BULLETIN DE LA S. M. F.

M.A. TRESSE

Théorie élémentaire des géométries non euclidiennes (suite)

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 1-56

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Bull. Soc. Math. France,
83, 1955, p. 1 à 56.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES (*suite*);

PAR M. A. TRESSE.

DEUXIÈME PARTIE (1).

Métrique des fa-longueurs. Fonctions hyperboliques et circulaires. Fa-polygones rectangles. Rectification des arcs de fa-cercles.

41. Addition de fa-longueurs. — Toute l'étude développée jusqu'ici relève seulement de la géométrie de position et les seules grandeurs mesurables qu'elle fait intervenir sont des angles; en particulier, la notion de fa-distance de deux points y joue un rôle essentiel sans être encore une grandeur mesurable et si elle est représentée par divers invariants, ceux-ci ne doivent être considérés jusqu'ici que comme de simples échelles scalaires, des repères, qui la définissent, mais sans être des mesures, et qui tiennent ainsi un rôle analogue à celui d'une température, laquelle définit mais ne mesure pas un état physique, l'addition de deux températures n'ayant en particulier aucun sens. Pour arriver à considérer une fa-distance comme une grandeur mesurable qui sera alors fonction de l'un quelconque de ses invariants sans lui être nécessairement égale, il faudra donc définir d'abord l'addition de deux fa-distances.

Cette définition sera énoncée *a priori* à condition de vérifier ensuite qu'elle obéit aux lois fondamentales de l'addition et en théorie on pourrait s'en tenir à ce seul énoncé; mais il n'est pas inutile d'y arriver par des considérations simples en commençant par soumettre l'une des deux fa-distances qu'il s'agit d'ajouter à un fa-déplacement ayant pour effet de placer bout à bout ces deux fa-distances et de ramener à deux fa-distances [AB], [BM], ayant une extrémité commune B.

Dans cette position A et B restant fixes, M peut varier en décrivant un endocycle Γ de fa-centre B; on est ainsi conduit à étudier comment varie la fa-distance [AM] d'un point fixe A à un point M mobile sur un endocycle Γ,

(1) La première partie a été publiée dans le tome 81, 1953, fascicule II du *Bulletin*.

problème qui se traite de la même manière que celui de la fa-distance de A à un point mobile sur une fa-droite et où l'on peut de même s'aider de la forme-type où A est le centre de ω; en coupant Γ par un endocycle variable de fa-centre A et de fa-rayon égal à la fa-distance variable [AM], endocycle figuré par un cercle centré en A, on constate que la fa-distance [AM] reste comprise entre un minimum et un maximum et en ne retenant que ce dernier, le maximum est atteint en Ire, où B est toujours intérieur à Γ, lorsque M se place au point C, où la

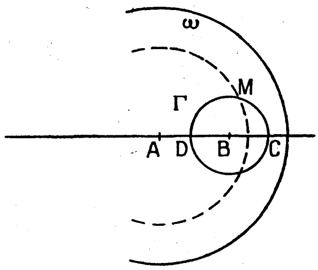

Fig. 34.

fa-droite et droite AB, prolongée au-delà de B, rencontre Γ; on est alors conduit à définir la somme des deux fa-distances comme étant cette fa-distance maximum [AC].

En IIe où tout endocycle Γ a deux fa-centres opposés nous ne retiendrons comme on l'a déjà fait que le fa-centre B associé à un fa-rayon répondant à un angle θ inférieur à un droit, ce fa-rayon étant dit lui-même inférieur à un droit ou $\frac{\pi}{2}$ sans attacher pour l'instant d'autre signification à cette notation; puis nous ne considérerons que le seul cas où les deux fa-distances à ajouter sont elles-mêmes

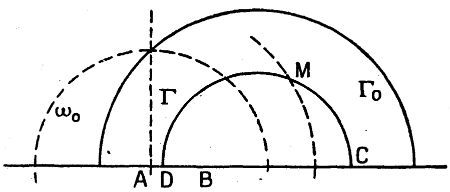

Fig. 35.

toutes deux inférieures à $\frac{\pi}{2}$; le point B est alors, dans la forme type choisie, intérieur au cercle ω_0 centré en A, qui est le contraire du cercle fondamental ω, et dont tous les points sont à une fa-distance de A égale à un droit, et de même A est intérieur au cercle Γ_0 qui figure la fa-droite ayant pour pôle B, tandis que l'endocycle Γ dont tous les points sont à une fa-distance de B intérieure à un droit est un second cercle intérieur à Γ_0, leur fa-centre commun B étant lui-même intérieur à ces deux cercles Γ, Γ_0; dans ces conditions la disposition de la figure est la même qu'en Ire et lorsque M parcourt Γ, la fa-distance [AM] est maximum lorsque M est au point d'intersection de Γ avec le prolongement de la fa-droite AB au delà de B.

Ces considérations conduisent d'abord à compléter la notion de fa-distance de deux points A, B en la considérant comme portée par la fa-droite joignant ces points et en la regardant comme la *fa-longueur du segment de fa-droite limité à ces points*, fa-longueur qui ne dépend pas de l'ordre des deux points et que l'on représente indifféremment par [AB] ou [BA]; elles amèneront ensuite à poser *a priori* la définition suivante de l'addition de deux fa-distances : *la somme de deux fa-longueurs est la fa-distance des deux extrémités non communes* A, C *lorsque par fa-déplacement on les amène sur une même fa-droite en leur*

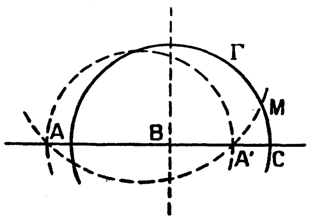

Fig. 36.

donnant une extrémité commune B *et en les disposant de part et d'autre de celle-ci*, et l'on représente cette somme en écrivant

$$[AC] = [AB] + [BC].$$

Cette définition qui est générale en Ire a besoin d'être précisée en IIe, car si dans le cas simple envisagé plus haut de deux fa-distances [AB], [BC] inférieures à $\frac{\pi}{2}$ la somme [AC] est une portion de fa-droite plus petite que celle qui sépare deux points opposés A, A′ et qui est jusqu'ici la limite supérieure que nous désignerons par π des fa-distances, il n'en est pas toujours de même avec deux fa-distances quelconques, inférieures ou supérieures à $\frac{\pi}{2}$; on s'en rend compte d'une façon simple en plaçant cette fois B au centre du cercle fondamental; les deux points A et C, ainsi que A et son opposé A′, se situent alors de part et d'autre de B sur la même fa-droite et droite ABC et lorsque A′ est entre B et C la portion de fa-droite ABC définie comme la somme [AB] + [BC], aussi bien que la portion AA′M de celle qui joint A à un point arbitraire M de l'endocycle et cercle Γ centré en B et passant par C, est plus grande que la fa-longueur [AA′] considérée jusqu'ici comme la limite supérieure que nous représenterons par π des fa-distances; on est ainsi conduit à envisager au point de vue de l'addition une nouvelle limite supérieure, que nous représenterons par 2π, des fa-distances, et qui répond au parcours total de la ligne fermée constituée par une fa-droite, partant de l'un quelconque A de ses points pour revenir et se terminer au même point; ce fait est analogue, et l'analogie prendra plus loin un caractère plus concret, à l'addition de deux angles, lesquels inférieurs chacun à deux droits, peuvent avoir une somme supérieure à cette limite de deux droits. On retiendra donc de là que *en* II^e *la somme de deux fa-longueurs peut-être dans certains cas plus grande que la limite supérieure* π *des fa-distances de deux points.*

42. Propriétés fondamentales de l'addition des fa-longueurs. — La somme $[AC] = [AB] + [BC]$ étant ainsi définie, et indépendante de l'ordre des deux extrémités de chacune des trois fa-longueurs $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ on écrit aussi

$$[AC] - [AB] = [BC]$$

en disant que $[BC]$ est la différence entre $[AC]$ et $[AB]$ ou mieux l'*excès de la fa-longueur* $[AC]$ *sur la fa-longueur* AB.

Ces définitions ont des conséquences immédiates : la première est que inversement *toute fa-longueur* $[AC]$ *peut se décomposer d'une infinité de manière en une somme de deux autres*, le point intermédiaire B pouvant être arbitrairement choisi entre A et C sur la droite AC.

Cette addition possède ensuite les propriétés fondamentales de l'addition arithmétique : c'est ainsi que *si l'une des fa-longueurs est nulle la somme est égale à l'autre*, $[AB] = o$ signifiant par exemple A et B et confond et entraînant $[AC] = [BC]$. Puis propriété capitale, *l'addition de deux fa-longueurs est une opération commutative* car on peut parcourir aussi la même fa-droite de C vers A en rencontrant le même point intermédiaire B, ce qui donne

$$[CA] = [CB] + [BA]$$

et peut aussi s'écrire :

$$[AC] = [BC] + [AB];$$

on en déduit encore :

$$[AC] - [BC] = [AB],$$

et $[AB]$ est à son tour l'excès de $[AC]$ sur $[BC]$.

De même *l'addition de fa-longueurs obéit aux lois arithmétiques de l'inégalité*, car d'après la disposition des trois points A, B, C sur la même fa-droite la somme $[AC]$ représente bien une fa-distance supérieure au premier terme $[AB]$ de cette somme et aussi par permutation et d'après ce qui précède au second terme $[BC]$; inversement si une fa-longueur est plus grande qu'une autre il en existe une troisième qui est l'excès de la première sur la seconde et qui, ajoutée à cette seconde donne la première, car on peut par fa-déplacement les disposer sur une même fa-droite à partir d'un même point A et dans le même sens la plus grande en $[AC]$ la plus petite en $[AB]$, B étant alors entre A et C et $[BC]$ étant l'excès de $[AC]$ sur $[AB]$.

En particulier, en II^e si l'on considère les deux parties d'une même fa-droite séparées par deux points non opposés quelconques A, C l'une de ces parties comprend l'opposé A′ de A et répondant à $[AA'C] = [AA'] + [A'C]$ est plus grande que la fa-distance $[AA']$ de deux points opposés, tandis que l'autre partie est un terme de la somme $[ACA'] = [AC] + [CA']$ et est plus petite que $[AA']$ et *a fortiori* que la première partie; on en déduit que, *en* II^e *deux points non* *opposés quelconques d'une même fa-droite séparent celle-ci en deux parties inégales dont la somme est le double de la fa-distance de deux points opposés.*

Enfin, l'addition de fa-longueurs s'étend de proche en proche à des sommes de 3, 4, ... fa-longueurs successives, toujours portées par une même fa-droite à condition en II[e] d'envisager des fa-longueurs qui décrites dans un même sens de parcours sur la ligne fermée constituée par une même fa-droite, peuvent se replier sur elles-mêmes en totalité ou en partie et être ainsi plus grandes que de nouvelles limites supérieures 2π, 3π, ...; en particulier, la somme [AD] de trois fa-longueurs, est représentée par :

$$[AD] = [AB] + [BC] + [CD]$$

et répond, par définition, à deux additions consécutives se traduisant par :

$$[AD] = ([AB] + [BC]) + [CD];$$

sa qualité essentielle est d'être une *opération associative* car les points A, B, C, D se succèdant dans un même sens sur la même fa-droites, on a aussi, en parcourant celle-ci dans le sens contraire,

$$[DA] = [DC] + [CB] + [BA] = ([DC] + [CB] + [BA],$$

ce que l'on peut écrire encore, en application de la qualité commutative :

$$[AD] = [AB] + ([BC] + [CD]).$$

Les caractères fondamentaux de l'addition arithmétique sont ainsi tous vérifiés; leurs applications en sont les mêmes et *une somme de fa-longueurs en nombre quelconque est indépendante de leur ordre et de leurs groupements*, car elle ne change ni quand on les intervertit d'une manière quelconque, ni quand on remplace plusieurs d'entre elles par leur somme ou inversement l'une d'entre elles par plusieurs autres dont elle est la somme.

43. **Mesures d'une fa-longueur.** — En application de ces propositions, *toute fa-longueur a des multiples et sous-multiples* (ou *parties aliquotes*); un multiple de la fa-longueur a est la somme $s = na$ de n fa-longueurs égales à a et inversement $a = \frac{s}{n}$ est un sous-multiple ou partie aliquote de s dit le $n^{\text{ième}}$ de s; plus généralement, la *fraction* $\frac{p}{n}$ *de* a, représentée par $b = \frac{p}{n} a$, est la somme de p fa-longueurs égales au $n^{\text{ième}}$ de a. D'où cette conséquence capitale que *les fa-longueurs sont des grandeurs arithmétiques mesurables*, la mesure d'une fa-longueur a s'établissant en choisissant une fa-longueur particulière arbitraire mais ni nulle, ni en I[re] égale à la limite supérieure des fa-distances, longueur appelée *unité* u, la mesure de a étant suivant les cas, soit un ***nombre rationnel***, entier n ou fraction $\frac{n}{p}$, lorsque a, dit alors *commensurable* avec cette unité, u est un multiple $a = nu$, ou une fraction $a = \frac{n}{p} u$ de u, soit dans le cas contraire, un *nombre irrationnel* ou incommensurable, limite d'un nombre rationnel variable

mesurant une fa-longueur variable a' qui tend vers a en restant commensurable avec $\mathring{u}$.

Un caractère remarquable oppose ici les fa-longueurs en Ire et en IIe. En Ire toute fa-longueur [AB] est limitée à deux points fa-propres A, B d'une fa-droite de points fa-impropres I, J parcourue dans l'ordre IABJ; elle peut toujours s'accroître car on peut placer arbitrairement sur la fa-droite IJ un point C entre B et J, lequel donne une fa-longueur [AC] plus grande que [AB]; par exemple les multiples successifs de [AB], [AC] $= n$[AB], portés à partir de la même origine A et dans le même sens, se terminent en des points C qui, lorsque l'entier n croît, se déplacent de B vers J sans jamais atteindre J; plus particulièrement, quel que soit le point D placé entre B et J ou simplement quel que soit l'entier n_0 si grand qu'il soit, cet entier détermine un point D, extrémité de la fa-longueur [AD] dont la mesure est n_0 avec [AB] pris pour unité, et avec tout autre entier n supérieur à n_0

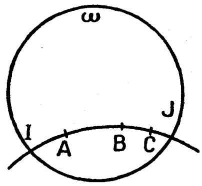

Fig. 37.

on obtient une autre fa-longueur [AC] plus grande que [AD]; cela signifie que *en Ire les fa-longueurs sont des grandeurs arithmétiques pouvant prendre toutes valeurs de zéro à l'infini.*

Il n'en est pas de même en IIe, car les points C répondant quel que soit l'entier n à [AC] $= n.$ [AB] n'existent qu'avec les conventions établies plus haut qui font envisager successivement des fa-longueurs comprises entre π et 2π, 2π et 3π, ..., pouvant se recouvrir une ou plusieurs fois sur elles-mêmes alors qu'en fait les extrémités C de toutes ces fa-longueurs conventionnelles restent toutes à des fa-distances de A au plus égales à la limite supérieure π; par suite et contrairement à ce que l'on vient de voir en Ire *les fa-longueurs en* IIe *sont des grandeurs arithmétiques bornées*, qui restent comprises entre o et π, et ne surpassent la limite π que sous des conventions qui en changent la signification.

