - a') \succeq (f(a) \cup f(a')) \cup (f(\mathrm{D}a) \cup f(\mathrm{D}a')) = (f(a) \cup f(\mathrm{D}a)) \cup (f(a') \cup f(\mathrm{D}a')) = \bar{f}(a) \cup \bar{f}(a'),$$

ce qui établit AF 1. Pour démontrer AF 2, on observe que

$$\bar{f}(a) \bigstar \bar{f}(a') = (f(a) \cup f(\mathrm{D}a)) \bigstar (f(a') \cup f(\mathrm{D}a')),$$

ce qui en vertu du 5° n'est autre que

$$(f(a) \bigstar f(a')) \cup (f(a) \bigstar f(\mathrm{D}a')) \cup (f(\mathrm{D}a) \bigstar f(a')) \cup (f(\mathrm{D}a) \bigstar f(\mathrm{D}a')).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
&\bar{f}(a.a') = f(a.a') \cup f(\mathrm{D}a.a' + a.\mathrm{D}a'),\\
&f(a.a') \succeq f(a) \bigstar f(a'),\\
&f(\mathrm{D}a.a' + a.\mathrm{D}a') \succeq f(\mathrm{D}a.a') \cup f(a.\mathrm{D}a'),\\
&f(\mathrm{D}a.a') \succeq f(\mathrm{D}a) \bigstar f(a'),\\
&f(a.\mathrm{D}a') \succeq f(a) \bigstar f(\mathrm{D}a').
\end{aligned}$$

D'où

$$\bar{f}(a.a') \succeq (f(a) \bigstar f(a')) \cup (f(a) \bigstar f(\mathrm{D}a'')) \cup (f(\mathrm{D}a) \bigstar f(a')) \succeq \bar{f}(a) \bigstar \bar{f}(a'),$$

ce qui achève la démonstration.

La filtration $\bar{f}$ sera appelée la *filtration dérivée* de f par rapport à la dérivation D.

Soient A_1 et A_2 deux anneaux munis de M-filtrations $f_1 : \mathrm{A}_1 \to \overline{\mathrm{M}}$ et $f_2 : \mathrm{A}_2 \to \overline{\mathrm{M}}$. Une application linéaire $\alpha : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_2$ est dite *permise* si pour tout $a_1 \in \mathrm{A}_1$, on a

$$f_1(a_1) \preceq f_2(a_2), \qquad \text{où} \quad a_2 = \alpha(a_1);$$

on a dans ce cas

$$\alpha(A_1^p) \subset A_2^p, \qquad \alpha(B_1^p) \subset B_2^p \quad (^{11}).$$

Il en résulte que l'on peut former le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B_1^p & \longrightarrow & A_1^p & \xrightarrow{\Psi_{1,p}} & \mathcal{A}_{1,p} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'_p} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_p} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & B_2^p & \longrightarrow & A_2^p & \xrightarrow{\Psi_{2,p}} & \mathcal{A}_{2,p} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dans ce diagramme, les flèches $0 \to B^p$, $B^p \to A^p$ représentent l'application identique d'un groupe dans un groupe plus grand et $\mathcal{A}_p \to 0$ indique une application sur un groupe réduit à son seul zéro (par abus de notation, le groupe réduit au seul élément 0 est représenté par 0); α'_p et α_p représentent les restrictions de α à B_1^p et A_1^p. Dans chaque ligne horizontale l'image d'un groupe par une flèche est exactement l'ensemble des éléments envoyés sur zéro par la flèche suivante, ce que l'on exprime en disant que ces lignes sont des *suites exactes*. Un tel diagramme peut être complété d'une manière unique par une application linéaire $\alpha_p^\star : \mathcal{A}_{1,p} \to \mathcal{A}_{2,p}$; explicitement, l'application $\alpha_p^\star$ se définit comme suit : si $a_1 \in A_1^p$ a pour image $\mathbf{a}_1 = \Psi_{1,p}(a_1) \in \mathcal{A}_{1,p}$, on pose $\alpha_p^\star(\mathbf{a}_1) = \Psi_{2,p}(\alpha(a_1))$; cette définition est légitime car si $\Psi_{1,p}(a'_1) = \Psi_{1,p}(a_1)$,

$$a_1 - a'_1 = b_1 \in B_1^p \qquad \text{et} \qquad \alpha(b_1) \in B_2^p, \qquad \text{d'où} \qquad \Psi_{2,p}(\alpha(a_1)) = \Psi_{2,p}(\alpha(a'_1)).$$

On dit que $\alpha_p^\star$ s'obtient par passage au quotient et l'on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B_1^p & \longrightarrow & A_1^p & \xrightarrow{\Psi_{1,p}} & \mathcal{A}_{1,p} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'_p} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_p} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_p^\star} & & \\ 0 & \longrightarrow & B_2^p & \longrightarrow & A_2^p & \xrightarrow{\Psi_{2,p}} & \mathcal{A}_{2,p} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Les $\alpha_p^\star$ se prolongent par linéarité en une application linéaire unique $\alpha^\star$ conservant les degrés de l'anneau gradué $\mathcal{A}_1$ associé à l'anneau filtré (A_1, f_1) dans l'anneau gradué $\mathcal{A}_2$ associé à (A_2, f_2). Cette application est appelée l'*application linéaire neutre* (¹²) *associée* à l'application linéaire permise α.

Deux cas particuliers importants se présentent : 1° l'application permise α est un homorphisme d'anneaux; on dit alors que α est un homomorphisme permis de (A_1, f_1) dans (A_2, f_2). 2° on a deux applications linéaires permises χ et D, la première étant un homomorphisme et la seconde une χ-dérivation, on dit alors que D est une *χ-dérivation permise* de (A_1, f_1) dans (A_2, f_2) (¹³). Dans le premier cas, $\alpha^\star$ est un homomorphisme de l'anneau $\mathcal{A}_1$ dans l'anneau $\mathcal{A}_2$. En

---

(¹¹) **Tous les groupes, anneaux, applications, etc. définis au paragraphe 2 dans le cas d'un seul anneau seront représentés par le même symbole affecté d'un indice supplémentaire 1 ou 2 suivant qu'ils se rapportent à (A_1, f_1) ou (A_2, f_2).**

(¹²) « Neutre », c'est-à-dire conservant les degrés.

(¹³) **Dire que « D est une χ-dérivation permise » implique donc que « χ est un homomorphisme permis ».**

effet, si $\mathbf{a}_1 \in A_{1,p}$ et $\mathbf{b}_1 \in \mathcal{A}_{1,q}$, on a

$$\begin{aligned}\alpha^\star(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1) &= \alpha^\star(\Psi_{1,p}(a_1).\Psi_{1,q}(b_1)) = \alpha^\star(\Psi_{1,p\star q}(a_1.b_1))\\ &= \Psi_{2,p\star q}(\alpha(a_1).\alpha(b_1)) = \Psi_{2,p}(\alpha(a_1)).\Psi_{2,q}(\alpha(b_1)) = \alpha^\star(\mathbf{a}_1).\alpha^\star(\mathbf{b}_1).\end{aligned}$$

Dans le deuxième cas, on aura d'abord un homomorphisme $\chi^\star : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ associé à χ et l'on v amontrer que l'application linéaire $D^\star$ associée à D est une $\chi^\star$-dérivation. Pour cela, soient $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{A}_{1,p}$, $\mathbf{b}_1 \in \mathcal{A}_{1,q}$; il y a lieu d'établir que

$$D^\star(\mathbf{a}_1.\mathbf{b}_1) = D^\star\mathbf{a}_1.\chi^\star\mathbf{b}_1 + \chi^\star\mathbf{a}_1.D^\star\mathbf{b}_1.$$

En effet, si $\mathbf{a}_1 = \Psi_{1,p}(a)$, $\mathbf{b}_1 = \Psi_{1,q}(b)$, on a

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_1.\mathbf{b}_1 = \Psi_{1,p\star q}(a.b), &&D^\star(\mathbf{a}_1.\mathbf{b}_1) = \Psi_{2,p\star q}(D(a.b)),\\ &\chi^\star\mathbf{a}_1 = \Psi_{2,p}(\chi a), &&\chi^\star\mathbf{b}_1 = \Psi_{2,q}(\chi b),\\ &D^\star\mathbf{a}_1 = \Psi_{2,p}(Da), &&D^\star\mathbf{b}_1 = \Psi_{2,q}(Db);\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}D^\star\mathbf{a}_1.\chi^\star\mathbf{b}_1 + \chi^\star\mathbf{a}_1.D^\star\mathbf{b}_1 &= \Psi_{2,p}(Da).\Psi_{2,q}(\chi b) + \Psi_{2,p}(\chi a).\Psi_{2,q}(Db)\\ &= \Psi_{2,p\star q}(Da.\chi b + \chi a.Db) = \Psi_{2,p\star q}(D(a.b)) = D^\star(\mathbf{a}_1.\mathbf{b}_1).\end{aligned}$$

Nous avons démontré le

THÉORÈME V. — *Soient* (A_1, f_1) *et* (A_2, f_2) *deux anneaux* M-*filtrés,* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *leurs anneaux gradués associés. A toute application linéaire permise* $\alpha : A_1 \to A_2$ *correspond une application linéaire neutre unique* $\alpha^\star : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *telle que l'on ait* $\Psi_{2,p}(\alpha(a_1)) = \alpha^\star(\Psi_{1,p}(a_1))$ *quel que soit* $a_1 \in A_1^p$. *De plus si* α *est un homomorphisme permis d'anneaux,* $\alpha^\star$ *est un homomorphisme neutre; si* $\chi : A_1 \to A_2$ *est un homomorphisme permis et* $D : A_1 \to A_2$ *une* χ*-dérivation permise,* $D^\star$ *est une* $\chi^\star$*-dérivation neutre de* $\mathcal{A}_1$ *dans* $\mathcal{A}_2$.

