BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL BERGER

Sur les groupes d'holonomie homogènes de variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 279-330

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__279_0>

Bull. Soc. Math. France,
83, 1955, p. 279 à 330.

SUR LES GROUPES D'HOLONOMIE HOMOGÈNE DES VARIÉTÉS A CONNEXION AFFINE ET DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES;

PAR M. MARCEL BERGER.

INTRODUCTION.

Les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine ont été définis pour la première fois par É. Cartan [10], qui les a utilisés pour déterminer les espaces riemanniens symétriques [11]. Récemment, les groupes d'holonomie on fait l'objet de plusieurs travaux : A. Borel et A. Lichnerowicz [4], W. Ambrose et I. M. Singer [1], A. Nijenhuis [15], et ont été utilisés dans l'étude des espaces homogènes par A. Lichnerowicz [2], [3].

L'objet essentiel de cette thèse est d'étudier le groupe d'holonomie homogène restreint σ, supposé *irréductible*, d'une variété V à connexion affine *sans torsion* ($T = 0$). On obtient d'abord le premier résultat suivant : σ n'est pas un groupe irréductible *quelconque*; on trouve une liste I de classes de groupes possibles, analogue à celle des espaces riemanniens symétriques d'É. Cartan, mais légèrement plus longue. Deuxième résultat : la majeure partie de la liste I est formée de groupes pour lesquels le tenseur de courbure R de V est à dérivée covariante nulle ($\nabla R = 0$). De tels espaces ont une structure géométrique particulière : K. Nomizu a montré en effet [14] qu'un espace pour lequel $\nabla R = 0$ et $\nabla T = 0$ (*a fortiori* si $T = 0$) est localement un espace homogène dont la connexion affine est invariante par parallélisme. On constate d'ailleurs que les espaces riemanniens symétriques forment une partie importante de la liste I.

Les groupes restants forment la liste II, extrêmement réduite; ce sont ceux qui peuvent être groupes d'holonomie homogène restreints d'une variété pour laquelle ∇R est $\neq 0$.

L'outil essentiel pour étudier σ est le tenseur de courbure R de V. En effet (en un sens convenable), R appartient par ses deux premiers indices à l'algèbre de Lie Σ de σ. D'autre part, on peut déterminer la structure de Σ à l'aide des résultats d'É. Cartan sur les groupes de Lie linéaires irréductibles [7], [8], [9]. Les relations classiques que satisfait R quand V est sans torsion entraînent alors :

— soit que $R = 0$: σ ne peut pas être groupe d'holonomie homogène restreint;
— soit que $\nabla R = 0$: σ appartient à la liste I.

Les groupes restants constituent la liste II.

Les calculs complets sont assez longs. Pour simplifier l'exposition, nous n'avons traité en détail que le cas de la liste II pour une variété V_m^h, de dimension m, munie d'une métrique de signature h. La liste II est alors réduite à sept classes de groupes.

Pour terminer, nous avons donné dans le dernier chapitre, deux séries différentes d'applications de ces résultats.

Le contenu des différents chapitres est le suivant :

Le chapitre I reprend en détail les résultats d'É. Cartan sur la structure des groupes de Lie linéaires irréductibles [7], [8], [9]. Lorsqu'ils sont complexes, ils s'obtiennent tous par des *produits* (en un sens convenable) de certains d'entre eux qui sont simples : ces derniers, appelés *fondamentaux*, sont en nombre fini pour chaque structure de groupe simple. Pour parvenir aux groupes réels à variables réelles, il faut passer par l'intermédiaire des groupes réels à variables complexes. Nous explicitons ce qui se passe pour les algèbres de Lie des groupes considérés, dans les opérations précédentes (toutes les algèbres de Lie sont seulement envisagées dans ce travail en tant qu'ensembles de matrices carrées). Enfin nous montrons que la nécessité, pour le groupe σ réel à variables réelles, de laisser invariante une forme quadratique, oblige les groupes entrant dans sa composition comme *produit* à satisfaire l'une des conditions suivantes : laisser invariante, soit une forme d'Hermite, soit une forme quadratique, soit une 2-forme extérieure.

Le chapitre II donne toutes les formes possibles des algèbres de Lie Σ : d'abord dans le cas où σ ne provient pas d'un groupe fondamental, ensuite quand σ provient d'un groupe fondamental, en examinant ceux de ces derniers qui satisfont aux conditions ci-dessus.

Le chapitre III rappelle la définition des groupes d'holonomie et les résultats connus qui seront nécessaires dans la suite [1], [4], [15]. Il donne ensuite la démonstration du théorème principal (th. 3 du chapitre III). A la fin du chapitre nous donnons aussi la liste analogue lorsque V est supposée être *seulement* une variété à connexion affine sans torsion.

Le chapitre IV indique deux séries d'applications. La première est relative aux formes extérieures à dérivée covariante nulle des variétés V_m^h : une telle forme $\tau (\nabla\tau = 0)$ est invariante par σ. On peut donc déterminer toutes ces formes, en particulier $\mathbf{SO}(m)$ et $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(n)$ ne laissent invariante aucune forme extérieure, d'où le résultat suivant :

S'il existe sur une variété riemannienne V *une forme* τ *non triviale telle que* $\nabla\tau = 0$, V *est : soit symétrique, soit réductible, soit pseudo-kählérienne.*

Nous appliquons ensuite le théorème principal à l'étude du groupe d'holonomie homogène Ψ ; σ est la composante connexe de l'élément neutre de σ [4], donc distingué dans Ψ. Une étude algébrique permet alors de calculer Ψ/σ. On en déduit, par exemple :

Si une variété admet un revêtement qui est pseudo-kählérien, à courbure de

Ricci non nulle, non localement réductible, non localement symétrique, alors cette variété admet un revêtement à deux feuillets qui est pseudo-kählérien.

L'essentiel des méthodes utilisées a été donné dans trois Notes (¹).

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici toute ma reconnaissance à M. A. Lichnerowicz sans lequel ce travail n'aurait pas vu le jour; pour l'intérêt qu'il lui a constamment porté, pour les nombreux entretiens qu'il a bien voulu m'accorder.

Je tiens aussi à remercier A. Borel pour les remarques qu'il m'a faites et dont j'ai tiré grand profit, ainsi que J. P. Serre pour tous les éclaircissements qu'il m'a donnés.

Mes remerciements vont encore à MM. H. Cartan et L. Schwartz pour l'honneur qu'ils m'ont fait en voulant bien constituer le jury de cette thèse.

CHAPITRE I.

Les groupes de Lie linéaires irréductibles.

Ce chapitre comprend essentiellement deux sortes d'éléments : d'une part les résultats d'Élie Cartan sur les groupes de Lie connexes linéaires irréductibles, qui sont contenus dans [7] et [9] et résumés ici dans les nos 3, 5 et 6. D'autre part, les algèbres de Lie, explicitées en matrices carrées, de quelques structures de ces groupes et quelques précisions relatives au cas où les groupes linéaires irréductibles à variables réelles laissent invariante une forme quadratique, de signature quelconque; ceci dans les nos 4, 7 et 8.

Les nos 1 et 2 sont consacrés à quelques rappels qui nous ont semblé utiles. Tous les groupes de Lie considérés dans ce travail seront, sauf mention expresse du contraire, supposés *connexes*.

1. Poids dans les groupes de Lie linéaires semi-simples. — Nous appellerons groupe **C**-*linéaire* (resp. **R**-*linéaire*) un sous-groupe de **GL**(m, C) [resp. **GL**(m, R)]. Nous omettrons quelquefois **C**-linéaire ou **R**-linéaire lorsqu'aucune confusion ne sera possible.

Soit $\mathfrak{s}$ un groupe de Lie *complexe* semi-simple **C**-linéaire et $\mathfrak{S}$ son algèbre de Lie, définie par une base

$$\mathfrak{X}_i = \sum_{\lambda,\mu} {}_i\mathfrak{S}^{\mu}_{\lambda} z_\lambda \frac{\partial}{\partial z_\mu}, \qquad [\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_j] = \sum_k c_{ijk} \mathfrak{X}_k \qquad (i = 1, \ldots, r;\ \lambda, \mu = 1, \ldots, m).$$

D'après É. Cartan ([5], p. 131-132), un tel groupe est équivalent à la donnée d'un groupe de Lie complexe $\mathfrak{t}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{T}$ engendrée par les $\mathfrak{X}_i$ et les $\mathfrak{Y}_\lambda$ et dont la structure est la suivante :

$$[\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_j] = \sum_k c_{ijk} \mathfrak{X}_k, \qquad [\mathfrak{X}_i \mathfrak{Y}_\lambda] = \sum_\mu {}_i\mathfrak{S}^{\mu}_{\lambda} \mathfrak{Y}_\mu, \qquad [\mathfrak{Y}_\lambda, \mathfrak{Y}_\mu] = 0.$$

(¹) M. Berger, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 472-473 et 1306-1308; t. 238, 1954, p. 985-98

Pour le voir, il suffit de remarquer que le calcul des c_{ijk} à partir des ${}_i\mathfrak{S}^{\mu}_{\lambda}$ est exactement l'identité de Jacobi relative aux termes $[\mathfrak{X}_i, [\mathfrak{X}_j, \mathfrak{Y}_\lambda]]$. De plus, $\mathfrak{s}$ n'est autre que la restriction du groupe adjoint de $\mathfrak{t}$ au sous-espace vectoriel engendré par les $\mathfrak{Y}_\lambda$, évidemment stable. Dans $\mathfrak{t}$, les $\mathfrak{Y}_\lambda$ engendrent un sous-groupe résoluble qui, de plus, est le plus grand sous-groupe résoluble de $\mathfrak{t}$; et les $\mathfrak{X}_i$ engendrent un sous-groupe semi-simple de $\mathfrak{t}$, qui est isomorphe à $\mathfrak{s}$. Soit $\{\mathfrak{X}_f\}$ $(f = 1, \ldots, l)$ la base d'une sous-algèbre $\mathfrak{C}$ de Cartan de $\mathfrak{T}$. Alors $\mathfrak{C}$ est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{S}$ ([5], p. 127). Les $\mathfrak{Y}_\lambda$ ont alors une racine par rapport à $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire une application linéaire $\mathfrak{C} \to \mathbf{C}^l$, qui sera appelée *poids* de $\mathfrak{Y}_\lambda$ (resp. z_λ) et notée (λ). $\mathfrak{X}_i$ ont aussi des poids qui seront notés de même (i). En particulier, $(i) = 0$ pour et seulement pour $i = 1, \ldots, l$. A (i) donné correspond un seul $j = i$ tel que $(i) = (j)$, les (i) étant de plus opposés deux à deux. L'ensemble des (i) sera noté $[\mathfrak{s}]$ et celui des (λ) : $\langle \mathfrak{s} \rangle$. $[\mathfrak{s}]$ ne dépend que de la structure de *groupe* de $\mathfrak{s}$ tandis que $\langle \mathfrak{s} \rangle$ dépend de la structure de *groupe* $\mathbf{C}$-*linéaire* de s. On notera qu'il peut exister plusieurs μ tels que $(\mu) = (\lambda)$, où $(\lambda) \in \langle \mathfrak{s} \rangle$.

Soit encore $(i) \in [\mathfrak{s}]$, $(i) \neq 0$. Alors ([5], p. 104 ou 133) les éléments de $\langle \mathfrak{s} \rangle$ peuvent tous être rangés en progressions arithmétiques

$$(\lambda_1),\ (\lambda_2) = (\lambda_1) + (i), \qquad \ldots, \qquad (\lambda_n) = (\lambda_{n-1}) + (i),$$
$$(\mu_1),\ (\mu_2) = (\mu_1) + (i), \qquad \ldots, \qquad (\mu_m) = (\mu_{m-1}) + (i)$$

telles que

$$(\lambda_1) - (i), \quad (\mu_1) - (i), \quad \ldots, \quad \notin \langle s \rangle \qquad \text{et} \qquad (\lambda) + (i), \quad (\mu_m) + (i), \quad \ldots, \quad \notin \langle s \rangle.$$

Proposition 1. (É. Cartan [5], p. 133). — *Les* ${}_i\mathfrak{S}^{\mu}_{\lambda}$ *jouissent des propriétés suivantes :* 1° *si* $(i) = 0$, ${}_i\mathfrak{S}^{\mu}_{\lambda} = (\lambda)\,\delta^{\mu}_{\lambda}$ (δ^{μ}_{λ}, *symbole de Kronecker*); 2° *si* $(i) \neq 0$, ${}_i\mathfrak{S}^{\mu}_{\lambda}$ *est* $\neq 0$ *si et seulement si* $(\mu) = (\lambda) + (i)$.

Proposition 2. — *Toute forme quadratique* (*resp. extérieure, d'Hermite*) $\sum_{\alpha,\beta} \mathfrak{g}_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta \left(\text{resp.} \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \mathfrak{g}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} z_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge z_{\alpha_p}, \sum_{\alpha,\beta} \mathfrak{g}_{\alpha\beta^*} z_\alpha \bar{z}_\beta \right)$ *invariante par* $\mathfrak{s}$ *est telle que* $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ (resp. $\mathfrak{g}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$, $\mathfrak{g}_{\alpha\beta^*}$) *n'est* $\neq 0$ *que si* $(\alpha) + (\beta) = 0$ [resp. $(\alpha_1) + (\alpha_2) + \ldots + (\alpha_p) = 0$, $(\alpha) + \overline{(\beta)} = 0$].

En effet, si l'on exprime l'invariance de la forme considérée à l'aide de $\mathfrak{S}$, on trouve les conditions suivantes :

$$\sum_\lambda \left(\mathfrak{g}_{\lambda\beta} \mathfrak{S}^{\lambda}_{\alpha} + \mathfrak{g}_{\alpha\lambda} \mathfrak{S}^{\lambda}_{\beta} \right) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{\lambda, h} \mathfrak{g}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{h-1} \lambda \alpha_{h+1} \ldots \alpha_p} \mathfrak{S}^{\lambda}_{\alpha_h} = 0, \tag{2}$$

$$\sum_\lambda \left(\mathfrak{g}_{\alpha\lambda^*} \bar{\mathfrak{S}}^{\lambda}_{\beta} + \mathfrak{g}_{\lambda\beta^*} \mathfrak{S}^{\lambda}_{\alpha} \right) = 0 \tag{3}$$

qui doivent être vérifiées pour une matrice quelconque $\mathfrak{S}^{\mu}_{\lambda} \in \mathfrak{S}$.

Considérons en particulier un élément de $\mathfrak{L}$; d'après la proposition 1, on trouve les conditions

$$\mathfrak{g}_{\alpha\beta}((\alpha)+(\beta))=0,$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}((\alpha_1)+\ldots+(\alpha_p))=0,$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha\beta^*}((\alpha)+(\bar{\beta}))=0,$$

ce qui entraîne la proposition.

Ainsi la forme quadratique invariante par $\mathfrak{s}$ se décompose en formes quadratiques partielles en les variables de poids opposés non nuls et en une forme quadratique en les variables de poids o. Par un changement de base convenable de $\mathbf{C}^m$ on pourra réduire cette forme quadratique à

$$(4)\qquad \sum_\sigma a_\sigma z_\sigma z_{\sigma'}+\sum_\rho a_\rho z_\rho^2 \qquad [a_\rho,\ a_\sigma\in\mathbf{C},\ (\sigma)+(\sigma')=0,\ (\sigma)\neq 0,\ (\rho)=0],$$

ceci *sans changer les poids des variables de* $\mathfrak{s}$. Cette condition est essentielle pour la suite (chap. III, n° 3). De même une forme d'Hermite s'écrira sous les mêmes conditions

$$(4a)\qquad \sum_\sigma a_\sigma z_\sigma \bar{z}_{\sigma'}+\sum_\rho a_\rho z_\rho \bar{z}_\rho \qquad [a_\rho,\ a_\sigma\in\mathbf{C},\ (\sigma)+(\bar{\sigma}')=0,\ \mathcal{R}((\sigma))\neq 0,\ \mathcal{R}((\rho))=0]$$

et une forme extérieure de degré 2

$$(4b)\qquad \sum_\lambda a_\lambda z_\lambda\wedge z_{\lambda'},\qquad (\lambda)+(\lambda')=0,\qquad a_\lambda\in\mathbf{C}.$$

Remarques. — 1° On déduit des conditions (1) et (2) que $\mathfrak{s}$ ne peut laisser simultanément invariantes une forme quadratique et une 2-forme extérieure. En effet, ces deux formes peuvent s'écrire

$$\sum_i z_i\wedge z_{i'}=0 \qquad \text{et} \qquad \sum_i \mathfrak{g}_i z_i z_{i'},$$

d'où

$$-\mathfrak{g}_i=\mathfrak{g}_i=0.$$

2° La théorie des poids reste valable pour les groupes C-linéaires s réels (groupes de Lie semi-simples à paramètres réels et à variables complexes) ([9], p. 163-164). Il suffit de remplacer dans la définition d'un poids : $\mathfrak{L}\to\mathbf{C}^l$ par $\mathrm{L}\to\mathbf{R}^l$. Les formes invariantes par s peuvent encore être réduites aux formes indiquées ci-dessus (4).

2. Groupes de Lie réels associés à un groupe de Lie complexe. — Soit $\mathfrak{S}$ une algèbre de Lie complexe d'ordre $\mathfrak{r}$. Il lui correspond une algèbre de Lie réelle d'ordre $2\mathfrak{r}$ qui sera notée $\hat{\mathfrak{S}}$ (resp. $\mathfrak{s}$, $\hat{\mathfrak{s}}$). Le groupe $\hat{\mathfrak{s}}$ est ce qui sera désigné au n° 5 par groupe réel de 1re *catégorie*.

Si, par contre, il existe $\mathfrak{r}$ éléments de $\mathfrak{S}$ qui engendrent sur R un espace vectoriel S, de dimension $\mathfrak{r}$ et qui soit une algèbre de Lie réelle pour le crochet induit, S sera dite une *structure réelle* de $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{s}$, s). Les structures réelles des groupes de Lie complexes *simples* ont été déterminées par É. Cartan dans [8].

Si le groupe complexe $\mathfrak{s}$ est **C**-linéaire, opérant dans $\mathbf{C}^n$, un groupe réel associé à $\mathfrak{s}$ sera un groupe **C**-*linéaire* opérant dans $\mathbf{C}^n$. Lorsque nous dirons *groupe linéaire réel* sans préciser, il s'agira toujours d'un groupe réel **R**-linéaire. D'ailleurs, pour éviter toute confusion, nous noterons systématiquement les groupes et leurs algèbres de Lie :

C-linéaires complexes	par des lettres gothiques $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$, ...; $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$, ...;
C-linéaires réels	par des lettres italiques g, s, ...; G, S, ...;
R-linéaires réels	par des lettres grecques γ, σ, ...; Γ, Σ, ...;

Remarque. — Si $\mathfrak{s}$ est un groupe **C**-linéaire complexe, $\mathfrak{S}$ est constitué par un certain ensemble de matrices carrées, $S = \hat{\mathfrak{S}}$ est alors composée du *même* ensemble de matrices.

3. **Groupes de Lie complexes linéaires irréductibles.** — Nous appellerons *irréductible* un groupe **C**-linéaire (resp. **R**-linéaire) ne laissant invariant aucun sous-espace vectoriel complexe (resp. réel) non trivial. Les groupes de Lie complexes **C**-linéaires irréductibles ont été complètement déterminés par É. Cartan dans [7]. Pour énoncer commodément ces résultats, nous donnerons d'abord quelques définitions.

A. *Définitions.* — Soient $\mathfrak{g}^i (i = 1, \ldots, n)$ n groupes linéaires quelconques opérant dans des espaces vectoriels $\mathbf{E}^i$. Nous appellerons *produit des* $\mathfrak{g}^i$ et noterons $\overset{i}{\times}\,\mathfrak{g}^i$ la représentation tensorielle du produit direct des $\mathfrak{g}^i$, c'est-à-dire le groupe opérant dans $\overset{i}{\bigotimes}\,\mathbf{E}^i$ est défini par linéarité à partir de la formule

$$\left(\overset{i}{\times}\,t^i\right).\left(\overset{i}{\bigotimes}\,z^i\right) = \overset{i}{\bigotimes}\,(t^i z^i), \qquad \text{où} \quad t^i \in \mathfrak{g}^i, \qquad z^i \in \mathbf{E}^i.$$

Soit maintenant $\mathfrak{g}$ une structure de groupe et $\mathfrak{g}^i (i = 1, \ldots, n)$ n groupes linéaires isomorphes à $\mathfrak{g}$ opérant dans des espaces vectoriels E^i; les isomorphismes correspondants seront notés $\theta^i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^i$. Soit $\left[\overset{i}{\times}\,\mathfrak{g}^i\right]$ la *diagonale* de $\overset{i}{\times}\,\mathfrak{g}^i$, c'est-à-dire le groupe isomorphe à $\mathfrak{g}$, opérant dans $\overset{i}{\bigotimes}\,\mathbf{E}^i$ et défini par linéarité à partir de la formule

$$h\left(\overset{i}{\bigotimes}\,z^i\right) = \overset{i}{\bigotimes}\,((\theta^i h) z^i), \qquad \text{où} \quad h \in \mathfrak{g}, \qquad z^i \in \mathbf{E}^i.$$

Un groupe produit de groupes irréductibles est toujours irréductible; par contre, la diagonale précédente n'est pas irréductible en général, même si les $\mathfrak{g}^i$ le sont. Nous appellerons *produit faible des* $\mathfrak{g}^i$ et noterons $\overset{i}{\underline{\times}}\,\mathfrak{g}^i$ la restriction, *irréductible*, de $\left[\overset{i}{\times}\,\mathfrak{g}^i\right]$ à un sous-espace stable pour $\left[\overset{i}{\times}\,\mathfrak{g}^i\right]$ de $\overset{i}{\bigotimes}\,\mathbf{E}^i$, telle qu'elle est définie dans [7] par un poids dominant (*cf.* [7], p. 11-13).

B. *Résultats.* — Compte tenu de ces définitions, les résultats de [7] peuvent s'énoncer :

THÉORÈME 1 (É. Cartan [7]). — *Si un groupe de Lie complexe* **C**-*linéaire est non simple et irréductible, il est le produit de groupes de Lie complexes simples* **C**-*linéaires dont un au plus est un tore à une dimension (complexe).*

Ce théorème entraîne en particulier que $\mathfrak{g}$ est semi-simple ou produit d'un groupe semi-simple par un tore à une dimension complexe, ce qui n'est pas démontré dans [7], mais dans [6].

THÉORÈME 2 (É. Cartan [7]). — *Il existe, pour chaque structure de groupe de Lie complexe simple* **C**-*linéaire* $\mathfrak{g}$, *de rang* $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}$ *groupes* **C**-*linéaires irréductibles complexes isomorphes à* $\mathfrak{g}$, *appelés fondamentaux, tels que tout groupe de Lie complexe,* **C**-*linéaire, irréductible et isomorphe à* $\mathfrak{g}$ *est un produit faible de groupes fondamentaux de* $\mathfrak{g}$ *convenablement choisis.*

Si $\mathfrak{g}$ simple irréductible n'est pas fondamental, il peut s'érire $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \underline{\times} \mathfrak{h}$ et nous dirons alors qu'il est *semi-fondamental.*

4. Algèbres de Lie des produits et des produits faibles. — A. $\mathfrak{s}$ *est un produit.* — Soit $\mathfrak{s} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$, où $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) opère dans $\mathbf{C}^n$ (resp. $\mathbf{C}^\nu$) et a pour variables les $z_1, \ldots, z_n$ (resp. $z_1, \ldots, z_\nu$). Les variables de $\mathbf{C}^n \otimes \mathbf{C}^\nu$ sont les $z_l \otimes z_\lambda$ et seront notées $z_{l\lambda}$. $\mathfrak{S}$ est engendrée par

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}') = (\mathfrak{X}, 0) + (0, \mathfrak{X}'), \qquad \text{où} \quad \mathfrak{X} \in \mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{X}' \in \mathfrak{G}';$$

on a donc

$$\mathfrak{S}^{m\mu}_{l\lambda} = \mathfrak{G}^m_l \, \delta^\mu_\lambda + \delta^m_l \, \mathfrak{G}'^\mu_\lambda. \tag{5}$$

B. $\mathfrak{s}$ *est un produit faible.* — Soit $\mathfrak{s} = \mathfrak{k} \underline{\times} \mathfrak{h}$. D'après [7] (p. 11-13), on a

$$\langle \mathfrak{s} \rangle = \langle \mathfrak{k} \rangle + \langle \mathfrak{h} \rangle.$$

Nous ne distinguerons pas ici et dans les questions analogues du chapitre III les variables et leurs poids, en particulier des variables différentes de même poids. Les variables de $\mathfrak{s}$ peuvent s'écrire sous la forme $z_{l\lambda}$, $(l) \in \langle \mathfrak{k} \rangle$, $(\lambda) \in \langle \mathfrak{h} \rangle$. Examinons les éléments non nuls de $\mathfrak{S}^{m\mu}_{l\lambda}$. Il y a d'abord (prop. 1) ceux provenant d'un élément de $\mathfrak{S}$ de poids nul : ils sont (prop. 1) de la forme $\mathfrak{S}^{l\lambda}_{l\lambda}$ et liés $(p - q)$ relations linéaires, où p est le nombre de variables de $\mathfrak{s}$, q le rang de $\mathfrak{s}$.