44. Inégalités entre fa-côtés d'un fa-triangle. — Remontant alors à l'origine de cette étude qui nous a fait envisager deux fa-longueurs consécutives [AB], [BM] non portées nécessairement par la même fa-droite et la fa-longueur [AM] se terminant en leurs extrémités non communes, nous rencontrons un fa-triangle [ABM], de sommets tous fa-propres en Ire, et nous sommes maintenant en mesure de donner une forme simple aux conditions de possibilité de la construction d'un fa-triangle dans le cas qui a été réservé, celui où l'on connaît les trois côtés, c'est-à-dire les trois fa-longueurs

$$[AB] = c, \qquad [BM] = a, \qquad [AM] = b.$$

Nous plaçant d'abord en I^re^ en nous reportant à la construction du paragraphe 41 en supposant que $[AB] = c$ et $[BM] = [BC] = a$ sont les plus petits des trois côtés donnés, cette construction fait apparaître une condition nécessaire de possibilité que $[AM] = b$ soit inférieur à la fa-longueur maximum

$$[AC] = [AB] + [BC] = c + a,$$

et cette condition se montre ensuite comme suffisante, car si elle est remplie l'endocycle Γ a deux points diamétralement opposés C, D, dont l'un C est extérieur à l'endocycle et cercle Γ_A de fa-centre A et de fa-rayon $[AM] = b$ et l'autre D intérieur comme les points B et A, Γ coupant donc nécessairement Γ_A en un point M intermédiaire entre C et D et donnant ainsi le fa-triangle ABM. Comme a et c, les plus petits des trois côtés, satisfont en même temps aux conditions analogues $a < b + c$, $c < a + b$, il en résulte, en se libérant de la restriction supposée sur l'ordre de grandeur des trois côtés, que le fa-triangle ABM existe, dans tous les cas, sur les trois conditions nécessaires et suffisantes

$$a < b + c, \qquad b < c + a, \qquad c < a + b.$$

En II^e^ la construction et le raisonnement sont les mêmes dans deux hypothèses, la première que les deux côtés $c = [AB]$ et $a = [BM] = [BC]$ soient inférieurs ou égaux à $\frac{\pi}{2}$, la seconde que le troisième $b = [AM]$ soit le plus grand; puis on se libère de même de la seconde en maintenant la première pour aboutir ainsi à la même conclusion.

Reste alors à étudier l'hypothèse contraire dans laquelle les trois côtés donnés n'en comprennent pas deux inférieurs à $\frac{\pi}{2}$, mais en comprennent donc deux au moins, a, c, par exemple, supérieurs à $\frac{\pi}{2}$. Comme on l'a fait à propos d'un fa-triangle d'angles donnés, on peut alors ramener la construction du fa-triangle ABC à celle d'un autre AB′C déduit du premier en y remplaçant le sommet B par son opposé B′ et de côtés égaux respectivement à b, $\pi - a$, $\pi - c$, les deux derniers étant donc inférieurs à $\frac{\pi}{2}$; on est ainsi ramené au cas précédent et les conditions de possibilité sont :

$$b < (\pi - a) + (\pi - c), \qquad \pi - a < b + (\pi - c), \qquad \pi - c < b + \pi - a$$

ou

$$a + b + c < 2\pi, \qquad c < b + a, \qquad a < b + c;$$

il y figure, avec une inégalité nouvelle, deux de celles du premier cas, mais la troisième, $b < a + c$ est également vérifiée car les précédentes donnent, a et c étant supérieurs à $\frac{\pi}{2}$,

$$b < (\pi - a) + (\pi - c) < a + c;$$

inversement l'inégalité nouvelle est aussi vérifiée dans le premier cas où a et c étant inférieurs à $\frac{\pi}{2}$ on a de la même manière :

$$b < a + c < (\pi - a) + (\pi - b);$$

on en déduit donc, dans tous les cas, les quatre conditions nécessaires et suffisantes :

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b, \quad a + b + c < 2\pi.$$

De là les conclusions générales suivantes où l'on retrouve en particulier, celles bien connues de la Géométrie euclidienne : *les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse construire un fa-triangle de côtés donnés sont que chacun des trois côtés soit inférieur à la somme des deux autres et en outre en* II^e *que leur somme soit inférieure à* 2π.

De la construction du fa-triangle résulte que ces conditions s'appliquent aussi à l'intersection de deux endocycles définis par leurs fa-centres et leurs fa-rayons et signifient que *les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux endocycles soient sécants sont que leurs fa-rayons et la fa-distance de leurs centres satisfassent aux mêmes conditions d'inégalité que les trois côtés d'un fa-triangle.*

45. **Fa-périmètre de lignes fa-polygonales.** — De même qu'en Géométrie classique et par la même méthode les inégalités précédentes s'étendent aux *lignes fa-polygonales* et à leurs *fa-périmètres*, une telle ligne étant une succession de segments fa-rectilignes dits ses fa-côtés, l'origine du premier et l'extrémité du dernier étant les extrémités de la ligne fa-polygonale et se confondant dans le cas particulier d'une *ligne fermée*, tous ces fa-côtés étant en outre en II^e soumis comme ceux d'un fa-triangle à la même réserve d'être inférieurs à π. Dans une première généralisation *la fa-distance* [AB] *de deux points, fa-propres en* I^{re}, *est plus petite que le fa-périmètre de toute ligne fa-polygonale ayant ces deux points pour extrémités :* si en effet cette ligne ACDB a trois côtés, en menant la fa-diagonale AD on a les inégalités :

$$[AD] < [AC] + [CD], \qquad [AB] < [AD] + [DB[,$$

qui entraînent par addition :

$$[AB] < [AC] + [CD] + [DB],$$

et l'on peut continuer par récurrence en passant de n à $n + 1$ fa-côtés.

Une seconde généralisation concerne les *lignes fa-polygonales convexes* disposées tout entières d'un même côté de chaque fa-droite portant l'un de ses fa-côtés et deux quelconques de ces lignes ayant leurs extrémités communes A, B et situées d'un même côté de la fa-droite AB qui joint ces extrémités étant dites l'une *l'enveloppée* qui est la plus proche de AB, l'autre *l'enveloppante*, termes qui n'ont de sens en II^e que sous la réserve que la fa-droite AB se limite au segment de fa-longueur [AB] inférieure à π, car avec l'autre segment terminé aux mêmes points il y aurait lieu d'échanger enveloppée et enveloppante.

Cela précisé, si l'on considère d'abord une enveloppée ACB de deux fa-côtés [AC], [CB], et si l'on prolonge au delà de C la fa-droite AC celle-ci coupe en II^e la fa-droite de base AB en A et en son opposé A$'$ lequel d'après la réserve concernant cette base [AB] est situé sur son prolongement au delà de B et par conséquent, dans tous les cas, en II^e et en I^{re}, ce prolongement de [AC] rencontre l'enveloppée en un point D qui sépare le fa-périmètre de celle-ci en deux parties allant l'une a de A à D, l'autre b de D à B; on a alors, d'après la proposition précédente :

$$[AC] + [CD] < a, \qquad [CB] < [CD] + b,$$

d'où par addition :

$$[AC] + [CB] < a + b;$$

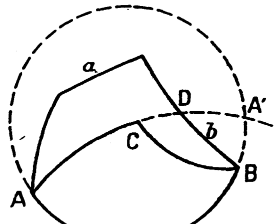

Fig. 38.

le résultat s'étend par récurrence à une enveloppée ayant un nombre quelconque de fa-côtés et la seconde généralisation des propositions classiques est que *si deux lignes fa-polygonales convexes ont mêmes extrémités* AB *et sont situées d'un même côté de la fa-longueur* [AB] *joignant ces extrémités, le fa-périmètre de l'enveloppée est plus petit que celui de l'enveloppante sous réserve en* II^e *que la fa-longueur* [AB] *soit inférieure à* π.

46. Métrique des fa-longueurs en II^e. — Dans tout ce qui précède une fa-longueur $x = [AB]$ apparaît comme un nouvel invariant de deux points A, B; elle est donc fonction de ceux déjà connus et il y a lieu de chercher comment

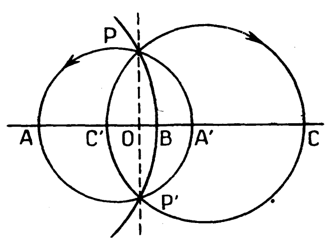

Fig. 39.

elle s'exprime en fonction de l'un d'eux et inversement. Nous le ferons d'abord en II^e en cherchant comment $x = [AB]$ est relié à l'angle $\theta = (PA, PB)$ compris entre o et deux droites formé par les demi-fa-droites joignant à A et B un pôle P de la fa-droite AB. On peut à cet effet s'aider d'une forme-type, soit de celle déjà utilisée précédemment dans laquelle un point particulier de la fa-droite AB étant placée au centre O de ω, son opposé au point ∞, cette fa-droite est une droite passant par O et ses pôles P, P′ deux points symétriques par rapport à cette droite et à ce point O, soit de celle dans laquelle l'un des pôles P étant placé en O la fa-droite AB est le cercle réel ω_0 centré en O et contraire à ω et les demi-fa-droites PA, PB, PC, ... joignent P aux divers points de AB des demi-droites issues de P. La correspondance entre x et θ apparaît de suite : ainsi qu'on le sait déjà à deux valeurs égales de l'une de ces deux grandeurs correspondent des valeurs égales de l'autre; en particulier elles sont nulles en même temps et le maximum de x, désigné par π, correspond au maximum égal à deux droits d'un angle arithmétique; passant ensuite à l'addition, la somme $[AC] = [AB] + [BC]$ de deux fa-longueurs portées par une même fa-droite correspond à la somme

$$(PA, PC) = (PA, PB) + (PB, PC)$$

des angles correspondants avec cette particularité commune que si la première surpasse la limite π et plus généralement dans l'addition d'un nombre quelconque

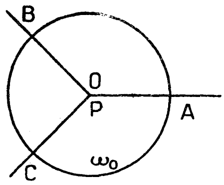

Fig. 40.

de termes si elle surpasse π, 2π, 3π, ..., la seconde surpasse de même les limites correspondantes de 2, 4, 6, ... droits.

Ces deux qualités relatives à l'égalité et à l'addition entraînent que *en* II^e *la fa-longueur x et l'angle correspondant θ sont des grandeurs arithmétiques proportionnelles*, et ne sont donc pas essentiellement distinctes, et plus particulièrement *elles ont même mesure sous condition que les unités choisies pour l'une et l'autre soient des grandeurs correspondantes.*

Dorénavant nous observerons toujours cette condition de sorte que en II^e nous ne distinguerons plus entre la fa-longueur x et l'angle θ; l'unité d'angle choisie qui entraîne le choix de l'unité de fa-longueur sera le *degré* ou le *grade*, ou le plus souvent le *radian*; mais on observera que cette dernière unité a un sens essentiellement euclidien, celle de l'angle au centre qui intercepte sur le cercle un arc de longueur égale à celle de ses rayons, et que en Géométrie non euclidienne de II^e espèce, elle n'a d'autre signification que d'être l'unité avec laquelle l'angle de deux droits a pour mesure le nombre $\pi = 3,14\ldots$; nous lui trouverons d'ailleurs plus tard à propos de la fa-longueur d'un arc de fa-cercle une autre interprétation plus concrète.

Observons encore que ce choix du radian comme unité justifie la notation utilisés provisoirement jusqu'ici avec les symboles $\frac{\pi}{2}$, π, 2π, ... représentant certaines fa-longueurs remarquables et devenant effectivement les mesures de ces fa-longueurs.

47. Métrique des fa-longueurs en I^{re}. — Poursuivant la même étude en I^{re} on a à relier une fa-longueur x à l'angle correspondant de parallélisme φ; or la relation s'est déjà rencontrée à propos du fa-triangle défini par cette fa-longueur qui est l'un de ses côtés et par les angles adjacents; dans la forme-type où le cercle fondamental ω et la fa-droite δ portant la fa-longueur $x = [AB]$ sont deux droites rectangulaires en un point I, cette relation s'est traduite par l'expression suivante

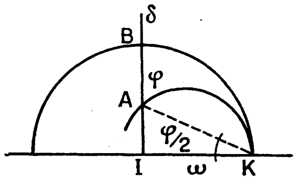

Fig. 41.

de tg $\frac{\varphi}{2}$ ou mieux de cotg $\frac{\varphi}{2}$ qui a l'avantage de croître dans le même sens que x :

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} = \frac{IB}{IA}$$

sous condition que les trois points se succèdent sur δ dans l'ordre I, A, B; cette relation, appelée à jouer un rôle fondamental, se retrouve en menant en B et A les deux fa-droites BK, AK parallèles en un point fa-impropre K, la première perpendiculaire en B à la fa-droite et droite AB, et portée par un demi-cercle centré en I, la seconde portée par le demi-cercle passant par A et K et centré aussi sur ω; φ est alors l'angle en A formé par les demi-fa-droites AB, AK et $\frac{\varphi}{2}$ l'angle en K du triangle rectangle AIK; on vérifie bien que pour x croissant de o à $+\infty$, B s'éloignant de A dans le sens IA, cotg $\frac{\varphi}{2}$ croît de 1 à $+\infty$, définissant un angle $\frac{\varphi}{2}$ qui décroît de $\frac{\pi}{4}$ à o, et un angle φ qui décroît de $\frac{\pi}{2}$ à o.

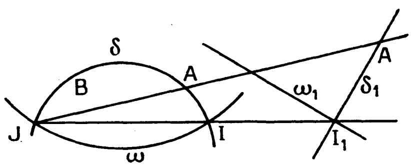

Fig. 42.

Il pourra être utile d'établir ce que devient cette relation (1) dans le cas d'une forme générale où ω et δ sont portés par deux cercles quelconques orthogonaux aux deux points fa-impropres I, J de la fa-droite δ; il suffit pour cela de revenir à la forme type précédente par une inversion qui, rejetant J en ∞, a pour pôle ce point J et transforme ω et δ en deux droites rectangulaires $I_1\omega_1$, $I_1\delta_1$ issues de l'inverse I_1 de I et parallèles aux tangentes en J à ω et δ; l'inverse d'un point A de δ est un point A_1 de δ_1 et les deux triangles JIA, JI_1A_1 qui à l'origine même de la notion d'inversion deviennent homothétiques par symétrie autour de la bissectrice de leur angle commun en J donnent, entre les longueurs I_1A_1, IA, JI_1, JA :

$$\frac{I_1A_1}{IA} = \frac{JI_1}{JA} \quad \text{ou} \quad I_1A_1 = \frac{IA}{JA} JI_1 ;$$

on a de même avec un second point B de δ et son inverse B_1 :

$$I_1B_1 = \frac{IB}{JB} JI_1,$$

et la relation (1) appliquée à I_1, A_1, B_1, devient en supposant que les points de δ se succèdent dans l'ordre I, A, B, J :

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = \frac{IB}{IA}\,\frac{JA}{JB} ;$$

on observera que cette relation est bien générale, qu'elle s'applique dans des cas particuliers où ω ou δ sont rectilignes : c'est immédiat lorsque ω seul est rectiligne; si c'est δ qui seul est rectiligne, la même homothétie relie encore I et A_1, A et I_1; enfin lorque ω et δ sont tous deux des droites on revient au premier cas de la relation (1), le rapport $\frac{JA}{JB}$ étant alors égal à 1 avec J rejeté à l'infini.