On appellera $D^\star$ la $\chi^\star$-dérivation neutre associée à la χ-dérivation D.
On a encore le

THÉORÈME VI. — *Soient* (A_1, f_1), (A_2, f_2) *deux anneaux* M-*filtrés et* α *une application linéaire permise* $\alpha : A_1 \to A_2$. *Désignons par* φ_1, φ_2 *les applications canoniques de* A_1, A_2 *dans les anneaux gradués associés respectifs. Dans ces conditions, on a toujours pour tout* $a_1 \in A_1$,

$$\alpha^\star(\varphi_1(a_1)) = \varphi_2(\alpha(a_1)) \qquad \text{ou} \qquad \alpha^\star(\varphi_1(a_1)) = 0$$

suivant que

$$f_1(a_1) = f_2(\alpha(a_1)) \qquad \text{ou} \qquad f_1(a_1) \prec f_2(\alpha(a_1)).$$

Cela résulte des diagrammes précédents et des définitions de φ_1 et φ_2.

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème VI. Toute relation additive S_1 dans A_1 donne lieu par α à une relation $S_2 = \alpha(S_1)$ dans A_2. Chacune de ces relations possède un spectre : Σ_1 dans $\mathcal{A}_1$ et Σ_2 dans $\mathcal{A}_2$, mais ces spectres ne sont pas liés entre eux par l'application $\alpha^\star$ comme le montre le théorème VI. Transformées par $\alpha^\star$, les relations de Σ_1 donnent lieu à des relations $\alpha^\star\Sigma_1$ dans $\mathcal{A}_2$. Si l'on s'est donné une χ-dérivation D, on pourra former $\chi^\star\Sigma_1$ et $D^\star\Sigma_1$.

Supposons les anneaux A_1 et A_2 confondus avec un anneau unique A, l'application identique de A en lui-même (que nous noterons i) étant une application permise de (A, f_1) dans (A, f_2). Nous dirons alors que la filtration f_1 est *plus fine* que la filtration f_2. Par exemple, la filtration $\bar{f}$ du théorème IV est plus fine que la filtration initiale f. Il existe dans ces conditions un anneau gradué $\bar{\mathfrak{A}}$ associé à $(A, \bar{f})$ et un anneau gradué $\mathfrak{A}$ associé à (A, f); les théorèmes V et VI donnent dans ces conditions :

COROLLAIRE I. — *Soient* (A, f) *un anneau* M-*filtré*, D *une dérivation de* A, $\bar{f}$ *la filtration dérivée*, $\bar{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A}$ *les anneaux gradués associés à* $(A, \bar{f})$, (A, f), i^* *l'homomorphisme neutre de* $\bar{A}$ *dans* A *associé à l'application identique de* A *en lui-même. Il existe une* i^**-dérivation* $D^* : \bar{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}$ *attachée naturellement à la dérivation* D.

COROLLAIRE II. — *Sous les hypothèses du corollaire* I, *désignons par* $\bar{\varphi}$ *et* φ *les applications canoniques de* A *dans* $\bar{\mathfrak{A}}$ *et* $\mathfrak{A}$ *et convenons en outre de poser* $[a] = \bar{\varphi}(a)$, $(a) = \varphi(a)$ *pour* $a \in A$. *On a dans ces conditions*

$$\chi^*[a] = (a) \quad \text{ou} \quad \chi^*[a] = 0$$

suivant que $f(a) \preceq f(Da)$ *ou* $f(Da) \prec f(a)$ *et*

$$D^*[a] = (Da) \quad \text{ou} \quad D^*[a] = 0$$

suivant que $f(Da) \preceq f(a)$ *ou* $f(a) \prec f(Da)$.

La dérivation D^* permet de dériver les « équations approchées » suivant la méthode suivante. (On se place dans les hypothèses des deux corollaires.) D'une relation S dans A on déduit un spectre $\bar{\Sigma}$ dans $\bar{\mathfrak{A}}$ et la dérivation D^* transforme les relations de $\bar{\Sigma}$ en des relations $D^*\bar{\Sigma}$ dans $\mathfrak{A}$; on peut appeler $D^*\bar{\Sigma}$ *spectre dérivé*. Bien entendu, S possède un spectre Σ dans $\mathfrak{A}$; en outre, en dérivant S on obtient dans A une nouvelle relation $S_1 = DS$ dans A qui donne lieu à son tour à des spectres $\bar{\Sigma}_1$ et Σ_1 dans $\bar{\mathfrak{A}}$ et $\mathfrak{A}$; on peut notamment encore considérer dans $\mathfrak{A}$ les spectres $\chi^*\bar{\Sigma}$, $\chi^*\bar{\Sigma}_1$ et $D^*\bar{\Sigma}_1$.

Remarque. — Notons i l'application identique de A en lui-même et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des filtrations $\tilde{f} : A \to \bar{M}$ telles que D soit une i-dérivation permise de $(A, \tilde{f})$ dans (A, f). *La filtration* $\bar{f}$ *du théorème* IV *appartient à* $\mathcal{F}$ *et est moins fine que toute autre filtration appartenant à* $\mathcal{F}$.

4. Généralisation. — Les filtrations considérées jusqu'ici prenaient leurs valeurs dans le complété $\bar{M}$ d'un monoïde totalement ordonné M, cas déjà un peu plus général que celui considéré en Topologie algébrique où M est habituellement le groupe additif des entiers ou des réels [14]. On notera que la plupart des propriétés

[14] Depuis la rédaction du présent article, des filtrations à valeurs dans un ensemble *totalement* ordonné quelconque ont été considérées par R. DEHEUVELS, *Tapologie d'une fonctionnelle*, *Annals of Math.*, t. 61, n° 1, janv. 1955). Cet auteur ne considère pas d'opération analogue à $\bigstar$ ni de filtration à valeurs dans un ensemble *partiellement* ordonné.

qui interviennent dans les démonstrations des théorèmes II, III, IV utilisent l'hypothèse que M est muni d'une relation d'ordre *total*. Nous allons néanmoins essayer de nous passer de cette restriction et considérer le cas où M est muni d'une structure d'ordre quelconque (suivant l'ancienne terminologie, d'une structure d'ordre *partiel*). Ceci nous conduit à utiliser certaines notions de la théorie des treillis [5] [encore appelés lattices (Birkhoff) ou ensembles réticulés (Bourbaki)].

Une relation d'ordre quelconque sur un ensemble E est une relation que nous noterons encore $\preceq$ définie pour les couples (a, b) d'éléments de E, qui vérifie les axiomes $Or2$ et $Or3$, l'axiome $Or1$ étant remplacé par le suivant :

$Or1'$: *pour certains couples d'éléments a et b de* E, *en particulier si $b = a$, on a* : $a \preceq b$.

Si pour le couple (a, b) on n'a ni $a \preceq b$, ni $b \preceq a$, les éléments a et b sont dits *non comparables*. Comme pour les ensembles totalement ordonnés, on utilise les notations $\succeq$, $\prec$, $\succ$.

Un ensemble ordonné est appelé *demi-treillis* s'il vérifie la propriété suivante :

$Tr1$: *pour tout couple (a, b) d'éléments de* E, *il existe un élément c tel que* : 1° $c \preceq a$ *et* $c \prec b$; 2° *pour tout élément d tel que $d \preceq a$ et $d \preceq b$, on a $d \preceq c$.*

En particulier, un ensemble totalement ordonné vérifie cette condition, c étant le plus petit des éléments a et b; dans le cas général, cet élément nécessairement unique sera encore noté $a \cup b$. Tout demi-treillis se trouve de la sorte muni d'une opération $\cup$ et l'on vérifie sans peine qu'elle vérifie toutes les propriétés 1°, 2°, 3°, 4° indiquées au paragraphe 3.