Soit maintenant $\mathfrak{S}^{m\mu}_{l\lambda} \neq 0$ et provenant d'un élément de $\mathfrak{S}$ de poids $(i) \in [\mathfrak{s}]$. $(i) \neq 0$. Il est d'abord évident que ce terme ne provient pas d'un autre élément de $\mathfrak{S}$, de poids $(i) \neq (j)$, car (i) est bien défini par $(i) = (m) + (\mu) - (l) - (\lambda)$. Puisque $[\mathfrak{s}] = [\mathfrak{k}] = [\mathfrak{h}]$, il existe $(a) \in \langle \mathfrak{k} \rangle$ (resp. $\alpha \in \langle \mathfrak{h} \rangle$) tel que $(a) + (i) \in \langle \mathfrak{k} \rangle$ (resp. $(\alpha) + (i) \in \langle \mathfrak{h} \rangle$), ce qui entraîne que, quel que soit $(\lambda) \in \langle \mathfrak{h} \rangle$ [resp. $(l) \in \langle \mathfrak{k} \rangle$], on a $(a) + (\lambda) + (i) \in \langle \mathfrak{s} \rangle$ [resp. $(l) + (\alpha) + (i) \in \langle \mathfrak{s} \rangle$]. Pour énoncer commodément ce résultat et d'autres analogues dans la suite, nous utiliserons les deux notations suivantes, relatives à l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ d'un groupe linéaire, explicitée en matrices carrées

$$\mathfrak{G}^b_a \triangleq \mathfrak{G}^d_c \quad (\text{resp. } \mathfrak{G}^b_a \triangleq \mathfrak{G}^d_c)$$

qui signifiera que, quelle que soit la matrice $\mathfrak{G}^m_l \in \mathfrak{G}$, on a

$$\mathfrak{G}^b_a = \lambda \mathfrak{G}^d_c \quad (\text{resp. } \mathfrak{G}^b_a = \varepsilon \mathfrak{G}^d_c, \ \varepsilon = \pm 1),$$

où λ est un nombre réel (resp. complexe) si $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie réelle (resp. complexe) *non nul*, dépendant éventuellement de a, b, c, d, mais non de l'élément de $\mathfrak{G}$ considéré.

Le résultat précédent s'écrit donc : quel que soit $\mathfrak{S}_{l\lambda}^{m\mu} \neq 0$, $(l)+(\lambda) \neq (m)+(\mu)$, il existe a et b, α et β, tels que, quels que soient $n \in \langle \mathfrak{k} \rangle$, $\nu \in \langle \mathfrak{h} \rangle$,

$$\mathfrak{S}_{l\lambda}^{m\mu} \hat{=} \mathfrak{S}_{a\nu}^{b\nu} \hat{=} \mathfrak{S}_{n\alpha}^{n\beta}.$$

[L'on a posé $(b) = (a) + (i)$ et $(\beta) = (\alpha) + (i)$.]

5. **Groupes de Lie réels C-linéaires irréductibles.** — Soit g un groupe de Lie réel, **C**-linéaire, d'ordre r. Il définit par complexification un groupe de Lie complexe **C**-linéaire $\mathfrak{g}$. Si g est irréductible, semi-simple, il en est de même de $\mathfrak{g}$, qui est donc (th. 1) un produit de groupes simples. Mais si l'ordre de $\mathfrak{g}$ est $< r$, g lui-même n'est pas en général un produit de groupes simples réels. Cependant la structure de g est précisée par le théorème suivant :

Théorème 3 (É. Cartan [9]). — *On peut répartir les sous-groupes invariants de $\mathfrak{g}$ en trois catégories (ceux de la 3e catégorie étant composés de paires de sous-groupes simples conjugués de même structure) dont les algèbres de Lie sont engendrées par des bases : $\{\mathfrak{X}_L\}$ pour la 1re catégorie, $\{\mathfrak{X}_l\}$ pour la 2e, $\{\mathfrak{X}_\lambda\}$ et $\{\mathfrak{X}'_\lambda\}$ pour la 3e, de façon que les sous-algèbres correspondantes de g soient engendrées, en tant qu'espaces vectoriels, par les éléments*

$$\sum_L \lambda_L \mathfrak{X}_L \qquad (\lambda_L \in \mathbf{C}),$$

$$\sum_l \lambda_l \mathfrak{X}_l \qquad (\lambda_l \in \mathbf{R}),$$

$$\sum_\Lambda (\lambda_\lambda \mathfrak{X}_\lambda + \bar{\lambda}_\lambda \mathfrak{X}'_\lambda) \qquad (\lambda_\lambda \in \mathbf{C}).$$

Ce théorème montre en particulier que :

— si les sous-groupes invariants de $\mathfrak{g}$ sont tous de 1re ou 2e catégorie, $\mathfrak{g}$ est un produit de groupes réels **C**-linéaires et son algèbre de Lie est donnée par la formule (5) (remarque du n° 2);

— si $\mathfrak{g}$ est le produit de deux groupes conjugués $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{h} = \varphi(\mathfrak{k})$, G est définie par la formule

$$G_{l\lambda}^{m\mu} = K_l^m \delta_\lambda^\mu + \delta_l^m (\overline{\varphi K})_\lambda^\mu \tag{6}$$

qui se déduit immédiatement de la formule (5);

— si $\mathfrak{g}$ est simple, il est pour lui-même, soit de 1re, soit de 2e catégorie; les seuls cas possibles sont donc les suivants :

1° *$\mathfrak{g}$ est fondamental de 1re catégorie.* — On a $g = \hat{\mathfrak{g}}$, où $\mathfrak{g}$ est fondamental. En tant qu'ensemble de matrices, G ne diffère pas de $\mathfrak{G}$ (remarque du n° 2). Les algèbres de Lie des groupes fondamentaux complexes seront déterminées au chapitre I. Quant à g, il sera dit **C**-*fondamental* (réel, **C**-linéaire).

2° $\mathfrak{g}$ *est semi-fondamental de* 1[re] *catégorie.* — On a $g = \hat{\mathfrak{g}}$. Puisque G ne diffère pas de $\mathfrak{G}$ (remarque du n° 2), G sera donc définie par des formules identiques à celles du n° 4.B) au changement près des lettres gothiques en lettres italiques.

3° $\mathfrak{g}$ *est fondamental de* 2[e] *catégorie.* — $\mathfrak{g}$ est alors une *structure réelle* de $\mathfrak{g}$ et sera dit **R**-*fondamental* (réel, **C**-linéaire). Les groupes **R**-fondamentaux sont explicités dans [9] (p. 168-173); nous indiquerons leurs algèbres de Lie dans le chapitre II.

4° $\mathfrak{g}$ *est semi-fondamental de* 2[e] *catégorie.* — Soit $\mathfrak{g} = \overset{i}{\underline{\times}}\, \mathfrak{g}^i$. On a alors $g = \overset{i}{\underline{\times}}\, g^i$, où les g^i sont **R**-fondamentaux et correspondent à une même structure réelle g de $\mathfrak{g}$. On a alors pour G des formules identiques à celles du n° 4.B, au changement près des lettres gothiques en lettres italiques. On voit donc qu'il n'y aura pas à distinguer entre les cas 2° et 4° : l'appellation g (réel) *semi-fondamental* sera suffisante.

6. **Groupes de Lie réels R-linéaires irréductibles.** — Les résultats des n[os] 3 et 5 permettent — compte tenu des groupes fondamentaux réels explicités dans [9] (p. 168-174) — de construire tous les groupes de Lie réels **C**-linéaires irréductibles. Il reste donc à étudier, selon [9], les groupes correspondants à variables réelles.

A. *Définitions.* — Soit g un groupe linéaire opérant dans $\mathbf{C}^n$. Il lui correspond un groupe projectif opérant dans $P_{n-1}(\mathbf{C})$. Une *antihomographie* de $\mathbf{C}^n$ est une transformation de $\mathbf{C}^n$ définie par les relations

$$Z_i = \sum a_{il} \bar{z}_l \qquad (i, l, m, \ldots = 1, \ldots, n).$$

Une *antiinvolution* de $\mathbf{C}^n$ est une antihomographie *involutive dans* $P_{n-1}(\mathbf{C})$, c'est-à-dire dont le carré est l'identité dans $P_{n-1}(\mathbf{C})$; ce qui se traduit dans $\mathbf{C}^n$ par les conditions

$$\sum_l a_{il} \bar{a}_{lj} = h\, \delta_i^j,$$

où h est réel non nul.

Par définition, *l'indice* de cette antiinvolution sera $\frac{h}{|h|}$. Ce signe ne dépend pas en effet de la base choisie dans $\mathbf{C}^n$.

Deux groupes réels g, g' seront dits *corrélatifs* si leurs équations caractéristiques ont leurs coefficients conjugués. Si, de plus, g et g' sont *semblables* en tant que groupes *linéaires*, on peut les définir sur le même espace $\mathbf{C}^n$ par des matrices $g_i'^j = \bar{g}_i^j$; ou encore $G_i'^j = \overline{G_i^j}$ pour G et G'. Un groupe g sera dit *autocorrélatif* si son équation caractéristique est à coefficients réels. Selon [9] (p. 166), tout groupe de Lie réel, **C**-linéaire, irréductible et autocorrélatif laisse invariante une antiinvolution : *l'indice de* g sera celui de cette antiinvolution.

B. *Résultats* (É. Cartan [9]). — Soit γ un groupe de Lie réel opérant dans $\mathbf{R}^m$, *irréductible;* il lui correspond de façon naturelle un groupe réel $\hat{g}$, opérant dans $\mathbf{C}^m$. Si $\hat{g}$ est *irréductible*, γ sera dit de 1re *classe*, ainsi que $\hat{g}$, qui sera alors noté g. Si $\hat{g}$ est *réductible*, c'est que $m = 2n$ et que $\hat{g}$ définit un groupe *irréductible* g, opérant dans $\mathbf{C}^n$; g et γ seront dits de 2e *classe.*

Réciproquement, à chaque groupe réel g opérant dans $\mathbf{C}^n$, *irréductible*, on associe canoniquement un groupe réel $\mathbf{R}$-linéaire, *irréductible* opérant : dans $\mathbf{R}^n$ si g est de 1re classe, dans $\mathbf{R}^{2n}$ si g est de 2e classe; et l'on obtient ainsi tous les groupes de Lie réels $\mathbf{R}$-linéaires irréductibles. Dans les deux cas, g et γ seront dits *associés.*

Les groupes g de 1re classe sont caractérisés par :

Proposition 3. — *g est de* 1re *classe si et seulement s'il laisse invariante une antiinvolution d'indice* $+1$. *Alors γ est la restriction de g aux éléments doubles de cette antiinvolution.*

Il reste maintenant à savoir dans quels cas un groupe g irréductible et *construit comme indiqué au* n° 5 est de 1re classe, ce qui est indiqué dans les deux théorèmes plus précis suivants :

Théorème 4. — *Pour qu'un groupe de Lie réel, $\mathbf{C}$-linéaire irréductible, non simple g laisse invariante une antiinvolution d'indice ε, il faut et il suffit que :*

1° *g ne contienne aucun sous-groupe invariant, soit de la* 1re *catégorie, soit de la* 2e *catégorie non autocorrélatif;*

2° *le produit des indices des sous-groupes invariants autocorrélatifs soit ε;*

3° *les sous-groupes invariants conjugués de* 3e *catégorie soient semblables;*

4° *le sous-groupe éventuel à un paramètre réel soit* $\mathbf{R}$.

Théorème 5. — *Pour qu'un groupe simple réel, $\mathbf{C}$-linéaire irréductible g laisse invariante une antiinvolution d'indice ε, il faut et il suffit que :*

1° *g ne soit pas de* 1re *catégorie;*

2° *les groupes corrélatifs interviennent le même nombre de fois et soient semblables;*

3° *le produit des indices des groupes autocorrélatifs soit ε.*

7. Algèbres de Lie des groupes réels $\mathbf{R}$-linéaires irréductibles. — Il est maintenant nécessaire de savoir passer de l'algèbre de Lie G d'un groupe g à variables complexes à celle Γ du groupe γ à variables réelles *associé* à g.

A. *g est de* 2e *classe.* — Si $z_i (i = 1, \ldots, n)$ sont les variables complexes de g, on peut prendre pour $2n$ variables réelles de γ : $x_i = \mathcal{R}(z_i)$ et $x_{i^\star} = \mathcal{I}(z_i)$. On définira donc Γ par les relations

$$\Gamma_i^j = \Gamma_{i^\star}^{j^\star} = \mathcal{R}(G_i^j), \qquad \Gamma_i^{j^\star} = -\Gamma_{i^\star}^j = \mathcal{I}(G_i^j). \tag{7}$$

Nous emploierons systématiquement les notations avec des $\star$ lorsque γ sera de 2e classe.

B. *g est de* 1re *classe.* — Il est d'abord nécessaire de préciser l'antiinvolution que g laisse invariante :

PROPOSITION 4. — *Si un groupe de Lie* **C***-linéaire irréductible (réel) laisse invariante une antiinvolution d'indice* ε, *celle-ci s'écrit :*

1° si $\varepsilon = -1$: $Z_i = \bar{z}_{i'}$, $Z_{i'} = -\bar{z}_i$, où

$$i = 1, \ \ldots, \ n; \qquad i' = i + n; \qquad (i) = (\bar{i}');$$

2° si $\varepsilon = +1$: $Z_\lambda = \bar{z}_\lambda$, $Z_i = \varepsilon_i \bar{z}_{i'}$, $Z_{i'} = \varepsilon_i \bar{z}_i$, où

$$i = 1, \ \ldots, \ n; \qquad i' = i + n;$$
$$\lambda = 2n+1, \ \ldots, \ m; \qquad (i) = (\bar{i}'); \qquad \mathcal{J}((\lambda)) = 0.$$

En effet : si g est un groupe **R**-fondamental, les antiinvolutions données dans [9] (p. 168-173) sont de la forme indiquée. Si g est semi-fondamental, la diagonale $\left[\overset{i}{\times} g^i\right]$ admet l'antiinvolution produit ([9], p. 166-167) d'antiinvolutions du type précédent, qui est bien de ce type. Par restriction à $\overset{i}{\underset{\circ}{\times}} g^i$, les variables de ce groupe étant des combinaisons linéaires de celles de $\left[\overset{i}{\times} g^i\right]$, l'antiinvolution garde la même forme. *A fortiori* si g est un produit de groupes simples réels. De même si g est le produit de deux groupes conjugués ou corrélatifs ([9], p. 165). L'assertion relative aux poids est énoncée dans [9] (p. 164) et peut se démontrer d'une façon analogue à la proposition 2, à l'aide des relations (9) ci-dessous appliquées aux éléments de poids o de G.

Nous pouvons maintenant calculer Γ à l'aide de G. Avec les notations de la proposition précédente, $\varepsilon = +1$, nous prendrons comme variables réelles engendrant l'espace des éléments doubles de l'antiinvolution

$$x_i = \mathcal{R}(z_i + \varepsilon_i z_{i'}), \qquad x_{i'} = \mathcal{J}(z_i - \varepsilon_i z_{i'}), \qquad x_\lambda = \mathcal{R}(z_\lambda).$$

Nous emploierons toujours les notations avec des $'$ lorsque g sera de 1re classe.

PROPOSITION 5. — *Avec les notations ci-dessus,* Γ *est donnée en fonction de* G *par les formules*

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \Gamma_i^j = 2\left(H_i^j + \varepsilon_j H_i^{j'}\right), & \Gamma_\lambda^j = 2H_\lambda^j; & \Gamma_\lambda^\mu = H_\lambda^\mu; \\ \Gamma_{i'}^{j'} = 2\left(H_i^j - \varepsilon_j H_i^{j'}\right); & \Gamma_\lambda^{j'} = 2K_\lambda^j; & \\ \Gamma_i^{j'} = 2\left(K_i^j - \varepsilon_j K_i^{j'}\right); & \Gamma_i^\lambda = 2H_i^\lambda; & \\ \Gamma_{i'}^j = 2\left(-K_i^j - \varepsilon_j K_i^{j'}\right), & \Gamma_{i'}^\lambda = -2K_i^\lambda; & \end{array}\right.$$

l'on a posé

$$H_\mathrm{I}^\mathrm{J} = \mathcal{R}(G_\mathrm{I}^\mathrm{J}), \qquad K_\mathrm{I}^\mathrm{J} = \mathcal{J}(G_\mathrm{I}^\mathrm{J}).$$

Pour vérifier ces formules, il suffit de remplacer les z_i, $z_{i'}$ par leurs valeurs en fonction des x_i, $x_{i'}$ dans la définition des transformations infinitésimales de G. On trouve ainsi directement les relations

$$\begin{array}{lll} \Gamma_i^j = H_i^j + \varepsilon_i H_{i'}^j + \varepsilon_j H_i^{j'} + \varepsilon_i \varepsilon_j H_{i'}^{j'}, & \Gamma_\lambda^j = H_\lambda^j + \varepsilon_j H_\lambda^{j'}, & \Gamma_\lambda^\mu = H_\lambda^\mu; \\ \Gamma_{i'}^{j'} = H_i^j - \varepsilon_i H_{i'}^j - \varepsilon_j H_i^{j'} + \varepsilon_i \varepsilon_j H_{i'}^{j'}, & \Gamma_\lambda^{j'} = K_\lambda^j - \varepsilon_j K_\lambda^{j'}; & \\ \Gamma_i^{j'} = K_i^j + \varepsilon_i K_{i'}^j - \varepsilon_j K_i^{j'} - \varepsilon_i \varepsilon_j K_{i'}^{j'}, & \Gamma_i^\mu = H_i^\mu + \varepsilon_i H_{i'}^\mu; & \\ \Gamma_{i'}^j = -K_i^j + \varepsilon_i K_{i'}^j - \varepsilon_j K_i^{j'} + \varepsilon_i \varepsilon_j K_{i'}^{j'}, & \Gamma_{i'}^\mu = -K_i^\mu + \varepsilon_i K_{i'}^\mu. & \end{array}$$

De plus, en exprimant que G laisse invariante l'antiinvolution donnée, on obtient les relations

(9) $$G_i^j = \varepsilon_i\varepsilon_j G_{i'}^{j'}, \qquad G_i^{j'} = \varepsilon_i\varepsilon_j G_{i'}^{j}, \qquad G_\lambda^j = \varepsilon_i G_\lambda^{j'}, \qquad G_i^\mu = \varepsilon_i G_{i'}^\mu,$$

d'où les formules annoncées.

8. **Précisions dans le cas des groupes de rotations.** — Nous appellerons *groupe de rotations* un sous-groupe *de Lie*, *connexe*, *irréductible*, de $\mathbf{GL}(n, \mathrm{R})$ qui *laisse invariante une forme quadratique* (nécessairement de rang n). Cette forme pourra être de *signature quelconque* (la signature d'une forme quadratique étant le nombre de carrés < 0 qui apparaissent dans sa décomposition en une somme algébrique de carrés). Le plus grand sous-groupe connexe de $\mathbf{GL}(n, \mathrm{R})$ qui laisse invariante une forme quadratique de signature h sera noté $\mathbf{SO}^h(n)$; $\mathbf{SO}^0(n)$ n'est autre que le groupe classique $\mathbf{SO}(n)$.

Si $\sum_{i,j}\gamma_{ij}x_ix_j$ est une forme quadratique invariante par γ, il revient au même de dire que Γ vérifie les relations

(10) $$\sum_l(\gamma_{lb}\Gamma_a^l + \gamma_{al}\Gamma_b^l) = 0.$$

Proposition 6. — *Si γ est un groupe de rotations, il ne contient jamais le groupe* $\mathbf{R}$.

En effet, les transformations de $\mathbf{R}$ s'écrivent dans g (donc dans γ), qu'il soit de 1^re^ ou 2^e^ classe : $G_i^j = \lambda\delta_i^j$ $\lambda \in \mathbf{R}$. Si l'on applique à une telle transformation la formule (1), on trouve $\gamma_{ij} = 0$ quels que soient i et j.

Proposition 7. — *Soit γ un groupe de rotations et g le groupe réel $\mathbf{C}$-linéaire associé. Si g est de 1^re^ classe, il laisse invariantes une forme quadratique et une forme d'Hermite. Si g est de 2^e^ classe, il laisse invariante : soit une forme quadratique s'il contient un groupe de 1^re^ catégorie, soit, dans le cas contraire, une forme quadratique ou une forme d'Hermite ou les deux.*

1° Soit d'abord γ de 2^e^ classe. En remplaçant x_i (resp. x_{i^*}) par $\frac{1}{2}(z_i + \bar{z}_i)$ $\left[\text{resp. } \frac{1}{2}(z_i - \bar{z}_i)\right]$, on voit que g laisse invariante la forme quadratique

$$\sum_{i,j} z_iz_j(\gamma_{ij} - \gamma_{i^*j^*} + i\gamma_{i^*j} + i\gamma_{ij^*})$$

et la forme d'Hermite

$$\sum_{i,j} z_i\bar{z}_j(\gamma_{ij} + \gamma_{i^*j^*} + i\gamma_{i^*j} - i\gamma_{ij^*}),$$

l'une de ces formes pouvant être identiquement nulle sans que l'autre le soit. Si g contient un sous-groupe invariant de 1^re^ catégorie, il ne laisse invariante aucune forme d'Hermite. Sinon l'on aurait pour G_l^m et $\sqrt{-1}\,G_l^m$ appliquées aux formules (2) et (7)

$$\sum_l(g_{al}G_b^l + g_{bl}G_a^l) = 0, \qquad \sum_l(g_{al}G_b^l - g_{bl}G_a^l) = 0,$$

d'où $\sum_l g_{al} G^l_b = 0$ qui entraîne $\det|g_{ij}| = 0$, ce qui est absurde, la forme d'Hermite considérée étant de rang maximum puisque g est irréductible.

2° Soit maintenant γ de 1^re^ classe. En remplaçant x_i (resp. $x_{i'}$, x_λ) par $\frac{1}{2}(z_i + \varepsilon_i z_{i'} + \bar{z}_i + \varepsilon_i \bar{z}_{i'})$ $\left[\text{resp. } \frac{i}{2}(z_i - \varepsilon_i z_{i'} - \bar{z}_i + \varepsilon_i \bar{z}_{i'}), \frac{1}{2}(z_\lambda + \bar{z}_\lambda)\right]$ on voit que g laisse invariantes la forme quadratique

$$\sum_{l,j} [z_l z_j(\gamma_{lj} - \gamma_{l'j'} + i\gamma_{l'j} + i\gamma_{lj'}) + \varepsilon_l \varepsilon_j z_{l'} z_{j'}$$
$$\times (\gamma_{lj} - \gamma_{l'j'} - i\gamma_{l'j} - i\gamma_{lj'}) + \ldots + \varepsilon_j z_l z_{j'}(\gamma_{lj} + \gamma_{l'j'} + i\gamma_{l'j} - i\gamma_{lj'})] + \ldots + \sum_{\lambda,\mu} z_\lambda z_\mu \gamma_{\lambda\mu}$$

et la forme d'Hermite

$$\sum_{l,j} [z_l \bar{z}_j(\gamma_{lj} + \gamma_{l'j'} + i\gamma_{l'j} - i\gamma_{l'j}) + \varepsilon_l \varepsilon_j z_{l'} \bar{z}_{j'}$$
$$\times (\gamma_{lj} + \gamma_{l'j'} - i\gamma_{lj'} + i\gamma_{lj'})' + \ldots + \varepsilon_j z_l \bar{z}_{j'}(\gamma_{lj} - \gamma_{l'j'} + i\gamma_{l'j} + i\gamma_{lj'})] + \ldots + \sum_{\lambda,\mu} z_\lambda \bar{z}_\mu \gamma_{\lambda\mu}$$

qui ne peuvent être séparément nulles.

Proposition 8. (É. Cartan [11], p. 240-241 et 251-253). — *Soit $g = k \times h$. Si g laisse invariante une forme d'Hermite, il en est de même de k et de h. Si g laisse invariante une forme quadratique, alors : soit k et h laissent invariante chacun une forme quadratique, soit k et h laissent invariante chacun une 2-forme extérieure.*

1° Si g laisse invariante la forme d'Hermite

$$\sum_{a,\alpha;b,\beta} g_{a\alpha,(b\beta)^*} z_{a\alpha} \bar{z}_{b\beta},$$

en remplaçant les $z_{a\alpha}$ par $z_a z_\alpha$ on trouve l'expression

$$\sum_{a,\alpha;b,\beta} g_{a\alpha,(b\beta)^*} z_a \bar{z}_b z_\alpha \bar{z}_\beta$$

qui n'est identiquement nulle que si tous les $g_{a\alpha,(b\beta)^*}$ sont nuls. Cette expression définit donc *au moins une* forme d'Hermite invariante par k; de même pour h. Si l'on réduit ces deux formes, par des changements de base convenables, à $\sum_l z_l \bar{z}_l$ et $\sum_\lambda z_\lambda \bar{z}_\lambda$, on obtient pour la forme d'Hermite invariante par g, l'expression

$$\sum_{l,\lambda} z_{l\lambda} \bar{z}_{l\lambda}, \tag{11}$$

les changements de base utilisés n'ayant pas *altéré la structure de produit* de g : G satisfait toujours la formule (5).

2° Si g laisse invariante la forme quadratique

$$\sum_{a,\alpha;b,\beta} g_{a\alpha,b\beta} z_{a\alpha} z_{b\beta},$$

on en déduit comme précédemment l'expression

$$\sum_{a,\alpha;b,\beta} g_{a\alpha,b\beta} z_a z_b z_\alpha z_\beta.$$

Si cette forme n'est pas identiquement nulle, elle définit au moins une forme quadratique invariante par k et au moins une forme quadratique invariante par h. Par des changements de base convenables, on se ramène à la forme $\sum_{l,\lambda} z_{l\lambda}^2$. Si la forme obtenue plus haut est identiquement nulle, c'est que $g_{a\alpha,b\beta} + g_{a\beta,b\alpha} = 0$. On en déduit alors que k et h laissent chacun invariante une 2-forme extérieure; en réduisant ces dernières à $\sum_l z_l \wedge z_{l'}$ et $\sum_\lambda z_\lambda \wedge z_{\lambda'}$ on obtient pour la forme initiale invariante par g

$$\sum_{l,\lambda} (z_{l\lambda} z_{l'\lambda'} - z_{l\lambda'} z_{l'\lambda}).$$

La structure de G reste encore inaltérée.

Proposition 9. — *Soit γ un groupe de rotations de 1^{re} classe dont le groupe associé g est un produit de deux groupes conjugués k, h. Alors k et h laissent chacun invariante : soit une forme quadratique, soit une 2-forme extérieure.*

On procède comme précédemment en utilisant les formules (1) et (3), ainsi que l'existence simultanée dans G d'éléments de la forme G_l^m et $\sqrt{-1}\, G_l^m$. On réduit ainsi la forme initiale à $\sum_{I,J} z_{IJ} z_{I'J'}$ ou $\sum_{I,J} z_{IJ}^2$; la structure de Γ reste inaltérée.