On rencontre ici dans cette valeur de $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ une expression dépendant de quatre points I, A, B, J d'un même cercle, dite *rapport anharmonque* ou *double rapport* de ces quatre points.

Les relations (1) et (2) tiennent en I^re^ mais dans des conditions moins simples le rôle que joue en II^e^ celle qui relie la fa-longueur x et l'angle θ; elles permettent d'abord de vérifier la loi de l'égalité; en effet, dans la forme type (1), à des valeurs égales φ, φ' de l'angle φ répondent deux couples de points A, B et A', B' qui, placés sur δ et reliés par la condition $\frac{IB}{IA} = \frac{IB'}{IA'}$, sont homothétiques pa rrapport à I et se déduisent donc l'un de l'autre par le produit de deux inversions positives de pôle I, lesquelles sont deux fa-symétries d'axes perpendiculaires à δ, d'où deux fa-longueurs $x = [AB]$, $x' = [A'B']$ qui sont bien égales et de plus sont de même sens.

Inversement et pour les mêmes raisons, si l'on considère deux fa-longueurs égales x, x', on vérifie que les angles correspondants φ, φ' sont bien égaux en ayant soin dans la première forme-type de désigner par A, B et A', B' les extrémités de ces fa-longueurs de manière que l'ordre IA'B' soit le même que IAB.

Reste alors à étudier la loi de l'addition : la somme $x = [AC]$ de deux fa-longueurs $x' = [AB]$, $x'' = [BC]$ étant représentée dans la première forme-type à l'aide de points qui se succèdent sur δ dans l'ordre I, A, B, C, les angles correspondants φ, φ', φ'' sont définis par :

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = \frac{IC}{IA}, \qquad \operatorname{cotg}\frac{\varphi'}{2} = \frac{IB}{IA}, \qquad \operatorname{cotg}\frac{\varphi''}{2} = \frac{IC}{IB},$$

et satisfont donc à la relation :

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi'}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi''}{2},$$

laquelle, ne faisant intervenir que des angles invariants, est valable dans toute forme générale comme dans la forme-type, ce que l'on peut d'ailleurs vérifier à l'aide de calculs analogues portant sur la relation (2).

Cette relation (3) est moins simple que celle qui existe en II^{e} entre les angles θ; elle ne se traduit plus par une addition telle que

$$\varphi = \varphi' + \varphi'', \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi'}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\varphi''}{2}, \qquad \text{ou} \qquad \cos\varphi = \cos\varphi' + \cos\varphi'',$$

ou toute autre de même forme, une telle relation étant indépendante de la précédente (3); la conséquence est que en I^{re} les deux fonctions, inverses l'une de l'autre, exprimant l'un des invariants x, φ en fonction de l'autre, sont des fonctions nouvelles qu'il s'agit de construire et dans lesquelles le lecteur initié, constatant la correspondance entre une somme $x' + x''$ et un produit $\operatorname{cotg}\frac{\varphi'}{2} \operatorname{cotg}\frac{\varphi''}{2}$, reconnaîtra les caractères des logarithmes; mais le problème lui-même va précisément permettre d'édifier la théorie de ces nouvelles fonctions en lui donnant un support géométrique simple; pour le faire en toute généralité, il suffira de compléter les notions précédentes d'égalité et d'addition, limitées jusqu'ici à des fa-longueurs arithmétiques x et à des angles aigus φ en les étendant à des nombres algébriques x et à des angles φ, aigus ou obtus, compris entre o et π.

48. Orientation des fa-longueurs et des angles de parallélisme. — De même que pour les segments orientés portés par une même droite, une *fa-longueur orientée*, que l'on représente par $[\overline{AB}]$ est une fa-longueur dont on distingue entre les deux extrémités l'une A, dite son *origine*, l'autre B, dite son *extrémité*; sa mesure algébrique $x = [\overline{AB}]$ s'établit en choisissant *a priori* sur la fa-droite δ qui porte A et B un *sens direct*, elle a pour valeur absolue la fa-longueur arithmétique $[AB]$ et elle est positive lorsque le sens allant de l'origine A à l'extrémité B est le même que le sens direct, négative dans le cas contraire; elle est nulle lorsque A et B sont confondus. Avec cette notion nouvelle la loi générale de l'addition se traduit immédiatement par la *formule de Chasles généralisée* :

$$[\overline{AC}] = [\overline{AB}] + [\overline{BC}]$$

qui est valable dans tous les cas, quelle que soit la distribution sur δ des trois points et non plus seulement comme dans le cas des fa-longueurs arithmétiques lorsqu'ils se succèdent dans l'ordre A, B, C.

Des conventions analogues portent sur l'angle de parallélisme φ dont on étend la définition en lui donnant pour sommet l'origine A de la fa-longueur orientée, pour l'un de ses côtés la demi-fa-droite dirigée non plus nécessairement vers B comme c'était le cas avec les fa-longueurs arithmétiques, mais dans un sens convenu IJ choisi *a priori* allant d'un point fa-impropre I de δ, à l'autre J, l'autre côté de cet angle φ restant la demi-fa-droite qui joint A à un point fa-impropre K, variable avec B, de la fa-droite perpendiculaire à δ en B, extrémité de la fa-longueur algébrique; le nouveau sens direct IJ ainsi choisi pour définir le nouvel angle φ est indépendant de celui choisi pour définir la fa-longueur algébrique x; ordinairement il sera le même mais il pourra être aussi son contraire. Cet *angle orienté de parallélisme* ainsi défini est le même que le premier compris, entre o et $\frac{\pi}{2}$ lorsque le sens de A à B est le même que celui de I à J, l'ordre des points étant donc IABJ, mais dans le cas contraire où l'ordre est IBAJ, il est son supplémentaire, compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et la nouvelle valeur de $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ est l'inverse de la première; il en résulte que *les formules* (1) *et* (2) *sont générales*, valables quelle que soit la position des points A, B, sur δ, donnant toujours une valeur positive de $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$, une valeur de $\frac{\varphi}{2}$ comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$ et une de φ entre o et π.

Ces conventions concernant les deux nouvelles grandeurs ainsi orientées x, φ entraînent immédiatement les conséquences suivantes que l'on peut d'ailleurs

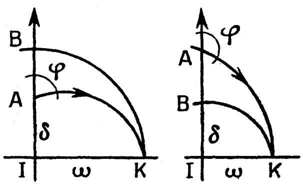

Fig. 43.

vérifier sur les formules générales (1) et (2) : dans un premier cas, celui où les deux sens directs choisis pour x et φ se confondent suivant IJ, lorsque x est positif, l'ordre étant IABJ, les valeurs de x et φ sont les mêmes que pour les grandeurs non orientées, $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ croissant de 1 à $+\infty$, φ décroissant de $\frac{\pi}{2}$ à o lorsque x croît de o à $+\infty$, et lorsque x est négatif décroissant de o à $-\infty$, l'ordre étant IBAJ, $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ décroît de 1 à o, φ croît de $\frac{\pi}{2}$ à π; autrement dit, *lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$* $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ *croît de* o *à* $+\infty$, φ *décroît de* π *à* o, *la valeur* $x=$ o *correspondant à* $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}=1$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, ...; dans le second cas, que l'on évitera d'ailleurs dans les applications, le sens direct des fa-longueurs étant l'opposé du sens IJ choisi pour les angles φ, la valeur de x est l'opposée du cas précédent, tandis que celle de φ. donnée par les formules (1) ou (2), reste la même, et pour x croissant de $-\infty$ à $+\infty$, $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ varie en sens contraire, décroissant de $+\infty$ à o et φ croît de o à π.

De là résulte la généralisation de la loi d'égalité, d'après laquelle à des valeurs algébriques égales de x correspondent des valeurs égales de $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ comprises entre o et $+\infty$, et de φ comprises entre o et π, et réciproquement.

Enfin, la loi d'addition se généralise de même, la somme $x=x'+x''$ concerne des nombres algébriques quelconques, et d'après la formule de Chasles rappelée plus haut, se rapporte à trois points A, B, C placés d'une manière quelconque sur δ;

la relation (3) se déduit donc encore des relations (1) et (2) et est ainsi valable en toute généralité. Dans tout ce qui suit, nous en retiendrons surtout l'invariant que nous désignerons par ξ, $\xi = \cotg \frac{\varphi}{2}$, pour étudier sa correspondance avec x définie par les deux relations fondamentales :

$$(4) \qquad x = x' + x'', \qquad \xi = \xi' \xi''$$

entre des valeurs correspondantes de x et de ξ, chacune de ces relations étant conséquence de l'autre, les x étant des nombres algébriques quelconques variant de $-\infty$ à $+\infty$, et les ξ des nombres arithmétiques variant de à o $+\infty$.

49. Logarithmes et exponentielles. — Ces seules considérations géométriques établissent ainsi l'existence de deux fonctions, inverses l'une de l'autre, l'une appelée *fonction logarithmique* dans laquelle x est fonction de la variable ξ, l'autre appelée *fonction exponentielle* où ξ est la fonction et x la variable, et représentées par les notations qui se préciseront par la suite

$$(5) \qquad x = \log \xi, \qquad \xi = \mathrm{ep}\, x.$$

Avec ces notations où l'on a $\xi = \cotg \frac{\varphi}{2}$, la relation fondamentale (1) s'écrit sous la forme suivante dont on fera de fréquentes applications :

$$(1') \qquad ep(x) = \frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IA}}.$$

On relèvera d'autre part que dans ces deux fonctions ξ qui représente un rapport tel que $\frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IA}}$ ou une fonction circulaire $\cotg \frac{\varphi}{2}$ a une signification numérique rigoureusement déterminée tandis que x, mesure algébrique d'une fa-longueur orientée dépend des deux choix arbitraires de l'unité de fa-longueur et du sens direct des fa-longueurs sur une fa-droite δ; par conséquent *la fonction logarithmique et la variable de la fonction exponentielle sont définies à un facteur près arbitraire et constant, positif ou négatif mais non nul.* Ce fait est le même que celui qui concerne les fonctions circulaires telles que $y = \sin x$ et leurs inverses $x = \arcsin y$, dans lesquelles x dépend du choix de l'unité d'angle tandis que y a une signification rigoureusement déterminée.

Les propriétés de ces fonctions sont des conséquences immédiates de leur origine géométrique et d'abord *la fonction logarithmique* $\log \xi$ *est définie pour toute valeur positive de* o *à* $+\infty$ *de la variable* ξ, *la fonction exponentielle* $\mathrm{ep}\, x$ *l'est pour toute valeur algébrique de* $-\infty$ *à* $+\infty$ *de la variable* x*; chacune d'elles est constamment croissante ou décroissante lorsque la variable correspondante est croissante, la fonction logarithmique passant par toute valeur de* $-\infty$ *à* $+\infty$, *et la fonction exponentielle ne prenant que des valeurs positives de* o *à* $+\infty$; *elles sont toutes deux continues*, la continuité traduisant ce fait que lorsque un point M se déplace sur une droite δ en tendant vers un point fixe B, le rapport $\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IA}}$ et la fa-distance $[\overline{\mathrm{AM}}]$ tendent respectivement vers $\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IB}}$

et $[\overline{AB}]$; *les deux fonctions sont inverses l'une de l'autre* chacune se déduisant de l'autre par l'échange de la variable et de la fonction, ce qui s'exprime par les identités, vérifiées quels que soient x ou ξ.

$$(6) \qquad \log(\mathrm{ep}\,x) = x, \qquad \mathrm{ep}(\log\xi) = \xi,$$

enfin en se reportant aux valeurs remarquables de x et de $\xi = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$, leurs *valeurs extrêmes* sont dans le cas ordinaire où le sens direct des fa-distances x est le même IJ que celui qui définit l'angle généralisé de parallélisme φ,

$$(7) \qquad \log 0 = -\infty, \qquad \log(+\infty) = +\infty, \qquad \mathrm{ep}(-\infty) = 0, \qquad \mathrm{ep}(+\infty) = +\infty,$$

et dans le cas contraire :

$$(7') \qquad \log 0 = +\infty, \qquad \log(+\infty) = -\infty, \qquad \mathrm{ep}(-\infty) = +\infty, \qquad \mathrm{ep}(+\infty) = 0,$$

et dans tous les cas elles ont la *valeur particulière remarquable* pour $\xi = 1$ ou $x = 0$

$$(8) \qquad \log 1 = 0, \qquad \mathrm{ep}(0) = 1.$$

Mais leur propriété capitale, traduite par les deux relations fondamentales (4) est que l'on a quels que soient les nombres algébriques x', x'' et les nombres positifs ξ', ξ'' :

$$(9) \qquad \log\xi'\xi'' = \log\xi' + \log\xi'', \qquad \mathrm{ep}(x' + x'') = \mathrm{ep}\,x'\,\mathrm{ep}\,x'',$$

la première égalité s'énonçant en termes classiques : *le logarithme d'un produit de facteurs positifs est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

Les conséquences et applications de ces relations sont nombreuses; c'est ainsi que pour

$$\xi'\xi'' = 1, \qquad \xi'' = \frac{1}{\xi'} \qquad \text{ou} \qquad x' + x'' = 0, \qquad x'' = -x',$$

on trouve :

$$\log\left(\frac{1}{\xi}\right) = -\log\xi, \qquad \mathrm{ep}(-x) = \frac{1}{x\,\mathrm{d}\vartheta};$$

les logarithmes de deux nombres inverses sont opposés, les valeurs de l'exponentielle pour deux valeurs opposées de la variable sont inverses l'une de l'autre, ces qualités résultant directement d'ailleurs des définitions posées plus haut d'une fa-longueur orientée et de son angle de parallélisme. On en déduit :

$$\log\frac{\xi}{\xi'} = \log\xi - \log\xi', \qquad \mathrm{ep}(x - x') = \mathrm{ep}\,x\,\frac{1}{\mathrm{ep}\,x'} = \frac{\mathrm{ep}\,x}{\mathrm{ep}\,x'},$$

la première relation donnant l'expression classique du *logarithme d'un quotient.*

50. Puissances arithmétiques et changement de base. — Les deux relations (9) s'étendent immédiatement au produit d'un nombre quelconque de facteurs positifs ξ et à la somme d'un nombre quelconque de nombres algébriques x; en particulier, avec m facteurs tous égaux à ξ et m nombres tous égaux à x, on a,

$$\log(\xi^m) = m\log\xi, \qquad \mathrm{ep}(mx) = (\mathrm{ep}\,x)^m.$$

On en déduit en particulier une méthode permettant d'établir avec précision, l'existence, quel que soit le nombre arithmétique ξ, de la *racine* $m^{ième}$ *arithmétique* $\eta = \sqrt[m]{\xi}$ de ce nombre, laquelle répond par définition à $\eta^m = \xi$, ce qui peut s'écrire successivement :

$$\log(\eta^m) = \log\xi, \qquad m\log\eta = \log\xi, \qquad \log\eta = \frac{1}{m}\log\xi, \qquad \eta = \mathrm{ep}\left(\frac{1}{m}\log\xi\right).$$

Plus généralement ce procédé permet d'étendre la notion de *puissance d'un nombre arithmétique* a, acquises jusqu'ici pour les seules puissances a^m d'exposant entier et positif m, aux puissances a^x ayant pour exposant un nombre algébrique quelconque x, positif ou négatif ou nul, entier ou fractionnaire ou irrationnel, en définissant *a priori* a^x par l'égalité

$$(10) \qquad \log(a^x) = x\log a \quad \text{ou} \quad a^x = \mathrm{ep}(x\log a),$$

laquelle détermine dans tous les cas un nombre a^x et un seul et donne bien d'autre part la valeur déjà connue de a^m lorsque l'exposant m est un entier positif.