Un ensemble M muni à la fois d'une structure de monoïde (dont nous continuons à noter $\bigstar$ l'opération) et d'une structure de demi-treillis sera appelé *monoïde demi-réticulé* s'il satisfait à la condition MO ci-dessus (p. 338). Un monoïde demi-réticulé peut également être complété par adjonction d'un élément ∞ ; les structures d'ordre et de demi-treillis s'étendent à ce complété mais l'axiome MO n'est plus vérifié que sous la forme affaiblie MO′ ([15]), Dans un monoïde demi-réticulé, la propriété 5° du paragraphe 3 n'est plus vérifiée; on a cependant la propriété plus faible suivante :

$$(a \cup b) \bigstar (c \cup d) \preceq (a \bigstar c) \cup (a \bigstar d) \cup (b \bigstar c) \cup (b \bigstar d). \tag{16}$$

En effet, si $x = a \cup b$, $y = c \cup d$, on a

$$x \preceq a, \quad x \preceq b, \quad y \preceq c, \quad y \preceq d,$$

d'où

$$x \bigstar y \preceq a \bigstar c, \quad x \bigstar y \preceq a \bigstar d, \quad x \bigstar y \preceq b \bigstar c, \quad x \bigstar y \preceq b \bigstar d,$$

ce qui est équivalent à (16) ([16]).

([15]) La notion de monoïde demi-réticulé est voisine de celle de groupoïde ordonné définie par MM. L. Dubreil-Jacotin, Lesieur et Croisot [5]. Ces auteurs n'imposent pas la condition MO qui s'avérera essentielle ici, mais seulement la condition MO_2 (voir [5], p. 128).

([16]) On vérifie aisément que si a, b, c sont des éléments quelconques d'un demi-treillis, leur réunion $a \cup b \cup c$ est un élément d tel que $d \preceq a$, $d \preceq b$, $d \preceq c$ et tel que pour tout élément d' tel que $d' \preceq a$, $d' \preceq b$, $d' \preceq c$, on a $d' \preceq d$. Même propriété pour la réunion d'un nombre fini d'éléments du demi-treillis.

Ensuite, M étant un monoïde demi-réticulé, nous appellerons M-*filtration* sur un anneau A, une fonction f définie sur A, à valeurs dans le complété $\overline{\mathrm{M}}$ de M et satisfaisant aux conditions suivantes :

AF 1_a : pour deux éléments quelconques a, $a' \in \mathrm{A}$, on a toujours

$$f(a-a') \succeq f(a) \cup f(a');$$

AF 1_b : de plus si $f(a)$ et $f(a')$ sont non comparables,

$$f(a-a') \succ f(a) \cup f(a');$$

AF 2 : $f(a.a') \succeq f(a) \star f(a')$;
AF 3 : $f(0) = \infty$;

cette filtration sera dite en outre *séparée* si elle vérifie

AF 4 : $f(a) = \infty$ entraîne $a = 0$.

Comme pour les filtrations considérées au début, on a $f(-a) = f(a)$ quel que soit $a \in \mathrm{A}$. Comme au paragraphe 2, on définit des sous-ensembles A^p et B^p contenus dans A pour tout $p \in \mathrm{M}$ (par exemple A^p est l'ensemble des a de filtration $\succeq p$). Les A^p sont des groupes en vertu de AF 1_a et il en est de même des B^p en vertu de AF 1_a et AF 1_b. Pour $p \prec q$, on a encore

$$\mathrm{B}^q \subset \mathrm{A}^q \subset \mathrm{B}^p \subset \mathrm{A}^p,$$

de même les relations (8) et (9) sont également valables ([17]). Il n'y a dès lors rien à changer à la définition de l'anneau M-gradué $\mathfrak{A}$ associé à l'anneau M-filtré A, ni à celle de l'application canonique

$$\varphi: \quad \mathrm{A} \to \mathfrak{A}.$$

Le théorème I *et les lemmes* I *et* II *restent valables sans modification.* Quant au théorème II, bien qu'encore exact, sa démonstration appelle quelques remarques complémentaires.

LEMME IV. — *Soient* M *un monoïde demi-réticulé,* (A, f) *un anneau* M-*filtré,* a, b, c *trois éléments de* A *satisfaisant aux conditions suivantes* : 1° $a+b+c=0$; 2° $f(a) \preceq f(b)$. *Sous ces hypothèses, on a* $f(a) = f(b) \cup f(c)$.

Démonstration. — On a $f(c) = f(a+b) \succeq f(a) \cup f(b) = f(a)$, d'où $f(a) \preceq f(c)$ et $f(a) \preceq f(b) \cup f(c)$. D'autre part, $f(a) = f(b+c) \succeq f(b) \cup f(c)$, d'où la thèse.

LEMME V. — *Soient* M *un monoïde demi-réticulé,* (A, f) *un anneau* M-*filtré* a, b, c *trois éléments de* A *sastifaisant aux conditions suivantes :* 1° $a+b+c=0$; 2° $f(a) \prec f(b)$. *Sous ces hypothèses, on a* $f(a) = f(c)$.

([17]) Noter que la relation (9) fait essentiellement intervenir la condition MO.

Démonstration. — En vertu du lemme précédent, $f(a) \preceq f(c)$. Si $f(a) \prec f(c)$ et si $f(c)$ et $f(b)$ sont comparables, on a $f(b) \cup f(c) \succ f(a)$, ce qui est en contradiction avec ce même lemme. Si $f(a) \prec f(c)$ et si $f(b)$ et $f(c)$ sont non comparables, on a $f(a) = f(b+c) \succ f(b) \cup f(c)$, ce qui est également impossible. On ne peut donc avoir que $f(a) = f(c)$.

De là résulte le

THÉORÈME VII. — *Soit un* M *monoïde demi-réticulé. Si a, b, c sont trois éléments de somme nulle dans un anneau* M-*filtré, ou bien les filtrations de ces éléments sont toutes comparables entre elles, ou bien aucune filtration d'un de ces éléments n'est comparable à celle d'un autre. De plus si les filtrations sont comparables, il y en a au moins deux qui sont égales à la plus petite.*

Les lemmes I, II, IV et V entraînent la validité du théorème II lorsque M est un monoïde demi-réticulé.

THÉORÈME II *bis.* — *Soient* M *un monoïde demi-réticulé et* A *un anneau* M-*filtré. Le théorème* II *reste valable sous ces hypothèses.*

Afin de généraliser le théorème III, considérons une relation additive

$$a + b + \ldots + l = 0 \tag{17}$$

dans un anneau M-filtré, M désignant toujours un monoïde demi-réticulé. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les termes de filtration p intervenant dans (17); désignons par s la somme des termes de filtration $\prec p$, par r la somme des termes de filtration $\succ p$, par u la somme des termes de filtration non comparable à p et par α la somme $\alpha = a_1 + \ldots + a_k$. On a toujours $p \prec f(r)$, $p \preceq f(\alpha)$,

$$s + a_1 + \ldots + a_k + r + u = 0, \qquad s + \alpha + r + u = 0. \tag{18}$$

Nous distinguerons les quatre cas (a), (b), (c), (d) ci-dessous :

(a) Si $f(s) \prec p$, on a $f(s) \prec f(\alpha + r)$, d'où $f(u) = f(s)$; d'autre part, $f(u + r + s) \succeq p$. En posant — $u' = u + r + s$ ou 0 suivant que $f(u + r + s) = p$ ou $\succ p$, tous les termes de la relation

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + (u + r + s) = 0$$

sont dans A^p et l'application linéaire Ψ_p donne

$$(a_1) + (a_2) + \ldots + (a_k) = (u');$$

on a en outre

$$(s) + (u) = 0.$$

(b) Si $f(s) = p$, posons $s' = -s$. On aura $f(u) = p$ ou $f(u) \succ p$; suivant le cas posons $u' = -u$ ou $u' = 0$. Tous les termes de la relation (18) sont dans A^p et l'on en déduit par Ψ_p :

$$(a_1) + (a_2) + \ldots + (a_k) = (u') + (s').$$

(c) Si $f(s) \succ p$, posons $s' = 0$. On aura de nouveau $f(u) = p$ ou $f(u) \succ p$ et suivant le cas nous poserons $u' = -u$ ou $u' = 0$. Tous les termes de la relation (18) étant dans A^p, on en déduit par Ψ_p :

$$(a_1) + (a_2) + \ldots + (a_k) = (u') + (s').$$

(d) Enfin, si $f(s)$ n'est pas comparable à p, on a $f(u + r + s) = f(z) \succeq p$. On posera $s' = 0$, $-u' = u + r + s$ ou $u' = 0$ suivant que $f(u + r + s) = p$ ou $\succ p$, Tous les termes de la relation

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + (u + r + s) = 0$$

sont dans A^p et l'on en déduit

$$(a_1) + (a_2) + \ldots + (a_k) = (u') + (s').$$

En résumé, nous avons le

Théorème III *bis*. — M *étant un monoïde demi-réticulé et* A *un anneau* M-*filtré, considérons une relation additive*

$$S \equiv a + b + \ldots + l = 0$$

dans l'anneau A *et désignons par* $p_1, \ldots, p_n$ *les filtrations distinctes des termes de cette relation. Pour chaque* $i = 1, 2, \ldots, n$, *soient :*

s_i *la somme des termes de filtration* $\prec p_i$;
r_i *la somme des termes de filtration* $\succ p_i$;
u_i *la somme des termes de filtration non comparable à* p_i;
$a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{k_i i}$ *les termes de filtration* p_i.