Si g est de 2^e classe, la forme d'Hermite invariante peut être du type

$$\sum_{I,J} z_{IJ} \bar{z}_{JI}.$$

Remarque. — Les calculs faits permettent dans chaque cas de remonter à la forme initiale $\sum_{i,j} \gamma_{ij} x_i x_j$ invariante par γ, dont nous aurons besoin au chapitre II.

CHAPITRE II.

Algèbres de Lie des groupes de rotations.

Ce chapitre donne une liste des expressions possibles pour les algèbres de Lie des groupes de rotations, sous la forme qui nous sera nécessaire au chapitre III. Les semi-fondamentaux n'y figurent pas, l'étude faite au n° 4 du chapitre I étant suffisante pour la suite. Pour cela, on utilise essentiellement : pour les groupes non simples, les résultats du chapitre I; pour les groupes fondamentaux, les résultats de [7], [8], [9] qui fournissent la liste des groupes fondamentaux complexes et leurs structures réelles. Certains groupes sont traités à part à l'aide de la proposition 2.

De plus, nous aurons besoin au chapitre III des *composantes deux fois covariantes* des algèbres de Lie considérées, c'est-à-dire des

$$\Gamma_{ij} = \sum_l \gamma_{il} \Gamma^l_j,$$

où $\sum_{i,j} \gamma_{ij} x_i x_j$ est la forme quadratique invariante par le groupe de rotations considéré. Nous préciserons les Γ^j_i chaque fois qu'elles différeront des Γ_{ij} autrement que par le signe, c'est-à-dire chaque fois que $\sum_{i,j} \gamma_{ij} x_i x_j$ ne sera pas réduite à une somme algébrique de carrés.

1. Groupes non simples. — Étudions les cas suivants, qui épuisent toutes les possibilités :

A. *s est de 2^e classe, non produit de deux groupes conjugués.* — On a $s = g \times g'$, d'où Σ à l'aide des formules (5) et (7) du chapitre I

$$(1) \qquad \begin{cases} \Sigma^{m\mu}_{l\lambda} = \Sigma^{(m\mu)^*}_{(l\lambda)^*} = H^m_l \, \delta^\mu_\lambda + \delta^m_l \, H'^\mu_\lambda & (l, m = 1, \ldots, n), \\ \Sigma^{(m\mu)^*}_{(l\lambda)} = -\Sigma^{m\mu}_{(l\lambda)^*} = K^m_l \, \delta^\mu_\lambda + \delta^m_l \, K'^\mu_\lambda & (\lambda, \mu = 1, \ldots, \nu). \end{cases}$$

Les formules (11) et les formes réduites analogues des autres cas du chapitre I, n° 8, la démonstration de la proposition 7 du chapitre I montrent que la forme quadratique invariante par σ est de la forme

$$\sum_{l,\lambda} (x_{l\lambda} x_{l'\lambda'} + \varepsilon x_{(l\lambda)^*} x_{(l'\lambda')^*}) \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

où $l \to l'$ (resp. $\lambda \to \lambda'$) est une application involutive de l'ensemble des indices $\{l\}$ (resp. $\{\lambda\}$) sur lui-même (qui peut être l'identité). On obtient donc pour composantes purement covariantes de Σ

$$(2) \qquad \begin{cases} \Sigma_{l\lambda, m\mu} = \Sigma_{(l\lambda)^*, (m\mu)^*} = H^{m'}_l \, \delta^{\mu'}_\lambda + \delta^{m'}_l \, H'^{\mu'}_\lambda; \\ \Sigma_{l\lambda, (m\mu)^*} = -\Sigma_{(l\lambda)^*, m\mu} = K^{m'}_l \, \delta^{\mu'}_\lambda + \delta^{m'}_l \, K'^{\mu'}_\lambda. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où g' est le tore $\mathbf{T}^1$ à une dimension réelle, c'est-à-dire le groupe opérant dans $\mathbf{C}$ et laissant invariante la forme d'Hermite $z_0 \bar{z}_0$, on obtient pour l'algèbre de Lie de $g \times \mathrm{T}^1$ la formule suivante, en posant $z_{l0} = z_l$

$$(3) \qquad \Sigma_{lm} = \Sigma_{l^* m^*} = H_{lm}, \qquad \Sigma_{lm^*} = -\Sigma_{l^* m} = K_{lm} + \xi \delta^m_l;$$

Σ ne diffère de Γ que par l'introduction de ξ et g est un groupe qui *doit* être de 2e classe et laisser invariante une forme d'Hermite puisque (prop. 7 du chapitre I) $\mathbf{T}^1$ ne laisse invariante ni 2-forme extérieure, ni forme quadratique. Dans les numéros suivants nous signalerons ces groupes lorsqu'ils se présenteront.

B. *s est de 1re classe, non produit de deux groupes conjugués.* — On a toujours $s = g \times g'$. D'après le théorème 4 du chapitre I, g et g' sont autocorrélatifs et il y a deux possibilités : leur indice commun est soit -1, soit $+1$. Dans les deux cas, g et g' laissent invariante une forme d'Hermite (prop. 7 et 8 du chapitre I) ; on obtient donc pour forme quadratique invariante par σ [form. (11) du chapitre I] $\sum_{\mathrm{L}} x_{\mathrm{L}}^2$. Les composantes purement covariantes de Σ seront donc identiques aux composantes mixtes.

1° *Indice* $+1$. — On peut écrire $\sigma = \gamma \times \gamma'$, où γ et γ' sont des groupes réels à variables réelles. D'où

$$(3)^* \qquad \Sigma_{l\lambda, m\mu} = H_l^m \, \delta_\lambda^\mu + \delta_l^m \, H'^\mu_\lambda \qquad (l, m = 1, \ldots, n;\ \lambda, \mu = 1, \ldots, \nu).$$

2° *Indice* -1. — On utilise les notations de la proposition 5 du chapitre I. Pour variables de σ, nous prendrons les $x_{i\lambda}$, $x_{i'\lambda'}$, $x_{i\lambda'}$, $x_{i'\lambda}$ définis par

$$z_{i\lambda} = x_{i\lambda} + i x_{i'\lambda'}, \qquad z_{i'\lambda'} = x_{i\lambda} - i x_{i'\lambda'}, \qquad z_{i\lambda'} = x_{i\lambda'} + i x_{i'\lambda}, \qquad z_{i'\lambda} = - x_{i\lambda'} + i x_{i'\lambda}.$$

D'où, par les formules (8) du chapitre I, les seules composantes non nulles de Σ, identiques aux composantes purement covariantes

$$(4a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{lllll} \Sigma_{i\lambda}^{\lambda} & = \Sigma_{i'\lambda'}^{j'\lambda'} & = \Sigma_{i\lambda'}^{j\lambda'} & = \Sigma_{i'\lambda}^{j'\lambda} & = 2H_i^j \\ \Sigma_{i\lambda}^{j\lambda'} & = -\Sigma_{i'\lambda'}^{j'\lambda} & = -\Sigma_{i\lambda'}^{j\lambda} & = \Sigma_{i'\lambda}^{j'\lambda'} & = 2H_{i'}^j \\ \Sigma_{i\lambda}^{j'\lambda'} & = -\Sigma_{i'\lambda'}^{j\lambda} & = \Sigma_{i\lambda'}^{j'\lambda} & = -\Sigma_{i'\lambda}^{j\lambda'} & = 2K_i^j \\ \Sigma_{i\lambda}^{j'\lambda} & = \Sigma_{i'\lambda'}^{j\lambda'} & = -\Sigma_{i\lambda}^{j\lambda} & = -\Sigma_{i'\lambda'}^{j'\lambda} & = -2K_{i'}^j \end{array} \right\} \quad (i \neq j) \\ \left. \begin{array}{lllll} \Sigma_{l\beta}^{l\alpha} & = \Sigma_{l'\beta'}^{l'\alpha'} & = \Sigma_{l'\beta}^{l'\alpha} & = \Sigma_{l\beta'}^{l\alpha'} & = 2H'^\alpha_\beta \\ \Sigma_{l\beta}^{l\alpha'} & = -\Sigma_{l\beta'}^{l\alpha} & = \Sigma_{l'\beta'}^{l'\alpha} & = -\Sigma_{l'\beta}^{l'\alpha'} & = 2H'^{\alpha'}_\beta \\ \Sigma_{l\beta}^{l'\alpha'} & = -\Sigma_{l'\beta'}^{l\alpha} & = -\Sigma_{l\beta'}^{l'\alpha} & = \Sigma_{l'\beta}^{l\alpha'} & = 2K'^\alpha_\beta \\ \Sigma_{l\beta}^{l'\alpha} & = -\Sigma_{l'\beta'}^{l\alpha'} & = \Sigma_{l\beta'}^{l'\alpha'} & = -\Sigma_{l'\beta}^{l\alpha} & = 2K'^{\alpha'}_\beta \end{array} \right\} \quad (\alpha \neq \beta) \end{array} \right.$$

$$(4b) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Sigma_{a\,\alpha}^{a\,\alpha'} = 2H_{a'}^a + 2H'^{\alpha'}_\alpha, & \Sigma_{a'\alpha}^{a'\alpha'} = 2H_{a'}^a - 2H'^{\alpha'}_\alpha, \\ \Sigma_{a\,\alpha}^{a'\alpha'} = 2K_a^a + 2K'^\alpha_\alpha, & \Sigma_{a\,\alpha'}^{a'\alpha} = 2K_a^a - 2K'^\alpha_\alpha, \\ \Sigma_{a\,\alpha}^{a'\alpha} = 2K_a^{a'} + 2K'^{\alpha'}_\alpha, & \Sigma_{a'\alpha'}^{a\,\alpha'} = 2K_a^{a'} - 2K'^{\alpha'}_\alpha. \end{array} \right.$$

Dans le cas particulier où g' n'a que deux variables z_0 et $z_{0'}$, c'est le groupe $\mathbf{SU}(2) = \mathbf{Sp}(1)$. En effet, c'est un groupe réel à deux variables complexes, autocorrélatif d'indice -1 : *cf.* alors la liste du n° 3.

Dans ce cas, en posant

$$x_{i0} = x_i, \qquad x_{i'0'} = x_{i^*}, \qquad x_{i0'} = x_{i'}, \qquad x_{i'0} = x_{i'^*},$$

on obtient pour algèbre de Lie de $\sigma = \mathbf{Sp}(1) \times g$

$$
(5_a) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{ij} = \Sigma_{i'j'} = \Sigma_{i^*j^*} = \Sigma_{i'^*j'^*} = H_i^j \\ \Sigma_{ij'} = -\Sigma_{i'^*j^*} = \Sigma_{i^*j'^*} = -\Sigma_{i'j} = H_i^{j'} \\ \Sigma_{ij^*} = -\Sigma_{i^*j} = -\Sigma_{i'j'^*} = \Sigma_{i'^*j'} = K_i^j \\ \Sigma_{ij'^*} = -\Sigma_{i^*j'} = \Sigma_{i'j^*} = -\Sigma_{i'^*j} = K_i^{j'} \end{array} \right\} \qquad (i \neq j);
$$

$$
(5_b) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Sigma_{ii'} = H_i^{i'} + \eta & \Sigma_{i^*i'^*} = H_i^{i'} - \eta, \\ \Sigma_{ii^*} = K_i^i + \xi & \Sigma^{i'^*i'} = K_i^i - \xi, \\ \Sigma_{ii'^*} = K_i^{i'} + \zeta & \Sigma_{i'i^*} = K_i^{i'} - \zeta; \end{array} \right.
$$

g est un groupe qui *doit* : être autocorrélatif d'indice — 1, laisser invariantes une forme d'Hermite et une 2-forme extérieure; $\mathbf{SU}(2)$ laisse en effet invariante la 2-forme $z_0 \wedge z_{0'}$. On remarquera que cette algèbre de Lie ne diffère de celle de la représentation réelle du groupe de 2^e^ classe g que par l'introduction de ξ, ζ, η. De plus on verra au chapitre III qu'il y a à examiner les groupes de cette forme : $\mathbf{Sp}(1) \times g$ chaque fois qu'ils se présentent; nous préciserons donc dans la suite de ce chapitre les seuls groupes jouissant des propriétés voulues ainsi que les antiinvolutions d'indice — 1 correspondantes.

C. *s est le produit de deux groupes conjugués : 2^e^ classe.* — Ce cas est analogue au A. Avec des notations identiques et en appliquant la formule (6) du chapitre I, on a

$$
(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{l\lambda, m\mu} = \Sigma_{(l\lambda)^*, (m\mu)^*} = H_l^{m'} \delta_\lambda^{\mu'} + (\varphi H)_\lambda^{\mu'} \delta_l^{m'}, \\ \Sigma_{l\lambda, (m\mu)^*} = -\Sigma_{(l\lambda)^*, m\mu} = K_l^{m'} \delta_\lambda^{\mu'} + (\varphi K)_\lambda^{\mu'} \delta_l^{m'}. \end{array} \right.
$$

D. *s est le produit de deux groupes conjugués : 1^re^ classe.* — Dans ce cas (th. 4 du chapitre I), g et g' sont deux groupes semblables; l'antiinvolution invariante par s est ([9], p. 165) $Z_{ab} = \bar{z}_{ba}$. Prenons comme variables pour σ l'ensemble des $x_{lm}, x_{l'm'}$, où $l < m$ et des $x_{ll} = x_{l'l'}$ définis par $z_{lm} = x_{lm} + ix_{l'm'}$ si $l < m$ et $z_{lm} = x_{ml} - ix_{m'l'}$ si $l > m$ et $\mathcal{R}(z_{ll}) = x_{ll}$. En appliquant les formules (5) et (8) du chapitre I, on obtient pour composantes non nulles de Σ

$$
\Sigma_{al}^{bl} \triangleq \Sigma_{am}^{mb} \triangleq \Sigma_{na}^{nb} \triangleq H_a^b, \qquad \Sigma_{a'l'}^{bl} \triangleq \Sigma_{a'm'}^{mb} \triangleq \Sigma_{n'a'}^{nb} \triangleq \mathrm{K}_a^b,
$$
$$
\Sigma_{a'b'}^{ab} = K_a^a + K_b^b, \qquad \Sigma_{pq}^{lm} \triangleq \Sigma_{p'q'}^{l'm'}, \qquad \Sigma_{pq}^{l'm'} \triangleq \Sigma_{p'q'}^{lm}
$$
$$
(a < b \leqq l,\ n \leqq a < b,\ a \leqq m \leqq b,\ a \neq b).
$$

D'après les propositions 7 et 9 du chapitre I, on peut supposer que la forme quadratique invariante par σ est $\sum_{\mathrm{L},\mathrm{M}} x_{\mathrm{LM}} x_{(\mathrm{L})'(\mathrm{M})'}$, d'où les composantes purement covariantes non nulles de Σ

$$
(7) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Sigma_{al,(b)'(l)'} \triangleq \Sigma_{am,(m)'(b)'} \triangleq \Sigma_{na,(n)'(a)'} \triangleq H_a^b, & \Sigma_{ab,cd} \triangleq \Sigma_{a'b',c'd'}, \quad \ldots, \\ \Sigma_{al,(b')'(l')'} \triangleq \Sigma_{am,(m')'(b')'} \triangleq \Sigma_{na,(n')'(a')'} \triangleq K_a^b, & \Sigma_{ab,(a)'(b)'} = K_a^a + K_b^b. \end{array} \right.
$$

2. Groupes de rotations fondamentaux. Généralités. — A. *Conventions.* — Par groupes de rotations fondamentaux, nous entendons les groupes réels **R**-linéaires dont les groupes **C**-linéaires *associés* sont **C**- ou **R**-fondamentaux. Les algèbres de Lie de ces groupes sont obtenues à partir de :

— pour les groupes **C**-fondamentaux : [7], p. 32-44;
— pour les groupes **R**-fondamentaux : [9], p. 168-174.

Pour éviter toute confusion, nous modifierons les notations de [7], [9], [8] de la façon suivante :

1° Nous utiliserons d'abord les notations classiques de Chevalley : $\mathbf{SL}(n, C)$ pour A_{n-1}, $\mathbf{SO}(2n+1, C)$ pour B_n, $\mathbf{Sp}(n, C)$ pour C_n, $\mathbf{SO}(2n, C)$ pour D_n.
2° Ensuite, dans les notations de [7] et [9] comportant des indices inférieurs ou supérieurs, nous ne changerons pas ces indices, leur laissant leurs significations mais nous changerons le caractère de la lettre conformément aux conventions du n° 2 du chapitre I. De plus, nous ajouterons parfois entre parenthèses la structure de groupe simple à laquelle appartient le groupe fondamental considéré.

B. *Résultats :*

PROPOSITION 1. — *Soit s l'extension d'un groupe linéaire de Lie g, opérant dans un espace vectoriel $\mathbf{E}^n$, aux p-formes extérieures de $\mathbf{E}^n$; s sera noté $\overset{p}{\wedge}\, g$. Alors l'algèbre de Lie S de s est définie par*

$$S^{s_1 \dots s_p}_{r_1 \dots r_p} = \frac{1}{p\,!} \sum_{k=1}^{p} \sum_{t_1, \dots, t_p} \delta^{t_1}_{r_1} \dots \hat{\delta}^{t_k}_{r_k} \dots \delta^{t_p}_{r_p}\, \varepsilon^{s_1 \dots s_p}_{t_1 \dots t_p}\, G^{t_k}_{r_k},$$

où : 1° G est l'algèbre de Lie de g; 2° la sommation est étendue à toutes les permutations $t_1 \dots t_p$ de la combinaison $s_1 \dots s_p$, $\varepsilon^{n_1 \dots n_p}_{m_1 \dots m_p}$ étant l'indicateur classique de permutation; 3° le signe $\wedge$ indique la suppression.

Les variables de s sont les $z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_p}$, où les z_i sont les variables de g; on peut les noter $z_{i_1 \dots i_p}$. Si l'on identifie $\overset{p}{\wedge}\, \mathbf{E}^n$ au sous-espace de $\overset{p}{\otimes}\, \mathbf{E}^n$ formé des tenseurs antisymétriques, on peut considérer s comme le groupe $\hat{s}$ opérant dans $\overset{p}{\otimes}\, \mathbf{E}^n$ en tant que *diagonale* de $\overset{p}{\times}\, g$. On a alors

$$z'_{r_1 \dots r_p} \doteq (\mathrm{S}\, z)_{r_1 \dots r_p} = \sum_{t_1, \dots, t_p} (\hat{S}\, z)_{t_1 \dots t_p},$$

$$(\hat{S}\, z)_{r_1 \dots r_p} = \sum_{s_1, \dots, s_p} \hat{\mathrm{S}}^{s_1 \dots s_p}_{r_1 \dots r_p} z_{s_1} \otimes \dots \otimes z_{s_p},$$

d'où

$$S^{s_1 \dots s_p}_{r_1 \dots r_p} = \frac{1}{p\,!} \sum_{t_1, \dots, t_p} \sum_{u_1, \dots, u_p} \varepsilon^{t_1 \dots t_p}_{r_1 \dots r_p}\, \varepsilon^{s_1 \dots s_p}_{u_1 \dots u_p}\, \hat{S}^{u_1 \dots u_p}_{t_1 \dots t_p};$$

S est donnée par la formule suivante :

$$\hat{S}^{h_1 \dots h_p}_{f_1 \dots f_p} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{h_1}_{f_1} \dots \hat{\delta}^{h_k}_{f_k} \dots \delta^{h_p}_{f_p}\, G^{h_k}_{f_k}$$

qui est une généralisation immédiate de la formule (5) du chapitre I. On en déduit la formule de la proposition. Si l'on fait la *convention suivante :*

Les composantes $S^{s_1 \ldots s_p}_{r_1 \ldots r_p}$ seront toujours supposées écrites de façon à ce que deux indices éventuellement identiques soient l'un sous l'autre,

on obtient pour S la formule plus simple

$$(8) \qquad S^{s_1 \ldots s_p}_{r_1 \ldots r_p} \triangleq \sum_k \delta^{s_1}_{r_1} \ldots \hat{\delta}^{s_k}_{r_k} \ldots \delta^{s_p}_{r_p} G^{s_k}_{r_k}.$$

Nous ferons toujours cette convention dans les algèbres de Lie de ce type. Quand il s'agira de composantes purement covariantes $S_{r_1 \ldots r_p, s_1 \ldots s_p}$ les indices éventuellement égaux seront écrits « avec le même rang ».

Proposition 2. — *Soient g et g' deux groupes* **C**-*linéaires fondamentaux de même structure, tels que l'ensemble des poids des variables de g' (notées z_L, z_M, ...) comprenne l'ensemble des poids des variables de g (notées z_l, z_m, ...). Alors :* 1° *quels que soient* L *et* M, *il existe l et m tels que l'on ait pour tout élément de G' (donc de G) : $G'^{M}_{L} \triangleq G'^{m}_{l}$;* 2° *si g' laisse invariante une antiinvolution, g laisse invariante l'antiinvolution induite.*

1° Soit, en effet, $X_\alpha \in G'$ et donnant naissance au terme G'^{M}_{L}, c'est-à-dire que $(M) = (L) + (\alpha)$. Il existe l, m tels que $(m) = (l) + (\alpha)$ parce que g est isomorphe à g'. Puisque $\langle g \rangle \subset \langle g' \rangle$, la proposition 1 du chapitre I montre que $G'^{M}_{L} \triangleq G'^{m}_{l} = G^{m}_{l}$. Si $X_\beta \in G'$ est telle que $G'^{M}_{L} = 0$, alors on a aussi $G^{m}_{l} = 0$.

2° On vérifie sur la liste des poids ([7], p. 15-32) que si $\langle g' \rangle = \langle \bar{g}' \rangle$ et $\langle g \rangle \subset \langle g' \rangle$, alors $\langle g \rangle = \langle \bar{g} \rangle$, ce qui donne un sens à l'antiinvolution induite sur g par celle de g'. Si l'on exprime alors que g' laisse invariante l'antiinvolution considérée à l'aide des formules (9) du chapitre I, on a en particulier ces formules pour g.

3. Groupes isomorphes à SU(n) $(n \geqq 2)$. — *Notations :*

SL(n, C) et **SL**(n, R) : notations classiques de Chevalley;

SU$^*(2n)$: groupe réel de la structure **SL**(n, C) défini dans [9], p. 169 (lignes 1 à 5);

SU$^h(n)$: groupe réel de la structure **SL**(n, C), sous-groupe de **SO**$^{2h}(2n)$.

A. *Groupes provenant de* $\mathfrak{g}_1$(**SU**(n)) = **SL**(n, C). — 1° $g = \hat{\mathfrak{g}}_1$. — Les poids de $\mathfrak{g}_1$ ([7], p. 15) étant les ω_i $(i = 1, \ldots, n)$ liés par la seule relation $\omega_1 + \ldots + \omega_n = 0$, $\mathfrak{g}_1$ ne peut pas laisser de forme quadratique invariante si $n > 2$ (prop. 2 du chapitre I). Pour $n = 2$, $\mathfrak{g}_1$ laisse invariante la forme extérieure $z_1 \wedge z_2$, donc (chap. I, n° 1, remarque 1) pas de forme quadratique. D'après la proposition 7 du chapitre I, ce cas n'est donc jamais à considérer.

2° $\gamma = g =$ **SL**(n, R). — Si $n > 2$, γ ne laisse invariante aucune forme quadratique pour la même raison qu'au 1°, ni de forme d'Hermite car, les transformations de g étant réelles, les formules (1) et (3) du chapitre I coïncident. Pour $n = 2$, on retrouve le groupe qui sera noté au 4° **SU**^{1} (2) (*cf.* [8], p. 353).

3° $g = \mathbf{SU}^*(2n)$ est un groupe qui est noté $g^{(4)}$ dans [7] et obtenu ([8], p. 272-273) en liant les ω_I ($I = 1, \ldots, 2q = n$) par les relations $\omega_i = \overline{\omega}_{i+q}$ ($i = 1, \ldots, q$). Il ne peut laisser de forme d'Hermite ou quadratique invariante que si $q = 1$. On retrouve alors $\mathbf{SU}(2)$ (*cf.* [8], p. 353).

4° On obtient le groupe $g_1^{(h)}$ qui laisse invariante la forme d'Hermite

$$\sum_i \varepsilon_i z_i \overline{z}_i = z_1 \overline{z}_1 + \ldots + z_h \overline{z}_h - z_{h+1} \overline{z}_{h+1} - \ldots - z_n \overline{z}_n$$

et pour γ le groupe, que nous noterons $\mathbf{SU}^h(n) \subset \mathbf{SO}^{2h}(2n)$, qui laisse invariante la forme quadratique

$$\sum_i \varepsilon_i (x_i^2 + x_{i^*}^2);$$

les composantes purement covariantes de Γ constituent l'ensemble des matrices carrées satisfaisant aux seules relations

$$(9) \qquad \Gamma_{lm} = \Gamma_{l^*m^*}, \qquad \Gamma_{lm^*} + \Gamma_{l^*m} = 0, \qquad \sum_l \varepsilon_l \Gamma_{ll^*} = 0.$$

Le groupe $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SU}^h(n)$ est à considérer : son algèbre de Lie est formée des matrices satisfaisant seulement aux deux premières des conditions (9) ci-dessus.

B. *Groupes provenant de* $\mathfrak{g}_p(\mathbf{SU}(n))$, $2 \leq p \leq n-1$. — On a $\mathfrak{g}_p = \overset{p}{\wedge} \mathfrak{g}_1$ ([7], p. 33). Les groupes $\mathfrak{g}_p$ et $\mathfrak{g}_{n-p}$ étant conjugués, nous pourrons toujours supposer que $p \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

1° $g = \hat{\mathfrak{g}}_p$. — Les poids de $\mathfrak{g}_p$ ([7], p. 33) sont les sommes $\omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_p}$, les indices $i_1, \ldots, i_p$ étant *tous différents*. g ne pourra laisser invariante une forme quadratique que si $n = 2q$ et $p = q$. En effet (prop. **2**, chap. I),

$$\omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_p} + \omega_{j_1} + \ldots + \omega_{j_p}$$

ne pourra être nul que si $(i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_p)$ est une permutation de $1, \ldots, n$ puisque les ω_i sont liés par la seule relation $\omega_1 + \ldots + \omega_n = 0$. On aura alors pour Γ les formules (10) ci-dessous mais appliquées aux composantes Γ_L^M. On en déduira facilement les composantes purement covariantes à l'aide de la forme invariante $\gamma_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p}$ où $(i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p)$ est une permutation de $1, \ldots, n$.