En particulier, rapprochant de cette définition la valeur $\eta = \sqrt[m]{\xi}$ d'une racine $m^{ième}$, celle-ci s'interprète comme une puissance particulière d'exposant $y = \frac{1}{m}$, m étant entier et positif, car on trouve :

$$\sqrt[m]{a} = \mathrm{ep}\left(\frac{1}{m}\log a\right) = a^{\frac{1}{m}}.$$

De cette définition d'après laquelle une puissance s'exprime par une exponentielle découlent de suite les propriétés essentielles d'une puissance. lesquelles sont, les mêmes que celles de l'exponentielle, et dont les plus importantes s'expriment par les relations suivantes :

$$a^{x'}a^{x''} = a^{x'+x''}, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \qquad a^0 = 1;$$

elles se complètent par une autre concernant l'expression $(a^x)^y$ faite de *puissances superposées*, d'exposants algébriques quelconques x, y, pour laquelle on a :

$$\log(a^x)^y = y\log a^x = yx\log a,$$

ou

$$(11) \qquad (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}.$$

Toutes ces propriétés subsistent, mais sont banales, avec $\log a = 0$, $a = 1$, auquel cas on a, quel que soit x

$$1^x = \mathrm{ep}\,0 = 1$$

Puis avec $a > 1$, qui donne $\log a > 0$, en se plaçant dans le cas ordinaire d'un même sens direct pour les fa-longueurs et les angles de parallélisme, a^x croît en même temps que $x\log a$ et que x, ses valeurs extrêmes étant $a^{-\infty} = 0$, $a^{+\infty} = +\infty$; et de même pour $a < 1$, ($\log a < 0$), a^x décroît lorsque x croît, passant de $a^{-\infty} = +\infty$ à $a^{+\infty} = 0$.

Mais le rapprochement entre puissance et exponentielle est encore plus étroit :

revenant à la définition (10) dans laquelle on retrouve, comme pour l'exponentielle, une variable $x \log a$ proportionnelle et non nécessairement égale à x, il existe toujours quelle que soit l'arbitraire dont dépend la définition (5) de $\log \xi$ et $\mathrm{ep}\, x$ un nombre particulier a, positif mais différent de 1, que nous désignerons par e, répondant à

$$\log e = 1 \quad \text{ou} \quad e = \mathrm{ep}\, 1, \tag{12}$$

avec lequel d'après (10) l'exponentielle $\mathrm{ep}\, x$ se réduit à une puissance de e, en prenant la forme que nous emploierons dorénavant :

$$\mathrm{ep}\, x = e^x; \tag{13}$$

ce nombre e défini par (12) est dit la *base* de l'exponentielle e^x comme de la fonction logarithmique que pour préciser on représentera par $\log_e \xi$; de même que l'unité et le sens direct des fa-longueurs peuvent être choisis arbitrairement, cette base qui est la valeur de $\xi = \mathrm{ep}\, x$ pour $x = 1$ peut être aussi un nombre positif, différent de 1 choisi arbitrairement ; ordinairement elle sera choisie supérieure à 1, de sorte que e^x et $\log \xi$ varieront dans le même sens que les variables correspondantes x et ξ tandis que pour $e < 1$, elles varient en sens contraires.

De là une infinité de systèmes de logarithmes parmi lesquels on en distingue particulièrement deux, les *logarithmes népériens* ou *naturels*, utilisés pour leurs qualités intrinsèques, dont la base e est un nombre remarquable qui sera défini par la suite, et les *logarithmes décimaux* ou *vulgaires*, utilisés comme moyen auxiliaire de calcul, dont la base est le nombre 10, base du système de numération décimale, l'unité de fa-longueur [AB] étant alors représentée dans la première forme-type par deux points A, B de la droite IZ répondant à $\mathrm{IB} = 10\,\mathrm{IA}$.

Un problème se pose alors, dit du *changement de base*, qui consiste à calculer les logarithmes d'un système de base a connaissant ceux d'un autre système de base e ou inversement ; sa solution est encore donnée par la relation (10) qui s'écrit maintenant

$$\xi = a^x = e^{x \log_e a}$$

et donne

$$x = \log_a \xi, \qquad x \log_e a = \log_e \xi, \qquad \log_a \xi,\ \log_e a = \log_e \xi,$$

d'où la valeur cherchée :

$$\log_a \xi = \frac{\log_e \xi}{\log_e a}, \tag{14}$$

où l'on vérifie que, comme on le savait *a priori* que *les logarithmes des deux systèmes sont proportionnels* ; le coefficient de proportionalité est

$$m = \frac{1}{\log_e a};$$

il est dit le *module du changement de base* ; on en déduit en outre, en permutant les deux bases a et e qui jouent le même rôle, les modules correspondants étant inverses l'un de l'autre, la relation remarquable, valable quelles que soient les deux bases e, a :

$$\log_e a \log_a e = 1,$$

En particulier, si l'on passe d'une base e à un inverse $\frac{1}{e}$, comme on a

$$\log_e \frac{1}{e} = -\log_e e = -1,$$

les logarithmes, comme on le prévoit *à priori*, se changent en deux opposés.

Signalons enfin pour terminer que la fonction dite *fonction puissance* que nous n'aurons pas à utiliser dans ces pages avec un exposant irrationnel α, est l'expression $y = x^\alpha$ dans laquelle x est la variable tandis que l'exposant α est une constante rationnelle ou irrationnelle, positive ou négative ; son étude et ses propriétés se ramènent d'ailleurs à ce qui précède car on peut l'écrire

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \log_e x};$$

sa qualité essentielles, qui concerne la multiplication et non l'addition comme pour l'exponentielle, s'exprime par la relation :

$$(xx')^\alpha = x^\alpha x'^\alpha.$$

51 *a*. **Fonctions circulaires ou hyperboliques d'une fa-longueur.** — De même qu'en II^e où à toute fa-distance $x = [AB]$ on associe divers invariants, qui sont des fonctions de cette fa-distance et que celle-ci se ramènent à un angle, sont des fonctions circulaires de x ou de ses multiples ou sous-multiples, il y a lieu en I^{re}, où à une fa-distance x nous n'avons associé jusqu'ici en fonction de x que le seul invariant $e^x = \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}$, de chercher à en construire d'autres qui joueront le rôle des fonctions circulaires en II^e. A cet effet nous envisagerons dans les deux espèces des fa-distances variables et orientées $x = [\overline{OC}]$ ayant une origine fixe O et une

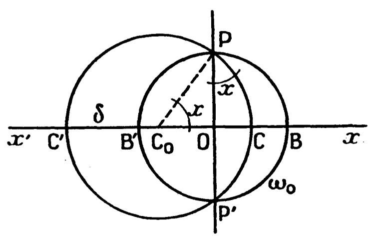

Fig. 44.

extrémité C variable sur une fa-droite δ issue de O et disposées dans une forme-type commune dans laquelle l'origine O est placée au centre du cercle fondamental ω, δ étant alors une droite $x'Ox$ issue de O orientée dans un sens direct Ox.

En II^e, pour construire l'angle x et ses fonctions circulaires on place le cercle ω_0 centré en O contraire au cercle fondamental ω, son diamètre PP$'$ perpendiculaire à Ox dont les extrémités sont les pôles de δ, et son diamètre situé sur Ox dont les extrémités B$'$,B sont disposées dans le sens direct $x'Ox$: l'angle x a pour sommet P (ou son opposé P$'$) ; ses côtés, fa-droites joignant P à O et C sont l'un la demi-droite PO, l'autre la tangente en P, dirigée de P vers C, au cercle qui, passant par P, P′ et C, coupe Ox en C et en son opposé C′ et a son centre sur Ox au milieu C_0 de CC′ ; dans un premier cas, celui de C placé entre O et B, de $o < x < \frac{\pi}{2}$, cet angle x est égal à l'angle en C_0 du triangle rectangle POC_0, les deux angles ayant leurs côtés perpendiculaires deux à deux, et l'on a alors, les rayons C_0P, C_0Q étant égaux, et R étant le rayon de ω_0 :

$$(15) \qquad \sin x = \frac{R}{\overline{C_0C}}, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{R}{\overline{C_0O}}, \qquad \cos x = \frac{\overline{C_0C}}{\overline{C_0O}};$$

ces relations s'étendent en outre à toute position de C sur δ et à toute valeur, que l'on peut toujours supposer comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, de la fa-distance orientée x_0 ; on retrouve en effet en déplaçant C sur δ les quatre quadrants classiques ; le premier est celui qui vient d'être traité ; le second est celui de C

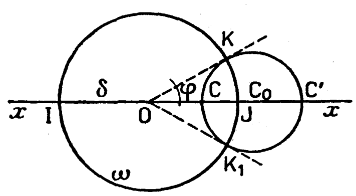

Fig. 45.

placé sur la demi-droite Bx, de $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, auquel cas B et C étant tous deux entre O et C, $\overline{C_0C}$ est positif, $\overline{C_0O}$ négatif et les relations précédentes subsistent; le troisième quadrant, celui de C sur la demi-droite $B'x$, de x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$, et le quatrième, celui de C entre O et B′, de x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et o, se déduisent respectivement du second et du premier quadrants par symétrie par rapport à O, x, $\overline{C_0C}$, $\overline{C^o,O}$ se changeant simultanément en leurs opposés, et les relations (15) sont donc bien générales.

Nous plaçant alors en Ire avec la même forme-type, on y retrouve la droite δ, orientée dans le sens direct $x'Ox$ des fa-distances orientées $x = [\overline{OC}]$, les points opposés C, C′ placés sur δ, l'un C intérieur, l'autre C′ extérieur au cercle fondamental ω, le cercle de diamètre CC′, centré au milieu C_0 de CC′, dont l'arc KCK_1 intérieur à ω est la fa-droite perpendiculaire en C à δ, les deux points C′, C_0 n'appartenant pas à la figure proprement dite comme étant intérieurs au cercle ω mais intervenant comme moyens auxiliaires ; l'analogie avec ce que l'on vient de voir en IIe conduit alors à définir trois fonctions de x, appelées respectivement *sinus*, *tangente*, *cosinus hyperboliques*, désignées pour abréger par les notations $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{ch} x$, et d'expressions analogues à (15), R étant le rayon de ω :

$$(16) \qquad \operatorname{sh} x = \frac{R}{\overline{CC_0}}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{R}{\overline{OC_0}}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{\overline{OC_0}}{\overline{CC_0}},$$

dans lesquelles on a remplacé les deux segments $\overline{C_0O}$, $\overline{C_0C}$ des formules (15) par leurs opposés afin que ces nouveaux segments soient de même signe que x, comme l'axe $\overline{C_0C}$ en II°. On pourra aussi y ajouter une quatrième fonction, la *cotangente hyperbolique*, $\operatorname{cth} x$, considérée simplement comme l'inverse de $\operatorname{th} x$, l'ensemble de ces quatre fonctions formant les *fonctions hyperboliques* de x.

La première question à traiter, qui ne se pose pas en II° où il y a identité entre x et le second invariant l'angle θ, est alors d'évaluer ces fonctions hyperboliques en fonction du second invariant $\xi = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = e^x$; en raison de son importance, nous le ferons successivement de deux manières.

Dans la première, plus géométrique, on envisage les deux cercles orthogonaux l'un ω, l'autre de diamètre CC′ et la division harmonique I, J, C, C′ qu'ils tracent sur leur ligne des centres ; on connaît le rayon R du premier ainsi que le rapport $\frac{\mathrm{IC}}{\mathrm{JC}}$, lequel d'après la relation (2) qui s'écrit

$$\xi = \frac{\mathrm{IC}}{\mathrm{IO}}\,\frac{\mathrm{JO}}{\mathrm{JC}}$$

est précisément égal à ξ sous la condition essentielle que nous supposerons toujours remplie que les points fa-impropres I, J de δ soient disposés de façon que les deux sens directs choisis pour la fa-longueur orientée x et l'angle de parallélisme φ coïncident, ou encore que *la base e soit choisie supérieure à* 1, et il s'agit de calculer en fonction de R et ξ la distance orientée $\overline{\mathrm{OC}_0}$ des centres des deux cercles et le rayon CC_0 du second. Utilisant plus commodément des vecteurs plutôt que des longueurs on a d'abord en toute généralité, C étant toujours entre I et J, et en rapportant chaque vecteur au point O pris pour origine :

$$\xi = \frac{\mathrm{IC}}{\mathrm{JC}} = \frac{\overline{\mathrm{IC}}}{\overline{\mathrm{CJ}}} = \frac{\overline{\mathrm{IO}}+\overline{\mathrm{OC}}}{\overline{\mathrm{OJ}}-\overline{\mathrm{OC}}} = \frac{\mathrm{R}+\overline{\mathrm{OC}}}{\mathrm{R}-\overline{\mathrm{OC}}} \qquad \text{et} \qquad \xi = \frac{\overline{\mathrm{IC'}}}{\overline{\mathrm{JC'}}} = \frac{\mathrm{R}+\overline{\mathrm{OC'}}}{\overline{\mathrm{OC'}}-\mathrm{R}},$$

d'où :

$$\overline{\mathrm{OC}} = \mathrm{R}\frac{\xi-1}{\xi+1}, \qquad \overline{\mathrm{OC'}} = \mathrm{R}\frac{\xi+1}{\xi-1}, \qquad \mathrm{OC}_0 = \frac{\overline{\mathrm{OC}}+\overline{\mathrm{OC'}}}{2} = \frac{\mathrm{R}}{2}\,\frac{(\xi-1)^2+(\xi+1)^2}{\xi^2-1} = \mathrm{R}\frac{\xi^2+1}{\xi^2-1},$$

$$\mathrm{CC}_0 = \frac{\overline{\mathrm{CC'}}}{2} = \frac{\overline{\mathrm{OC'}}-\overline{\mathrm{OC}}}{2} = \frac{\mathrm{R}}{2}\,\frac{(\xi+1)^2-(\xi-1)^2}{\xi^2-1} = \mathrm{R}\,\frac{2\xi}{\xi^2-1};$$

les relations (16) deviennent ainsi :

$$\operatorname{sh} x = \frac{\xi^2-1}{2\xi} = \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right), \qquad \operatorname{ch} x = \frac{\xi^2+1}{2\xi} = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right),$$

et on en déduit, d'après $\xi = e^x$ et $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, les expressions cherchées :

$$(17) \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

On rencontre, en outre, dans ce calcul, une interprétation géométrique du rapport $\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\mathrm{R}}$, qui s'écrit successivement :

$$\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\mathrm{R}} = \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \operatorname{th}\frac{x}{2};$$

cette valeur est à rapprocher de celle que l'on obtient en II^{e} en observant que dans la figure correspondante l'angle OPC est la moitié de l'angle inscrit égal à x et que l'on a ainsi, quel que soit le signe de x, et en II^{e} comme en I^{re}, les deux formules de même forme suivantes :

$$(18) \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\overline{OC}}{R}, \qquad \operatorname{th}\frac{x}{2} = \frac{\overline{OC}}{R}.$$

Dans une seconde méthode on considère l'angle de parallélisme φ lequel avec $x > 0$ et sous la même réserve de la coïncidence des sens directs des x et des φ est l'angle en O du triangle OKC_0 rectangle en K, ce qui donne :

$$\operatorname{sh} x = \frac{R}{\overline{CC_0}} = \frac{OK}{KC_0} = \operatorname{cotg}\varphi, \qquad \operatorname{th} x = \frac{R}{\overline{OC_0}} = \frac{OK}{OC_0} = \cos\varphi, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{OC_0}{KC_0} = \frac{1}{\sin\varphi},$$

ces égalités subsistant avec $x < 0$, car ce cas peut se déduire du précédent en changeant $\overline{CC_0}$ et $\overline{OC_0}$ en leurs opposés, et φ qui pour $x > 0$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ a son supplément $\pi - \varphi$ compris entre π et $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cotg}\varphi$ et $\cos\varphi$ changeant donc en même temps de signe tandis que $\sin\varphi$ ne change pas. On rencontre ainsi les relations générales suivantes qui ramènent les trois fonctions hyperboliques de x à trois fonctions circulaires de l'angle φ :

$$(19) \qquad \operatorname{sh} x = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\sin\varphi}, \qquad \operatorname{th} x = \cos\varphi;$$

il reste à calculer ces dernières en fonctions de

$$\xi = e^{x} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

Les formules connues de Trigonométrie, qui expriment $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ en fonctions de $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ donnent la solution :

$$\sin\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{e^{x}-e^{-x}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

et l'on retrouve, en toute généralité, les expressions précédentes (17).