Désignons enfin par s'_i *et* u'_i *les quantités définies par le tableau ci-dessous :*

si $f(s_i) \prec p_i$,	si $f(s_i) = p_i$,	si $f(s_i) \succ p_i$,	si $f(s_i)$ non comparable à p_i,
alors : $s'_i = 0$,	alors : $s'_i = -s_i$,	alors : $s'_i = 0$,	alors : $s'_i = 0$,
$-u'_i = u_i + r_i + s_i$	$u'_i = -u_i$	$u'_i = -u_i$	$-u'_i = u_i + r_i + s_i$
si $f(u_i + r_i + s_i) = p_i$,	si $f(u_i) = p_i$,	si $f(u_i) = p_i$,	si $f(u_i + r_i + s_i) = p_i$,
$-u'_i = 0$	$u'_i = 0$	$u'_i = 0$	$-u'_i = 0$
si $f(u_i + r_i + s_i) \succ p_i$.	si $f(u_i) \succ p_i$.	si $f(u_i) \succ p_i$.	si $f(u_i + r_i + s_i) \succ p_i$.

La relation S *entraîne alors les* n *relations*

$$\Sigma_i \equiv (a_{1i}) + (a_{2i}) + \ldots + (a_{k_i i}) = (s'_i) + (u'_i);$$

en outre, pour toute valeur de i *telle que* $f(s_i) \prec p_i$, *on a*

$$\sigma_i \equiv (s_i) + (u_i) = 0.$$

On dira encore que les relations Σ_i constituent les *équations approchées* déduites de S ou le *spectre* de S; on dira que les σ_i constituent le *spectre auxiliaire* de S.

En ce qui concerne la généralisation du paragraphe 3, les définitions s'étendent sans difficulté et les théorèmes V et VI restent valables comme on le vérifie aisément.

Théorèmes V *bis* et VI *bis*. — *Les conclusions des théorèmes* V *et* VI *restent valables lorsque* M *est un monoïde demi-réticulé.*

Il n'en est toutefois pas de même du théorème IV. Soit $f : A \to \overline{M}$ une filtration relative à un monoïde demi-réticulé M ; il n'est pas certain que la fonction $\bar{f}$ définie par

$$\bar{f}(a) = f(a) \cup f(\mathrm{D}a)$$

soit une filtration ; si les conditions AF 1_a, AF 2 et AF 3 sont encore vérifiées, il n'en est pas de même de AF 1_b si l'on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire sur M. En reprenant les notations de la remarque terminant le paragraphe 3, il est donc probable que l'ensemble $\mathcal{F}$ ne contient pas une filtration moins fine que toutes les autres.

5. Recherche de filtrations, exemples. — L'application des propriétés précédentes à la Physique est subordonnée à la détermination des filtrations dont peut être muni l'anneau des quantités intervenant dans un problème déterminé. Par exemple, en *Météorologie dynamique* se pose le problème de la recherche des filtrations de l'anneau des fonctions indéfiniment différentiables de l'espace numérique (ou euclidien) R^n. Il nous est malheureusement impossible de résoudre complètement ce problème, aussi devons-nous nous limiter à quelques indications.

A toute M-filtration d'un anneau A, nous avons associé une famille $\mathcal{M} = (A^p)_{p\in M}$ de sous-groupes que nous pouvons compléter par l'ensemble A^∞ des éléments de filtration infinie ; cet ensemble contenu dans l'intersection des A^p est d'ailleurs un idéal et se réduit à zéro si la filtration est séparée. Nous allons essayer de reconstruire la filtration à l'aide de cette famille complétée $\overline{\mathcal{M}} = (A^p)_{p\in\overline{M}}$ dont les éléments correspondent biunivoquement à ceux de $\overline{M}$. La famille $\mathcal{M}$ se munit d'une structure de monoïde demi-réticulé isomorphe à M en posant

$$A^p \preceq A^q \quad \text{si et seulement si} \quad p \preceq q \text{ (18)},$$
$$A^p \star A^q = A^{p*q} \text{ (19)}.$$

On notera que les B^p peuvent se définir à partir des A^p par

$$B^p = \bigcup_{\substack{\chi \succ p \\ \chi \in \overline{M}}} A^\chi .$$

Nous introduirons encore les notations : $\overline{A}^p (p \in M)$ pour désigner l'ensemble des

---

([18]) Ces notations sont abusives et risquent de prêter à confusion. Il se peut en effet que les groupes A^p et A^q soient identiques pour deux valeurs distinctes de p et q ($A^p = A^q$, $p \neq q$) ; si $p \prec q$, on aura cependant d'après cette convention $A^p \prec A^q$. Il ne faut donc pas perdre de vue que ce n'est pas l'*ensemble* des groupes A^p qui est en considération, mais la *famille* $(A^p)_{p\in M}$, c'est-à-dire une partie de l'ensemble des couples formés d'un sous-groupe additif de A et d'un élément de M (*Cf.* N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques*, Livre I, *Théorie des ensembles*, chap. II, p. 77, Paris, Hermann, 1954). Au lieu de $A^p \preceq A^q$ ou $A^p \prec A^q$, il serait préférable d'écrire $(A^p, p) \preceq (A^q, q)$ ou $(A^p, p) \prec (A^q, q)$ afin d'éviter tout risque de confusion.

([19]) De même, il faudrait écrire $(A^p, p) \star (A^q, q) = (A^{p\star q}, p \star q)$.

éléments de filtration exactement égale à p (cet ensemble pouvant éventuellement être vide) et $\overline{A}^\infty = A^\infty$.

On a les propriétés suivantes :

1° La relation d'ordre $\preceq$ dans la famille $(A^p)_{p\in M}$ est plus stricte que la relation d'ordre opposée à l'inclusion ensembliste :

$$A^p \preceq A^q \quad \text{entraîne} \quad A^p \supset A^q;$$

2° Les B^p sont des groupes;

3° Les $\overline{A}^\pi(\pi \in \overline{M})$ constituent une décomposition de A en classes disjointes, tout élément appartenant à une et une seule classe. De plus pour chaque $p \in M$,

$$A^p \cap \overline{A}^q \neq \emptyset \quad \text{entraîne} \quad \overline{A}^q \subset A^p \quad \text{et} \quad A^q \succeq A^p;$$

4° $$A^p . A^q \subset A^p \bigstar A^q.$$

Réciproquement, donnons-nous un ensemble quelconque M et une famille $\mathfrak{M} = (A^p)_{p\in M}$ de sous-groupes additifs de l'anneau A et un idéal $\mathcal{O} = A^\infty$ contenu dans l'intersection des A^p; supposons $\mathfrak{M}$ munie d'une structure de monoïde demi-réticulé $(\prec, \bigstar)$ telle qu'en définissant les B^p et $\overline{A}^p$ $(p \in M \cup \{\infty\} = \overline{M})$ par

(19) $$B^p = \bigcup_{A^q \succ A^p} A^q, \qquad B^\infty = \emptyset,$$

$$x \in \overline{A}^p \quad \text{si et seulement si} \quad x \in A^p \quad \text{et} \quad x \notin B^p,$$

les propriétés 1°, 2°, 3° et 4° soient vérifiées. La propriété 1° implique

$$A^\pi = \bigcup_{A^\chi \succeq A^\pi} \overline{A}^\chi, \qquad B^\pi \subset A^\pi$$

et par suite

$$A^\pi = B^\pi \cup \overline{A}^\pi, \qquad B^\pi \cap \overline{A}^\pi = \emptyset.$$

La propriété 3° entraîne la suivante : pour tout $\chi \in \overline{M}$, les $\overline{A}^\pi$ tels que $A^\pi \succeq A^\chi$ constituent une décomposition de A^χ en classes disjointes. Supposons qu'il existe un A^q contenu dans un A^p au sens ensembliste :