2° De même qu'au 1°, ce groupe ne se présente que si $n = 2q$ et $p = q$. On obtient alors pour Γ des composantes analogues à celles du 1°, pour les indices non étoilés.

3° Pour que le groupe $g^{(p)}$ laisse invariante une forme quadratique, il faut encore que $n = 2q$ et $p = q$. On trouve alors un groupe de 1re classe dont les composantes mixtes de Γ sont celles des formules (12) ci-dessous : en effet, l'antiinvolution globale de $g^{(p)}$ est la même que celle du groupe du 4°, formule (11) ([9], p. 169-170).

4° *Les groupes* $g_p^{(h)}$ laissent invariantes des formes d'Hermite du type $\sum_L \varepsilon_L z_L \overline{z}_L$, d'où directement les composantes purement covariantes de leurs algèbres de Lie :

a. Quand ils sont de 2ᵉ *classe*, en appliquant la formule (8) de ce chapitre et la formule (7) du chapitre I,

$$
(10)\qquad \begin{cases} \Gamma_{r_1\ldots r_p, s_1\ldots s_p} = \Gamma_{(r_1\ldots r_p)^*, (s_1\ldots s_p)^*} \triangleq \sum_k \delta^{s_1}_{r_1}\ldots\hat{\delta}^{s_k}_{r_k}\ldots\delta^{s_p}_{r_p} H^{s_k}_{r_k}, \\ \Gamma_{r_1\ldots r_p, (s_1\ldots s_p)^*} = -\Gamma_{(r_1\ldots r_p)^*, s_1\ldots s_p} \triangleq \sum_k \delta^{s_1}_{r_1}\ldots\hat{\delta}^{s_k}_{r_k}\ldots\delta^{s_p}_{r_p} H^{s_k}_{r_k}; \end{cases}
$$

$g_p^{(h)}$ est corrélatif de $g_{n-p}^{(h)}$. Si $n = 2q$ et $p = q$, $g_q^{(h)}$ admet l'antiinvolution

$$
(11)\qquad Z_{r_1\ldots r_q} = \varepsilon\,\bar{z}_{r_{q+1}\ldots r_{2q}}, \qquad \text{avec} \quad \varepsilon^{1\ldots q\,q+1\ldots 2q}_{r_1\ldots r_q r_{q+1}\ldots r_{2q}} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \pm 1
$$

([9], p. 169-170). Si cette antiinvolution est d'indice —1, le groupe $\sigma = \mathbf{Sp}(1) \times g_q^{(h)}$ aura pour algèbre de Lie les formules (10), plus les composantes

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{r_1\ldots r_q, (r_1\ldots r_q)^*} \triangleq \Sigma_{r_{q+1}\ldots r_{2q}, (r_{q+1}\ldots r_{2q})^*} \triangleq \xi, \\
&\Sigma_{r_1\ldots r_q, r_{q+1}\ldots r_{2q}} \triangleq \Sigma_{(r_1\ldots r_q)^*, (r_{q+1}\ldots r_{2q})^*} \triangleq \eta, \\
&\Sigma_{r_1\ldots r_q, (r_{q+1}\ldots r_{2q})^*} \triangleq \Sigma_{r_{q+1}\ldots r_{2q}, (r_1\ldots r_q)^*} \triangleq \zeta;
\end{aligned}
$$

le groupe $\mathbf{T}^1 \times g_q^{(h)}$ se présente : il suffit de faire $\eta = \zeta = 0$ dans les formules précédentes.

b. Si cette antiinvolution est d'indice $+1$, prenons comme variables réelles les $x_{r_1\ldots r_{q-1}}$, $x_{(r_1\ldots r_{q-1})'}$ (où $r_1\ldots r_{q-1}$ est une combinaison des $n-1$ indices : $2, 3, \ldots, 2q-1, 2q = n$) et qui sont définis par

$$
z_{r_1\ldots r_q} \triangleq x_{r_{q+2}\ldots r_{2q}} - i x_{(r_{q+2}\ldots r_{2q})'}
$$

si $r_1\ldots r_q$ ne contient pas 1, sinon

$$
z_{1r_2\ldots r_q} = x_{r_2\ldots r_q} + i x_{(r_2\ldots r_q)'}.
$$

On obtient alors les seules composantes de Γ, non nulles, à l'aide des formules (8) du chapitre I

$$
(12)\qquad \begin{cases} \Gamma_{r_2 r_3\ldots r_q, s_2 r_3\ldots r_q} \triangleq H^{s_2}_{r_2}, & \Gamma_{r_2 r_3\ldots, (s_2 r_3\ldots r_q)'} \triangleq K^{s_2}_{r_2}, \\ \Gamma_{r_2\ldots r_q, r_{q+2}\ldots r_{2q}} \triangleq H^{r}_{1}, & \Gamma_{r_2\ldots r_q, (r_{q+2}\ldots r_{2q})'} \triangleq K^{r}_{1}, \\ \Gamma_{r_2\ldots r_q, (r_2\ldots r_q)'} \triangleq \sum_{h=2}^{q} K^{r_h}_{r_h}, & \text{où} \quad \varepsilon^{12\ldots q\,q+1\ldots 2q}_{1 r r_2\ldots r_q r_{q+2}\ldots r_{2q}} = 1. \end{cases}
$$

Convention. — Désormais, pour ne pas surcharger les formules, nous omettrons dans ces dernières les composantes déduites de celles s'y trouvant déjà par les relations des types suivants :

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{lm} \triangleq \Gamma_{l'm'}, \qquad \Gamma_{lm'} \triangleq \Gamma_{l'm} \quad (1^{\text{re}}\ \text{classe}), \\
&\Gamma_{lm} = \Gamma_{l^*m^*}, \qquad \Gamma_{lm^*} = -\Gamma_{l^*m} \quad (2^{\text{e}}\ \text{classe}).
\end{aligned}
$$

4. **Groupes isomorphes à $\mathbf{Sp}(n)$ — $n \geq 2$.** — *Notations :*

$\mathbf{Sp}(n, C)$: notation classique de Chevalley;

$\mathbf{Sp}^h(n)$: structure réelle de $\mathbf{Sp}(n, C)$, sous-groupe de $\mathbf{SO}^{4h}(4n)$;

$\mathbf{Sp}^*(n)$: plus grand sous-groupe de $\mathbf{GL}(2n, R)$ laissant invariante une 2-forme extérieure de rang maximum.

A. *Groupes provenant de* $\mathfrak{g}_1(\mathbf{Sp}(n)) = \mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})$. — 1° *Le groupe* $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})$ ne laisse invariante aucune forme quadratique puisqu'il laisse invariante une 2-forme extérieure. De même pour le groupe $g_1 = \mathbf{Sp}^\star(n)$, qui ne se présente pas non plus (prop. 7 du chapitre I), car il est de 1^re^ classe.

2° *Le groupe* $g_1^{(h)}$ laisse invariante la forme d'Hermite

$$\sum_r \varepsilon_{r}(z_r\bar{z}_r + z_{r'}\bar{z}_{r'}) = (z_1\bar{z}_1 + z_{1'}\bar{z}_{1'}) + \ldots + (z_h\bar{z}_h + z_{h'}\bar{z}_{h'})$$
$$- (z_{h+1}\bar{z}_{h+1} + z_{(h+1)'}\bar{z}_{(h+1)'}) - \ldots - (z_n\bar{z}_n + z_{n'}\bar{z}_{n'})$$

et la 2-forme extérieure $\sum_r z_r \wedge z_{r'}$. Il est toujours d'indice -1. Le groupe correspondant γ à variables réelles sera noté $\mathbf{Sp}^h(n)$ et laisse invariante la forme quadratique

$$\sum_r \varepsilon_r(x_r^2 + x_{r^\star}^2 + x_{r'}^2 + x_{r'^\star}^2).$$

Γ est alors formée de l'ensemble des matrices antisymétriques satisfaisant aux seules conditions

$$(13_a) \qquad \Gamma_{rs} = \Gamma_{r's'} = \Gamma_{r^\star s^\star} = \Gamma_{r'^\star s'^\star},$$
$$(13_b) \qquad \Gamma_{rs'} = -\Gamma_{r'^\star s^\star} = -\Gamma_{r's} = \Gamma_{r^\star s'^\star},$$
$$(13_c) \qquad \Gamma_{rs^\star} = \Gamma_{r'^\star s'} = -\Gamma_{r^\star s} = -\Gamma_{r's'^\star},$$
$$(13_d) \qquad \Gamma_{rs'^\star} = -\Gamma_{r'^\star s} = \Gamma_{rs'^\star} = -\Gamma_{r^\star s'}.$$

Pour obtenir l'algèbre de Lie du groupe $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{Sp}^h(n)$, il faut [form. (3)] ajouter $r \neq s$ dans la formule (13_c) ci-dessus et la remplacer par la suivante :

$$(13_e) \qquad \varepsilon_r(\Gamma_{rr^\star} - \Gamma_{r'^\star r'}) \text{ indépendant de } r.$$

Pour avoir l'algèbre de Lie du groupe $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}^h(n)$, il faut [form. (5_b)] ajouter $r \neq s$ dans les formules (13_b), (13_c), (13_d) ci-dessus et les remplacer par les suivantes et la formule (13_e)

$$(13_f) \qquad \varepsilon_r(\Gamma_{rr'} - \Gamma_{r^\star r'^\star}) \text{ indépendant de } r,$$
$$(13_g) \qquad \varepsilon_r(\Gamma_{rr'^\star} - \Gamma_{r'r^\star}) \text{ indépendant de } r.$$

B. *Groupes provenant de* $\mathfrak{g}_p(\mathbf{Sp}(n))$ $(2 \leq p \leq n)$. — Le groupe $\overset{p}{\wedge}\mathfrak{g}_1$ est certainement réductible puisque $\mathfrak{g}_1$ laisse invariante la 2-forme extérieure $\sum_r z_r \wedge z_{r'}$. D'autre part ([7], p. 18), $\langle \mathfrak{g}_2 \rangle \subset \langle \mathfrak{g}_{2q} \rangle$ et $\langle \mathfrak{g}_3 \rangle \subset \langle \mathfrak{g}_{2q+1} \rangle$. Nous étudierons donc seulement (chap. III, prop. 3) $\mathfrak{g}_2$ et $\mathfrak{g}_3$. D'après [7], p. 36-38, les variables de $\mathfrak{g}_2$ (resp. $\mathfrak{g}_3$) peuvent être notées z_{LM}, z_λ (resp. z_{LMN}, $z_{\mathrm{L}\lambda}$), où

$$\mathrm{L, M, N}, \ldots = r, s, \ldots; r', s', \ldots \qquad [(\mathrm{L}) \neq 0, (\mathrm{M}) \neq 0, (\mathrm{N}) \neq 0, \ldots],$$
$$\lambda = 1, \ldots, n-1, \qquad (\lambda) = 0; \qquad \text{si } \mathrm{L} = r : \ \mathrm{L}' = r'; \qquad \text{si } \mathrm{L} = r' : \ \mathrm{L}' = r$$

et dans z_{LM} (resp. z_{LMN}) : $\mathrm{L} \neq \mathrm{M}'$ (resp. $\mathrm{L} \neq \mathrm{M}'$, $\mathrm{L} \neq \mathrm{N}'$, $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}'$).

Utilisant la proposition 1 du chapitre I et la formule (8), on trouve pour seules composantes non nulles de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_2$

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}^{CD}_{AB} = \mathfrak{G}^C_A \delta^D_B + \delta^C_A \mathfrak{G}^D_B, \qquad \mathfrak{S}^{AB}_{\lambda} \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{S}^{\lambda}_{A'B'} \mathrel{\hat{\hat{=}}} \mathfrak{G}^{B'}_{A}, \\ \text{les } \mathfrak{S}^A_B \text{ étant liés par } (C^2_n - 2n) \text{ relations linéaires complexes.} \end{array} \right.$$

(l'on a appliqué la convention faite au n° 2). En procédant de même pour $\mathfrak{G}(g_3) = \mathfrak{T}$, on trouve

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{T}^{DEF}_{ABC} = \mathfrak{G}^D_A \delta^E_B \delta^F_C + \delta^D_A \mathfrak{G}^E_B \delta^F_C + \delta^D_A \delta^E_B \mathfrak{G}^F_C, \qquad \mathfrak{T}^{ABM}_{\lambda M} \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{T}^{M}_{A'B'M} \mathrel{\hat{\hat{=}}} \mathfrak{G}^{B'}_{A}, \\ \text{les } \mathfrak{T}^{ABC}_{ABC},\ \mathfrak{T}^{L\lambda}_{L\lambda} \text{ étant liés par } (C^3_n - 2n) \text{ relations linéaires complexes.} \end{array} \right.$$

D'autre part, $\mathfrak{g}_1$ laissant invariante une 2-forme extérieure, $\mathfrak{g}_{2q}$ laissera invariante une forme quadratique et $\mathfrak{g}_{2q+1}$ une 2-forme extérieure, donc pas de forme quadratique. Ainsi $\hat{\mathfrak{g}}_{2q+1}$ n'est pas un groupe de rotations; il en est de même pour le groupe de 1re classe g_{2q+1}, puisque ses transformations sont réelles ([9], p. 170).
Il reste donc à étudier les cas suivants :

1° $g = \hat{\mathfrak{g}}_2$. — Ce groupe laisse invariante la forme quadratique

$$(16) \qquad \sum_{L,M} z_{LM} z_{L'M'} + \sum_{\lambda} k(z^2_{\lambda}),$$

d'où les composantes purement covariantes de Γ à l'aide des formules (14).

2° $\gamma = g_2$. — Les formules (14) donnent directement les composantes mixtes de Γ; les composantes covariantes s'obtiennent à l'aide de la forme (16).

3° $g^{(h)}_2$ est de 1re classe pour l'antiinvolution

$$Z_{LM} = \varepsilon_L \varepsilon_M \bar{z}_{L'M'}, \qquad Z_\lambda = \bar{z}_\lambda$$

et la forme d'Hermite invariante est du type

$$\sum_{L,M} \varepsilon_{LM} z_{LM} \bar{z}_{LM} + k \sum_{\lambda} z_\lambda \bar{z}_\lambda,$$

d'où les composantes purement covariantes cherchées à partir de la formule (14) et des formules (8) du chapitre I.

4° $g^{(h)}_3$ admet l'antiinvolution d'indice —1

$$Z_{LMN} = \varepsilon(LMN) \bar{z}_{L'M'N'}, \qquad Z_{\lambda L} = \eta(L) \bar{z}_{\lambda L'} \qquad (\varepsilon = \pm 1,\ \eta = \pm 1);$$

il laisse invariante une forme d'Hermite du type

$$\sum_{L,M,N} \varepsilon_{LMN} z_{LMN} \bar{z}_{LMN} + \sum_{L,\lambda} \varepsilon_{L\lambda} z_{L\lambda} \bar{z}_{L\lambda},$$

d'où son algèbre de Lie à partir de la formule (5) du chapitre I et des formules (15) ci-dessus. L'algèbre de Lie de $\mathbf{Sp}(1) \times g^{(h)}_3$ s'obtient en ajoutant aux composantes ainsi trouvées, les suivantes :

$$\Sigma_{LMN,(LMN)^*} \mathrel{\hat{=}} \Sigma_{L'M'N',(L'M'N')^*} \mathrel{\hat{=}} \Sigma_{L\lambda,(L\lambda)^*} \mathrel{\hat{=}} \Sigma_{L'\lambda,(L'\lambda)^*} = \xi,$$
$$\Sigma_{LMN,L'M'N'} \mathrel{\hat{=}} \Sigma_{(LMN)^*,(L'M'N')^*} \mathrel{\hat{=}} \Sigma_{L\lambda,L'\lambda} \mathrel{\hat{=}} \Sigma_{(L\lambda)^*,(L'\lambda)^*} = \eta,$$
$$\Sigma_{LMN,(L'M'N')^*} \mathrel{\hat{=}} \Sigma_{L'M'N',(LMN)^*} \mathrel{\hat{=}} \Sigma_{L\lambda,(L'\lambda)^*} \mathrel{\hat{=}} \Sigma_{L'\lambda,(L\lambda)^*} = \zeta.$$

Il suffit de faire $\eta = \zeta = 0$ dans ces formules pour avoir l'algèbre de Lie de $\mathbf{T}^1 \times g_3^{(h)}$.

5. **Groupes isomorphes à $\mathbf{SO}(2n+1)$ $(n \geqq 3)$.** — *Notations :*

$\mathbf{SO}\,(m, \mathrm{C})$: notation classique de Chevalley;
$\mathbf{SO}^h\,(m)$: défini au chapitre I, n° 8;
$\mathbf{Spin}\,(m)$: notation classique de Chevalley à ceci près : si $m = 2n$, $\mathbf{Spin}(2n)$ désignera la représentation d'un groupe isomorphe à celui noté $\mathbf{Spin}(2n)$ dans Chevalley mais *réduite* indifféremment, soit à l'espace des spineurs *pairs* (g_2 dans [9]), soit à l'espace des spineurs *impairs* (g_1) dans [9]) (*cf.* Chevalley, *The algebraic theory of spinors*).
$\mathbf{Spin}\,(m, \mathrm{C})$: structure complexe de $\mathbf{Spin}\,(m)$;
$\mathbf{Spin}^h\,(m)$: structure réelle de $\mathbf{Spin}\,(m, \mathrm{C})$ et de même structure réelle que $\mathbf{SO}^{\left[\frac{m}{2}\right]-h}(m)$.

A. *Groupes provenant de* $\mathfrak{g}_2\,(\mathbf{SO}(2n+1)) = \mathbf{SO}(2n+1,\ \mathrm{C})$. — 1° $\mathfrak{g}_2 = \mathbf{SO}(2n+1, \mathrm{C})$ est le plus grand sous-groupe connexe de $\mathbf{GL}(2n+1, \mathrm{C})$ qui laisse invariante une forme quadratique de rang maximum que l'on peut réduire à $\sum_i z_i^2$ $(i = 1, \ldots, 2n+1)$, d'où pour $\gamma = \hat{\mathfrak{g}}_2$ la forme quadratique invariante de signature $2n+1$: $\sum_i (x_i^2 - x_{i^*}^2)$. L'algèbre de Lie Γ est l'ensemble des matrices antisymétriques satisfaisant aux seules relations

$$\Gamma_{lm} = -\Gamma_{l^* m^*} \quad \text{et} \quad \Gamma_{lm^*} = \Gamma_{l^* m}. \tag{17}$$

2° Le groupe $g_2^{(h)}$ donne naissance au plus grand sous-groupe connexe de $\mathbf{GL}(n, \mathrm{R})$ qui laisse invariante la forme quadratique

$$\sum_r \varepsilon_r x_r^2 = x_1^2 + \ldots + x_{2n-h+1}^2 - x_{2n-h+2}^2 - \ldots - x_{2n+1}^2$$

et que nous avons désigné au chapitre I, n° 8 par $\mathbf{SO}^h\,(2n+1)$. Γ est alors formée de toutes les matrices antisymétriques

$$\Gamma_{lm} + \Gamma_{ml} = 0.$$

B. *Groupes provenant de* $\mathfrak{g}_p(\mathbf{SO}(2n+1))$ $(3 \leqq p \leqq n)$. — On a $\mathfrak{g}_p = \overset{p-1}{\bigwedge} \mathfrak{g}_2$, soit deux cas possibles :

1° $\gamma = \hat{\mathfrak{g}}_p$. — **La forme quadratique invariante par $\mathfrak{g}_2$ étant réduite comme au A, on trouve pour Γ des formules identiques aux formules (10) du n° 3.**

2° g_2 étant de 1^re^ classe, on a de suite pour Γ

$$\Gamma_{r_1 \ldots r_{p-1}, s_1 \ldots s_{p-1}} = \sum_k \delta_{r_1}^{s_1} \ldots \hat{\delta}_{r_k}^{s_k} \ldots \delta_{r_{p-1}}^{s_{p-1}} H_{r_k}^{s_k}. \tag{18}$$

C. *Groupes provenant de* $\mathfrak{g}_1(\mathbf{SO}(2n+1)) = \mathbf{Spin}(2n+1, C)$. — 1° $\mathfrak{g}_1$ n'est autre que $\mathbf{Spin}(2n+1, C)$. Son algèbre de Lie est définie dans [7], (p. 34). Il laisse invariante la forme quadratique

$$(19)\qquad \sum_{\varepsilon_1\varepsilon_3\ldots\varepsilon_n} (\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_5\ldots) z_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} z_{-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_n} \quad \text{si } n = 4p-1 \text{ ou } 4p,$$

la 2-forme extérieure

$$\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_3\ldots\varepsilon_n} (\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_5\ldots) z_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \wedge z_{-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_n} \quad \text{si } n = 4p+1 \text{ ou } 4p+2.$$

La recherche de ces formes se fait à l'aide des formules (1) et (2) et de la proposition 2 du chapitre I. Les variables de $\mathfrak{g}_1([7])$ sont les $z_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$, en nombre 2^n, où $\varepsilon_i = \pm 1$. Nous emploierons les abréviations suivantes :

ε pour $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n$; ε' pour $-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\ldots-\varepsilon_n$; I, J pour $\pm i$, $\pm j$, où i, $j = 1, \ldots, n$; $\varepsilon(\mathrm{I})$ [resp. $\varepsilon(\mathrm{I}, \mathrm{J})$] pour $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{i-1}$ (signe i) $\varepsilon_{i+1}\ldots$ [resp. $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{i-1}$ (signe i) $\varepsilon_{i+1}\ldots\varepsilon_{j-1}$ (signe j) $\varepsilon_{j+1}\ldots\varepsilon_n$]; enfin, si $\mathrm{I} = i$: $\mathrm{I}' = -i$ et si $\mathrm{I} = -i : \mathrm{I}' = i$.

Ainsi, par exemple, $\varepsilon'(i)$ désignera

$$-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\ldots-\varepsilon_{i-1}+1-\varepsilon_{i+1}-\ldots-\varepsilon_n.$$

Si donc $n = 4p$ ou $4p-1$ et avec ces notations, on obtient l'algèbre de Lie de $\gamma = \hat{\mathfrak{g}}_1$, à partir des formules de [7], p. 34 et compte tenu de la forme (19)

$$(20)\qquad \begin{cases} \Gamma_{\varepsilon(\mathrm{I}),\varepsilon'(\mathrm{I})} \triangleq \mathrm{H}_\mathrm{I}, & \Gamma_{\varepsilon(\mathrm{I},\mathrm{J}),\varepsilon'(\mathrm{I},\mathrm{J})} \triangleq \mathrm{H}_{\mathrm{IJ}}, & \varepsilon_i\Gamma_{\varepsilon,\varepsilon'} = \mathrm{L}_i; \\ \Gamma_{\varepsilon(\mathrm{I}),\varepsilon'(\mathrm{I})^\star} \triangleq \mathrm{K}_\mathrm{I}, & \Gamma_{\varepsilon(\mathrm{I},\mathrm{J}),\varepsilon'(\mathrm{I},\mathrm{J})^\star} \triangleq \mathrm{K}_{\mathrm{IJ}}, & \varepsilon_i\Gamma_{\varepsilon,\varepsilon'^\star} = \mathrm{M}_i \end{cases}$$

(l'on a appliqué la convention de la fin du n° 3).

2° ([9], p. 171). — Nous noterons $\mathbf{Spin}^h(2n+1)$ le groupe g_1 de la même structure réelle que $\mathbf{SO}^{n-h}(2n+1)$; $\mathbf{Spin}^n(2n+1)$ n'est autre que le groupe classique $\mathbf{Spin}(2n+1)$. C'est un groupe autocorrélatif d'indice $(-1)^{\frac{h(h+1)}{2}}$. Le groupe $\mathbf{Spin}^0(2n+1)$ est toujours de 1^re^ classe. Il n'est donc à considérer, d'après le 1°, que si $n = 4p$ ou $4p-1$; il est alors obtenu en prenant simplement pour Γ les composantes sans $\star$ des formules (20) ci-dessus. Si g_1 est de 2^e^ classe, il est d'indice -1 et ne laisse de 2-forme extérieure invariante que si $n = 4p+1$ ou $4p+2$. Si l'on recherche une forme d'Hermite invariante par $\mathbf{Spin}^h(2n+1)$, à l'aide de la formule (3) et de la proposition 2 du chapitre I, on trouve, quels que soient n et h, une forme non identiquement nulle du type

$$(21)\qquad \sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n} \lambda(\varepsilon\eta)\, z_{\varepsilon\eta}\bar{z}_{\varepsilon\eta'}$$

où $\lambda(\varepsilon\eta)$ est un facteur convenable ($\lambda^4 = 1$) et où l'on a posé

$$\varepsilon\eta = \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_h\eta_{h+1}\ldots\eta_n \qquad \text{et} \qquad \varepsilon\eta' = \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_h-\eta_{h+1}-\ldots-\eta_n.$$

En résumé, $\mathbf{Spin}^h(2n+1)$ ne donne naissance à un groupe de rotations :

a. *De* 1[re] *classe*, que si ($n=4p$ ou $4p-1$ et $h=4q$ ou $4q-1$).

b. *De* 2[e] *classe*, que si ($h=4q+1$ ou $4q+2$, quel que soit n).

Nous ne donnerons les formules pour Γ que dans le cas : $h=n$, 2[e] classe. Dans les autres cas, les formules (19) et (21) et l'antiinvolution donnée dans [9] (p. 171) permettent d'avoir Γ aisément. Dans le cas plus précis ci-dessus, les seules composantes non nulles de Γ sont

$$\Gamma_{\varepsilon(\mathrm{I}),\varepsilon(\mathrm{I}')} \triangleq \mathrm{H_I}, \qquad \Gamma_{\varepsilon(\mathrm{I,J}),\varepsilon(\mathrm{I',J'})} \triangleq \mathrm{H_{IJ}}, \qquad \varepsilon_i \Gamma_{\varepsilon,\varepsilon^*} = \mathrm{L}_i;$$
$$\Gamma_{\varepsilon(\mathrm{I}),\varepsilon(\mathrm{I}')^*} \triangleq \mathrm{K_I}, \qquad \Gamma_{\varepsilon(\mathrm{I,J}),\varepsilon(\mathrm{I',J'})^*} \triangleq \mathrm{K_{IJ}}.$$

Si, de plus, $n=4p+1$ ou $4p+2$, le groupe $\mathbf{Sp}(1)\times\mathbf{Spin}(2n+1)$ se présente. Son algèbre de Lie s'obtient en ajoutant aux composantes précédentes les suivantes :

$$\Gamma_{\varepsilon,\varepsilon^*} = \Gamma_{\varepsilon',\varepsilon'^*} = \xi, \qquad \Gamma_{\varepsilon,\varepsilon'} = -\Gamma_{\varepsilon^*,\varepsilon'^*} = \eta, \qquad \Gamma_{\varepsilon,\varepsilon'^*} = -\Gamma_{\varepsilon',\varepsilon^*} = \zeta.$$

Pour obtenir l'algèbre de Lie de $\mathbf{T}^1\times\mathbf{Spin}(2n+1)$, il suffit de faire $\eta=\zeta=0$.