52. Variation des fonctions hyperboliques. — Les propriétés des fonctions hyperboliques en I^{re} vont se déduire aussi bien de leur définition donnée par les formules (16) ou traduite par les relations (19) que de leurs expressions (17); on y rencontrera des analogies et des oppositions avec les fonctions circulaires en II^{e}. Et d'abord les formules (16) où ne figurent que des rapports de longueurs, aussi bien que les formules (17) et la définition de $\xi = e^{x}$ pour laquelle il en est de même, montrent que, comme les fonctions circulaires, *la variable x des fonctions hyperboliques n'est déterminée qu'à un facteur potitif arbitraire et constant près*, tandis que la valeur de chaque fonction est bien définie. En raison de la réserve imposée plus haut sur les sens directs, ce facteur arbitraire ne peut être ici négatif comme il le pouvait avec e^x.

Ensuite, d'après (16) comme de (19) et (17) *les trois fonctions hyperboliques* $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, *sont définies pour toute valeur algébrique positive ou négative de x*; d'autre part, en y changeant x en $-x$, ce qui revient à changer de signe $\overline{CC_0}$ et $\overline{OC_0}$ et φ en $\pi-\varphi$ elles satisfont, comme les fonctions circulaires, aux identités suivantes :

$$(20) \qquad \operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th} x, \qquad \operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch} x.$$

qui signifient que $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ *sont des fonctions impaires et* $\operatorname{ch} x$ *une fonction paire*; en particulier pour $x=0$ (C en O, C′ et C_0 en ∞) et pour $x=+\infty$ ou $x=-\infty$, (C, C_0, C′ confondus en J ou en I), elles ont les valeurs particulières :

$$(21) \qquad \begin{cases} & \operatorname{sh} 0 = 0, & \operatorname{th} 0 = 0, & \operatorname{ch} 0 = 1, \\ \operatorname{sh}(+\infty)=+\infty, & \operatorname{th}(+\infty)=1, & \operatorname{ch}(+\infty)=+\infty; \\ \operatorname{sh}(-\infty)=-\infty, & \operatorname{th}(-\infty)=-1, & \operatorname{ch}(-\infty)=+\infty, \end{cases}$$

les trois premières de ces valeurs étant les mêmes que celles de $\sin 0$, $\operatorname{tg} 0$, $\cos 0$.

Quant au sens de variation, on peut d'abord le déduire directement des premières formules (16), en y mettant la valeur de $\operatorname{ch} x$ sous la forme :

$$\operatorname{ch} x = \frac{\overline{OC}+\overline{CC_0}}{\overline{CC_0}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CC_0}} + 1,$$

et en observant que lorsque x est positif et croissant, $\overline{OC}$ est aussi positif et croissant, tandis que $\overline{CC_0}$ et $\overline{OC_0}$ sont positifs et décroissants ; le cas de x négatif se déduisant ensuite du précédent en changeant x en $-x$, on constate ainsi que *lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$*, $\operatorname{sh} x$ *croît de* $-\infty$ *à* $+\infty$, $\operatorname{th} x$ *de* -1 *à* $+1$, *en s'annulant tous deux pour $x=0$, tandis que* $\operatorname{ch} x$ *croît de* 1 *à* $+\infty$ *et décroît de* $+\infty$ *à* 1 *suivant que x est positif ou négatif*, ce que l'on traduit d'une façon plus simple en disant que $\operatorname{sh} x$ *et* $\operatorname{th} x$ *sont des fonctions croissantes de x* (variant dans le même sens que la variable), tandis que $\operatorname{ch} x$ *est une fonction croissante pour x positif, décroissante pour x négatif.*

Ces résultats peuvent aussi s'établir encore et plus simplement à l'aide des formules (19) où suivant que x croît par valeurs positives ou négatives, de 0 à $+\infty$ ou de $-\infty$ à 0, l'angle de parallélisme φ décroît de $\frac{\pi}{2}$ à 0 ou de π à $\frac{\pi}{2}$; on peut d'ailleurs éviter la discontinuité avec $\operatorname{tg}\varphi$ pour $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $x=0$, en substituant à cet angle φ son complément $\psi=\frac{\pi}{2}-\varphi$ (égal à l'angle $\frac{\theta}{2}$ du paragraphe **11**), ce second angle ψ étant de même signe que x, s'annulant avec lui, et croissant avec lui de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, pour x croissant de $-\infty$ à $+\infty$; les formules (19) prennent alors la forme plus symétrique :

$$(19') \qquad \operatorname{sh} x = \operatorname{tg}\psi, \qquad \operatorname{th} x = \sin\psi, \qquad \operatorname{ch} x \cos\psi = 1$$

dans laquelle *des fonctions impaires sont égales, le sinus d'une espèce étant égal à la tangente de l'autre, tandis que les fonctions paires, les cosinus des deux espèces, sont inverses l'une de l'autre.* On y retrouve ainsi, dans une forme plus directe, le sens de variation des fonctions hyperboliques.

Notons enfin que les expressions (17) conduisent aussi aux même résultats : c'est immédiat avec $\operatorname{sh} x$ où e^x croît et e^x décroît lorsque x croît, et pour $\operatorname{th} x$ (dans laquelle on reconnaît sous la forme $\operatorname{th} x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ une fonction homographique de e^{2x}) on obtient, en la comparant à sa valeur limite 1 pour $x = +\infty$:

$$1 - \operatorname{th} x = \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{e^{2x}+1},$$

expression qui montre bien que pour x croissant e^{2x} puis $\operatorname{th} x$ sont croissants.

En ce qui concerne $\operatorname{ch} x$, il sera plus simple de se référer aux propriétés de calcul qui vont suivre.

On constate que ce sont ces caractères numériques seuls qui différencient les fonctions hyperboliques des fonctions circulaires et qui, en particulier, entraînent que *les fonctions hyperboliques ne sont pas périodiques.* En revanche et comme pour les fonctions circulaires, ils entraînent l'existence de leurs fonctions inverses sous certaines conditions d'inégalité imposées à la variable, et en particulier ils permettront souvent de définir une fa-longueur x, orientée ou non, par la valeur correspondante d'une fonction hyperbolique, car *à toute valeur positive ou négative de* $\operatorname{sh} x$, *à toute valeur comprise entre* -1 *et* $+1$ *de* $\operatorname{th} x$, *correspond une valeur de x et une seule*, tandis que *à toute valeur supérieure à* 1 *de* $\operatorname{ch} x$ *correspondent deux valeurs opposées de x;* plus particulièrement *toute fa-longueur arithmétique x est déterminée d'une seule manière soit par une valeur positive de* $\operatorname{sh} x$, *soit par une valeur positive et inférieure à* 1 *de* $\operatorname{th} x$, *soit par une valeur supérieure à* 1 *de* $\operatorname{ch} x$.

On notera que ces caractères sont plus simples que ceux des fonctions circulaires à chacune desquelles correspondent toujours dans l'intervalle $-\pi$, $+\pi$ deux valeurs de x et où il faut donc limiter la variable x dans certains intervalles plus restreints que le précédent pour qu'elle soit bien définie par la valeur correspondante de la fonction, une valeur de $\sin x$, par exemple, comprise entre -1 et $+1$ ne définissant une seule valeur de x qu'en imposant à celle-ci d'être comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Signalons enfin que si l'on a à utiliser la cotangente hyperbolique $\operatorname{cth} x$ on ne le fera qu'en la considérant comme l'inverse $\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$ de $\operatorname{th} x$: c'est ainsi, en particulier, que $\operatorname{cth} x$ est discontinue et infinie pour $x = 0$, et qu'elle est décroissante, variant de -1 à $-\infty$ et de $+\infty$ à $+1$ lorsque x croît de $-\infty$ à 0 et de 0 à $+\infty$.

53. **Calcul des fonctions hyperboliques.** — Les propriétés de calcul des fonctions hyperboliques vont en revanche, contrairement aux précédentes, présenter une identité presque totale avec celles des fonctions circulaires; elles se déduisent

des propriétés de calcul de l'exponentielle et des formules (17) qui peuvent s'écrire aussi :

$$e^{x} = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \qquad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x. \tag{22}$$

La loi d'addition (9) de l'exponentielle :

$$e^{x+y} = e^{x} e^{y}, \qquad e^{-(x+y)} = e^{-x} e^{-y},$$

donne de suite :

$$\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y),$$
$$\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y).$$

d'où par addition et soustraction et divisant par 2, ou encore et plus simplement en séparant dans chaque membre de la première relation les fonctions paires des fonctions impaires les *formules d'addition* :

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \qquad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y\,; \tag{23}$$

puis, en y changeant y en $-y$ et appliquant les relations (20), les *formules de soustraction*:

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \qquad \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y. \tag{24}$$

A un seul signe près dans les expressions de $\operatorname{ch}(x \pm y)$ ces formules sont les mêmes que celles que l'on connaît concernant les fonctions circulaires, et il en sera donc de même pour leurs nombreuses conséquences. Ce fait conduit à introduire une notation commune, $\mathrm{sj}\,x$, $\mathrm{cj}\,x$, $\mathrm{tj}\,x$ pour désigner aussi bien une fonction circulaire $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, qu'un fonction hyperbolique $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ et à les distinguer à l'aide seulement d'un simple coefficient numérique désigné par j de valeur :

$$j = +1 \text{ en I}^{\text{re}}, \qquad j = - \text{ en II}^{\text{e}}$$

les relations précédentes (23), (24) et leurs analogues en II[e] s'écriront alors sous la forme commune suivante :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{cj}(x+y) &= \mathrm{cj}\,x\,\mathrm{cj}\,y + j\,\mathrm{sj}\,x\,\mathrm{sj}\,y, & \mathrm{sj}(x+y) &= \mathrm{sj}\,x\,\mathrm{cj}\,y + \mathrm{cj}\,x\,\mathrm{sj}\,y, \\ \mathrm{cj}(x-y) &= \mathrm{cj}\,x\,\mathrm{cj}\,y - j\,\mathrm{sj}\,x\,\mathrm{sj}\,y, & \mathrm{sj}(x-y) &= \mathrm{sj}\,x\,\mathrm{cj}\,y - \mathrm{cj}\,x\,\mathrm{sj}\,y, \end{aligned}\right. \tag{25}$$

en même temps que l'on a :

$$\mathrm{tj}\,x = \frac{\mathrm{sj}\,x}{\mathrm{cj}\,x},$$

les relations (20) et (21) prenant à leur tour la forme générale :

$$\mathrm{cj}(-x) = \mathrm{cj}\,x, \qquad \mathrm{sj}(-x) = -\mathrm{sj}\,x, \qquad \mathrm{tj}(-x) = -\mathrm{tj}\,x, \tag{20'}$$

$$\mathrm{cj}(0) = 1, \qquad \mathrm{sj}(0) = 0, \qquad \mathrm{tj}(0) = 0. \tag{21'}$$

Le lecteur en déduira les mêmes conséquences, assez nombreuses que celles qui concernent seulement les fonctions circulaires ; nous n'en retiendrons que les plus importantes. La première est la loi d'addition et de soustraction des tangentes, qui s'écrit de suite, en divisant haut et bas par $\mathrm{cj}\,x\,\mathrm{cj}\,y$,

$$\mathrm{tj}(x+y) = \frac{\mathrm{tj}\,x + \mathrm{tj}\,y}{1 + j\,\mathrm{tj}\,x\,\mathrm{tj}\,y}, \qquad \mathrm{tj}(x-y) = \frac{\mathrm{tj}\,x - \mathrm{tj}\,y}{1 - j\,\mathrm{tj}\,x\,\mathrm{tj}\,y}. \tag{26}$$

Puis, en faisant $y=x$ dans $\mathrm{cj}x(x-y)$, on a entre $\mathrm{cj}x$ et $\mathrm{sj}x$ l'identité importante :

$$\mathrm{cj}^2 x - j\,\mathrm{sj}^2 x = 1, \tag{27}$$

qui, en IIe, constitue la relation connue :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

et en Ire donne entre $\mathrm{ch}\,x$ et $\mathrm{sh}\,x$ la relation qu'il importe de souligner :

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1\cdot \tag{27'}$$

De cette relation (27) on déduit en divisant par $\mathrm{cj}^2 x$ ou $\mathrm{sj}^2 x$, les deux suivantes :

$$\frac{1}{\mathrm{cj}^2 x} + j\,\mathrm{tj}^2 x = 1, \qquad \frac{1}{\mathrm{tj}^2 x} - \frac{1}{\mathrm{sj}^2 x} = j, \tag{27''}$$

lesquelles, associées à la première (27), permettront dans les calculs d'exprimer *rationnellement* l'un quelconque des trois carrés $\mathrm{sj}^2 x$, $\mathrm{cj}^2 x$, $\mathrm{tj}^2 x$ en fonction de l'un quelconque des deux autres.