(20) $$A^q \subset A^p$$

et que A^p et A^q ne soient pas comparables pour la relation d'ordre $\preceq$; il en résulte nécessairement que $\overline{A}^q = \emptyset$; par suite (20) entraîne

$$A^p \preceq A^q \quad \text{ou} \quad \overline{A}^q = \emptyset.$$

A fortiori, si A^p et A^q sont identiques en tant que groupes et si $\overline{A}^p$ et $\overline{A}^q$ sont non vides, c'est que A^p et A^q sont identiques en tant qu'éléments de la famille $\mathfrak{M}$ (donc $p = q$). On voit que le 3° entraîne une réciproque faible du 1°, à savoir

$$A^q \subset A^p \quad \text{et} \quad \overline{A}^q \neq \emptyset \quad \text{entraînent} \quad A^q \succeq A^p.$$

La propriété 3° permet en outre de définir une application $f : A \to \overline{\mathfrak{M}}$ en posant pour $x \in A$:

$$f(x) = A^\infty \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{O} = \overline{A}^\infty, \qquad f(x) = A^p \quad \text{si} \quad x \in \overline{A}^p.$$

Théorème VII. — *Avec les notations précédentes, la fonction $f: A \to \overline{\mathfrak{M}}$ est une $\mathfrak{M}$-filtration et les groupes A^p et B^p qui lui correspondent sont ceux de la famille $\mathfrak{M}$ et ceux définis par* (19).

a. Équivalence de $f(x) \succeq A^p$ et $x \in A^p$. — Soit $f(x) = A^q$ ou $x \in \overline{A}^q$; en vertu du 1°, si $A^q \succeq A^p$, on a $A^q \subset A^p$ d'où $x \in A^p$ puisque $x \in f(x)$. Réciproquement, $x \in A^p$ et $f(x) = A^q$ impliquent $\overline{A}^q \cap A^p \neq \emptyset$, d'où par 3° $A^q \succeq A^p$.

b. Équivalence de $f(x) \succ A^p$ *et* $x \in B^p$. — Soit $A^q = f(x)$. Si $f(x) \succ A^p$, on a $x \in B^p$ en vertu de (19) et de $x \in f(x)$. Réciproquement, si $x \in B^p$ il existe un $A^{q'} \succ A^p$ tel que $x \in A^{q'}$; on a donc $A^{q'} \cap \overline{A}^q \neq \emptyset$, d'où $f(x) \succeq A^{q'}$ et $f(x) \succ A^p$.

c. Vérification de AF 1_a. — Soient deux éléments x, y dans A, $f(x) = A^p$, $f(y) = A^q$, $f(x) \cup f(y) = A^s$. On a $A^s \preceq A^p$, $A^s \preceq A^q$, d'où $A^s \supset A^p$ et $A^s \supset A^q$; par suite x et y appartiennent à A^s et comme c'est un groupe, $x - y \in A^s$; dès lors en vertu de (a), $f(x-y) \succeq A^s$.

d. Vérification de AF 1_b. — Supposons en outre A^p et A^q non comparables, ce qui entraîne $A^s \prec A^p$ et $A^s \prec A^q$, c'est-à-dire que x et y appartiennent à B^s; cet ensemble étant un groupe en vertu de 2°, on a $x - y \in B^s$, c'est-à-dire en vertu de (b), $f(x-y) \succ A^s$.

e. Vérification de AF 2. — C'est une conséquence de (a) et 4°.

f. Vérification de AF 3. — Immédiat.

La filtration est de plus séparée ou non suivant que $\mathcal{O}$ se réduit à zéro ou non.

La recherche de filtrations basée sur la recherche de familles $\mathfrak{M}$ est rendue compliquée du fait que deux des sous-groupes A^p et A^q peuvent être identiques même si $p \neq q$. On pourrait se limiter aux cas où cette circonstance ne se produit pas. Le problème se ramène alors au suivant : dans l'ensemble $\mathcal{G}(A)$ des sous-groupes additifs de A, trouver les parties $\mathfrak{M} \subset \mathcal{G}(A)$ susceptibles d'être munies d'une structure de monoïde demi-réticulé satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° et 4°.

Nous ne développerons pas davantage ces considérations qui devraient être approfondies et nous terminerons par quelques exemples d'anneaux filtrés (seul le quatrième est réellement nouveau).

1° *Filtration triviale.* — Tout anneau A admet évidemment la filtration suivante : M contient un seul élément α tel que $\alpha \preceq \alpha$, $\alpha \star \alpha = \alpha$: il s'agit bien d'un monoïde totalement ordonné. Pour tout $x \in A$, on pose $f(x) = \alpha$ si $x \neq 0$ et $f(x) = \infty$ si $x = 0$; ceci est une filtration que nous dirons *triviale* pour laquelle $A^\alpha = A$, $B^\alpha = \{0\}$, $\overline{A}^\alpha = A^*$ (ensemble des éléments non nuls). L'anneau gradué associé s'identifie à A par l'application canonique φ; cette filtration correspond à un calcul « approché » dans lequel la seule quantité « négligeable » est 0. Plus généralement, à tout idéal $\mathcal{O}$ dans A correspond la filtration f telle que $f(x) = \alpha$ si $x \notin \mathcal{O}$ et $f(x) = \infty$ si $x \in \mathcal{O}$; l'anneau gradué associé n'est alors autre que l'anneau quotient $A/\mathcal{O}$.

2° *Anneaux de polynomes.* — Soit $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynomes à n variables à coefficients dans un corps K. Pour filtrer cet anneau prenons pour M l'ensemble (noté habituellement **N**) des entiers naturels ($\geqq 0$) muni de sa structure d'ordre usuelle, l'opération ★ étant l'addition. Il s'agit d'un monoïde totalement ordonné et $\overline{M}$ s'obtient en lui ajoutant un élément ∞. Choisissons en outre p variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$ que nous déclarerons distinguées. Tout polynome P de $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ peut être considéré comme un polynome en les variables distinguées à coefficients dans l'anneau des polynomes en les autres variables; en outre P se décompose d'une manière unique en une somme de polynomes

$$P = P_0 + P_1 + \ldots + P_k,$$

où P_i est homogène de degré i en les variables distinguées. Pour filtrer $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ on définit $f(P)$ comme le plus grand entier p tel que $P_0 = P_1 = \ldots = P_{p-1} = 0$ si $P \neq 0$ et en posant $f(P) = \infty$ si $P = 0$. Le groupe A^p est celui des polynomes pour lesquels

$$P_0 = P_1 = \ldots = P_{p-1} = 0;$$

dans ce groupe $\overset{\circ}{A}{}^p$ est l'ensemble caractérisé par la condition supplémentaire $P_p \neq 0$. On a $B^p = A^{p+1}$. L'anneau gradué associé s'identifie à l'anneau A lui-même; par cette identification l'application canonique φ de A dans l'anneau gradué associé consiste à remplacer le polynome $P_p + P_{p+1} + \ldots + P_k$ de filtration p (c'est-à-dire tel que $P_p \neq 0$) par le polynome P_p.

3° *Anneaux de fonctions différentiables.* — Soit A l'anneau des fonctions indéfiniment différentiables sur l'espace numérique (euclidien) R^n. On prend comme dans l'exemple précédent $M = \mathbf{N}$ pour les mêmes structures d'ordre et de monoïde et si $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de A on pose $f(u) = p$ si p est le plus grand entier p tel que la fonction et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $p - 1$ soient nulles en un point x_0 fixe mais choisi arbitrairement (par exemple l'origine). Ceci est bien une filtration; elle n'est pas séparée et l'idéal des fonctions de filtration infinie est celui des fonctions qui sont nulles en x_0 ainsi que toutes leurs dérivées. Au lieu de choisir un seul point, on peut choisir un sous-ensemble E dans R^n et remplacer dans la définition de f « en un point x_0 » par « en tout point de E ». Dans le cas d'un seul point x_0, l'anneau gradué associé s'identifie à l'anneau des polynômes à n variables et à coefficients réels ; l'application φ consiste à remplacer la fonction u par le premier terme non nul de son développement taylorien.

Toutes les filtrations précédentes sont relatives à un monoïde totalement ordonné; les exemples où M n'est que partiellement ordonné sont plus difficiles à obtenir. Il n'est certes pas difficile de construire des monoïdes demi-réticulés mais lorsqu'on cherche une fonction dont on voudrait faire une M-filtration, on s'aperçoit que la condition AF 1_b est malheureusement fort draconienne. Il n'est d'autre part pas possible de s'en passer puisque c'est grâce à elle que les B^p sont des groupes. On peut espérer pouvoir construire des filtrations de ce type sur l'anneau des fonctions indéfiniment différentiables, mais il ne nous a pas été possible d'en construire une seule. Voici cependant un exemple relatif à un autre anneau.