6. **Groupes isomorphes à $\mathbf{SO}(2n)$ ($n\geqq 4$).** — *Notations* :

Celles du n° 5, plus :

$\mathbf{SO}^*(2n)$: groupe réel défini dans [9], p. 173, lignes 10 et suivantes;

$\mathbf{Spin}^*(2n)$: structure réelle de $\mathbf{Spin}(2n, \mathrm{C})$ et de même structure réelle que $\mathbf{SO}^*(2n)$.

A. *Groupes provenant de* $\mathfrak{g}_3(\mathbf{SO}(2n))=\mathbf{SO}(2n)$. — 1° $\mathfrak{g}_3$ a la même structure de groupe linéaire que $\mathfrak{g}_2(\mathbf{SO}(2n+1))$. Si $\gamma=\hat{\mathfrak{g}}_3$, Γ est formée des matrices antisymétriques satisfaisant aux seules relations (17).

2° $g_3^{(h)}$ donne naissance au groupe que nous avons désigné au chapitre I, n° 8, par $\mathbf{SO}^h(2n)$. Γ est formée de toutes les matrices antisymétriques.

3° *Le groupe* g_3 est de 2[e] classe, d'indice -1, mais ne laisse pas de 2-forme extérieure invariante (chap. I, n° 1, remarque 1). C'est le plus grand sous-groupe connexe de $\mathrm{GL}(2n, \mathrm{C})$ qui laisse invariante la forme quadratique $\sum_i z_i z_{i'}$ (i' est noté $-i$ dans [9]) et la forme d'Hermite $\sum_i (z_i\bar{z}_i - z_{i'}\bar{z}_{i'})$. Si l'on exprime ces conditions par les formules (1) et (3) du chapitre I, on trouve pour Γ l'ensemble des matrices antisymétriques satisfaisant aux seules conditions

$$(22)\quad \begin{cases} \Gamma_{lm} = -\Gamma_{l'm'}, & \Gamma_{lm'} = \Gamma_{l'm}, \quad \Gamma_{lm^*} = \Gamma_{l'm'^*}, \quad \Gamma_{lm'^*} = -\Gamma_{l'm^*}, \\ \Gamma_{\mathrm{LM}} = \Gamma_{\mathrm{L^*M^*}}, & \Gamma_{\mathrm{LM^*}} + \Gamma_{\mathrm{L^*M}} = 0, \quad \text{où } \mathrm{L, M} = l, m, \ldots, l', m' \ldots. \end{cases}$$

Ce groupe sera noté $\mathbf{SO}^*(2n)$. L'algèbre de Lie de $\mathbf{T}^1\times\mathbf{SO}^*(2n)$ s'obtient comme indiqué au n° 1. A, formules (3).

B. *Groupes provenant de* $\mathfrak{g}_p(\mathbf{SO}(2n))(4 \leqq p \leqq n)$. — On a ([7], p. 34-35) $\mathfrak{g}_p = \overset{p-2}{\wedge} \mathfrak{g}_3$.

1° $\gamma = \hat{\mathfrak{g}}_p$. — Formules (10) du n° 3.

2° Cas identique au n° 5. B, 2°, formules (18).

3° Le groupe g_p est d'indice $(-1)^p$ pour l'antiinvolution

$$Z_{r_1 \ldots r_k r'_{k+1} \ldots r'_{p-2}} = (-1)^k \bar{Z}_{r'_1 \ldots r'_k r_{k+1} \ldots r_{p-2}}.$$

S'il est de 2^e classe, il est défini par les formules (10) du n° 3. L'algèbre de Lie de $\mathbf{T}^1 \times g_p$ s'obtient facilement. S'il est de 1re classe, l'antiinvolution précédente et les formules (8) du chapitre I permettent de calculer Γ.

C. *Groupes provenant de* $\mathfrak{g}_1(\mathbf{SO}(2n)) = \mathbf{Spin}(2n, C)$ ([7], p. 38 et [9], p. 172-173) ($\mathfrak{g}_2$ étant le groupe conjugué de $\mathfrak{g}_1$, nous n'en parlerons pas, sauf au 3°). 1° $\mathfrak{g}_1$ n'est autre que $\mathbf{Spin}(2n, C)$. Il laisse invariante la forme quadratique (notations du n° 5. C), mais ici $\Pi_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n} = -1$) :

$$\sum_{\varepsilon} (\varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_5 \ldots) z_\varepsilon z_{\varepsilon'}, \qquad \text{si} \quad n = 4p.$$

Il laisse invariante la 2-forme extérieure

$$\sum_{\varepsilon} (\varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_5 \ldots) z_\varepsilon \wedge z_{\varepsilon'}, \qquad \text{si} \quad n = 4p + 2.$$

Si donc $n = 4p$, on a pour Γ les formules (20) du n° 5, en y faisant $H_1 = K_1 = 0$. Si $n = 4$, $\mathfrak{g}_1(\mathbf{SO}(8)) = \mathfrak{g}_3(\mathbf{SO}(8))$ et il est superflu de le considérer.

2° ([9], p. 172). Nous noterons $\mathbf{Spin}^h(2n)$ le groupe g_1 de même structure réelle que $\mathbf{SO}^{n-h}(2n)$ ($\mathbf{Spin}^n(2n) = \mathbf{Spin}(2n)$). Il n'est autocorrélatif que si h est pair et alors, d'indice $(-1)^{\frac{h}{2}}$. Le groupe $\mathbf{Spin}^0(2n)$ est toujours de 1re classe et n'est donc à considérer, d'après le 1°, que si $n = 4p$; il est obtenu en prenant des formules (20), les composantes sans ★ et en y faisant $H_1 = 0$. Si l'on recherche une forme d'Hermite invariante par $\mathbf{Spin}^h(2n)$, on trouve par la même méthode qu'au n° 5

$$\sum_{\varepsilon,\eta} \lambda(\varepsilon\eta) z_{\varepsilon\eta} \bar{z}_{\varepsilon\eta'} \qquad \text{si} \quad (n-h) \text{ pair}.$$

En résumé, nous n'obtiendrons un groupe de rotations :

a. de 1re classe, que si $n = 4p$ et $h = 4q$;

b. de 2^e classe, que si (h impair, n impair ou $n = 4p$) ou (n pair, $h = 4q + 2$).

Le groupe correspondant $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Spin}^h(2n)$ ne se présentera alors que pour $n = 4p + 2$ et $h = 4q + 2$.

3° On obtient (*cf.* notations du n° 5) deux groupes g_1 et g_2 que l'on note $\mathbf{Spin}^*(2n)$. Ils laissent invariante une forme d'Hermite du type

$$\sum_{\varepsilon} \lambda(\varepsilon) z_\varepsilon \bar{z}_\varepsilon.$$

Si n est impair, $\mathbf{Spin}^*(2n)$ est de 2^e classe et son algèbre de Lie est, au signe près, la même que celle de $\mathbf{Spin}(2n)$.

Si n est pair, $\mathbf{Spin}^*(2n)$ est autocorrélatif et alors : g_1 est toujours d'indice -1, g_2 est toujours d'indice $+1$. Et g_2 est à considérer si $n = 4p$; son algèbre de Lie est, à des signes près, celle de $\mathbf{Spin}(2n)$.

g_1 est toujours à considérer et le cas $\mathbf{Sp}(1) \times g_1$ se présente si $n = 4p + 2$. Les algèbres de Lie s'obtiennent à partir du n° 5.

7. Groupes exceptionnels. — Nous n'aurons besoin dans le chapitre III (*cf.* prop. 3 de ce chapitre) que des groupes fondamentaux suivants :

$$\mathfrak{g}_1(\mathbf{E}_6) - \mathfrak{g}_2(\mathbf{E}_6) - \mathfrak{g}_1(\mathbf{E}_7) - \mathfrak{g}_2(\mathbf{E}_7) - \mathfrak{g}_1(\mathbf{E}_8) - \mathfrak{g}_1(\mathbf{F}_4) - \mathfrak{g}_1(\mathbf{G}_2) - \mathfrak{g}_2(\mathbf{G}_2).$$

On vérifie facilement en effet que, quel que soit $\mathfrak{g}$, fondamental exceptionnel, on a l'inclusion $\langle \mathfrak{g} \rangle \supset \langle \mathfrak{h} \rangle$, où $\mathfrak{h}$ est l'un des huit groupes précédents, convenablement choisi [7].

Nous indiquerons rapidement les algèbres de Lie de quelques-uns des groupes de rotations que les groupes précédents engendrent, dans le cas d'une forme définie positive pour des raisons de simplicité; excepté pour $\mathbf{G}_2$ qui donnera deux groupes possibles au chapitre III.

A. $\mathfrak{g}_1(\mathbf{E}_6)$. — Ce groupe est la structure complexe $\mathbf{E}_6$ telle qu'elle est donnée dans [5] (p. 142). Ce groupe n'admet pas de forme quadratique invariante, car $\langle -\mathfrak{g}_1 \rangle \not\subset \langle \mathfrak{g}_1 \rangle$. Parmi les structures réelles de $\mathfrak{g}_1$, il y en a trois qui laissent invariante une forme d'Hermite et donnent naissance à un groupe de rotations; ils sont toujours de 2^e classe. Dans le cas défini positif, par exemple, on obtient l'algèbre de Lie Γ de g à l'aide de [5] (p. 142). On trouve ainsi les seules composantes non nulles

$$\begin{gathered}
\Gamma_i^{i*} = \Gamma_{i'}^{i'*} = \Gamma_{lm}^{(lm)*} = \lambda_i, \qquad \Gamma_i^{i'} = \lambda_0, \qquad \Gamma_i^{i'*} = \mu_0, \\
\Gamma_i^{j} = \Gamma_{i'}^{j'} = -\Gamma_{il}^{jl} = \lambda_{ij}, \qquad \Gamma_i^{j*} = \Gamma_{i'}^{j'*} = -\Gamma_{il}^{(jl)*} = \mu_{ij}, \\
\Gamma_a^{bc} = \Gamma_b^{ca} = \Gamma_c^{ab} = \Gamma_{d'}^{ef} = \Gamma_{e'}^{fd} = \Gamma_{f'}^{de} = \lambda_{abc}, \\
\Gamma_a^{(bc)*} = \Gamma_b^{(ca)*} = \Gamma_c^{(ab)*} = \Gamma_{d'}^{(ef)*} = \Gamma_{e'}^{(fd)*} = \Gamma_{f'}^{(de)*} = \mu_{abc}, \qquad \text{où} \quad \varepsilon_{123456}^{abcdef} = 1
\end{gathered}$$

(les notations sont les suivantes : $z_i = x_i$ de [5], $z_{i'} = y_i$ de [5]). Les composantes purement covariantes sont identiques, la forme d'Hermite invariante par le groupe considéré étant

$$\sum_i (\bar{z}_i z_i + z_{i'} \bar{z}_{i'}) + \sum_{i,j} z_{ij} \bar{z}_{ij}$$

B. $\mathfrak{g}_2(\mathbf{E}_6)$. — 1° $\mathfrak{g}_2(\mathbf{E}_6)$ est le groupe adjoint complexe de la structure complexe $\mathbf{E}_6$. Son algèbre de Lie est fournie par les constantes de structure de $\mathbf{E}_6$. ([5], p. 90). Ce groupe laisse invariante la forme quadratique

$$\sum_{i,j,k} z_{ijk} z_{i'j'k'} + \sum_{i,j} z_{ij} z_{ji} + z_0 z_{0'},$$

où l'on a posé

$$X_{000} = z_0, \qquad X_{000'} = z_{0'}, \qquad X_{ij} = z_{ij}, \qquad X_{ijk} = z_{ijk}, \qquad X_{ijk} = z_{i'j'k'},$$

d'où les composantes purement covariantes de l'algèbre de Lie de $\hat{\mathfrak{g}}_2$ à l'aide des formules (37) de [5] (p. 90).

2° Les structures réelles de $\mathfrak{g}_2(\mathbf{E}_6)$ sont toutes d'indice 1, pour les antiinvolutions mêmes qui servent à les définir. Celles-ci sont explicitées dans [8] (p. 307, form. (18) et p. 312, bas de la page). Il y a en plus le groupe consistant dans la forme réelle *normale* ([8], p. 263) de $\mathfrak{g}_2(\mathbf{E}_6)$. A l'aide de ces antiinvolutions, on obtient facilement les composantes non nulles des Γ.

C. $\mathfrak{g}_2(\mathbf{E}_7)$. — C'est la structure complexe $\mathbf{E}_7$ telle qu'elle est donnée dans [5] (p. 143). Ce groupe n'admet pas de forme quadratique invariante car il en admet une extérieure. Parmi les structures réelles de $\mathfrak{g}_2$, il y en a deux qui laissent invariante une forme d'Hermite; ils sont autocorrélatifs d'indice — 1, pour l'antiinvolution

$$Z_i = \bar{z}_{i'}, \qquad Z_{i'} = -\bar{z}_i, \qquad Z_{ik} = \bar{z}_{i'k'}, \qquad Z_{i'k'} = -\bar{z}_{ik},$$

et laissent invariante la 2-forme extérieure provenant de $\mathfrak{g}_2(\mathbf{E}_7)$. Les notations employées sont déduites de celles de [5] en posant

$$z_i = x_i, \qquad z_{i'} = y_i, \qquad z_{ik} = x_{ik}, \qquad z_{i'k'} = y_{ik}.$$

Dans le cas défini positif, on obtient, à l'aide de [5] (p. 143), les composantes non nulles de Γ

$$\Gamma_i^{i^*} \triangleq \Gamma_{i'}^{i'^*} \triangleq \Gamma_{lm}^{(lm)^*} \triangleq \Gamma_{l'm'}^{(l'm')^*} = \nu_i, \qquad \Gamma_{l'}^{il} \triangleq \Gamma_{i'l'}^{l} = \lambda_i, \qquad \Gamma_{i'}^{il^*} \triangleq \Gamma_{i'l'}^{l^*} = \mu_i;$$

$$\Gamma_i^{j} \triangleq \Gamma_{i'}^{j'} \triangleq \Gamma_{il}^{jl} \triangleq \Gamma_{i'l'}^{j'l'} = \lambda_{ij}, \qquad \Gamma_i^{j^*} \triangleq \Gamma_{i'}^{j'^*} \triangleq \Gamma_{il}^{(jl)^*} \triangleq \Gamma_{i'l'}^{(j'l')^*} = \mu_{ij};$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_i^{j'k'} = \Gamma_{lm}^{p'q'} = \lambda_{ijk}, \qquad \Gamma_{ij}^{k^*} = \Gamma_i^{(j'k')^*} = \Gamma_{lm}^{(p'q')^*} = \mu_{ijk}; \qquad \varepsilon_{ijklmpq}^{1234567} = 1.$$

Les composantes purement covariantes ne diffèrent pas de celles indiquées. L'algèbre de Lie de $\gamma \times \mathbf{Sp}(1)$ s'obtient en ajoutant les composantes

$$\Gamma_i^{i^*} = \Gamma_{i'}^{i'^*} = \Gamma_{ij}^{(ij)^*} = \Gamma_{i'j'}^{(i'j')^*} = \xi, \qquad \Gamma_i^{i'} = \Gamma_{ij}^{i'j'} = -\Gamma_{i^*}^{i'^*} = -\Gamma_{(ij)}^{(i'j')^*} = \eta,$$

$$\Gamma_i^{i'^*} = -\Gamma_{i'}^{i^*} = +\Gamma_{ij}^{(i'j')^*} = -\Gamma_{i'j'}^{(ij)^*} = \zeta \qquad \text{et} \qquad \eta = \zeta = 0 \quad \text{pour } \mathbf{T}^1 \times \gamma.$$

D. $\mathfrak{g}_1(\mathbf{E}_7)$. — 1° $\mathfrak{g}_1(\mathbf{E}_7)$ est le groupe adjoint complexe de la structure $\mathbf{E}_7$. Son algèbre de Lie est fournie par les constantes de structure de $\mathbf{E}_7$ ([5], p. 91). Ce groupe laisse invariante la forme quadratique

$$\sum_{i,j,k} z_{ijk} z_{i'j'k'} + \sum_{i,k} z_{ik} z_{ki} + \sum_{i} z_i z_{i'},$$

où l'on a posé

$$X_{ooi} = z_i, \qquad X'_{ooi} = z_{i'}, \qquad X_{ij} = z_{ij}, \qquad X_{ijk} = z_{ijk}, \qquad X'_{ijk} = z_{i'j'k'};$$

d'où les composantes purement covariantes de l'algèbre de Lie de $\hat{\mathfrak{g}}_1$ à l'aide des formules (40) de [5] (p. 91).

2° On procède comme au B, 2°, en utilisant, [8] [form. (14), p. 326; form. (16), p. 327; form. (17), p. 328].

E. $\mathfrak{g}_1(\mathbf{E}_8)$. — $\mathfrak{g}_1(\mathbf{E}_8)$ est le groupe adjoint complexe de la structure $\mathbf{E}_8$. Son algèbre de Lie est définie par les constantes de structure de $\mathbf{E}_8$ ([5], p. 92). Ce groupe laisse invariante la forme quadratique

$$\sum_{i,j,k} z_{ijk} z_{i'j'k'} + \sum_{i,j} z_{ij} z_{ji},$$

où l'on a posé

$$X_{ij} = z_{ij}, \qquad X_{ijk} = z_{ijk}. \qquad X'_{ijk} = z_{i'j'k'},$$

ce qui permet de calculer les composantes purement covariantes de l'algèbre de Lie de $\hat{\mathfrak{g}}_1$ à l'aide des formules (41) de [5] (p. 92).

2° Les trois structures réelles de $\mathfrak{g}_1$ laissent invariantes des formes d'Hermite et sont de 1re classe pour les antiinvolutions mêmes qui servent à les définir. Celles-ci sont données [8] [p. 342, form. (19) et p. 343, form. (20)]. Dans le cas défini positif, on obtient ainsi pour les composantes non nulles de Γ, en posant $\mathcal{J}(z_{\lambda\lambda}) = x_\lambda\ (\lambda = 1, 2, \ldots, 8)$,

$$z_{ij} = x_{ij} + i x_{i'j'} \qquad \text{si} \quad i < j$$

et

$$z_{ji} = -x_{ij} + i x_{i'j'} \qquad \text{si} \quad i > j,$$

$$z_{ijk} = x_{ijk} + i x_{i'j'k'}, \qquad z_{i'j'k'} = -x_{ijk} + i x_{i'j'k'},$$

les suivantes :

$$\Gamma^{i'l'}_{i\,l} \mathrel{\hat{\hat{=}}} \Gamma^{m'i'}_{m\,i} \mathrel{\hat{\hat{=}}} \Gamma^{l'm'n'}_{l\,m\,n} = \nu_i, \qquad \text{où} \quad \varepsilon^{ijklmnpqr}_{123456789} = 1,$$

$$\Gamma^{i'j'}_{\lambda} = \Gamma^{jl}_{il} = \Gamma^{mj}_{im} = \Gamma^{nj}_{ni} = \Gamma^{jlm}_{ilm} = \lambda_{ij}, \qquad \Gamma^{i'j'k'}_{\lambda} = \Gamma^{jkl}_{il} = \Gamma^{mjk}_{mi} = \Gamma^{pqr}_{lmn} = \lambda_{ijk},$$

$$\Gamma^{ij}_{\lambda} = \Gamma^{j'l'}_{i\,l} = \Gamma^{m'j'}_{im} = \Gamma^{n'j'}_{n\,i} = \Gamma^{j'l'm'}_{i\,l\,m} = \mu_{ij}, \qquad \Gamma^{ijk}_{\lambda} = \Gamma^{j'k'l'}_{il} = \Gamma^{m'j'k'}_{mi} = \Gamma^{p'q'r'}_{l\,m\,n} = \mu_{ijk}.$$

Ces composantes sont identiques aux composantes purement covariantes.

F. $\mathfrak{g}_1(\mathbf{F}_4)$. — 1° $\mathfrak{g}_1(\mathbf{F}_4)$ est la structure complexe $\mathbf{F}_4$ telle qu'elle est donnée dans [5] (p. 145). Ce groupe laisse invariante une forme quadratique, d'où les composantes purement covariantes pour $\hat{\mathfrak{g}}_1$ à partir des formules (27) de [5](p. 145).

2° Les structures réelles de $\mathfrak{g}_1(\mathbf{F}_4)$ sont toutes d'indice 1. Même méthode qu'au E : formules de [5] (p. 145) et dans [8] [p. 351, form. (14); p. 352, form. (15)].

G. $\mathfrak{g}_1(\mathbf{G}_2)$. — 1° $\mathfrak{g}_1(\mathbf{G}_2)$ est indiquée dans [5] (p. 146). Il laisse invariante

$$z_0^2 + z_1 z_{1'} + z_2 z_{2'} + z_3 z_{3'} \quad (\text{à partir de [5]} : \ z_0 = z, \quad z_i = x_i, \quad z_{i'} = y_i),$$

d'où l'algèbre de Lie cherchée avec [5] [p. 146, form. (30)]. Ce groupe sera noté $\mathbf{G}_2(\mathrm{C})$.

2° $\mathfrak{g}_1(\mathbf{G}_2)$ admet deux structures réelles, que nous noterons $\mathbf{G}_2$ et $\mathbf{G}_2^*$. On a

$$\mathbf{G}_2 \subset \mathbf{SO}(7) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{G}_2^* \subset \mathbf{SO}^3(7).$$

D'après [8] (p. 297-298), les composantes purement covariantes de $\mathbf{G}_2$ ou $\mathbf{G}_2^*$ sont formées des matrices antisymétriques satisfaisant aux seules conditions

$$(23) \qquad \Gamma_{i+1,i+5} + \Gamma_{i+2,i+3} + \Gamma_{i+4,i+6} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 7 \text{ et réduction mod } 7).$$

H. $\mathfrak{g}_2(\mathbf{G}_2)$. — 1° $\mathfrak{g}_2(\mathbf{G}_2)$ est le groupe adjoint de la structure complexe $\mathbf{G}_2$. Son algèbre de Lie est définie par les constantes de structure de $\mathbf{G}_2$ ([5], p. 93). Il laisse invariant une forme quadratique. On calcule facilement son algèbre de Lie.

2° Les structures réelles de $\mathfrak{g}_2(\mathbf{G}_2)$ s'étudient comme celles rencontrées précédemment ([8], p. 296, form. (11)).

CHAPITRE III.

Groupes d'holonomie homogène restreints des variétés munies d'une métrique indéfinie.

Ce chapitre contient l'objet essentiel de cette Thèse, qui est la détermination des groupes d'holonomie homogène restreints σ possibles pour une variété munie d'une métrique de signature quelconque. Le théorème 1 permet de se ramener au cas où σ est irréductible, c'est-à-dire que l'algèbre de Lie Σ de σ est celle d'un groupe de rotations. En exprimant que le tenseur de courbure R et sa dérivée covariante ∇R : 1° appartiennent à Σ pour les deux premiers indices; 2° vérifient les identités classiques; on s'aperçoit alors, dans les n^{os} 2 à 8, que $\nabla R = 0$, sauf pour un nombre très restreint de groupes : on obtient ainsi le théorème 3 du n° 9. D'autre part, les σ des variétés pour lesquelles $\nabla R = 0$ sont connus dans le cas riemannien [11]. Signalons que notre méthode permettrait de les retrouver, en recherchant les Σ pour lesquelles $R \neq 0$ (nous indiquons rapidement au n° 10 comment l'on peut procéder pour ce faire). Plus généralement, on peut ainsi déterminer les groupes d'holonomie homogène restreints d'une variété munie d'une connexion affine *sans torsion* : nous donnons dans le n° 11 la liste de ceux pour lesquels la variété correspondante est à $\nabla R \neq 0$.

Incidemment, les calculs faits au chapitre II fournissent *à vue* les groupes de Lie transitifs et effectifs sur les quadriques réelles qui sont *induits par un groupe linéaire*. Nous les indiquons dans le théorème 4 du n° 12.

La méthode suivie étant analogue dans la majorité des cas, nous ne donnerons le détail des calculs que dans quelques-uns, typiques, d'entre eux (*voir* surtout n° 2.A) et, de plus, résumerons à la fin de chaque numéro les groupes « non éliminés », afin de faciliter la lecture.

1. Définitions. Généralités. — 1° La notion de groupe d'holonomie remonte à [10]. Nous utiliserons ici les notations et les définitions de [4], que nous rappellerons brièvement. Il s'agit essentiellement d'une variété différentiable de classe C^1, de dimension m, munie d'une métrique de signature h, ce qui signifie que cette métrique est réductible, dans chaque carte de la variété, à

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_{m-h}^2 - \omega_{m-h+1}^2 - \ldots - \omega_m^2,$$

où les ω_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) sont des formes de Pfaff convenablement choisies L'entier h est alors constant sur toute la variété; h sera aussi dit la signature de la variété, que nous désignerons par V_m^h. Ainsi V_m^0 désigne une variété *riemannienne*.

Le développement le long d'un chemin de V_m^h, différentiable par morceaux, permet de représenter le groupoïde des lacets (resp. homotopes à l'identité) de V_m^h, d'origine x, dans le groupe $\mathbf{O}^h(m)$ [resp. $\mathbf{SO}^h(m)$]. L'image de cette représentation est un groupe Ψ_x (resp. σ_x), appelé groupe d'holonomie homogène (resp. restreint). Par abréviation Ψ (resp. σ) sera écrit g.h.h. (resp. g.h.h.r.). Un arc quelconque joignant deux points x et y de V_m^h définissant par développement un isomorphisme entre Ψ_x et Ψ_y (resp. σ_x et σ_y), nous omettrons le plus souvent l'indice x dans Ψ et σ, supposant implicitement choisi un point de V_m^h.