Les relations (25) permettent aussi, par addition et soustraction, de *transformer une somme ou différence de deux* sj *ou de deux* cj *en un produit*; on obtient, en effet :

$$\mathrm{cj}(x+y) + \mathrm{cj}(x-y) = 2\,\mathrm{cj}\,x\,\mathrm{cj}\,y, \qquad \mathrm{cj}(x+y) - \mathrm{cj}(x-y) = 2j\,\mathrm{sj}\,x\,\mathrm{sj}\,y,$$
$$\mathrm{sj}(x+y) + \mathrm{sj}(x-y) = 2\,\mathrm{sj}\,x\,\mathrm{cj}\,y, \qquad \mathrm{sj}(x+y) - \mathrm{sj}(x+y) = 2\,\mathrm{cj}\,x\,\mathrm{sj}\,y,$$

ce qui s'écrit en changeant de notation :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{cj}\,p + \mathrm{cj}\,q = 2\,\mathrm{cj}\dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{cj}\dfrac{p-q}{2}, & \mathrm{cj}\,p - \mathrm{cj}\,q = 2j\,\mathrm{sj}\dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{sj}\dfrac{p-q}{2}, \\ \mathrm{sj}\,p + \mathrm{sj}\,q = 2\,\mathrm{sj}\dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{cj}\dfrac{p-q}{2}, & \mathrm{sj}\,p - \mathrm{sj}\,q = 2\,\mathrm{cj}\dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{sj}\dfrac{p-q}{2}, \end{array}\right. \tag{28}$$

les transformations de $\mathrm{sj}\,p+\mathrm{sj}\,q$ et de $\mathrm{sj}\,p-\mathrm{sj}\,q$ ne différant pas essentiellement et se ramenant l'une à l'autre par le changement de q en $-q$.

Des transformations analogues concernant les tj s'obtiennent en remplaçant chaque tj par le rapport $\frac{\mathrm{sj}}{\mathrm{cj}}$, ce qui donne d'après les secondes relations (25).

$$\mathrm{tj}\,p + \mathrm{tj}\,q = \frac{\mathrm{sj}(p+q)}{\mathrm{cj}\,p\,\mathrm{cj}\,q}, \qquad \mathrm{tj}\,p - \mathrm{tj}\,q - \frac{\mathrm{sj}(p-q)}{\mathrm{cj}\,p\,\mathrm{cj}\,q}. \tag{28'}$$

En particulier, pour $q=0$ ($\mathrm{cj}\,q=1$), les premières formules (28) donnent les suivantes, qui seront utilisées souvent :

$$\mathrm{cj}\,p + 1 = 2\,\mathrm{cj}^2\frac{p}{2}, \qquad \mathrm{cj}\,p - 1 = 2j\,\mathrm{sj}^2\frac{p}{2};$$

la seconde, appliquée à $\mathrm{ch}\,p$ ($j=+1$), permet par exemple de retrouver directement le sens de variation établi plus haut de la fonction $\mathrm{ch}\,x$, ce sens de variation, ainsi que ceux de $\mathrm{sh}\,x$ et $\mathrm{th}\,x$ pouvant aussi se déduire des secondes relations générales (28) et (28').

54. Duplication et multiplication de la fa-distance. — Une autre conséquence importante des formules d'addition (25), (26), s'établit en y faisant $y = x$, ce qui donne les *formules de duplication* de la variable, toutes de *caractère rationnel*,

$$(29) \qquad \mathrm{cj}\,2x = \mathrm{cj}^2 x + j\,\mathrm{sj}^2 x \qquad \mathrm{sj}\,2x = 2\,\mathrm{sj}\,x.\mathrm{cj}\,x, \qquad \mathrm{tj}\,2x = \frac{2\,\mathrm{tj}\,x}{1 + j\,\mathrm{tj}^2 x}.$$

La première se transforme en tenant compte de la relation (27) et en restant rationnelle dans les deux suivantes :

$$\mathrm{cj}\,2x = 1 + 2\mathrm{j}\,\mathrm{sj}^2 x, \qquad \mathrm{cj}\,2x = 2\mathrm{cj}^2 x - 1$$

lesquelles, pour $x = \frac{p}{2}$ sont les mêmes que celles déjà établies plus haut.

D'autre part, en remplaçant dans toutes ces formules (29) $\mathrm{sj}\,x$ par sa valeur $\mathrm{sj}\,x = \mathrm{cj}\,x\ \mathrm{tj}\,x$, puis $\mathrm{cj}^2 x$ par son expression rationnelle déduite de (27″) en fonction de $\mathrm{tj}^2 x$

$$\mathrm{cj}^2 x = \frac{1}{1 - \mathrm{j}\,\mathrm{tj}^2 x},$$

l'on aboutit à des *expressions rationnelles* de $\mathrm{cj}\,2x$, $\mathrm{sj}\,2x$, $\mathrm{tj}\,2x$ en fonction de $\mathrm{tj}\,x$, ou de $\mathrm{cj}\,x$, $\mathrm{sj}\,x$, $\mathrm{tj}\,x$, en fonction de $\mathrm{tj}\,\frac{x}{2}$:

$$(30) \qquad \mathrm{cj}\,x = \frac{1 + j\,\mathrm{tj}^2 \frac{x}{2}}{1 - j\,\mathrm{tj}^2 \frac{x}{2}}, \qquad \mathrm{sj}\,x = \frac{2\mathrm{tj}\,\frac{x}{2}}{1 - j\,\mathrm{tj}^2 \frac{x}{2}}, \qquad \mathrm{tj}\,x = \frac{2\,\mathrm{tj}\,\frac{x}{2}}{1 - j\,\mathrm{tj}^2 \frac{x}{2}}.$$

Nous ne pousserons pas davantage les conséquences des formules d'addition (25) en signalant toutefois qu'elles conduisent plus généralement et comme pour les fonctions circulaires, aux *formules de multiplication* de la variable par un entier positif m, formules dont on constatera encore le caractère rationnel, et en indiquant que, en ce qui concerne les fonctions hyperboliques, ces formules peuvent aussi s'établir directement, par application des relations (22) par le même calcul que celui qui a conduit aux formules d'addition (23) ; on obtient en effet,

$$e^{mx} = \mathrm{ch}\,mx + \mathrm{sh}\,mx = (\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x)^m,$$
$$e^{-mx} = \mathrm{ch}\,mx - \mathrm{sh}\,mx = (\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x)^m$$

d'où par addition et soustraction :

$$\mathrm{ch}\,mx = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x)^m + (\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x)^m\right],$$

$$\mathrm{sh}\,mx = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x)^m - (\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x)^m\right].$$

et par exemple, pour $m = 3$:

$$\mathrm{ch}\,3x = \mathrm{ch}^3 x + 3\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}^2 x, \qquad \mathrm{sh}\,3x = 3\mathrm{ch}^2 x\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{sh}^3 x.$$

Ce calcul, dans lequel e^x et e^{-x} sont positifs est d'ailleurs valable pour toute autre valeur, positive ou négative, rationnelle ou irrationnelle, de l'exposant m et s'applique donc aussi à l'exposant $\frac{1}{m}$, où m est entier en donnant en I^re les *formules de division* qui n'ont pas leurs analogues en II^e :

$$\operatorname{ch}\frac{x}{m} = \frac{1}{2}\left[\sqrt[m]{\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x} + \sqrt[m]{\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x}\right],$$

$$\operatorname{sh}\frac{x}{m} = \frac{1}{2}\left[\sqrt[m]{\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x} - \sqrt[m]{\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x}\right].$$

55. Fa-triangle-rectangle et ses cinq éléments. — Une première application des fonctions circulaires et hyperboliques se rapporte, de même qu'en Géométrie classique, à l'étude d'un fa-triangle particulier remarquable, *le fa-triangle rectangle* dont par définition l'un A des trois angles est droit $\left(A = \frac{\pi}{2}\right)$, et à la recherche de relations générales existant, quel que soit ce fa-triangle entre ses cinq éléments qui sont les deux autres angles B, C, généralement non droits auxquels on réserve le nom d'*angles proprement dits* ou simplement d'angles du fa-triangle rectangle et les trois côtés entre lesquels on distingue l'*hypoténuse* $a = [BC]$ qui est opposée à l'angle droit et les *deux côtés de l'angle droit* $b = [AC]$, $c = [AB]$, respectivement opposés aux deux angles B, C.

On connait déjà certains caractères généraux de ces cinq éléments : en I^re où la somme des trois angles est inférieure à π, celle des deux angles proprement dits est inférieure à $\frac{\pi}{2}$, *chacun des deux angles est compris entre* o *et* $\frac{\pi}{2}$ et pourra donc être défini par l'une quelconque de ses trois fonctions circulaires telles que sin B, cos B, tg B, les deux premières comprises entre o et 1, et la troisième étant positive ; d'autre part, *chacun des trois côtés* a, b, c, *peut prendre toute valeur positive*, tout comme une fa-longueur, et pourra être défini par l'une quelconque de ses trois fonctions hyperboliques $\operatorname{sh}x$ de valeur positive quelconque, $\operatorname{ch}x$ supérieure à 1 et $\operatorname{th}x$ comprise entre o et 1.

En II^e où la somme des trois angles est supérieure à π, *chaque angle proprement dit peut être aigu ou obtus*, et il en est de même de chacun des trois côtés, qui sont ici des grandeurs angulaires ; les uns et les autres pourront donc être définis soit par leur cosinus compris entre -1 et $+1$, soit par leur tangente de valeur positive ou négative quelconque, mais ne le seront plus par un sinus, dont une valeur, comprise entre o et 1, répond à deux angles supplémentaires.

On peut d'ailleurs préciser la nature de ces divers angles en se plaçant par exemple dans la forme-type où le sommet A de l'angle droit se situe au centre du cercle fondamental ω et de son contraire ω_0, les deux côtés de l'angle droit, $b = [AC]$ et $c = [AB]$ étant alors portés par deux droites rectangulaires issues de A ; en faisant varier b, le point C décrivant le diamètre Ax de ω_0, A et B restant fixes, on constate, quelle que soit la position de B, intérieur ou extérieur à ω_0, que suivant que C est intérieur (entre A et C_0), extérieur (au-delà de C_0), ou situé sur ω_0, que le côté $b = [AC]$ et l'angle opposé B sont simultanément ou aigus, ou obtus, ou droits ; d'où ce caractère essentiel que, *en* II^e *un côté de l'angle droit d'un fa-triangle rectangle et l'angle opposé sont toujours de même nature, simultanément aigus, obtus, ou droits.*

En particulier avec C placé en C_0 on rencontre un *fa-triangle birectangle* qui a deux angles droits de sommets A et B et dont les côtés opposés sont aussi égaux à un droit, et l'on retrouve une circonstance déjà rencontrée à propos des obliques et perpendiculaire menées d'un point B à une fa-droite Ax, où une oblique particulière est égale à un droit en même temps que la fa-distance de son pied à celui de la perpendiculaire.

On constate en outre avec $c = [AB]$ aigu, B intérieur à ω_0, que l'hypoténuse $a = [BC]$ et le second côté $b = [AC]$ de l'angle droit sont aussi de même nature, tous deux ou aigus, ou obtus, ou droits ; tandis que, dans le cas contraire de C obtus, B étant remplacé par son opposé B′, a et b sont au contraire de natures différentes sauf le cas limite où ils sont tous deux droits, d'où ce second caractère que *en II^e^ le nombre de côtés aigus d'un fa-triangle rectangle est toujours*

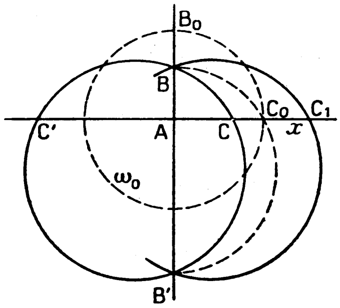

Fig. 46.

impair, soit que les trois côtés soient aigus, soit qu'il y en ait un aigu et deux obtus, un côté égal à un droit pouvant être considéré comme limite d'un côté aigu aussi bien qu'obtus.

On rencontre enfin un cas extrême, celui où B et C étant tous deux placés en B_0 et C_0 sur ω_0 on a un *fa-triangle trirectangle* dont les trois angles et les trois côtés sont tous droits.

Observons encore que la même figure, établie en supposant B et C intérieurs à ω_0, leurs opposés B′, C′ étant donc extérieurs, met en évidence quatre fa-triangles rectangles ABC, AB′C, ABC′, AB′C′, qui se déduisent les uns des autres comme on l'a déjà vu à propos de fa-triangles quelconques, les éléments de l'un étant égaux ou supplémentaires, à ceux d'un autre, le premier, ABC ayant ses cinq éléments tous aigus, tandis que AB′C′ a une hypoténuse aiguë et les deux côtés de l'angle droit obtus, et que AB′C, ABC′ ont l'hypoténuse et un côté obtus, le troisième côté aigu.

56. Relations générales entre éléments d'un fa-triangle rectangle. — Ces notions générales établies, la Géométrie montre que si l'on connaît deux des cinq éléments et plus particulièrement les deux fa-côtés de l'angle droit d'un fa-triangle rectangle, celui-ci peut être construit immédiatement et, par suite, les trois autres éléments sont déterminés en fonction des deux premiers; plus généralement, les cinq éléments dépendent seulement de deux arbitraires et trois quelconques d'entre eux sont liés par une *relation générale* valable quel que soit le fa-triangle rectangle; ce sont ces diverses relations qu'il s'agit donc d'établir.

On utilisera à cet effet les fonctions, circulaires ou hyperboliques, de ces éléments, et principalement dans le cas d'une fa-longueur $x = [OC]$ dont une extrémité O est placée au centre du cercle fondamental ω, les formules (15) en II[e] et (16) en I[re], qui avec la convention générale du paragraphe 53 se mettent sous la forme commune

$$(31) \qquad \mathrm{sj}\,x = j\,\frac{R}{\overline{CC_0}}, \qquad \mathrm{tj}\,x = j\,\frac{R}{\overline{OC_0}}, \qquad \mathrm{cj}\,x = \frac{\overline{OC_0}}{\overline{CC_0}},$$

où C_0 est le milieu du segment CC' limité au point C et à son opposé C', que les

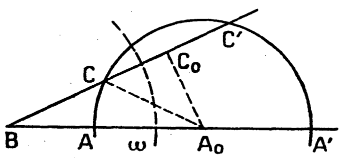

Fig. 47.

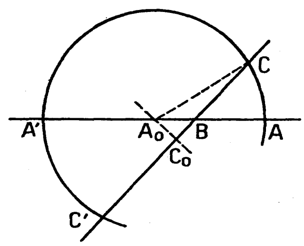

Fig. 48.

deux points C', C_0 appartiennent en II[e] à la figure non euclidienne, ou qu'ils ne lui appartiennent pas en I[re].

Plaçant par exemple en O le sommet B d'un angle proprement dit d'un fa-triangle rectangle BAC, l'hypoténuse $a = [BC]$ et le côté $c = [BA]$ sont rectilignes, formant entre eux l'angle B; le côté $b = [AC]$ est porté par le cercle centré en A_0, milieu de AA', et coupant la droite BC aux deux points opposés C. C' dont le milieu C_0 est la projection orthogonale de A_0, ce qui donne

$$\overline{BC_0} = \overline{BA_0}\cos B$$

et entraîne d'après les relations (31) où l'on remplace successivement x par a et c, $\overline{OC_0}$ par $\overline{BA_0}$ et $\overline{BC_0}$:

$$\cos B = \frac{\overline{BC_0}}{\overline{BA_0}} = \frac{\mathrm{tj}\,c}{\mathrm{tj}\,a},$$

d'où une première relation générale :

(32) $$\mathrm{tj}\, c = \mathrm{tj}\, a \cos \mathrm{B}.$$

On y retrouve immédiatement diverses propriétés : en I$^{\text{re}}$, où th$c$, th$a$ sont positifs, cos B compris entre 0 et 1, on en déduit th$c <$ th$a$, $c < a$, et le côté c est plus petit que l'hypoténuse a; il en est de même en II$^{\text{e}}$ pour un fa-triangle rectangle à éléments tous aigus : c'est, dans les deux espèces, l'inégalité entre oblique a et perpendiculaire c. De même en II$^{\text{e}}$ où B est de même nature que b, cos B de même signe que cos b et tg b, on déduit de cette relation que le produit des trois tangentes, tg a, tg b, tg c est toujours positif et l'on retrouve que le fa-triangle rectangle comprend toujours un nombre impair de côtés aigus.