4° *Filtration à monoïde non totalement ordonné.* — L'anneau A considéré est celui des symboles

$$a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2,$$

où a_0, a_1, a_2 sont réels et ε_1, ε_2 des symboles hypercomplexes admettant comme table de multiplication $(\varepsilon_1)^2 = (\varepsilon_2)^2 = \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = 0$. Autrement dit les opérations dans A sont définies par

$$(a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2) + (b_0 + \varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2) = (a_0 + b_0) + \varepsilon_1(a_1 + b_1) + \varepsilon_2(a_2 + b_2),$$
$$(a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2).(b_0 + \varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2) = a_0 b_0 + \varepsilon_1(a_0 b_1 + a_1 b_0) + \varepsilon_2(a_0 b_2 + a_2 b_0).$$

Soit P la droite projective numérique réelle ([20]) et désignons par M le monoïde commutatif $\mathbf{N}^{(P)}$, c'est-à-dire l'ensemble des *monômes* commutatifs de degré fini en les éléments de P. Tout élément de ce monoïde peut encore être considéré comme une fonction qui associe à tout point de P un entier naturel nul sauf au plus un nombre fini de fois; la somme des valeurs de cette fonction est le degré du monôme. Tout point $p \in P$ définit une fonction égale à un en p et à zéro ailleurs; le monôme de degré un correspondant sera identifié à p. Le monôme correspondant à la fonction identiquement nulle sera noté $\mathbf{1}$. Si les monômes α et β sont définis par des fonctions f_α et f_β, on notera $\alpha \bigstar \beta$ le monôme associé à la fonction $(f_\alpha + f_\beta)$; en particulier on aura pour tout monôme α : $\mathbf{1} \bigstar \alpha = \alpha$. On conviendra que $\alpha \preceq \beta$ s'il existe un monôme γ tel que $\alpha \bigstar \gamma = \beta$; donc pour tout α, $\mathbf{1} \preceq \alpha$. Ces conventions font de $M = \mathbf{N}^{(P)}$ un monoïde demi-réticulé. Deux monômes de degré un sont non comparables ou identiques.

Soit ensuite $f : A \to \overline{M}$ la fonction définie comme suit :

$$f(a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2) = \mathbf{1} \quad \text{si} \quad a_0 \neq 0$$
$$f(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2) = p(a_1, a_2) \quad \text{si} \quad a_1 \text{ ou } a_2 \neq 0, ({}^{21}),$$
$$f(0) = \infty.$$

Cette fonction est une filtration séparée du type défini au paragraphe 4; $A^{\mathbf{1}}$ est l'anneau A entier; pour tout point $p = p(a_1, a_2)$, A^p est le groupe des éléments de la forme

$$\varepsilon_1(a.a_1) + \varepsilon_2(a.a_2) \quad \text{où } a \text{ est réel};$$

on peut l'identifier à la droite numérique R par l'application biunivoque ω_p : $A^p \to R$, telle que

$$\omega_p(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2) = a_1 \quad \text{si} \quad p \neq p(0,1),$$
$$\omega_p(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2) = a_2 \quad \text{si} \quad p = p(0,1).$$

([20]) C'est-à-dire que P_1 est l'ensemble obtenu à partir de l'espace numérique R^2 à deux dimensions dont on a retiré le point (0,0) en passant au quotient par la relation d'équivalence

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \text{s'il existe un nombre réel } a \neq 0 \text{ tel que } x' = a.x \text{ et } y' = a.y.$$

x, y ou x' y' sont des *coordonnées homogènes* du point correspondant que nous noterons $p(x, y)\,[= p(x', y')]$.

([21]) On pose $0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2$, $0 + \varepsilon_1 0 + \varepsilon_2 .0 = 0$.

L'anneau gradué associé $\mathfrak{A}$ est la somme directe de la droite numérique R que nous noterons R_1 et de la famille des groupes $(A^p)_{p\in P}$, chacun d'eux s'identifiant par ω_p à une droite numérique notée R_p. L'application canonique $\varphi : A \rightarrow \mathfrak{A}$ consiste à remplacer $(a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2)$ par $a_0 \in R_1$ si cette quantité est non nulle par $a_1 \in R_p$ si $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$, par $a_2 \in R_p$ si $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$, enfin par o si $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Au point de vue multiplicatif, $\mathfrak{A}$ se comporte de la manière suivante; le produit de deux éléments de R_1 est leur produit dans R identifié à R_1; le produit d'un élément de R_1 par un élément de $R_p(p \in P_1)$ est leur produit dans R identifié à R_1 et R_p, ce produit étant considéré comme appartenant à R_p; enfin le produit de deux éléments appartenant à R_p et $R_{p'}$ (p et p' quelconques dans P) est toujours nul.

ANNEXE.

Dérivations et homomorphismes.

Soit χ un homomorphisme d'un anneau A_1 dans un anneau A_2. Toute χ-dérivation de A_1 dans A_2 admet encore l'interprétation suivante. Désignons par $L(A_1, A_2, \chi)$ l'ensemble des symboles

$$a_1 + \varepsilon a_2 \qquad (a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_1).$$

On fait de cet ensemble un anneau en convenant que

$$(a_1 + \varepsilon a_2) + (b_1 + \varepsilon b_2) = (a_1 + b_1) + \varepsilon(a_2 + b_2),$$
$$(a_1 + \varepsilon a_2).(b_1 + \varepsilon b_2) = a_1.b_1 + \varepsilon(\chi(a_1).b_2 + a_2.\chi(b_1)).$$

(Cette multiplication est associative parce que χ est un homomorphisme). Les éléments $0 + \varepsilon a_2$ que nous noterons encore εa_2 sont en correspondance biunivoque avec les éléments de A_2 et constituent un idéal I dans $L(A_1, A_2, \chi)$. Cet idéal est isomorphe additivement à A_2 mais non multiplicativement, puisque la multiplication de deux éléments de I donne toujours zéro ($I^2 = 0$). On appellera $L(A_1, A_2, \chi)$ l'*algèbre locale* associée au triple (A_1, A_2, χ).

Soit D une χ-dérivation de A_1 dans A_2 et posons pour tout $a \in A_1$,

$$h_D(a) = a + \varepsilon.Da.$$

En vertu de la définition d'une dérivation, l'application $h_D : A_1 \rightarrow L(A_1, A_2, \chi)$ est un homomorphisme d'anneaux. Réciproquement, soit h un homomorphisme de A_1 dans $L(A_1, A_2, \chi)$ que l'on peut toujours décomposer en deux applications linéaires $h_1 : A_1 \rightarrow A_1$ et $h_2 : A_1 \rightarrow A_2$ telles que

$$h(a) = h_1(a) + \varepsilon h_2(a).$$

En exprimant que h est un homomorphisme on obtient

$$h(a.b) = h(a).h(b),$$

Or, on a d'une part

$$h(a.b) = h_1(a.b) + h_2(a.b),$$

d'autre part

$$h(a).h(b) = (h_1(a) + \varepsilon h_2(a)).(h_1(b) + \varepsilon h_2(b)),$$
$$= h_1(a).h_1(b) + \varepsilon [\chi(h_1(a)).h_2(b) + h_2(a).\chi(h_1(b))].$$

Par suite,

$$h_1(a.b) = h_1(a).h_1(b),$$
$$h_2(a.b) = \chi[h_1(a)].h_2(b) + h_2(a).\chi[h_1(b)].$$

On voit que h_1 est un homomorphisme de A_1 en lui-même et que si c'est l'homomorphisme identique, h_2 est une χ-dérivation de A_1 dans A_2. Les homomorphismes $h : A_1 \rightarrow L(A_1, A_2, \chi)$ pour lesquels h_1 est l'identité seront appelés *homomorphismes locaux*. On a le

THÉORÈME VIII. — *Les χ-dérivations de A_1 dans A_2 correspondent biunivoquement aux homomorphismes locaux de A_1 dans l'anneau local* $L(A_1, A_2, \chi)$ (22).

Soit M un monoïde quelconque et supposons que les anneaux A_1 et A_2 soient munis de M-graduations définies par des sous-groupes $A_{1,p}$ et $A_{2,p}$ $(p \in M)$. Si l'homomorphisme χ et la χ-dérivation D sont neutres, on peut se borner à considérer dans $L(A_1, A_2, \chi)$ le sous-anneau $L_\Delta(A_1, A_2, \chi)$ engendré par les sous-groupes $A_{1,p} + \varepsilon.A_{2,p}$ (23); l'image de A_1 par h_D est en effet contenue

---

(22) La notion de dérivation admet la généralisation suivante. Soit A un anneau et E un groupe abélien noté additivement. Supposons que l'on ait défini deux lois de composition externes sur E admettant l'anneau A comme domaine d'opérateurs et supposons que pour l'une de ces lois, E soit un A-module à gauche et pour l'autre, un A-module à droite (BOURBAKI, *Algèbre*, chap. II). Nous dirons alors que E est un *A-bimodule*; le composé d'un élément $a \in A$ et d'un élément $x \in E$ pour la première (resp. la seconde) de ces lois sera noté $a \rfloor x$ (resp. $x \lfloor a$). Par exemple, si E est lui-même un anneau et si φ et ψ sont des homomorphismes de A dans E, on définit sur E une structure de A-bimodule en posant

$$a \rfloor x = \varphi(a).x, \quad x \lfloor a = x.\psi(a) \quad (a \in A,\ x \in E).$$

Ceci étant on peut appeler *dérivation de* A *dans le* A-*bimodule* E une application D de A dans E telle que $(a, b \in A)$

$$1^\circ\ D(a+b) = Da + Db,$$
$$2^\circ\ D(a.b) = Da \lfloor b + a \rfloor Db.$$

Lorsque E est un anneau et que la structure de A-bimodule sur E est définie par des homomorphismes φ et ψ, D est appelée une *dérivation gauche* de *type* (φ, ψ) de A dans E (C. Chevalley, [2], p. 14).