Proposition 1 (Borel-Lichnerowicz [4]). — *Si f est l'application $\Pi_1(V) \to \Psi/\sigma$, et $V_m'^h$ le revêtement de V_m^h de groupe structural $f^{-1}(o)$, muni de la métrique induite par la projection, alors le groupe d'holonomie homogène de $V_m'^h$ est σ.*

En particulier, même si l'on ne connaît pas f, on est toujours assuré que le g.h.h. du revêtement universel $\tilde{V}_m^h$ de V_m^h est σ.

2° Une variété V_m^h sera dite localement (resp. globalement) réductible (resp. irréductible) si σ (resp. Ψ) est réductible (resp. irréductible) en tant que groupe linéaire. La proposition 1 entraîne alors que si V_m^h est localement réductible, alors $V_m'^h$ l'est globalement.

Théorème 1 (Borel-Lichnerowicz [4]). — *Si V_m^h est localement réductible, σ est un produit direct de groupes σ_i irréductibles, correspondants aux sous-espaces stables pour σ.*

Pour étudier σ sur V_m^h, nous pourrons donc supposer σ irréductible; σ sera donc ce que nous avons appelé au chapitre I, n° 8, un *groupe de rotations* : en effet, il laisse invariante la forme quadratique définissant la métrique de V_m^h, il est irréductible, connexe et d'après [1] (p. 440), c'est un groupe de Lie. Dans les n^{os} 2 à 8 de ce chapitre nous supposerons V_m^h *simplement connexe*, σ *irréductible.*

3° A partir d'un repère donné $\{\mathbf{e}_i\}$ en x et tel que $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \sigma_{ij}$ (pour la métrique $\Sigma_{i,j}\sigma_{ij}x_ix_j$ donnée), on déduit par transport parallèle le long de tous les chemins différentiables par morceaux, des repères sur V_m^h qui forment un espace fibré principal Ω_x, de base V_m^h, de groupe σ_x (V_m^h est, en effet supposée simplement connexe). Nous ne considérerons dans toute la suite (n^{os} 2 à 8) sur V_m^h que des corepères $\{\omega_i\}$, duaux de repères mobiles appartenant à Ω_x.

Si σ est réalisé dans $\mathbf{SO}^h(m)$ comme un groupe linéaire dont les variables peuvent être notées de façon particulière (par exemple $x_{p\pi}$, $p = 1, \ldots, n$, $\pi = 1, \ldots, \nu$ et $m = n\nu$), alors tous les indices des repères mobiles $\{\mathbf{e}_i\}$ de Ω_x pourront être notés de cette même façon, ainsi que tous les indices des corepères $\{\omega_i\}$ et ceux de tenseurs quelconques, définis pour les mêmes repères mobiles; en particulier, le tenseur de courbure et sa dérivée covariante (dans le cas de l'exemple ci-dessus : $R_{a\alpha, b\beta, c\gamma, d\delta}$ et $\nabla_{p\pi}R_{a\alpha, b\beta, c\gamma, d\beta}$). De même pour les coefficients de rotation.

Désormais, V_m^h sera *supposé de classe* C^3, afin de pouvoir définir le tenseur de courbure et sa dérivée covariante.

Proposition 2 (Nijenhuis [15]. — *Le tenseur de courbure* $R_{i}{}^{j}{}_{,kh}(\omega)$ *et sa dérivée covariante* $\nabla_m R_{i}{}^{j}{}_{,kh}(\omega)$, *pour un point* $\omega \in \Omega_x$, *appartiennent, quels que soient* k, h, m, *à l'algèbre de Lie* Σ *de* σ_x, *pour les indices* i *et* j.

Pratiquement, afin de pouvoir utiliser la formule (1) ci-dessous, nous appliquerons cette proposition pour les $R_{ij,kh}=\sum_r \sigma_{jr} R^r_{i,kh}$ et les $\Sigma_{ij}=\sum_r \sigma_{jr}\Sigma^r_i$.

Théorème 2 (Ambrose et Singer [1]). — Σ *est engendrée par les* $R^j_{i,kh}(\omega)$, *où* i, j, k, h *parcourent* 1, ..., m *et* ω *parcourt* Ω_x.

Rappelons encore les identités classiques

$$R_{ij,kh}=R_{kh,ij}, \tag{1}$$

$$R_{ij,kh}+R_{ik,hj}+R_{ih,jk}=0, \tag{2}$$

$$\nabla_r R_{ij,kh}+\nabla_k R_{ij,hr}+\nabla_h R_{ij,rk}=0. \tag{3}$$

4° Nous appellerons *localement symétrique* une variété V^h_m dont le tenseur de courbure est à dérivée covariante nulle, ce que nous écrirons par abréviation : soit $\nabla R=0$, soit V^h_m est L. S. La notation $V^h_m(\sigma)$ désignera une variété V^h_m dont le g.h.h.r. est σ.

Proposition 3. — *Soit* γ *et* γ' *deux groupes de rotations tels que les groupes correspondants* C-*linéaires* g *et* g' *vérifient l'inclusion* $\langle g\rangle \subset \langle g'\rangle$. *Alors* $V(\gamma)$ *est* L. S. *entraîne* $V(\gamma')$ *est* L. S.

Démonstration. — D'après la proposition 2 du chapitre II, γ et γ' sont de même classe. Supposons-les d'abord de 2ᵉ classe : on a, puisque $\Gamma^j_i=\mathcal{R}(G^j_i)$, ..., $\Gamma^j_j \triangleq \Gamma^J_I$ (prop. 2, du chap. II). Donc, successivement,

$$\Gamma_{IJ}=\sum_L \gamma'_{JL}\Gamma^L_I \triangleq \sum_L \gamma'_{JL}\Gamma^l_i=\sum_{L,m}\gamma'_{JL}\gamma_{lm}\Gamma_{mi}=C(\Gamma_{ij}),$$

où le signe C désigne une combinaison linéaire au sens du signe $\triangleq$. On en déduit successivement

$$\nabla_P R_{LM,KH}=C(\nabla_P R_{LM,kh})=C(\nabla_P R_{kh,pq})=C(\nabla_k R_{ph,pq})=C(\nabla_h R_{pq,lm})=0$$

et l'on procède de même pour les composantes comportant des indices étoilés.

Supposons maintenant γ et γ' de 1ʳᵉ classe. Les formule, (8) du chapitre I permettent de calculer les G^J_I en fonction des Γ^J_I. Et l'on procède alors comme pour la 2ᵉ classe :

$$\Gamma_{IJ}=\sum_L \gamma_{IL}\Gamma^L_J \triangleq \sum_L \gamma_{IL}(S^L_J+\varepsilon_L S^{L'}_J) \triangleq \sum_L \gamma_{IL}(S^l_j+\varepsilon_l S^{l'}_j)=C(\Gamma_{ij}, \ldots).$$

5° Cherchons à déterminer les groupes h. h. r. σ, possibles pour une variété V^h_m. Nous avons vu au 2° que l'on peut supposer que σ est un groupe de rotations. Son algèbre de Lie est alors d'un des types explicités au chapitre II. Dans les nᵒˢ 2 à 8 qui suivent nous allons reprendre les formules correspondantes du chapitre II; et, compte tenu de la proposition 2, montrer que les relations (1), (2), (3) entraînent que $\nabla R = 0$ pour « presque tous » les groupes de rotations. Les groupes faisant exception seront donc les σ possibles pour une V_m^h non L. S. Ils seront résumés à la fin de chaque numéro, puis dans le théorème 3.

Nous reviendrons au n° 10 sur les variétés pour lesquelles $\nabla R = 0$.

2. **Groupes non simples.** — A. 2e *classe, non produit de deux groupes conjugués.* — Considérons une composante, sans indices étoilés, du tenseur de courbure $R_{a\alpha, b\beta, c\gamma, d\delta}$. D'après la proposition 2 de ce chapitre et les formules (2) du chapitre II, dont nous conserverons les notations, une telle composante *non nulle* est de la forme $R_{a\lambda, b\lambda', c\gamma, d\delta}$. Supposons d'abord $a \neq b'$. Cette composante est alors indépendante de λ [form. (2) du chapitre II]. Choisissons $\lambda \neq \gamma'$, δ' ce qui nécessite $\nu > 2$. La relation (2) (de ce chapitre) entraîne que $R_{a\lambda, b\lambda', c\gamma, d\delta} = 0$ si $a \neq c'$ et $a \neq d'$. Échangeons les rôles de b et a : $R_{a\lambda, b\lambda', c\gamma, d\delta} = 0$ si $b \neq c'$ et $b \neq d'$. Les seules composantes considérées non nulles sont donc de la forme $R_{a\lambda, b\lambda', a'\mu, b'\mu'}$. Si $a = b'$, la composante $R_{a\lambda, a'\lambda', c\gamma, d\delta}$ n'est plus indépendante de λ (ou de a). Mais des formules (2) du chapitre II, on tire la relation

$$\Sigma_{l\lambda, l'\lambda'} + \Sigma_{m\mu, m'\mu'} = \Sigma_{l\mu, l'\mu'} + \Sigma_{m\lambda, m'\lambda'}. \tag{4}$$

De plus, une composante non nulle de ce type est de la forme $R_{a\lambda, a'\lambda', c\gamma, d\gamma'}$ ou de la forme $R_{a\lambda, a'\lambda', c\gamma, c'\delta}$. On raisonnera comme précédemment et l'on trouvera, *si n ou* $\nu > 2$, $R_{a\lambda, a'\lambda', a\mu, a'\mu'}$ pour seules composantes non nulles du type considéré. On trouve aussi évidemment les composantes $R_{l\alpha, l'\beta, m\alpha', m'\beta'}$.

Considérons maintenant une composante du tenseur dérivée covariante du tenseur de courbure de la forme $\nabla_{l\lambda} R_{a\alpha, b\beta, c\gamma, d\delta}$. La démonstration précédente reste valable pour les quatre indices de R, en vertu de la proposition 2. Soit alors une composante non nulle, avec $a \neq b'$: $\nabla_{p\pi} R_{a\lambda, b\lambda', a'\mu, b'\mu'}$. Prenons $\lambda \neq \pi$; la relation (3) entraîne que cette composante est nulle. Si l'on a $a = b'$, on utilisera la relation (4) et l'on sera ramené au cas précédent; ainsi cette composante est encore nulle.

Cette démonstration subsiste pour les composantes comportant des indices étoilés en nombre quelconque. En conclusion, $\nabla R = 0$ *si n ou* $\nu > 2$.

Si $n = \nu = 2$, il faut d'abord considérer les groupes :

$$\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2), \qquad \mathbf{SU}^1(2) \times \mathbf{SU}(2) = \mathbf{SO}^*(4) \quad ([8], \text{ p. } 353)$$
$$\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SU}^1(2) \times \mathbf{SU}(2) = \mathbf{T}^1 \times \mathbf{SO}^*(4).$$

On montre, pour ces trois groupes, que l'on a encore $\nabla R = 0$. Par contre, le groupe $\mathbf{SL}(2, C) \times \mathbf{SL}(2, C) = \mathbf{SO}(4, C)$ se présente.

Si $n > 1$, $\nu = 1$, l'algèbre de Lie de $\mathbf{T}^1 \times g$ est définie par les formules (3) du chapitre II. Cependant, *g ne peut pas être de* 1re *classe.* Sinon, en effet, l'algèbre de Lie d'un tel groupe s'écrirait

$$\Sigma_{lm} = \Sigma_{l^*m^*} = H_{lm} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_{lm^*} = \xi \delta_l^m,$$

d'où $\nabla R = 0$ à l'aide de la formule (1).

B. 1^{re} *classe, non produit de deux groupes conjugués.* — 1° *Indice commun* $+1$. — La formule $(3)^*$ du chapitre II entraîne $\nabla R = 0$ si n ou $\nu > 2$, d'après la démonstration du A pour les composantes sans indices étoilés. Si $n = \nu = 2$, le seul groupe d'indice $+1$ à deux variables étant $\mathbf{SU}^1(2)$, on trouve le groupe possible

$$\mathbf{SU}^1(2) \times \mathbf{SU}^1(2) = \mathbf{SO}^2(4) \quad ([8], \text{ p. } 353).$$

2° *Indice commun* -1. — Les formules (4) du chapitre II entraînent $\nabla R = 0$ si n ou $\nu > 2$. La démonstration est celle du A, où l'on utilise pour les six séries de composantes (4_b) des formules (4), trois relations analogues à la relation (4) ci-dessus :

— Si $n = \nu = 2$, on trouve $\nabla R = 0$.

— Si $n = 1$, $\nu > 1$, on ne peut rien dire. Nous aurons donc à examiner les algèbres de Lie des groupes de 1^{re} classe $\mathbf{Sp}(1) \times g$ chaque fois qu'ils se présenteront. Leurs algèbres de Lie sont définies par les formules (5) du chapitre II; les groupes possibles ont été précisés au cours du chapitre II (n^{os} 3 à 7).

— Si $n = \nu = 1$, on obtient le groupe $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1) = \mathbf{SO}(4)$.

C. *Produit de deux groupes conjugués* : 2^e *classe.* — Les formules (6) du chapitre II possèdent les propriétés utilisées dans la démonstration du A. On a donc $\nabla R = 0$ toujours [$\mathbf{GL}(1, C)$ ne convient pas].

D. *Produit de deux groupes conjugués* : 1^{re} *classe.* — Les formules (7) du chapitre II ont les propriétés utilisées au A, à une permutation éventuelle des indices près et les indices étoilés étant remplacés par des indices primés. Donc $\nabla R = 0$ si $n \geq 3$. Pour $n = 2$, le seul groupe complexe à deux variables est $\mathbf{SL}(2, C)$ qui donne naissance ([8], p. 353) au groupe $\mathbf{SO}^1(4)$.

Résumé. — 1° On a obtenu les groupes : $\mathbf{SO}(4)$, $\mathbf{SO}^1(4)$, $\mathbf{SO}^2(4)$, $\mathbf{SO}(4, C)$.

2° Les groupes éventuels résiduels étant de l'un des types suivants :

a. $\mathbf{Sp}(1) \times g$, où g satisfait aux conditions indiquées chapitre II n° 1. B.

b. $\mathbf{T}^1 \times g$, où g laisse invariante une forme d'Hermite et *n'est pas de* 1^{re} *classe.*

3. **Groupes semi-fondamentaux.** — D'après ce qui a été dit à la fin du chapitre I (n° 5), il n'y a pas à distinguer si le groupe initial est de 1^{re} ou de 2^e catégorie. Les seuls cas à examiner sont donc les suivants :

A. *s est de 2^e classe et laisse invariante une forme quadratique.* — 1° On a $s = k \times h$ et (chap. I, prop. 2) $\langle s \rangle = -\langle s \rangle$. Montrons d'abord que $\langle h \rangle = -\langle h \rangle$ et $\langle k \rangle = -\langle k \rangle$. En effet, les poids de s sont tels que $\langle s \rangle = \langle h \rangle + \langle k \rangle$ ([7], p. 12), le poids dominant étant (définition dans [7], p. 5) la somme des poids dominants de h et k, soit $a + \alpha$. Il existe a' et α' tels que $a + \alpha = -a' - \alpha'$ et, $a + \alpha$ étant dominant, c'est donc que $a' = -a$, $\alpha' = -\alpha$. Or le poids dominant détermine [7] le groupe linéaire de structure simple, irréductible, s. D'où, en échangeant a et $-a$ (resp. α et $-\alpha$), $\langle h \rangle = -\langle h \rangle$ (resp. $\langle k \rangle = -\langle k \rangle$).

Dans tout le n° 3 nous supposerons *k fondamental* (**R**-fondamental ou **C**-fondamental selon le cas), ce qui est toujours possible.

2° Ceci montré, une composante non nulle, sans indices étoilés du tenseur de courbure s'écrit, d'après le chapitre I (prop. 2 et n° 4.B),

$$\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R}_{a\alpha,-(b\alpha),c\beta,-(d\beta)}$$

et est *indépendante de* α *et* β *si* $a \neq b$, $c \neq d$, ce que nous supposerons dans les 2°, 3°, 4°. En effet, une composante non nulle de S est de la forme $\mathrm{S}_{a\alpha}^{b\alpha}$ et est indépendante de α si $a \neq b$. La forme réduite donnée au chapitre I [n° 1, form. (4)] pour une forme quadratique invariante par s entraîne qu'une composante

$$S_{a\alpha,b\beta} = \Sigma_{l,\lambda} s_{a\alpha,l\lambda} S_{b\beta}^{l\lambda} = \ldots = a\, S_{b\beta}^{-(a\alpha)} \qquad (a \in \mathrm{C})$$

n'est $\neq$ o que si elle s'écrit $\mathrm{S}_{a\alpha,-(b\alpha)}$. D'où la seule forme non nulle R d'après la formule (1) de ce chapitre.

Si l'on applique la formule (2), on en déduit que $\overline{\mathrm{R}}$ est $\neq$ o si, quels que soient α, β, il existe φ, $\eta \in [s]$ tels que :

soit $-c-\beta = a+\alpha+\varphi$, soit $d+\beta = a+\alpha+\eta$.

Supposons $\overline{\mathrm{R}} \neq$ o et $c+a \notin [s]$. En prenant $-\beta = \alpha$, on a donc $2\alpha = d-a-\eta$ et pour $-\alpha$, $-2\alpha = d-a-\eta'$. On en tire

$$\alpha = \frac{\eta-\eta'}{4} \neq 0, \qquad \text{où} \quad \eta,\ \eta' \in [s].$$

Or la liste des poids des groupes fondamentaux (k est supposé fondamental) ne comprend aucun poids de dénominateur 4. Il est alors facile de vérifier que si $\frac{\eta-\eta'}{4}$ est un poids, $\frac{\eta+\eta'}{4}$ l'est aussi, donc $d-a$ aussi. Ainsi $c+a \in [s]$; de même $d-a \in [s]$.

3° Pour que $\overline{\mathrm{R}}$ soit $\neq$ o, il faut donc que, quels que soient α et β, il existe φ, $\eta \in [s]$ tels que :

Soit $-\beta-\varphi_0 = \alpha+\varphi$, soit $\beta+\eta_0 = \alpha+\eta$, où φ_0, $\eta_0 \in [s]$.

On vérifie sur chaque fondamental de chaque structure simple qu'il ne peut en être ainsi que si φ_0 ou η_0 est nul, à l'exception du groupe de structure **SU**(2), de poids ω_1 et $-\omega_1$. En échangeant h et k, on voit donc que l'on aura φ_0 ou $\eta_0 =$ o, sauf dans le cas du groupe $\mathbf{SL}(2, \mathrm{C}) \underline{\times} \mathbf{SL}(2, \mathrm{C}) = \mathbf{SO}(3, \mathrm{C})$ ([8], p. 353). Le groupe $\mathbf{SU}(2) \underline{\times} \mathbf{SU}(2)$ est en effet de 1re classe et ne convient pas dans A.

4° Procédons comme au 2°, 3° mais en échangeant les rôles de a et b. On trouve donc pour seules composantes $\overline{\overline{\mathrm{R}}}$ non nulles : $\mathrm{R}_{a\alpha,-(b\alpha),b\beta,(a\beta)}$. Soit alors

$$\overline{\overline{\mathrm{R}}} = \nabla_{l\lambda} \mathrm{R}_{a\alpha,-(b\alpha),b\beta,-(a\beta)}.$$

Si l'on applique la formule (3), on aura $\overline{\overline{\mathrm{R}}} =$ o en prenant $\alpha \neq \lambda$.

5° Soit une composante non nulle $\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R}_{a\alpha,-(a\alpha),c\beta,-(d\beta)}$. On trouve de même pour $s \neq \mathbf{SO}(3, \mathrm{C})$, qu'elle est du type $\mathrm{R}_{a\alpha,-(a\alpha),a\beta,-(a\beta)}$. Ici $\overline{\mathrm{R}}$ n'est pas indépendante de α ou β. Mais (chap. I, n° 4.B), les $S_{a\alpha,-(a\alpha)}$ sont liées par des relations linéaires en nombre non nul (le rang étant toujours inférieur au nombre des variables). Soit alors

$$\overline{\overline{\mathrm{R}}} = \nabla/\lambda\, \mathrm{R}_{a\alpha,-(a\alpha),a\beta,-(a\beta)}.$$

La remarque précédente et la formule (3) entraînent $\overline{\overline{\mathrm{R}}} = 0$.

6° Tout ce qui précède s'applique sans modification aux composantes étoilées de façon quelconque. En résumé, $\nabla \mathrm{R} = 0$ si $s \neq \mathbf{SO}(3, \mathrm{C})$.

B. *s est de 2ᵉ classe et laisse invariante une forme d'Hermite.* — On procède comme au A. On a d'abord $\langle h \rangle = -\langle \overline{h} \rangle$ et $\langle k \rangle = -\langle \overline{k} \rangle$. Ensuite, $\overline{c} + a \in [s]$ et $\overline{d} - a \in [s]$, car sinon $\mathcal{R}(\alpha) = \frac{\eta - \eta'}{4}$. Finalement, $\overline{c} = -a$ ou $\overline{d} = a$ ....

C. *s est de 1ʳᵉ classse.* — D'après les formules (8) du chapitre I, on doit avoir si $\overline{\mathrm{R}} \neq 0$:

Soit $-c - \beta = a + \alpha + \varphi$, soit $-\overline{c} - \overline{\beta} = a + \alpha + \varphi'$, soit $\overline{d} + \overline{\beta} = a + \alpha + \eta$, soit $\overline{d} + \overline{\beta} = a + \alpha + \eta'$.

De même, on en déduit :

Soit $-c = a + \varphi_0$, soit $-\overline{c} = a + \varphi'_0$, soit $d = a + \eta_0$, soit $\overline{d} = a + \alpha + \eta'_0$; et ensuite, si h ou k ne sont pas $\mathbf{SU}(2)$ ou $\mathbf{SU}^1(2)$: $\varphi_0, \varphi'_0, \eta_0, \eta'_0 = \sigma, \ldots$ $\nabla \mathrm{R}$ est donc nul pour les groupes correspondants, à l'exception

$$\mathbf{SU}(2) \underline{\times} \mathbf{SU}(2) = \mathbf{SO}(3) \quad \text{et} \quad \mathbf{SU}^1(2) \underline{\times} \mathbf{SU}^1(2) = \mathbf{SO}^1(3) \quad ([8], \text{p. } 353).$$

D. $s = \mathbf{Sp}(1) \times (h \underline{\times} k)$. — Ce cas se produit si $k \underline{\times} h$ laisse invariantes une forme d'Hermite, une 2-forme extérieure et est d'indice -1. Les calculs sont plus compliqués et le cas $\mathbf{Sp}(1) \times \left(\overset{3}{\underline{\times}}\, \mathbf{SU}(2)\right)$ est à traiter à part.

Résumé :

$$\mathbf{SO}(3, \mathrm{C}), \quad \mathbf{SO}(3), \quad \mathbf{SO}^1(3).$$

4. Groupes isomorphes à $\mathbf{SU}(n)$ $(n \geq 3)$. — A. $\mathfrak{g}_1(\mathbf{SU}(n))$. — Les seuls groupes possibles (chap. II) sont $\mathbf{SU}^h(n)$, $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SU}^h(n)$, tous les deux inclus naturellement dans $\mathbf{SO}^{2h}(2n)$.

B. $\mathfrak{g}_p(\mathbf{SU}(n))$, $2 \leq p \leq \left[\frac{n}{2}\right]$. — Si $n = 4$, $p = 2$, on trouve ([8], p. 354-355)

$$g_2(\mathbf{SU}(4)) = \mathbf{SO}^3(6), \qquad g_2^{(2)}(\mathbf{SU}(4)) = \mathbf{SO}^2(6);$$
$$g_2^{(3)}(\mathbf{SU}(4)) = \mathbf{SO}^*(6), \qquad g(\mathbf{SU}(4)) = \mathbf{SO}^1(6);$$
$$g_2^{(4)}(\mathbf{SU}(4)) = \mathbf{SO}\ (6), \qquad \hat{\mathfrak{g}}_2(\mathbf{SU}(4)) = \mathbf{SO}\ (6, \mathrm{C}).$$

Soit maintenant $n \leq 5$ et considérons par exemple un groupe défini par les formules (10) du chapitre II. Une composante non nulle et sans indices étoilés du tenseur de courbure correspondant est de la forme

$$\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R}_{ar_1\ldots r_p,\, br_1\ldots r_p,\, cs_1\ldots s_p,\, ds_1\ldots s_p}.$$

Supposons $a \neq b$ et $a \neq c$, d. Si $n \geqq p+3$, on peut choisir les indices $r_2, \ldots, r_p$, $s_2, \ldots, s_p$ — dont $\overline{\mathrm{R}}$ ne dépend pas — de façon à ce que les indices a, c, d, $r_2, \ldots, r_p, s_2, \ldots, s_p$ soient tous différents. La formule (2) entraîne dans ce cas que $\overline{\mathrm{R}} = 0$. On a donc $a = c$ et $b = d$. On procède ensuite comme au n° **2**.A. La condition $n \geqq p+3$ est toujours vérifiée si $n \geqq 5$ et $p \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$. Ainsi, $\nabla \mathrm{R} = 0$.

Ce résultat subsiste pour les formules (12) du chapitre II ou pour une multiplication éventuelle par $\mathbf{T}^1$ ou $\mathbf{Sp}(1)$.

Résumé :

$\mathbf{SU}^h(n)$, $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SU}^h(n)$, $\mathbf{SO}(6, \mathrm{C})$, $\mathbf{SO}(6)$, $\mathbf{SO}^1(6)$, $\mathbf{SO}^2(6)$, $\mathbf{SO}^3(6)$, $\mathbf{SO}^*(6)$.