Mais d'autres relations se présentent également : la forme-type utilisée fait aussi apparaître l'angle C du fa-triangle, angle dont les côtés [CA] et [CB] sont respectivement perpendiculaires à l'hypoténuse CA_0 et au côté C_0A_0 du triangle rectiligne rectangle CC_0A_0; comme l'angle en A_0 de celui-ci est aigu il est donc égal en I$^{\text{re}}$ à C qui est aussi aigu et il en est de même en II$^{\text{e}}$ dans le cas où le fa-triangle ABC a tous ses éléments aigus, puis comme l'hypoténuse CA_0 est égale à la longueur AA_0 on a donc alors :

$$\sin \mathrm{C} = \frac{CC_0}{AA_0},$$

ce qui d'après (31) et comme avec la relation précédente, entraîne

$$\sin \mathrm{C} = \frac{\mathrm{sj}\, c}{\mathrm{sj}\, a}$$

ou :

(33) $$\mathrm{sj}\, c = \mathrm{sj}\, a \sin \mathrm{C},$$

et cette nouvelle relation qui est générale en I$^{\text{re}}$ l'est aussi en II$^{\text{e}}$ car si un fa-triangle rectangle ABC n'a pas tous ses éléments aigus, on peut le ramener à un autre tel que AB′C pour lequel il en est ainsi en changeant certains de ses éléments, angles ou côtés en leurs supplémentaires, ce qui ne change pas cette relation.

La forme-type mettant ainsi en évidence d'une manière simple les quatre éléments B, C, a, c, mais non le côté b, doit aussi conduire, après les deux relations précédentes où figurent a et c, à deux autres, l'une entre a, B, C, l'autre entre c, B, C : la première s'établit en comparant les deux triangles rectangles CC_0A_0, BC_0A_0 qui ont un côté commun C_0A_0, un autre CC_0 ou BC_0 se rapportant à a, et un angle, en A_0 ou B, égal à C pour le premier, à B pour le second dans le premier cas simple où ces deux angles B, C sont aigus; on en déduit alors successivement

$$C_0A_0 = \frac{CC_0}{\mathrm{tg\, C}} = BC_0 \,\mathrm{tg\, B}, \qquad \mathrm{tg\, B}\,\mathrm{tg\, C} = \frac{CC_0}{BC_0} = \frac{1}{\mathrm{cj}\, a},$$

ou

(34) $$\mathrm{cj}\, a = \frac{1}{\mathrm{tg\, B}\,\mathrm{tg\, C}},$$

et de la même manière que la précédente (33) cette nouvelle relation, établie dans un premier cas, est encore générale, car elle ne change pas en II^e si, passant de l'un à l'autre des fa-triangles rectangles ABC, AB'C, ABC', A'BC on y remplace deux des trois éléments a, B, C par leurs suppléments sans changer le troisième.

La dernière relation entre c, B, C s'établit de même en rapprochant dans les mêmes triangles CC_0A_0, BC_0A_0, les derniers côtés, l'un $CA_0 = AA_0$; l'autre BA_0, qui se rapportent tous deux à a, et qui, de la même manière, donnent successivement dans le même premier cas :

$$C_0A_0 = AA_0 \cos C = BA_0 \sin B \qquad \mathrm{cj}\,c = \frac{BA_0}{AA_0} = \frac{\cos C}{\sin B},$$

(35) $$\cos C = \mathrm{cj}\,c \sin B,$$

relation qui est encore générale, car elle ne change pas en II^e si l'on y remplace par leurs suppléments soit B, soit simultanément C et c.

57. Il reste enfin, toutes les formules ainsi établies contenant l'hypoténuse a et un côté c, mais non le second côté b, à établir celles qui relient les deux côtés b, c soit à l'hypoténuse a, soit à un angle B ou C, ce que nous ferons en les déduisant des précédentes et de leurs analogues obtenues en y permutant les côtés b, c et les angles B, C; nous observerons, d'autre part, que toutes les formules déjà établies ont un même caractère simple, reliant chacune trois fonctions circulaires ou hyperboliques par les seules opérations de multiplication et de division et non par addition et soustraction, ce qui se traduit en disant que ce sont des *formules calculables par logarithmes* ; nous devrons donc combiner par voie de multiplication et division seulement les formules établies, en y comprenant celle qui relie les trois fonctions d'un même élément x, $\mathrm{tj}\,x = \frac{\mathrm{sj}\,x}{\mathrm{cj}\,x}$, et qui est de même forme, et en excluant, par exemple l'emploi de la relation

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

qui n'a plus ce même caractère.

Dans ces conditions, la relation entre b, c, B peut s'établir en égalant d'abord les deux valeursde $\mathrm{tj}\,a$ déduites de la relation (32) et de son analogue [ou de $\mathrm{sj}\,a$ déduites de (33)], ce qui élimine a et donne :

$$\frac{\mathrm{tj}\,c}{\cos B} = \frac{\mathrm{tj}\,b}{\cos C} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{tj}\,b \cos B = \mathrm{tj}\,c \cos C,$$

puis, en remplaçant cos C par sa valeur (35), on a :

$$\mathrm{tj}\,b \cos B = \mathrm{tj}\,c\,\mathrm{cj}\,c \sin B,$$

d'où la relation cherchée :

(36) $$\mathrm{tj}\,b = \mathrm{sj}\,c\,\mathrm{tg} B.$$

La dernière relation, entre a, b, c s'obtient enfin par les mêmes opérations en déduisant des relations acquises où ne figure pas C, les trois fonctions circulaires de B :

$$\cos B = \frac{\mathrm{tj}\,c}{\mathrm{tj}\,a}, \qquad \sin B = \frac{\mathrm{sj}\,b}{\mathrm{sj}\,a}, \qquad \mathrm{tg} B = \frac{\mathrm{tj}\,b}{\mathrm{sj}\,c},$$

ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{tj}\,b}{\mathrm{sj}\,c} = \frac{\mathrm{sj}\,b}{\mathrm{sj}\,a}\,\frac{\mathrm{tj}\,a}{\mathrm{tj}\,c} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{sj}\,b}{\mathrm{tj}\,b}\,\frac{\mathrm{sj}\,c}{\mathrm{tj}\,c} = \frac{\mathrm{sj}\,a}{\mathrm{tj}\,a},$$

ou enfin :

(37) $$\mathrm{cj}\,a = \mathrm{cj}\,b\,\mathrm{cj}\,c.$$

Signalons enfin un procédé permettant d'établir directement la relation (36) et de retrouver en même temps certaines des relations précédentes; il consiste dans le recours à une autre forme-type dans laquelle le sommet A de l'angle droit est

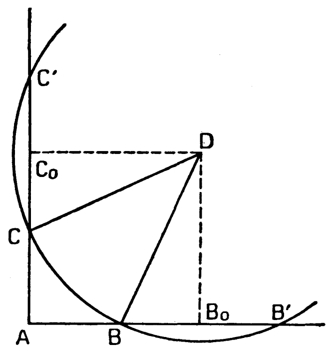

Fig. 49.

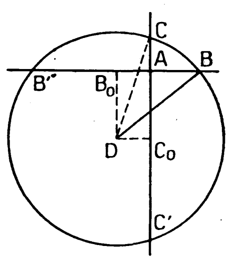

Fig. 50.

placé au centre du cercle fondamental, les deux côtés $b = [AC]$, $c = [AB]$ étant alors portés par des droites et l'hypoténuse $a = [BC]$ par un cercle propre qui coupe respectivement ces droites en B et C et en leurs opposés B', C'; abaissant du centre D de ce cercle les perpendiculaires de DB_0 DC_0 sur les côtés, B_0 et C_0 sont les milieux de BB' et CC', les angles en D des triangles rectangles DB_0B, DC_0C sont des angles aigus respectivement égaux aux angles B, C dans les premiers cas simples où ceux-ci sont aussi aigus, les deux hypoténuses DB, DC sont égales entre elles, les côtés DB_0 et DC_0 sont égaux à AC_0 et AB_0 et l'on a ainsi dans ces premiers cas :

$$\mathrm{tg}\,B = \frac{BB_0}{B_0D} = \frac{BB_0}{AC_0},$$

avec

$$\mathrm{sj}\,c = \frac{R}{BB_0}, \qquad \mathrm{tj}\,b = \frac{A}{AC_0},$$

d'où

$$\mathrm{tj}\,B = \frac{\mathrm{tj}\,b}{\mathrm{sj}\,c},$$

et, en reprenant le même raisonnement que plus haut, cette formule établie dans des cas simples s'étend à tous les autres cas, car en II^e, elle ne change pas si l'on y remplace b et B par leurs suppléments; elle est donc générale et constitue bien la formule (36).

En ne faisant intervenir qu'un seul côté c, les mêmes triangles rectangles donnent ensuite, dans les premiers cas simples :

$$AB_0 = C_0D = CD\cos C, \qquad BB_0 = BD\sin B,$$

d'où, d'après (31) et $CD = BD$,

$$\frac{AB_0}{BB_0} = \mathrm{cj}\,c = \frac{\cos C}{\sin B}$$

et l'on retrouve ainsi, en l'étendant de même à tous les autres cas, la formule générale (35).

Mais cette seconde méthode ne mettant pas en évidence d'une manière simple l'hypoténuse $a = [BC]$, figurée par un arc de cercle, ne conduit pas aux formules contenant a, et ne dispense donc pas de la première méthode.

58. **Tableau des formules du fa-triangle rectangle.** — En raison de leur importance, répétons et rassemblons ces diverses formules; elles constituent un ensemble de *dix relations* dont :

Une entre l'hypoténuse a et ses côtés b, c (37) :

(I) $$\mathrm{cj}\,a = \mathrm{cj}\,b\,\mathrm{cj}\,c;$$

Deux entre l'hypoténuse, un côté et l'angle compris (32) :

(II) $$\mathrm{tj}\,c = \mathrm{tj}\,a\cos B_1 \qquad \mathrm{tj}\,b = \mathrm{tj}\,a\cos C;$$

Deux entre l'hypoténuse, un côté et son angle opposé (33) :

(III) $$\mathrm{sj}\,c = \mathrm{sj}\,a\sin C, \qquad \mathrm{sj}\,b = \mathrm{sj}\,a\sin B;$$

Deux entre les côtés et un angle (36) :

(IV) $$\mathrm{tj}\,b = \mathrm{sj}\,c\,\mathrm{tg}B, \qquad \mathrm{tj}\,c = \mathrm{sj}\,b\,\mathrm{tg}C;$$

Deux entre les angles et un côté (35) :

(V) $$\cos C = \mathrm{cj}\,c\sin B, \qquad \cos B = \mathrm{cj}\,b\sin C;$$

Une entre les angles et l'hypoténuse (34) :

(VI) $$\mathrm{cj}\,a = \frac{1}{\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C}.$$

On observera et on en retiendra des moyens mnémotechniques, l'analogie des types (II), (III), (IV) avec les formules classiques concernant le triangle rectangle; on retiendra aussi à cet effet leur caractère signalé plus haut de ne contenir que des symboles de multiplication ou division et ce fait que, à part les formules (III) qui ne contiennent que des sj tous positifs, chaque formule permet de vérifier en II^e ou bien qu'un angle et le côté opposé sont de même nature, ou bien que sur les trois côtés il y en a deux ou aucun qui soient obtus; on notera encore que ces dix formules comprennent au total 30 termes qui six par six sont des fonctions d'un même élément, et deux par deux une même fonction d'un même élément.

Signalons enfin qu'il ne peut exister ni une relation générale entre trois éléments distincte de la relation correspondante précédente, ni une relation générale entre deux éléments seulement, car dans les deux cas, dès qu'un élément serait donné, on ne pourrait plus en choisir arbitrairement un second.

Inversement, il existe des relations générales entre quatre éléments, celles par exemple obtenues en égalant les deux valeurs, tirées des formules précédentes, d'une même fonction d'un même élément, celles de cj$a$, par exemple; mais ces relations, du seul fait qu'elles portent sur quatre éléments, présentent peu d'intérêt.

59. **Fa-rectangle et ses cinq éléments.** — Avant de poursuivre l'étude et les applications de ces relations il y a lieu de rapprocher le fa-triangle rectangle d'un autre fa-polygone simple, le *fa-rectangle*, que l'on rencontre en même temps que le premier en diverses circonstances. Si, par exemple, pour construire un fa-triangle rectangle on place l'un des côtés $c = [AB]$ de l'angle droit, puis deux fa-droites, l'une Ax perpendiculaire en A à la fa-droite AB, l'autre By menée arbitrairement

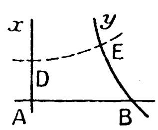

Fig. 51.

par B, on obtient un fa-triangle rectangle BAC lorsque Ax et By se coupent en un point C, ce qui est toujours le cas en II^e; mais en I^{re} si Ax et By sont non sécantes, ce fa-triangle n'existe plus tandis que l'on peut mener une perpendiculaire commune DE à Ax et By et obtenir ainsi un quadrilatère simple dont les côtés sont des segments de fa-droites et dont trois angles de sommets A, D, E sont droits; il en est d'ailleurs de même en II^e où Ax et By ont à la fois deux points d'intersection opposés C, C′ et une perpendiculaire commune DE. D'où cette première notion simple de quadrilatère ayant trois angles droits et un quatrième angle quelconque.

Pour préciser, on observera qu'un tel quadrilatère peut aussi se construire en plaçant arbitrairement le sommet D opposé à l'angle non droit, par exemple au centre du cercle fondamental, puis deux demi-fa-droites rectangulaires Dx, Dy

portant les côtés issus de ce sommet D, et abaissant ensuite, d'un point quelconque B pris à l'intérieur de l'angle droit $x\mathrm{D}y$ les fa-droites perpendiculaires BA sur Dx, BE sur Dy; les trois angles de sommets A, D, E du quadrilatère BADE ainsi construit sont bien des angles droits, le quatrième B = ABE, qui est quelconque, est l'*angle proprement dit* B du fa-rectangle; entre les quatre côtés on distingue les *deux côtés de l'angle* $c = [\mathrm{BA}]$, $c' = [\mathrm{BE}]$ issus du sommet B de cet angle B, et les *deux bases*, $b = [\mathrm{AD}]$, $b' = [\mathrm{ED}]$, respectivement adjacentes à ces côtés; de même que le fa-triangle rectangle le fa-rectangle a ainsi *cinq éléments*, son angle B et ses quatre côtés b, b', c, c'.