Lorsque E est un A-bimodule quelconque, l'ensemble $L(A, E) = A + \varepsilon.E$ se munit d'une structure d'anneau analogue à celle des anneaux locaux du texte et à une dérivation $D : A \rightarrow E$ correspond un homomorphisme « local » $h_D : A \rightarrow L(A, E)$ et réciproquement.

On a en outre la notion suivante de M-filtration sur un A-bimodule E lorsque A est un anneau muni d'un M-filtration f (M étant un monoïde demi-réticulé) : ce sera une fonction $\mathfrak{f} : E \rightarrow \overline{M}$ vérifiant AF 1_a, AF 1_b, AF 3; AF 2 étant remplacé par

$$\text{AF}2' : \quad \mathfrak{f}(a \rfloor x) \succeq f(a) \star \mathfrak{f}(x), \qquad \mathfrak{f}(x \lfloor a) \succeq \mathfrak{f}(x) \star f(a).$$

On peut étendre les résultats du texte à ces types de dérivation et de filtration.

(23) G_1 et G_2 étant des sous-groupes de A_1 et A_2, nous noterons $G_1 + \varepsilon.G_2$ le sous-groupe des éléments de la forme $g_1 + \varepsilon.g_2$ où $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$.

Si φ et ψ sont égaux à un même homomorphisme χ, on a la notion de χ-dérivation introduite ci-dessus.

dans $L_\Delta(A_1, A_2, \chi)$. Ce sous-anneau est M-gradué par les groupes $A_{1,p} + \varepsilon . A_{2,p}$; nous l'appellerons la *diagonale* de l'anneau local $L(A_1, A_2, \chi)$, d'où le

THÉORÈME VIII *bis*. — *Lorsque les anneaux* A_1 *et* A_2 *sont* M-*gradués et que l'homomorphisme* χ *est neutre, les* χ-*dérivations neutres de* A_1 *dans* A_2 *correspondent biunivoquement aux homomorphismes neutres locaux de* A_1 *dans la diagonale* $L_\Delta(A_1, A_2, \chi)$ *de l'anneau local associé au triple* (A_1, A_2, χ).

Supposons maintenant que M soit un monoïde demi-réticulé et que les anneaux A_1 et A_2 soient munis de filtrations $f_1 : A_1 \to \overline{M}$ et $f_2 : A_2 \to \overline{M}$ telles que χ soit un homomorphisme permis de A_1 dans A_2. Nous dirons qu'une M-filtration f sur l'anneau local $L(A_1, A_2, \chi)$ est *compatible* avec f_1 et f_2 lorsque les conditions suivantes se trouvent remplies :

1° l'application $a_1 \to a_1 + \varepsilon . 0$ de A_1 dans $L(A_1, A_2, \chi)$ conserve les filtrations : $f(a_1 + \varepsilon . 0) = f_1(a_1)$;

2° l'application linéaire $a_2 \to \varepsilon . a_2$ de A_2 dans $L(A_1, A_2, \chi)$ est une application permise : $f_2(a_2) \preceq f(\varepsilon a_2)$;

3° si $f_1(a_1) \preceq f_2(a_2)$, on a $f(a_1 + \varepsilon . a_2) = f_1(a_1)$.

Si f est une filtration de $L(A_1, A_2, \chi)$ compatible avec f_1 et f_2, on a nécessairement

$$f(a_1 + \varepsilon . a_2) \succeq f_1(a_1) \cup f_2(a_2).$$

De plus $f_1(a_1)$ et $f_2(a_2)$ sont non comparables, on a

$$f(a_1 + \varepsilon a_2) \succ f_1(a_1) \cup f_2(a_2).$$

En effet, soient $q = f_1(a_1)$, $r = f_2(a_2)$, $p = q \cup r (p \prec q, p \prec r)$, $\chi = f(a_1 + \varepsilon . 0)$, $\rho = f(0 + \varepsilon . a_2) \succ r$; si χ et ρ sont comparables, par exemple $\rho \preceq \chi$, $\chi \cup \rho = \rho \succ p$ d'où $f(a_1 + \varepsilon a_2) \succ p$; si χ et ρ sont non comparables, $f(a_1 + \varepsilon a_2) \succ \chi \cup \rho \succeq p$. De même, si $f_1(a_1) \succ p$, $f_2(a_2) \succ p$, $f(a_1 + \varepsilon a_2) \succ p$.

On remarquera d'autre part que les conditions 1° et 2° impliquent la suivante moins forte que la condition 3° : si $f_1(a_1) \preceq f_2(a_2)$, $f(a_1 + \varepsilon . a_2) \succeq f_1(a_1)$ et si $f_1(a_1) \prec f_2(a_2)$, $f(a_1 + \varepsilon . a_2) = f_1(a_1)$ (lemmes IV et V).

Lorsque M est totalement ordonné, la fonction $f : L(A_1, A_2 \chi) \to \overline{M}$ telle que

$$f(a_1 + \varepsilon a_2) = f_1(a_1) \cup f_2(a_2) \tag{21}$$

est une filtration compatible avec f_1 et f_2 et c'est même la plus fine des filtrations compatibles. Dans le cas général, cette fonction vérifie AF 1_a, AF 2, AF 3 mais pas AF 1_b; elle n'est donc pas une filtration.

Soient (A_1, f_1), (A_2, f_2) des anneaux M-filtrés, χ et D un homomorphisme permis et une χ-dérivation permise de (A_1, f_1) dans (A_2, f_2); on supposera qu'il existe sur l'anneau local $L(A_1, A_2, \chi)$ une filtration f compatible avec f_1 et f_2. On désignera par $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_f(A_1, A_2, \chi)$ les anneaux M-gradués associés à (A_1, f_1), (A_2, f_2), (L, f) et par $\varphi_1 : A_1 \to \mathfrak{A}_1$, $\varphi_2 : A_2 \to \mathfrak{A}_2$, $\varphi : L \to \mathcal{L}$ les applications canoniques correspondantes. Aux applications χ et D correspondent respectivement un homomorphisme neutre $\chi^\star : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ et une $\chi^\star$-dérivation neutre $D^\star : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$; à D on associe d'autre part l'homomorphisme local $h_D : A_1 \to L(A_1, A_2, \chi)$ et à $D^\star$ l'homomorphisme local neutre $h_{D^\star}$ de $\mathfrak{A}_1$ dans la diagonale $L_\Delta(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \chi^\star)$ de l'anneau local $L(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \chi^\star)$. Du caractère permis de la dérivation D et de la compatibilité de la filtration f avec f_1 et f_2 il résulte que h_D est un homomorphisme permis et qu'il lui correspond un homomorphisme neutre $h_D^\star : \mathfrak{A}_1 \to \mathcal{L}_f(A_1, A_2, \chi)$.

Théorème IX. — *Avec les notations ci-dessus introduites, on a les diagrammes commutatifs suivants :*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{A}_1 \arrow[dl, "h_{D^\star}"'] \arrow[dr, "h_D^\star"] & \\
L_\Delta(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \chi^\star) \arrow[rr, "i^\star"] & & \mathcal{L}_f(A_1, A_2, \chi)
\end{tikzcd}
\tag{22}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "h_D"] \arrow[d, "\varphi_1"] & L(A_1, A_2, \chi) \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathfrak{A}_1 \arrow[r, "h_D^\star"] & \mathcal{L}_f(A_1, A_2, \chi)
\end{tikzcd}
\tag{23}
$$

ou $i^\star$ désigne un homomorphisme naturel de $L_\Delta(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \chi^\star)$ dans $\mathcal{L}_f(A_1, A_2, \chi)$.