5. **Groupes isomorphes à $\mathbf{Sp}(n)$ $(n \geqq 1)$.** — A. $\mathfrak{g}_1(\mathbf{Sp}(n))$. — D'après le chapitre II, les seuls groupes à considérer sont les $\mathbf{Sp}^i(n)$, $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{Sp}^i(n)$, $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}^i(n)$, tous les trois inclus dans $\mathbf{SO}^{4i}(4n)$. Étudions les quantités

$$\mathrm{P}^1_{\mathrm{KH}} = \mathrm{R}_{ii^*,\,\mathrm{KH}} + \mathrm{R}_{i'i'^*,\,\mathrm{KH}}$$
$$\mathrm{P}^2_{\mathrm{KH}} = \mathrm{R}_{ii',\,\mathrm{KH}} - \mathrm{R}_{i^*i'^*,\,\mathrm{KH}}$$
$$\mathrm{P}^3_{\mathrm{KH}} = \mathrm{R}_{ii'^*,\,\mathrm{KH}} - \mathrm{R}_{i'i^*,\,\mathrm{KH}}$$

Si $\mathrm{I} \neq \mathrm{K}$, H et $\mathrm{K} \neq \mathrm{H}$ (cette notation signifiant que l'un des i, i^*, i', i'^* n'est pas l'un des k, k^*, k', k'^*, ...), on déduit des formules (13) du chapitre II et (2) du chapitre III que $\mathrm{P}^1_{\mathrm{KH}} = 0$. Ceci subsiste pour tous les couples K, H à l'exception de $\mathrm{P}^1_{jj^*}$ et $\mathrm{P}^1_{j'j'^*}$ (resp. $\mathrm{P}^2_{jj'}$, $\mathrm{P}^2_{j^*j'^*}$ et $\mathrm{P}^2_{jj'^*}$, $\mathrm{P}^3_{j'j^*}$).

Supposons alors $n > 1$. On déduit de la formule (2) de ce chapitre et des formules (13_e), (13_f), (13_g) du chapitre II les relations

$$(5) \qquad \mathrm{P}^1_{ii^*} = \mathrm{P}^1_{i'i'^*} = \mathrm{P}^2_{ii'} = \mathrm{P}^2_{i'^*i^*} = \mathrm{P}^3_{ii'^*} = \mathrm{P}^3_{i^*i'}.$$

Ceci entraîne que $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{Sp}^i(n)$ ne peut pas être un groupe d'holonomie homogène restreint si $n > 1$. En effet, l'on aurait [form. (13_b), (13_d) du chapitre II]

$$\mathrm{P}^2_{\mathrm{KH}} = \mathrm{P}^3_{\mathrm{KH}} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{P}^1_{\mathrm{KH}} = 0,$$

ceci en tout point de l'espace fibré Ω du n° **1** et pour tous les couples K, H; ce qui contredit le théorème **2**.

B. $\mathfrak{g}_p(\mathbf{Sp}(n))$. — Si $n = 2$, $p = 2$, on trouve d'après [8] (p. 354)

$$g_2(\mathbf{Sp}(2)) = \mathbf{SO}^2(5), \qquad g_2^{(1)}(\mathbf{Sp}(2)) = \mathbf{SO}^1(5), \qquad g_2^{(2)}(\mathbf{Sp}(2)) = \mathbf{SO}(5),$$
$$\mathfrak{g}_2(\mathbf{Sp}(2)) = \mathbf{SO}(5, \mathrm{C}).$$

Pour $n \geqq 3$, $p = 2$ ou 3 : $\nabla \mathrm{R} = 0$ [*cf.* n° **4** et form. (14) et (15) du chapitre II]. Puisque $\langle g_2 \rangle \subset \langle g_{2q} \rangle$ et $\langle g_3 \rangle \subset \langle g_{2q+1} \rangle$, la proposition **3** entraîne que $\nabla \mathrm{R} = 0$.

Résumé :

$\mathbf{SO}(5, \mathrm{C})$, $\mathbf{SO}(5)$, $\mathbf{SO}^1(5)$, $\mathbf{SO}^2(5)$

et

$\mathbf{Sp}^i(n)$, $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}^i(n)$ $\quad (n \geqq 2)$.

6. **Groupes isomorphes à** $\mathbf{SO}(2n+1)\,(n \geqq 3)$. — A. $\mathfrak{g}_2(\mathbf{SO}(2n+1))$. — D'après le chapitre II, les seuls groupes à considérer sont les $\mathbf{SO}^i(2n+1)$ et les $\mathbf{SO}(2n+1, \mathrm{C})$ inclus dans $\mathbf{SO}^{2n+1}(4n+2)$.

B. $\mathfrak{g}_p(\mathbf{SO}(2n+1))\,(p \geqq 3)$. — Puisque $2n+1 \geqq 5$, les formules (18) du chapitre III montrent que l'on est dans le cas traité au n° 4.B, pour les composantes non étoilées, donc que toujours $\nabla \mathrm{R} = 0$.

C. $\mathfrak{g}_1(\mathbf{SO}(2n+1))$. — On montre à l'aide de formules qui sont du type des formules (20) du chapitre II que $\nabla \mathrm{R} = 0$: soit si $n \geqq 5$, soit si $n = 4$ et g_1 de 2ᵉ classe. Il reste donc (chap. II, n° 5.C)

$\mathbf{Spin}(7, \mathrm{C})$, $\mathbf{Spin}^0(7)$, $\mathbf{Spin}^1(7)$, $\mathbf{Spin}^2(7)$, $\mathbf{Spin}(7)$, $\mathbf{Spin}^0(9)$, $\mathbf{Spin}^3(9)$, $\mathbf{Spin}(9)$.

On peut encore montrer que $\nabla \mathrm{R} = 0$ pour $\mathbf{Spin}^1(7)$ et $\mathbf{Spin}^2(7)$.

Résumé :

$$\mathbf{SO}(2n+1, \mathrm{C}), \quad \mathbf{SO}^i(2n+1) \qquad (n \geqq 3)$$

et

$$\mathbf{Spin}(7, \mathrm{C}), \quad \mathbf{Spin}^0(7), \quad \mathbf{Spin}(7), \quad \mathbf{Spin}^0(9), \quad \mathbf{Spin}^3(9), \quad \mathbf{Spin}(9).$$

7. **Groupes isomorphes à** $\mathbf{SO}(2n)\,(n \geqq 4)$. — A. $\mathfrak{g}_3(\mathbf{SO}(2n))$. — On obtient d'abord les groupes $\mathbf{SO}(2n, \mathrm{C})$ et $\mathbf{SO}^i(2n)$. Ensuite : $\mathbf{SO}^*(2n)$ et $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SO}^*(2n)$. Une démonstration identique à celle du n° 5.A montre que $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SO}^*(2n)$ ne peut pas être un groupe d'holonomie homogène restreint.

B. $\mathfrak{g}_p(\mathbf{SO}(2n))\,(p \geqq 4)$. — On a toujours $\nabla \mathrm{R} = 0$ (*cf.* n° 6.B).

C. $\mathfrak{g}_1(\mathbf{SO}(2n))$. — On peut supposer $n \geqq 5$: en effet, pour $n = 4$, $\mathfrak{g}_1$ est un groupe à huit variables laissant invariante une forme quadratique, c'est donc $\mathfrak{g}_3$. Pour $\mathbf{Spin}^i(2n)$, on montre que $\nabla \mathrm{R} = 0$ si $n \geqq 6$ ou si $n = 5$ et $\mathfrak{g}_1$ de 2ᵉ classe. D'après le chapitre II (n° 6.C), tous les groupes à considérer vérifient ces conditions, donc $\nabla \mathrm{R} = 0$ toujours. Il en est de même pour le groupe $\mathbf{Spin}^*(2n)$.

Résumé :

$$\mathbf{SO}(2n, \mathrm{C}), \quad \mathbf{SO}^i(2n), \quad \mathbf{SO}^*(2n) \qquad (n \geqq 4).$$

8. **Groupes exceptionnels.** — Dans les cas A, B, C, D, E, F du chapitre II, on trouve $\nabla \mathrm{R} = 0$, compte tenu d'une multiplication éventuelle par $\mathbf{T}^1$ ou $\mathbf{Sp}(1)$. On peut encore le montrer dans le cas H.

Dans le cas G, les trois groupes sont possibles :

$$\mathbf{G}_2(\mathrm{C}) \subset \mathbf{SO}^7(14), \quad \mathbf{G}_2^* \subset \mathbf{SO}^3(7), \quad \mathbf{G}_2 \subset \mathbf{SO}(7).$$

D'après la remarque faite au début du n° 7 du chapitre II, la proposition 3 de ce chapitre entraîne $\nabla \mathrm{R} = 0$ pour tous les groupes exceptionnels fondamentaux à l'exception des trois ci-dessus.

Résumé :

$$\mathbf{G}_2(\mathrm{C}), \quad \mathbf{G}_2^*, \quad \mathbf{G}_2.$$

9. **Théorème général.** — Soit V_m^h une variété de classe C^3 munie d'une métrique de signature h (V_m^0, variété riemannienne $h = 0$) et σ le groupe d'holonomie homogène restreint de V_m^h. Supposons σ *irréductible* et passons au *revêtement universel* $\tilde{V}$ de V_m^h. Nous sommes alors dans les cas étudiés dans les n^{os} **2** à **8**. Dire que $\nabla R = 0$ sur $\tilde{V}$, donc sur V_m^h, signifie que V_m^h est localement symétrique. On peut donc résumer les résultats des n^{os} **2** à **8** sous la forme suivante :

THÉORÈME 3. — *Lorsqu'il est irréductible, le groupe d'holonomie homogène restreint d'une variété* V_m^h, *de classe* C^3, *non localement symétrique, ne peut être, à un nombre fini d'exceptions près, que :*

— *pour* V_m^h : $\mathbf{SO}^h(m)$, $m \geqq 2$;
— *pour* V_{2n}^{2h} : $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SU}^h(n)$, $\mathbf{SU}^h(n)$ $(n \geqq 2)$ *et pour* V_{2n}^n : $\mathbf{SO}(n, C)$ $(n \geqq 3)$;
— *pour* V_{4n}^{4h} : $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}^h(n)$, $\mathbf{Sp}^h(n)$ $(n \geqq 2)$ *et pour* V_{4n}^{2n} : $\mathbf{SO}^*(2n)$ $(n \geqq 3)$.

Les exceptions sont les suivantes :

— *pour* V_7^3 : $\mathbf{G}_2^*$; *pour* V_7^0 : $\mathbf{G}_2$; *pour* V_8^4 : $\mathbf{Spin}^0(7)$; *pour* V_8^0 : $\mathbf{Spin}(7)$; *pour* V_{14}^7 : $\mathbf{G}_2(C)$; *pour* V_{16}^8 : $\mathbf{Spin}(7, C)$, $\mathbf{Spin}^0(9)$, $\mathbf{Spin}^3(9)$; *pour* V_{16}^0 : $\mathbf{Spin}(9)$.

10. **Variétés V_m^h localement symétriques.** — Le théorème 3 fait apparaître les variétés V_m^h localement symétriques sous un jour très particulier. Dans le cas *riemannien*, $h = 0$, une variété pour laquelle $\nabla R = 0$ est localement un espace homogène symétrique (É. Cartan [**11**]); ces espaces ont été complètement déterminés dans [**11**].

Dans le cas $h > 0$, et plus généralement dans le cas d'une variété V_m munie d'une connexion affine, K. Nomizu a montré [**14**] que si le tenseur de courbure *et* le tenseur de torsion de V_m sont à dérivée covariante nulle, alors V_m est *isométrique* à un espace homogène muni d'une connexion affine invariante par parallélisme.

Notre méthode permet, non seulement de retrouver les résultats d'É. Cartan mais aussi de déterminer les groupes d'holonomie homogène restreint σ des variétés V_m^h pour lesquelles $\nabla R = 0$. Nous indiquons seulement quelques uns des calculs les plus simples.

A. *σ est non simple.* — Prenons par exemple le cas B, 1° du n° **2**. On peut supposer n et $\nu \geqq 2$. L'on a vu dans ce numéro que les seules composantes non nulles du tenseur de courbure étaient

$$\overline{R} = R_{a\lambda, b\lambda, a\mu, b\mu} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{R}} = R_{l\alpha, l\beta, m\alpha, m\beta} \quad (a \neq b \text{ et } \alpha \neq \beta).$$

Ces deux quantités sont des *constantes* en tout point de V_m^h. En effet, $\overline{R}$ (resp. $\overline{\overline{R}}$) ne dépend pas de λ, μ (resp. l, m) et la relation (2) permet d'écrire $\overline{R} = \overline{\overline{R}}$, ce qui montre que $\overline{R} = \overline{\overline{R}}$ est indépendante des quatre indices a, b, λ, μ. Il existe donc, en particulier, quels que soient a, b (resp. α, β) un élément de Γ : $\Gamma_a^b \neq 0$ (resp. Γ' : $\Gamma_\alpha'^\beta \neq 0$). Donc

$$\Gamma = \mathbf{SO}(n) \quad \text{et} \quad \Gamma' = \mathbf{SO}(\nu).$$

B. *σ est simple.* — Prenons comme exemple $\overset{p}{\wedge}\,\mathbf{SO}(m)$, $p \geqq 3$. Une composante non nulle du tenseur de courbure est de la forme (n° 4.B) :

$$\overline{R} = R_{al_2\ldots l_p,\, bl_2\ldots l_p,\, am_2\ldots m_p,\, bm_2\ldots m_p}.$$

Il suffit de prendre $\left(\text{ce qui est possible puisque } p \geqq 3 \text{ et } p \leqq \left[\frac{m}{2}\right]\right)$ $l_2 \neq m_2$ et $l_3 \neq m_3$ pour que (si $n \geqq 6$), d'après la formule (18) du chapitre II et la formule (2) de ce chapitre, $\overline{R} = 0$. Le tenseur de courbure de V_m^h étant identiquement nul, σ devrait être réduit à l'identité ce qui est absurde par hypothèse.

11. **Variétés à connexion affine sans torsion.** — Soit V_m une variété de dimension m, de classe C^3, munie d'une connexion affine *sans torsion*. La proposition 2 reste vraie, car elle est valable pour une connexion quelconque [15]. On sait que les formules (2) et (3) restent satisfaites sous la forme

$$R_j{}^i{}_{,kh} + R_k{}^i{}_{,hj} + R_h{}^i{}_{,jk} = 0, \tag{6}$$

$$\nabla_l R_j{}^i{}_{,kh} + \nabla_k R_j{}^i{}_{,hl} + \nabla_h R_j{}^i{}_{,lk} = 0, \tag{7}$$

essentiellement parce que la connexion est supposée *sans torsion.*

En conduisant les calculs de la même façon que pour les V_m^h, à l'aide des formules (6) et (7) et malgré l'absence de la formule (1), on peut classer les groupes R-*linéaires irréductibles* en trois listes :

Liste II : groupes pour lesquels ∇R n'est pas identiquement nul;
Liste I : groupes pour lesquels $\nabla R = 0$, mais $R \neq 0$;
Liste III : groupes pour lesquels $R = 0$.

Les groupes de la liste III ne peuvent pas être gr. h. h. r. d'une variété à connexion affine sans torsion. Ceux de la liste I fournissent les gr. h. h. r. des *espaces affines symétriques* de K. Nomizu, lorsque l'on suppose ce groupe *irréductible.* On constate ainsi que, comme dans le cas riemannien, le fait d'imposer à une connexion affine symétrique d'être sans torsion et à σ irréductible réduit les espaces possibles à quelques cas précis. Nous donnons la liste II et les groupes de la liste I qui proviennent de groupes complexes simples ou simples par $\mathbf{C}^*$; $\mathbf{C}^*$ désigne le groupe complexe abélien à un paramètre. $\mathbf{R}$ désignera le groupe réel abélien à un paramètre formé des matrices λI, où I est la matrice unité et λ un nombre réel quelconque.

THÉORÈME 4. — *Soit* V_m *une variété de dimension* m, *de classe* C^3, *munie d'une connexion affine sans torsion, non localement symétrique et* σ *son gr. h. h. r. supposé irréductible. Alors* σ *ne peut être, à un nombre fini d'exceptions près, que : soit l'un des groupes du théorème* 3, *soit l'un des groupes suivants :*

— *pour* $V_{n\nu}$: $\mathbf{GL}(n, R) \times \mathbf{GL}(\nu, R)$;
— *pour* $V_{2n\nu}$: $\mathbf{GL}(n, C) \times \mathbf{GL}(\nu, C)$;
— *pour* $V_{4n\nu}$: $\mathbf{R} \times \mathbf{SU}^*(2n) \times \mathbf{SU}^*(2\nu)$;
— *pour* $V_{\frac{n(n+1)}{2}}$: $\mathbf{GL}(n, R) \underline{\times} \mathbf{GL}(n, R)$;

— *pour* $V_{n(n+1)}$: $\mathbf{GL}(n, C) \underline{\times} \mathbf{GL}(n, C)$;
— *pour* $V_{n(2n+1)}$: $\mathbf{R} \times \mathbf{SU}^*(2n) \underline{\times} \mathbf{SU}^*(2n)$;
— *pour* $V_{\frac{n(n-1)}{2}}$ $\overset{2}{\wedge}\, \mathbf{GL}(n, R)$;
— *pour* $V_{n(n-1)}$: $\overset{2}{\wedge}\, \mathbf{GL}(n, C)$;
— *pour* $V_{n(2n-1)}$: $\mathbf{R} \times \left(\overset{2}{\wedge}\, \mathbf{SU}^*(2n)\right)$;
— *pour* V_n : $\mathbf{GL}(n, R)$, $\mathbf{SL}(n, R)$; $\mathbf{R} \times \mathbf{SO}^h(n)$;
— *pour* V_{2n} : $\mathbf{GL}(n, C)$, $\mathbf{R} \times \mathbf{GL}(n, C)$, $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{GL}(n, C)$, $\mathbf{SL}(n, C)$; $\mathbf{C}^* \times \mathbf{SO}(n, C)$; $\mathbf{R} \times \mathbf{Sp}^*(n)$, $\mathbf{Sp}^*(n)$;
— *pour* V_{4n} : $\mathbf{C}^* \times \mathbf{SU}^*(2n)$, $\mathbf{R} \times \mathbf{SU}^*(2n)$, $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SU}^*(2n)$, $\mathbf{SU}^*(2n)$; $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{SO}^*(2n)$, $\mathbf{C}^* \times \mathbf{SO}^*(2n)$; $\mathbf{C}^* \times \mathbf{Sp}(n, C)$, $\mathbf{Sp}(n, C)$.

THÉORÈME 5. — *Soit* V_m *une variété de dimension* m, *de classe* C^3, *munie d'une connexion affine sans torsion, localement symétrique. Supposons que son gr. h. h. r.* σ *vérifie les deux conditions suivantes :* 1° σ *est irréductible;* 2° *le groupe complexe* $\mathfrak{s}$ *dont provient* σ *est simple ou simple par* $\mathbf{C}^*$. *Alors* σ *ne peut être, à un nombre fini d'exceptions près, que : soit l'un des groupes des théorèmes* 3 *et* 4, *soit le groupe adjoint dun groupe simple réel, soit tel que* $\mathfrak{s}$ *soit le groupe adjoint d'un groupe simple complexe, soit l'un des groupes suivants :*

— *pour* $V_{n(n+1)}$: $\mathbf{U}^h(n) \underline{\times} \mathbf{U}^h(n)$; *pour* $V_{n(n-1)}$: $\overset{2}{\wedge}\, \mathbf{U}^h(n)$;
— *pour* $V_{\frac{n(n+1)}{2}-1}$: $\mathbf{SO}^h(n) \underline{\times} \mathbf{SO}^h(n)$; *pour* $V_{n(n+1)-1}$: $\mathbf{SO}(n, C) \underline{\times} \mathbf{SO}(n, C)$;
— *pour* $V_{\frac{2n(2n+1)}{2}-1}$: $\mathbf{SO}^*(2n) \underline{\times} \mathbf{SO}^*(2n)$;
— *pour* $V_{\frac{(2n+1)(2n-1)}{2}}$: $\overset{2}{\wedge}\, \mathbf{Sp}^*(n)$; *pour* $V_{(2n+1)(n-1)}$: $\overset{2}{\wedge}\, \mathbf{Sp}(n, C)$, $\overset{2}{\wedge}\, \mathbf{Sp}^h(n)$;
— *pour* V_{n^2} : $\mathbf{SO}(n, C) \underline{\times} \overline{\mathbf{SO}(n, C)}$; *pour* V_{4n^2} : $\mathbf{Sp}(n, C) \underline{\times} \overline{\mathbf{Sp}(n, C)}$;
— *pour* V_{2n^2} : $\mathbf{SL}(n, C) \underline{\times} \overline{\mathbf{SL}(n, C)}$.

12. Groupes de Lie transitifs sur les quadriques réelles. — Soit $\tilde{\sigma}$ un groupe de Lie opérant sur la quadrique réelle de $\mathbf{R}^m$

$$\mathbf{Q}^h_{m-1} : \quad x_1^2 + \ldots + x_{m-h}^2 - x_{m-h+1}^2 + \ldots - x_m^2 = 1 \qquad \mathbf{Q}^0_{m-1} = \mathbf{S}_{m-1})$$

et supposons que $\tilde{\sigma}$ soit induit sur $\mathbf{Q}^h_{m-1}$ par un groupe R-linéaire $\sigma \subset \mathbf{GL}(m, R)$. Si σ est réductible, $\tilde{\sigma}$ n'est certainement pas transitif sur $\mathbf{Q}^h_{m-1}$, puisqu'un sous-espace $\mathbf{T}$ sur lequel σ est irréductible est tel que $\mathbf{T} \cap \mathbf{Q}^h_{m-1}$ ne contient pas tout $\mathbf{Q}^h_{m-1}$. De plus, si $\tilde{\sigma}$ est transitif sur $\mathbf{Q}^h_{m-1}$, en un point x de coordonnées $x_k = \delta_i^k$ (où i est donné, $1 \leq i \leq h$), aucun des $\mathbf{\Sigma}_i^k$ n'est nul puisqu'il existe des points déduits de x par σ dans tout le plan défini par $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_k$($\{\mathbf{e}_i\}$ ($i = 1, \ldots, m$, étant une base de $\mathbf{R}^m$). En résume : σ est irréductible et son algèbre de Lie $\mathbf{\Sigma}$ satisfait à la condition précédente. Il suffit alors d'examiner les algèbres de Lie exhibées au chapitre II pour obtenir les seules $\mathbf{\Sigma}$ possédant les propriétés voulues. On trouve ainsi le

Théorème 6. — *Les groupes de Lie transitifs et induits par un groupe linéaire sur une quadrique réelle sont, à un nombre fini d'exceptions près :*

— *pour* $\mathbf{Q}^h_{m-1}$: $\mathbf{SO}^h(m)\,(m \geqq 2)$;
— *pour* $\mathbf{Q}^{2h}_{2n-1}$: $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SU}^h(n)$, $\mathbf{SU}^h(n)\,(n \geqq 2)$;
— *pour* $\mathbf{Q}^{2h}_{4n-1}$: $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}^h(n)$, $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{Sp}^h(n)$, $\mathbf{Sp}^h(n)\, n \geqq (2)$.

CHAPITRE IV.

Applications.

Ce chapitre utilise le théorème 3 du chapitre III à deux fins distinctes : d'une part, l'énumération des formes à dérivée covariante nulle d'une variété V^h_m; celles-ci sont en effet invariantes par Ψ, *a fortiori* par σ. D'autre part, l'étude des composantes connexes de Ψ, éventuellement distinctes de σ, pour une variété riemannienne V^0_m. Signalons à ce sujet le corollaire du théorème 3, qui semble une application intéressante de cette deuxième partie.

1. Formes extérieures invariantes par un groupe de rotations. — Suivant une marche identique à celle du n° 8 du chapitre I, nous nous ramènerons à des formes invariantes induites, par le groupe de rotation σ, sur le groupe s **C**-linéaire dont provient σ; ces dernières seront réduites à l'aide des poids de s.

A. *σ est de* 2^e^ *classe.* — Soit

$$\Theta = \sum_h \sum_{i_1,\dots,i_p} \Theta_{i_1\dots i_h i^\star_{h+1}\dots i^\star_p}\, x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_h} \wedge x_{i^\star_{h+1}} \wedge \dots \wedge x_{i^\star_p}$$

une forme Θ invariante par σ. En procédant comme au chapitre I (n° 8), on en déduit un tenseur T invariant par s

$$\sum_h \sum_{i_1,\dots,i_p} (\sqrt{-1})^{p-h}\, \Theta_{i_1\dots i_h i^\star_{h+1}\dots i^\star_p} (z_{i_1} + \bar z_{i_1}) \wedge \dots \wedge (z_{i_h} + \bar z_{i_h}) \wedge (z_{i_{h+1}} - \bar z_{i_{h+1}}) \wedge \dots \wedge (z_{i_p} - \bar z_{i_p}).$$

Ce tenseur se décompose dans les tenseurs suivants, chacun invariant par s

$$\mathrm{T}^0_{i_1\dots i_p} = \sum_h \sum_{i_1,\dots,i_p} (\sqrt{-1})^{p-h}\, \varepsilon^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_p}\, \Theta_{j_1\dots j_h j^\star_{h+1}\dots j^\star_p}\, z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_p},$$

$$\mathrm{T}^k_{i_1\dots i_k i^\star_{k+1}\dots i^\star_p} = \sum_h \sum_{i_1,\dots,i_p} (\sqrt{-1})^{p-h} (-1)^{p-h-k}\, \varepsilon^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_p}\, \Theta_{j_1\dots j_h j^\star_{h+1}\dots j^\star_p}\, z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_k} \wedge \bar z_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge \bar z_{i_p},$$

avec $1 \leqq k \leqq n$.

T^0 est une forme extérieure complexe, invariante par s, mais qui peut être nulle sans que Θ le soit. De même qu'au chapitre I (n° 1), on montre que $\mathrm{T}_{i_1\dots i_k i^\star_{k+1}\dots i^\star_p}$ n'est éventuellement $\neq 0$ que si

(1) $$(i_1) + \dots + (i_k) + (\bar i_{k+1}) + \dots + (\bar i_p) = 0.$$

B. σ *est de* 1^re *classe*. — Pour des raisons de commodité d'écriture, nous supposerons que s n'a pas de variables de poids o et que tous les ε_i (notations des propositions 4 et 5 du chapitre I) sont égaux à 1. Soit alors

$$\Theta = \sum_h \sum_{i_1,\ldots,i_p} \Theta_{i_1\ldots i_h i'_{h+1}\ldots i'_p} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_h} \wedge x_{i'_{h+1}} \wedge \ldots \wedge x_{i'_p}$$

la forme extérieure invariante par σ. On en déduit le tenseur T invariant par s

$$\sum_h \sum_{i_1,\ldots,i_p} (\sqrt{-1})^{p-h} \Theta_{i_1\ldots i_h i'_{h+1}\ldots i'_p} (z_{i_1} + z_{i'_1} + \bar{z}_{i'_1} + \bar{z}_{i'_1}) \wedge \ldots$$
$$\wedge (z_{i_h} + z_{i'_h} + \bar{z}_{i'_h} + \bar{z}_{i'_h}) \wedge (z_{i_{h+1}} - z_{i'_{h+1}} - \bar{z}_{i_{h+1}} + \bar{z}_{i'_{h+1}}) \wedge \ldots \wedge (z_{i_p} - \ldots).$$

Ce tenseur se décompose en plusieurs tenseurs invariants par s, en particulier la forme extérieure complexe T^0

$$T^0_{i_1\ldots i_k i'_{k+1}\ldots i'_p} = \sum_h \sum_k \sum_{i_1,\ldots,i_p} (\sqrt{-1})^{p-h} (-1)^{p-h-k} \varepsilon^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p}$$
$$\times \Theta_{j_1\ldots j_h j'_{h+1}\ldots \bar{j}'_p} z_{i_1} \wedge \ldots \wedge z_{i_k} \wedge z_{i'_{k+1}} \wedge \ldots \wedge z_{i'_p}$$

qui ne peut être identiquement nul que si Θ l'est.

2. **Formes extérieures invariantes par les groupes du théorème 3 du chapitre III.** — Nous allons appliquer les remarques du n° 1 aux groupes de rotations de la liste du théorème 3 du chapitre III.

A. $\mathbf{SO}^h(m)$. — Il est classique (*cf.* par exemple [13], p. 187) que $\mathbf{SO}^h(m)$ ne laisse invariante aucune forme extérieure non triviale. On peut d'ailleurs le voir immédiatement : en effet, le groupe $\overset{p}{\wedge}\, \mathbf{SO}^h(m)$ est irréductible.

B. $\mathbf{SU}^h(m)$. — Les poids de $\mathbf{SU}^h(m)$ étant ([8], p. 276) imaginaires purs, la condition (1) s'écrit

$$\omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_h} - \omega_{i_{h+1}} - \ldots - \omega_{i_p} = 0.$$

Les ω_i sont (chapitre II, n° 3.A, 1°) liés par la seule relation $\omega_1 + \ldots + \omega_m = 0$. D'où :

— soit, à une permutation près, $\omega_{i_1} = \omega_{i_{h+1}}, \ldots, \omega_{i_h} = \omega_{i_p}$;
— soit, à une permutation près, $\omega_{i_1} = \omega_1 \ldots, \omega_{i_p} = \omega_m$.

Les seules composantes éventuellement non nulles de T sont :

— soit $T_{i_1 i_1^* i_2 i_2^* \ldots i_q i_q^*}$;
— soit $T_{12\ldots m}$ ou $T_{1^* 2^* \ldots m^*}$.

1° Les deux dernières formes : $z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_m$ et $\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{z}_m$ sont effecivement invariantes par s. Les m-formes correspondantes, invariantes par σ, de $\mathbf{R}^{2m}$, seront notées $\hat{\Theta}$ et $\hat{\Theta}'$. Si m est pair, on a $\hat{\Theta} = {}_*\hat{\Theta}$ et $\hat{\Theta}' = {}_*\hat{\Theta}'$. Si m est impair, on a $\hat{\Theta}' = {}_*\hat{\Theta}$, où ${}_*\Theta$ désigne la forme adjointe de Θ.

2° Soit alors $\Theta_{i_1 i_1^* \dots i_q i_q^*}$, avec nécessairement $q \leqq n-1$. Appliquons la formule (2) du chapitre I pour l'élément de Σ défini par : $\Sigma_{\mathrm{I}}^{\mathrm{J}} = 0$, sauf

$$\Sigma_{i_1}^{i_p} \triangleq \Sigma_{i_p}^{i_1} \triangleq \Sigma_{i_1^*}^{i_p^*} \triangleq \Sigma_{i_p^*}^{i_1^*},$$

et à l'ensemble d'indices $i_p, i_2, i_3, \dots, i_q$, où $i_p \neq i_2, i_3, \dots, i_q$ ce qui est possible puisque $q \leqq n-1$. On trouve ainsi

$$\varepsilon_{i_1} \Theta_{i_1 i_1^* i_2 i_2^* \dots i_q i_q^*} = \varepsilon_{i_p} \Theta_{i_p i_p^* i_2 i_2^* \dots i_q i_q^*}.$$

Les seules formes invariantes possibles par σ sont donc les $\overset{p}{\wedge} \Omega^1$, où l'on a posé

$$\Omega^1 = \sum_i \varepsilon_i x_i \wedge x_i^*.$$

Ω^1 est effectivement invariante par σ, puisque s laissant invariante la forme d'Hermite $\sum_i \varepsilon_i z_i \bar{z}_i$, laisse invariante la forme $\sum_i \sqrt{-1}\, \varepsilon_i z_i \wedge \bar{z}_i$, qui induit Ω^1 pour σ.

C. $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SU}^h(m)$. — Les $\overset{p}{\wedge} \Omega^1$ restent invariantes par $\mathbf{T}^1$, mais non $\hat{\Theta}$ et $\hat{\Theta}'$.

D. $\mathbf{Sp}^h(m)$. — Les poids de $\mathbf{Sp}^h(m)$ sont imaginaires purs ([8], p. 291). La condition (1) s'écrit :

$$\omega_{\mathrm{I}_1} + \dots + \omega_{\mathrm{I}_h} - \omega_{\mathrm{I}_{h+1}} - \dots - \omega_{\mathrm{I}_p} = 0.$$

Nous supposerons avoir ordonné les poids

$$\{\mathrm{I}\} = \{i\} \cup \{i'\}, \qquad (i) + (i') = 0,$$

de façon que $\mathcal{J}((i)) > 0$, donc $\mathcal{J}((i')) < 0$. Les ω_i ($i = 1, \dots, m$) étant linéairement indépendants, on trouve donc comme composantes éventuelles non nulles de Θ

$$\Theta_{i_1 i'_1 i_2 i'_2 \dots i_h i_h^* \dots i_k i_k'^* \dots i_n^* i_n'^* \dots i'_p i_p'^* \dots i'_q i_q^* \dots i'_r i_r^*},$$

certains des indices de i_1 à i_{h-1} et i_n à i_{p-1} (resp. i_h à i_{k-1}, i_p à i_{q-1}, i_k à i_{n-1}, i_q à i_r) pouvant être égaux.

1° Supposons d'abord $p \leqq m$ et qu'il n'y ait pas de groupements du type $\mathrm{T}_{i_1 i'_1 i_1^* i_1'^* \dots}$. En procédant comme au B, on trouve

$$\begin{aligned} \Theta_{i_1 i'_1 \dots} &= \Theta_{i_r i'_r \dots}, & &\text{où } i_r \neq i_1, i_2, \dots, i_p; \\ \varepsilon_{i_1} \Theta_{i_1 i_1^* \dots} &= \varepsilon_{i_r} \Theta_{i_r i_r^* \dots}, & &\text{où } i_r \neq i_1, i_2, \dots, i_p \end{aligned}$$

et des formules analogues pour les autres groupements possibles.

2° Si p est quelconque mais s'il n'y a pas de groupement $i_1 i'_1 i_1^* i_1'^*$, on utilisera la formule (2) du chapitre I avec élément de Σ défini par $\Sigma_{\mathrm{I}}^{\mathrm{J}} = 0$, sauf $\Sigma_{i_1}^{i_1^*} = \Sigma_{i'_1}^{i_1'^*}$. On trouve alors

$$\Theta_{i_1 i_1^* \dots} = \Theta_{i'_1 i_1'^* \dots}$$

et des formules analogues.

3° Pour $\Theta_{i_1 i'_1 i^*_1 i'^*_1 \ldots}$, p quelconque, on trouve

$$\varepsilon_{i_1}\Theta_{i_1 i'_1 i^*_1 i'^*_1} = \varepsilon_{i_2}\Theta_{i_2 i'_2 i^*_1 i'^*_1} + \varepsilon_{i_1}\Theta_{i_2 i^*_2 i'_1 i'^*_1} + \varepsilon_{i_2}\Theta_{i_2 i'^*_2 i'_1 i^*_1}.$$

En résumé, les seules formes invariantes possibles par σ sont

$$\Big(\overset{p}{\wedge}\,\Omega^1\Big) \wedge \Big(\overset{q}{\wedge}\,\Omega^2\Big) \wedge \Big(\overset{r}{\wedge}\,\Omega^3\Big),$$

avec

$$\Omega^1 = \sum_i \varepsilon_i (x_i \wedge x_{i^*} + x_{i'} \wedge x_{i'^*}),$$

$$\Omega^2 = \sum_i (x_i \wedge x_{i'} + x_{i'^*} \wedge x_{i^*}),$$

$$\Omega^3 = \sum_i (x_i \wedge x_{i'^*} + x_{i^*} \wedge x_{i'});$$

Ω^1 est bien invariante par $\mathbf{Sp}^p(m) \subset \mathbf{SU}^{2h}(2m)$, Ω^2 et Ω^3 aussi puisqu'elles sont induites par la 2-forme extérieure complexe $\sum_i z_i \wedge z'_i$, invariante par s.

E. $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}^h(m)$. — On constate que la formule (2) du chapitre I n'est pas vérifiée pour Ω^2, Ω^3 (resp. Ω^1, Ω^2 et Ω^1, Ω^3) et la composante ξ (resp. η et ζ) de Σ [*cf.* form. (13) du chapitre II]. Il n'y a donc aucune forme extérieure invariante par le groupe considéré.

F. $\mathbf{SO}^*(2n)$. — Les poids de $\mathbf{SO}^*(2n)$ sont imaginaires purs ([8], p. 285); ce sont donc les mêmes que ceux de $\mathbf{Sp}(n)$. Les composantes éventuellement non nulles de Θ sont donc $\Theta_{i_1 i'_1 \ldots i_h i^*_h \ldots i'_p i^*_p}$. Si $p < n$ et si l'on applique la formule (2) du chapitre I pour l'élément de Σ défini par $\Sigma^{\mathrm{J}}_{\mathrm{I}} = 0$, sauf :

$$a.\quad \Sigma^{i_p}_{i_1} = -\Sigma^{i'_1}_{i'_p} \qquad \text{ou} \qquad b.\quad \Sigma^{i'_p}_{i_1} = -\Sigma^{i'_1}_{i_p},$$

on trouve

$$a.\quad \Theta_{i_1 i'_1 \ldots} = +\Theta_{i_p i'_p \ldots},$$

$$b.\quad \Theta_{i_1 i'_1 \ldots} = -\Theta_{i_p i'_p \ldots},$$

ce qui entraîne $\Theta = 0$. Ainsi les seules formes invariantes sont les $\overset{q}{\wedge}\,\Omega^1$ [puisque $\mathbf{SO}^*(2n) \subset \mathbf{SU}^h(2n)$], si $p < n$. Si $p = n$, on obtient les $2n$-formes $\hat{\Theta}$ et $\hat{\Theta}'$, invariantes par $\mathbf{SU}^n(2n)$.

G. $\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})$. — Nous prendrons ici comme variables de $\mathbf{C}^n$ les z_i, $z_{i'}$, z_0 (et non les variables des nos 5 et 6 du chapitre II); les poids de s sont complexes et sont : $\pm\,\omega_i$ si n est pair, $\pm\,\omega_i$ et 0 si n est impair; les ω_i sont indépendants ([5], p. 140-141); s ne peut donc laisser invariante une forme extérieure complexe T^0 que si T^0 est :

— soit $z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_n$, n quelconque;
— soit de la forme $\mathrm{T}_{i_1 i'_1 i_2 i'_2 \ldots i_q i'_q}$, n pair, $q < n$.

La deuxième éventualité ne se produit pas. En effet, nécessairement $q < n$, d'où en procédant comme au F, les deux égalités contradictoires

$$T_{i_1 i'_1 \ldots} = T_{i_p i'_p \ldots} \qquad \text{et} \qquad T_{i_1 i'_1 \ldots} = - T_{i_p i'_p \ldots}.$$

La forme élément de volume complexe : $z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_n$ est invariante par s et induit pour σ deux n-formes invariantes $\hat{\Theta}$ et $\hat{\Theta}'$.

H. $\mathbf{G}_2$ et $\mathbf{G}_2^*$. — Ces deux groupes sont de 1[re] classe; s doit laisser invariante une forme extérieure complexe, qui ne peut être que $z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_7$, par suite de la présence du poids o. Cette dernière induit sur le groupe $\mathbf{R}$-linéaire correspondant la forme triviale.

I. $\mathbf{G}_2(\mathrm{C})$. — La présence du poids o et le fait que les poids de $\mathbf{G}_2(\mathrm{C})$ sont complexes conduisent à deux 7-formes invariantes, seulement.

J. $\mathbf{Spin}^0(7)$, $\mathbf{Spin}(7)$, $\mathbf{Spin}^0(9)$, $\mathbf{Spin}^3(9)$, $\mathbf{Spin}(9)$. — Les calculs sont plus compliqués. On ne trouve aucune forme invariante.

K. $\mathbf{Spin}(7, \mathrm{C})$. On procède comme au G et l'on trouve deux 8-formes.

3. Formes extérieures à dérivée covariante nulle des variétés munies d'une métrique. — Soit Θ une forme extérieure à dérivée covariante nulle de V_m^h; d'après [4], Θ est invariante, en tout point de V_m^h, par Ψ, *a fortiori* par σ. Nous sommes donc ramené, dans la recherche des formes extérieures à dérivée covariante nulle d'une variété V_m^h, simplement connexe, non réductible, non localement symétrique, aux formes extérieures invariantes par les groupes du théorème 3 du chapitre III, ce qui a été fait au n° 2 et que l'on peut résumer ainsi :

Théorème 1. — *La base de l'algèbre des formes extérieures à dérivée covariante nulle d'une variété V_m^h, de classe C^3, simplement connexe, non réductible, non localement symétrique, est, outre les formes triviales éventuelles* :

— $\sigma = \mathbf{SO}^h(m)$, $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}^h(n)$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_2^*$, $\mathbf{Spin}^0(7)$, $\mathbf{Spin}(7)$, $\mathbf{Spin}^0(9)$, $\mathbf{Spin}^3(9)$, $\mathbf{Spin}(9)$: réduits à $\emptyset$;
— $\sigma = \mathbf{T}^1 \times \mathbf{SU}^h(n)$: une 2-forme Ω^1;
— $\sigma = \mathbf{SU}^h(n)$, $\mathbf{SO}^*(2n)$: une 2-forme Ω^1, deux n-formes (resp. $2n$-) $\hat{\Theta}$ et $\hat{\Theta}'$;
— $\sigma = \mathbf{Sp}^h(n)$: trois 2-formes Ω^1, Ω^2, Ω^3;
— $\sigma = \mathbf{SO}(n, \mathrm{C})$ [resp. $\mathbf{Spin}(7, \mathrm{C})$, $\mathbf{G}_2(\mathrm{C})$] : deux n-(resp. 8, 7) formes.

On constate ainsi *a posteriori* le résultat suivant :

Corollaire. — *S'il existe sur une variété riemannienne une forme extérieure à dérivée covariante nulle, non trivale, cette variété est : soit réductible, soit symétrique, soit pseudo-kählérienne.*

4. Groupe d'holonomie homogène d'une variété riemanienne. Étude algébrique. — Nous nous restreindrons, dans les n^os 4 et 5 à des variétés *riemanniennes* V_m de dimension m, de classe C^3. Soit Ψ le groupe d'holonomie homogène (*ou restreint*) de V_m (définition au chapitre III, n° 1 ou [4]).

THÉORÈME 2 (Borel-Lichnerowicz [4]). — *σ est la composante connexe de l'élément neutre dans Ψ.*

Nous allons utiliser ce théorème et le théorème 3 du chapitre III pour étudier Ψ/σ lorsque V_m est localement irréductible et localement non symétrique. Le théorème 2 implique en effet que σ est distingué dans Ψ donc que, quel que soit $h \in \Psi$, $h\sigma h^{-1} \subset \sigma$. Donc h détermine un automorphisme $\sigma \to h\sigma h^{-1}$ de σ. Passons en revue les groupes du théorème 3 du chapitre III correspondant aux variétés *riemanniennes* (1).

A. $\sigma = \mathbf{SO}(m)$. — *A priori* on sait seulement que $\Psi \in \mathbf{O}(m)$. Mais « $\Psi \subset \mathbf{SO}(m)$ » *est équivalent à* « V_m *est orientable* ». En effet, le transport parallèle le long des lacets définissant les $h \in \Psi$ assure l'existence en tout point de V_m de repères convenables.

Dans le cas non orientable, on s'assure facilement par des exemples que Ψ peut ne pas être inclus dans $\mathbf{SO}(m)$.

B. $\sigma = \mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{U}(n)$. — D'après [12] (p. 454-455), $\Psi/\sigma \subset \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{T}^1$, où $\mathbf{Z}_2$ est défini par l'élément k : $z \to \bar{z}$ (k est défini par la matrice $k_i^j = -k_{i^*}^{j^*} = \delta_i^j$ et $k_i^{j^*} = k_{i^*}^j = 0$, k n'appartient à $\mathbf{SO}(2n)$ que si n est pair.

C. $\sigma = \mathbf{Sp}(n)$. — Les automorphismes de $\mathbf{Sp}(n)$ étant tous intérieurs, Ψ/σ est donc contenu dans le centralisateur de $\mathbf{Sp}(n)$ dans $\mathbf{SO}(4n)$. Ce centralisateur est exactement $\mathbf{Sp}(1)$. En effet, si l'on recherche un élément h_I^J tel que

$$\sum_L h_I^L \Sigma_{LJ} = \sum_L h_J^L \Sigma_{IL}, \qquad \text{avec } h \subset \mathbf{SO}(4n),$$

on trouve, en utilisant les formules (13) du chapitre II, les relations

$$\begin{aligned}
h_i^i &= h_{i'}^{i'} = h_{i^*}^{i^*} = h_{i'^*}^{i'^*} = \lambda,\\
h_i^{i'} &= -h_{i'}^{i} = -h_{i^*}^{i'^*} = h_{i'^*}^{i^*} = \mu,\\
h_i^{i^*} &= -h_{i^*}^{i} = h_{i'}^{i'^*} = -h_{i'^*}^{i'} = \nu,\\
h_i^{i'^*} &= -h_{i'^*}^{i} = -h_{i'}^{i^*} = h_{i^*}^{i'} = \rho,
\end{aligned}$$

avec $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1$ et les autres h_I^J nuls, qui définissent le groupe $\mathbf{Sp}(1)$, connexe, dont l'algèbre de Lie est celle intervenant dans les formules (13) du chapitre II.

Remarque. — Si l'on recherche seulement le centralisateur connexe H de $\mathbf{Sp}(n)$ dans $\mathbf{SO}(4n)$ [même remarque pour les groupes $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{Spin}(7)$, $\mathbf{Spin}(9)$], c'est évidemment $\mathbf{Sp}(1)$: en effet, $H \times \mathbf{Sp}(n)$ est un groupe linéaire $\subset \mathbf{SO}(4n)$, non simple, irréductible puisque contenant $\mathbf{Sp}(n)$. Seuls $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{Sp}(n)$, $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(n)$ répondent à la question, pour des raisons de dimension. Mais cette méthode est insuffisante parce que nous recherchons tout le centralisateur de σ.

---

(1) Pour tout le n° 4, *voir* aussi E. Cartan ([12], p. 373-377).

D. $\sigma = \mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(n)$. — Soit

$$\mathrm{adj}(h\alpha\lambda h^{-1}) = \alpha'(\alpha) + \alpha''(\lambda) + \lambda'(\alpha) + \lambda''(\lambda),$$

où α, $\alpha'(\alpha)$, $\alpha''(\lambda)$ [resp. λ, $\lambda'(\alpha)$, $\lambda''(\lambda)$] appartiennent à l'algèbre de Lie $\mathbf{Sp}(1)$ [resp. $\mathbf{Sp}(n)$]. Puisque $[\alpha, \lambda] = 0$, $[\alpha', \alpha''] = 0$. Or $\mathbf{Sp}(1)$ ne contient pas d'éléments distincts échangeables, c'est-à-dire que, quels que soient α, λ $\alpha''(\lambda) = \chi\, \alpha'(\alpha)$, avec χ réel; d'où, soit $\alpha''(\lambda) = 0$, soit $\alpha'(\alpha) = 0$, quels que soient α, λ. Pour des raisons de dimension, $\alpha''(\lambda) = 0$. Ainsi h induit un automorphisme de $\mathbf{Sp}(n)$, d'où, d'après le C, $\Psi/\sigma \subset \mathbf{Sp}(1)$, c'est-à-dire que $\Psi = \sigma$.

E. $\sigma = \mathbf{G}_2$, $\mathbf{Spin}(7)$, $\mathbf{Spin}(9)$. — Les automorphismes de ces trois groupes sont tous intérieurs. Il suffit de rechercher leur centralisateur dans le groupe orthogonal qui les contient. En explicitant les algèbres de Lie de ces trois groupes, on vérifie que l'on peut toujours trouver, quels que soient $i \neq j$, un indice $k \neq i$, j tel que $\Sigma_J^I = 0$ pour I ou $J = i$ et $\Sigma_j^k \neq 0$, d'où $h_i^j \Sigma_{jk} = 0$, soit $h_i^j = 0$. Ainsi, on a toujours $\Psi = \sigma$.

5. Groupe d'holonomie homogène d'une variété riemannienne. Étude géométrique. — On peut condenser les résultats du numéro précédent en disant que, pour une variété *riemannienne orientable*, non localement symétrique, non localement réductible, Ψ ne peut être différent de σ, éventuellement, que dans les cas suivants :

— $\sigma = \mathbf{U}(2n)$: $\Psi/\sigma = \mathbf{Z}_2$;
— $\sigma = \mathbf{SU}(2n+1)$: $\Psi/\sigma \subset \mathbf{T}^1$;
— $\sigma = \mathbf{SU}(2n)$: $\Psi/\sigma \subset \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{T}^1$;
— $\sigma = \mathbf{Sp}(n)$: $\Psi/\sigma \subset \mathbf{Sp}(1)$.

Nous résumerons ceci sous la forme suivante :

THÉORÈME 3. — *Soit* V_m *une variété riemannienne orientable, de classe* C^3, *non localement symétrique, non localement réductible. On est assuré que* $\sigma = \Psi$ *dans les cas suivants :*

— *m impair;*
— $\sigma = \mathbf{U}(2n+1)$;
— $\sigma = \mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(n)$, $\mathbf{Spin}(7)$, $\mathbf{Spin}(9)$, $\mathbf{G}_2$.

D'après [2], dire que σ n'est pas $\mathbf{SU}(n)$ ou $\mathbf{Sp}(n)$ peut s'exprimer sous la forme : V_m *est à courbure de Ricci non nulle.* Ce résultat est d'ailleurs évident sur les formules (9) et (13) du chapitre III. On en déduit :

COROLLAIRE. — *Soit* V_{2n} *une variété admettant un revêtement qui est : pseudo-kählérien, à courbure de Ricci non nulle, non localement symétrique, non localement réductible.*

Dans ces conditions :

— *Si n est impair et* V_m *orientable :* V_m *est pseudo-kählérienne;*

— *Si n est impair et* V_m *non orientable : le revêtement orientable de* V_m *est pseudo-kählérien;*

— *Si n est pair :* V_m *est orientable et admet un revêtement à deux feuillets au plus qui est pseudo-kählérien.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] W. AMBROSE et I. M. SINGER, *A theorem on holonomy* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 75, 1953, p. 428-443.)

[2] A. LICHNEROWICZ, *Variétés pseudo-kählériennes à courbure de Ricci non nulle*; ... (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 12-14).

[3] A. LICHNEROWICZ, *Espaces homogènes kählériens* (*Colloque international de Géométrie différentielle*, Strasbourg, 1953, p. 171-184).

[4] A. BOREL et A. LICHNEROWICZ, *Groupe d'holonomie des variétés riemanniennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1835-1837).

[5] É. CARTAN, *Thèse* (2ᵉ édition, Vuibert, 1953) ou *Œuvres complètes*, t. I, vol. 1, p. 137-288).

[6] É. CARTAN, *Les groupes de transformations continus, infinis, simples* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 26, p. 93-161, ou *Œuvres complètes*, t. II, v. 2, p. 857-926).

[7] É. CARTAN, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante*... (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 41, 1913, p. 53-96, ou *Œuvres complètes*, t. I, vol. 1, p. 355-398).

[8] É. CARTAN, *Les groupes réels simples finis et continus* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 31, 1914, p. 263-355, ou *Œuvres complètes*, t. I, vol. 1, p. 399-492).

[9] É. CARTAN, *Les groupes projectifs continus réels qui*... (*J. Math. pures et appl.*, t. 10, 1914, p. 149-186, ou *Œuvres complètes*, t. I, v. 1, p. 493-530).

[10] É. CARTAN, *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés* (*Acta math.*, t. 48, 1926, p. 1-42).

[11] É. CARTAN, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 54, 1926, p. 214-164 et t. 55, 1927, p. 114-134, ou *Œuvres complètes*, t. vol. 2, p. 587-660).

[12] É. CARTAN, *Sur certaines formes riemanniennes*... (*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 44, 1927, p. 345-467, ou *Œuvres complètes*, t. I, vol. 2, p. 867-990).

[13] É. CARTAN, *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos*, ... (*Ann. Soc. pol. Math.*, t. 8, 1929, p. 181-225, ou *Œuvres complètes*, t. I, vol. 2, p. 1081-1126).

[14] K. NOMIZU, *Invariant affine connections on homogeneous spaces* (*Amer. J. Math.*, t. 76, 1954, p. 33-65).

[15] A. NIJENHUIS, *On the holonomy groups of linear connections* (*Indag. Math.*, t. 15, 1953, p. 233-249 et t. 16, 1954, p. 17-25).

INDEX TERMINOLOGIQUE.

INDEX DES NOTATIONS.