Démonstration. — Dans A_1, A_2, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ nous utiliserons les notations des paragraphes 2 et 3 ($\mathbf{A}_{1,p}$, $\mathbf{B}_{1,p}$, $\mathbf{A}_{2,p}$, etc.) Dans $L(A_1, A_2, \chi)$, nous noterons L^p le sous-groupe des éléments de filtration $\succeq p$ et K^p celui des éléments de filtration $\succ p$. La graduation de $\mathcal{L}_f(A_1, A_2, \chi)$ sera définie par des sous-groupes $\mathcal{L}_{fp}$ isomorphes aux L^p/K^p et l'on notera Ψ_p l'application canonique $\Psi_p : L^p \to \mathcal{L}_{fp}$.

En raison de la compatibilité de f avec f_1 et f_2, les sous-groupes $A_1^p + \varepsilon . A_2^p$ et $B_1^p + \varepsilon . B_2^p$ de $L(A_1, A_2, \chi)$ sont aussi des sous-groupes de L^p et K^p. D'autre part, $L_\Delta(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \chi^\star)$ somme directe des groupes $\mathfrak{A}_{1,p} + \varepsilon . \mathfrak{A}_{2,p} = \mathbf{A}_{1,p}/\mathbf{B}_{1,p} + \varepsilon . \mathbf{A}_{2,p}/\mathbf{B}_{2,p}$ s'identifie naturellement à la somme directe des quotients $(A_1^p + \varepsilon . A_2^p)/(B_1^p + \varepsilon . B_2^p)$; soit Ω_p l'application canonique qui résulte de cette identification :

$$\Omega_p : A_1^p + \varepsilon . A_2^p \to \mathfrak{A}_{1,p} + \varepsilon . \mathfrak{A}_{2,p}.$$

L'homomorphisme h_D envoie tout élément de A_1^p dans $A_1^p + \varepsilon . A_2^p \subset L^p$; de même, il envoie tout élément de B_1^p dans $B_1^p + \varepsilon . B_2^p \subset K^p$. Il en résulte que la restriction h_D^p de h_D à A_1^p se compose de l'application identique i_p de $A_1^p + \varepsilon . A_2^p$ dans L^p et d'une application $k_D^p : A_1^p \to A_1^p + \varepsilon . A_2^p$ [telle que pour $a \in A_1^p$, $k_D^p(a) = h_D^p(a)$ (23)]; on notera par un accent les restrictions de h_D^p, k_D^p et i_p respectivement à B_1^p, B_1^p et $B_1^p + \varepsilon . B_2^p$. La situation se résume alors pour chaque valeur de $p \in M$ dans les diagrammes suivants où les applications $h_D^{p\star}$, $h_{D^\star}^p$ et $i_p^\star$ sont obtenues par passage

(23) On distingue ici une application f d'un ensemble A dans un ensemble B d'une application $\bar{f}$ de A dans un ensemble C contenant B même si pour tout $a \in A$, $f(a) = \bar{f}(a)$. Sans cette distinction on risqueraitde confondre $k_D^{p\star}$ (qui est égal à $h_{D^\star}^p$) et $h_D^{p\star}$ (qui est en général différent).

au quotient (§ 3) et où les lignes horizontales sont exactes :

$$
(24)\qquad
\left\{
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_1^p \arrow[r] \arrow[d, "k'^p_D"] & A_1^p \arrow[r, "\Psi_{1,p}"] \arrow[d, "k^p_D"] & \mathcal{A}_{1,p} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h^p_{D*}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1^p + \varepsilon . B_2^p \arrow[r] \arrow[d, "i'_p"] & A_1^p + \varepsilon . A_2^p \arrow[r, "\Omega_p"] \arrow[d, "i_p"] & \mathcal{A}_{1,p} + \varepsilon . \mathcal{A}_{2,p} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "i^*_p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^p \arrow[r] & L^p \arrow[r, "\Psi_p"] & \mathcal{L}_p \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1^p \arrow[r] \arrow[u, "h'^p_D"] & A_1^p \arrow[r, "\Psi_{1,p}"] \arrow[u, "h^p_D"] & \mathcal{A}_{1,p} \arrow[r] \arrow[u, "h^{p*}_D"] & 0
\end{tikzcd}
\right.
$$

$$
(25)\qquad
\begin{tikzcd}
B_1^p \arrow[dr, "k'^p_D"] \arrow[dd, "h'^p_D"'] & \\
& B_1^p + \varepsilon . B_2^p \arrow[dl, "i'_p"] \\
K^p &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_1^p \arrow[dr, "k^p_D"] \arrow[dd, "h^p_D"'] & \\
& A_1^p + \varepsilon . A_2^p \arrow[dl, "i_p"] \\
L^p &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{1,p} \arrow[dr, "h^p_{D*}"] \arrow[dd, dashed, "h^{p*}_D"'] & \\
& \mathcal{A}_{1,p} + \varepsilon . \mathcal{A}_{2,p} \arrow[dl, "i^*_p"] \\
\mathcal{L}_p &
\end{tikzcd}
$$

Le diagramme (24) est commutatif ainsi que les deux premiers triangles de (25); il en résulte que le troisième l'est aussi, c'est-à-dire que l'on a

$$k^{p*}_D = h^*_p \circ h^p_{D*}.$$

Les applications linéaires h^{p*}_D, h^p_{D*}, i^*_p se prolongent par linéarité en des applications neutres h^*_D, h_{D*}, i^* qui donnent lieu au diagramme (22) et on sait que les deux premières sont des homomorphismes (théorèmes V, VIII et VIII *bis*); il est facile de vérifier qu'il en est de même de i^*. Enfin, en vertu de la compatibilité de la filtration f avec f_1 et f_2, l'homomorphisme h_D conserve les filtrations et pour tout élément $a_1 \in A_1$ de filtration $f_1(a_1) = p$, on a donc

$$\varphi_1(a_1) = \Psi_{1,p}(a_1) \qquad \text{et} \qquad \varphi(h_D(a_1)) = \Psi_p(h_D(a_1));$$

le diagramme (23) se déduit alors de cette propriété et du diagramme (24); ce qui achève la démonstration du théorème IX.

Dans le cas où M est totalement ordonné et où la filtration f est la fonction définie par (21), on a

$$L^p = A_1^p + \varepsilon . A_2^p, \qquad K^p = B_1^p + \varepsilon . B_2^p;$$

la troisième ligne du diagramme (24) est alors identique à la précédente et i_p est l'isomorphisme identique; le diagramme (22) se réduit alors à la propriété

$$h_{D*} = h^*_D.$$

Remarque. — Lorsque f et g sont deux filtrations sur $L(A_1, A_2, \chi)$ compatibles avec f_1 et f_2 et que f est plus fine que g, l'application identique de $L(A_1, A_2, \chi)$ induit un homomorphisme neutre $\theta_{gf} : \mathcal{L}_f(A_1, A_2, \chi) \to \mathcal{L}_g(A_1, A_2, \chi)$. On peut prendre la limite projective [24] $\mathcal{L}$ des $\mathcal{L}_f$ par rapport aux θ_{gf} et vérifier

---

[24] Ce qui conserve un sens même si les f ne forment pas un ensemble filtrant.

que $\mathcal{L}$ satisfait à des diagrammes analogues à (22) et (23). **Bien entendu** si parmi les filtrations compatibles il en existe une $\mathbf{f}$ plus fine que toutes les autres, $\mathcal{L}$ est isomorphes à $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématiques* : *a*. Livre I, *Théorie des ensembles*, Paris, Hermann, 1954; *b*. Livre I, *Fascicule de résultats*, *ibid*., 1940; *c*. Livre II, *Algèbre*, chap. I, 1951, chap. II, 1947.

[2] C. CHEVALLEY, *Théorie des groupes de Lie*, t. 2, Paris, Hermann, 1951.

[3] P. DEDECKER, *Sur les équations approchées de la dynamique atmosphérique* (*Arch. Met. Geoph. u. Bioklimat.*, série A, Bd. II, 1950, p. 223-238).

[4] P. DEDECKER, *L'influence de la force de Coriolis sur les mouvements atmosphériques* (*Bull. Acad. R. Belg. Cl. Sc.*, 5e série, t. 28, 1952, p. 637-641).

[5] P. DUBREIL, *Algèbre*, Paris, Gauthier-Villars, 1946.

[6] M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis*, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

[7] HESSELBERG-FRIEDMANN, *Die Grossenordnung der Meteorologischen Elemente usw* (*Veröff. Geophys. Inst.*, Leipzig, 2e série, H. 6, 1914, p. 147-173).

[8] H. et B. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge Univ. Press, 1950.

[9] J. L. KOSZUL, *Sur les opérateurs de dérivation dans un anneau* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 217-219).

[10] J. LERAY, *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue* (*J. Math. pures et appl.*, t. 29, 1950, p. 1-139).

[11] B. L. B. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, Springer, Berlin, 1931.

[12] A. WEIL, *Théorie des points proches sur les variétés différentiables* (*Coll. Intern. Géométrie différentielle*, Strasbourg, 1953; Paris, C. N. R. S., 1953).