En I^{re} où la construction précédente ne comporte aucune exception un fa-rectangle est toujours un *quadrilatère convexe*, deux perpendiculaires à une même fa-droite, AB et DE par exemple perpendiculaires à Dx, étant non sécantes et tous les points tels que A et B de l'une étant bien situés d'un même côté de

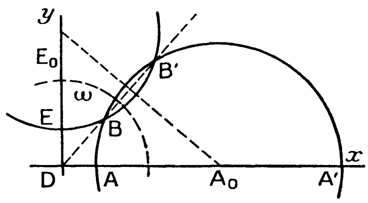

Fig. 52.

l'autre; dans ces conditions, l'une quelconque des deux fa-droites diagonales DB, AE décompose le fa-rectangle en deux fa-triangles, la somme de ses quatre angles est inférieure à quatre droits et en ce qui concerne l'angle proprement dit B, il en résulte que *en* I^{re} *l'angle non droit d'un fa-rectangle est un angle aigu.*

60. En II^{e} la construction fait intervenir les pôles des fa-droites rectangulaires Dx, Dy, ceux de Dx étant situés l'un P sur la demi-fa-droite Dy l'autre P$'$ sur son opposée Dy', ceux de Dy étant de même l'un Q sur Dx l'autre Q$'$ sur Dx', ces pôles étant en outre dans la forme-type choisie sur le cercle ω_0 centré en D contraire au cercle fondamental ω; la perpendiculaire abaissée de B sur Dx est portée par le cercle mené par les trois points B, P, P$'$; B étant intérieur à l'angle $x\mathrm{D}y$ et non situé sur l'un de ses côtés, ce cercle coupe la demi-fa-droite Dx en un point A et un seul et coupe l'opposée Dx' en un second point A$'$, opposé de A; de même la perpendiculaire abaissée de B sur Dy est le cercle mené par B, Q, Q$'$ et coupe Dy en E, Dy' en son opposé E$'$. Mais en ce qui concerne la convexité du quadrilatère BADE ainsi construit si l'on observe encore que les sommets A et B sont situés d'un même côté de la fa-droite $y'\mathrm{D}y$ qui joint les deux autres sommets D, E, que de même E et B sont situés d'un même côté de $x'\mathrm{D}x$, inversement D et A ne sont plus nécessairement d'un même côté de la fa-droite EQE$'$Q$'$ qui joint B et E, ni D et E d'un même côté de APA$'$P$'$ qui joint B et A; D étant intérieur au cercle ω_0 qui joint les pôles P, P$'$ de Dx et Q, Q$'$ de Dy suivant que B est intérieur, ou extérieur à ce cercle ω_0 le fa-rectangle BADE

est convexe ou non convexe, son angle B est saillant ou rentrant, inférieur ou supérieur à deux droits, ses bases $b = [AB]$, $b' = [ED]$ sont inférieures ou supérieures à $[DP] = [EQ] = \frac{\pi}{2}$.

Dans un cas limite, celui où le sommet B se place sur l'arc PQ de ω_0 mais non en Iʳᵒ ou Q, les deux côtés C, C' sont dans le prolongement l'un de l'autre et sont complémentaires, leur somme étant $[PQ] = \frac{\pi}{2}$, tandis que les bases placées suivant $[DP]$ et $[DQ]$ sont toutes deux égales à $\frac{\pi}{2}$, le fa-rectangle se réduisant ainsi à un fa-triangle trirectangle DPQ dont un côté $[PQ]$ est décomposé en deux parties $[BP]$, $[BQ]$.

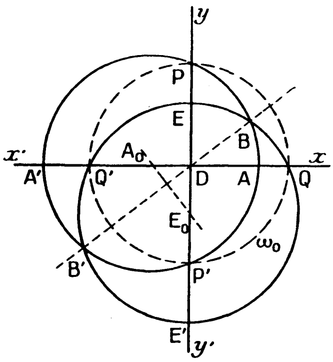

Fig. 53.

Observant que dans tous les cas les deux côtés de l'angle $c = [BA]$, $c' = [BE]$ sont toujours plus petits que $[AP]$ et $[EQ]$, une première conclusion est donc que *en* IIᵉ *il existe deux variétés générales de fa- rectangles, les uns convexes dont l'angle* B *est saillant* (inférieur à π) *et les bases inférieures à* $\frac{\pi}{2}$, *les autres non convexes dont l'angle* B *est rentrant* (supérieur à π) *et les bases supérieures à* $\frac{\pi}{2}$, *les côtés de l'angle* B *étant dans tous les cas inférieurs à* $\frac{\pi}{2}$; *dans une variété limite le fa-rectangle se réduit à un fa-triangle trirectangle, son angle* B *est plat* (égal à π), *ses bases sont égales à* $\frac{\pi}{2}$ *et ses côtés de l'angle sont complémentaires.*

Si, par exemple, l'angle B est saillant, le point B étant placé dans la construction précédente à l'intérieur de l'angle droit xDy, cette même construction où l'on remplace le sommet B et les demi-droites Dx, Dy par leurs opposés B′, Dx', Dy' donne en même temps un second fa-rectangle B′A′DE′ dont l'angle non droit, de sommet B′, est rentrant et l'on constate, en outre, en comparant les éléments de ces deux fa-rectangles BADE, B′A′DE′ que *en* IIᵉ *tout fa-rectangle est associé à un autre tel que leurs bases soient deux à deux supplémentaires, leurs côtés de l'angle deux à deux égaux et la somme de leurs angles non droits égale à* 2π.

Si alors, comme on l'a fait en I^{re}_n on décompose en deux fa-triangles le fa-rectangle BADE, supposé convexe en menant l'une de ses diagonales, on en déduit, puisque l'on est en IIᵉ, que la somme des quatre angles de ce fa-rectangle est supérieure à quatre droits (ou 2π), donc que l'angle proprement dit B, qui est saillant est supérieur à un droit, donc compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π; quant au fa-rectangle non convexe B′A′DE′, associé au précédent, son angle non droit, qui est rentrant, est compris entre $2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ et $2\pi - \pi = \pi$, donc inférieur à trois droits; d'où ce caractère important que *en IIᵉ l'angle non droit d'un fa-rectangle convexe est supérieur à un droit et inférieur à deux droits et celui d'un fa-rectangle non convexe, est inférieur à trois droits et supérieur à deux; d'une façon générale, cet angle est toujours compris entre un droit et trois droits;* dans les calculs, cet angle B pourra donc être défini soit par $\sin B$, soit par $\operatorname{tg} B$, tous deux positifs si B est saillant, négatifs s'il est rentrant, tandis qu'une valeur de $\cos B$ doit être négative ($0 > \cos B > -1$), mais répond à deux valeurs de B de somme égale à 2π.

Revenant encore sur la construction précédente, on remarquera que les perpendiculaires abaissées de B sur les fa-droites Dx, Dy ont chacune deux pieds opposés A, A′ ou E, E′; on pourrait donc, remplaçant dans ce qui précède l'un au moins des sommets A, E par son opposé, ce qui revient à remplacer l'un au moins des côtés c, c' par son supplémentaire, envisager trois autres quadrilatères BA′DE, BADE′, BA′DE′ ayant également trois angles droits; mais lorsque B est intérieur à ω_0 un angle droit de chacun de ces quadrilatères est rentrant, son sommet étant E pour le premier, A pour le second, D pour le troisième, et lorsque B est extérieur à ω_0 (ce qui revient sur notre figure à remplacer B par B′ et à considérer les quadrilatères B′ADE′, B′A′DE, B′ADE) les deux premiers quadrilatères ne sont plus connexes ayant deux côtés opposés qui se croisent en un point intermédiaire (B′A et DE′ en P′, B′E et DA′ en Q′) et l'angle droit de sommet D du troisième est rentrant. Pour ces raisons ces divers quadrilatères ne seront pas considérés comme de véritables fa-rectangles; chacun d'eux s'associe d'ailleurs à un fa-rectangle de façon que leurs divers côtés soient deux à deux égaux ou supplémentaires et la somme de leurs angles non droits égale à π ou à 2π; quant aux deux fa-rectangles qui seuls ont été retenus BADE et B′A′DE′, ils se distinguent essentiellement des précédents par la qualité signalée plus haut, étant les seuls dont les deux côtés de l'angle non droit sont inférieurs à $\frac{\pi}{2}$.

Observons enfin, toujours en IIᵉ, que si l'on prolonge au delà de A et B les côtés [DA], [EB] du fa-rectangle convexe BADE, ces prolongements se coupent en un pôle Q de la fa-droite DE et forment un fa-triangle rectangle BAQ dont les cinq éléments sont reliés d'une manière simple à ceux du fa-rectangle : un côté [AB] leur est commun; deux autres côtés [AQ], [BQ] du fa-triangle sont les compléments de deux autres côtés [AD], [BE] du fa-rectangle; leurs angles en B sont supplémentaires; enfin l'angle en Q du fa-triangle, dont le sommet Q est un pôle de la fa-droite DE est égal au dernier côté [DE] du fa-rectangle : tout problème sur le fa-rectangle, toute relation entre ses éléments, se ramène donc à un problème, à une relation concernant le fa-triangle rectangle. et l'étude du fa-rectangle pourrait en rester là; mais néanmoins et afin de conserver le parallélisme entre Ire et IIe, il sera intéressant de reprendre directement cette étude.

61. Relations générales entre éléments d'un fa-rectangle. — Ayant ainsi observé en Ire et en IIe que, de même que le fa-triangle rectangle, le fa-rectangle admet cinq éléments, et sa construction, effectuée plus haut, dépend de deux arbitraires telles que les fa-distances du sommet B aux deux fa-droites rectangulaires Dx, Dy, il existe donc une *relation générale* entre trois éléments quelconques d'un fa-rectangle et le problème se pose d'établir ces diverses relations; nous le ferons de plusieurs manières.

La première, déjà utilisée plus haut pour étudier l'angle non droit B, procède de la décomposition du fa-rectangle BADE effectuée en menant la diagonale DB, rectiligne dans la forme-type choisie; le fa-rectangle se partage en deux fa-triangles

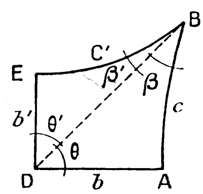

Fig. 54.

rectangles DAB, DEB, rectangles en A et E; ceux-ci ont même hypoténuse $x = [\mathrm{DB}]$, leurs autres côtés sont un côté de l'angle du fa-rectangle et la base adjacente $c = [\mathrm{BA}]$ et $b = [\mathrm{AD}]$ pour le fa-triangle DAB, $c' = [\mathrm{BE}]$, et $b' = [\mathrm{ED}]$ pour DEB; leurs angles en D, $\theta = \mathrm{ADB}$, $\theta' = \mathrm{EDB}$ sont complémentaires; leurs angles en B, $\beta = \mathrm{ABD}$, $\beta' = \mathrm{EBD}$ ont pour somme $\beta + \beta' = \mathrm{B}$. Ne retenant d'abord pour chacun d'eux que les quatre premiers éléments b, c, x, θ et b', c', x, θ', ceux-ci sont liés respectivement par les quatre relations générales suivantes, où les lignes trigonométriques de l'angle θ' sont remplacées par les lignes complémentaires de l'angle θ :

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{llll} \mathrm{cj}\,x = \mathrm{cj}\,b\,\mathrm{cj}\,c, & \mathrm{tj}\,c = \mathrm{sj}\,b\,\mathrm{tg}\,\theta, & \mathrm{sj}\,c = \mathrm{sj}\,x\,\sin\theta, & \mathrm{tj}\,b = \mathrm{tj}\,x\cos\theta, \\ \mathrm{cj}\,x = \mathrm{cj}\,b'\,\mathrm{cj}\,c', & \mathrm{tj}\,c' = \dfrac{\mathrm{sj}\,b'}{\mathrm{tg}\,\theta}, & \mathrm{sj}\,c' = \mathrm{sj}\,x\cos\theta, & \mathrm{tj}\,b' = \mathrm{tj}\,x\sin\theta. \end{array}\right.$$

En vue d'éliminer entre ces diverses relations les deux éléments auxiliaires x, θ, on peut d'abord égaler les deux valeurs qui s'en déduisent de $\sin\theta$, ou de $\cos\theta$, ou de $\mathrm{tg}\,\theta$, ce qui donne les relations suivantes :

$$\frac{\mathrm{sj}\,c}{\mathrm{sj}\,x} = \frac{\mathrm{tj}\,b'}{\mathrm{tj}\,x}, \qquad \frac{\mathrm{sj}\,c'}{\mathrm{sj}\,x} = \frac{\mathrm{tj}\,b}{\mathrm{tj}\,x}, \qquad \frac{\mathrm{tj}\,c}{\mathrm{sj}\,b} = \frac{\mathrm{sj}\,b'}{\mathrm{tj}\,c'};$$

dans celles-ci x ne figure que par le rapport $\dfrac{\mathrm{sj}\,x}{\mathrm{tj}\,x} = \mathrm{cj}\,x$, et en égalant alors les quatre valeurs de $\mathrm{cj}\,x$ déduites de ces dernières relations et des précédentes, on obtient ainsi entre les quatre côtés b, c, b', c' les relations générales suivantes :

(39) $$\mathrm{cj}\,b\,\mathrm{cj}\,c = \mathrm{cj}\,b'\mathrm{cj}\,c' = \frac{\mathrm{sj}\,c}{\mathrm{tj}\,b'} = \frac{\mathrm{sj}\,c'}{\mathrm{tj}\,b}, \qquad \mathrm{tj}\,c\,\mathrm{tj}\,c' = \mathrm{sj}\,b\,\mathrm{sj}\,b';$$

certaines d'entre elles portent sur quatre éléments et ne sont intéressantes que par leur symétrie, mais entre les quatre expressions deux à deux égales ne retenant que les égalités reliant la première ou la seconde à chacune des deux autres, on obtient les quatre relations générales suivantes entre trois éléments :

(40) $$\mathrm{tg}\,c = \mathrm{cj}\,b\,\mathrm{tj}\,b',$$

(41) $$\mathrm{sj}\,c' = \mathrm{sj}\,b\,\mathrm{cj}\,c,$$

(40') $$\mathrm{tj}\,c' = \mathrm{cj}\,b'\,\mathrm{tj}\,b;$$

(41') $$\mathrm{sj}\,c = \mathrm{sj}\,b'\mathrm{cj}\,c';$$

la manière même dont on vient d'établir ces quatre relations montre d'ailleurs que, inversement, les autres relations (38) entre quatre éléments sont des conséquences de celles-ci et la vérification s'en fait immédiatement.

62. Reste à établir les relations où figure l'angle B; la même décomposition du fa-rectangle qui donne $B = \beta + \beta'$ permet le calcul rationnel des trois fonctions circulaires de B en fonction de celles de β et β', calcul qui s'effectuera en utilisant les relations qui existent respectivement entre β et β' et les autres éléments des fa-triangles rectangles BAD, BED, relations dont on a déjà reproduit plus haut celles qui ne portent pas sur β et β'. De là une variété assez grande de procédés et d'exercices de calcul; retenant, par exemple, les relations dans le fa-triangle BAD, entre les sinus et cosinus des angles β, θ, on a :

$$\cos\beta = \mathrm{cj}\,b\,\sin\theta, \qquad \sin\beta = \frac{\cos\theta}{\mathrm{cj}\,c},$$

et de même, dans le fa-triangle BED, où θ est remplacé par $\frac{\pi}{2} - \theta$:

$$\cos\beta' = \mathrm{cj}\,b'\cos\theta, \qquad \sin\beta' = \frac{\sin\theta}{\mathrm{cj}\,c'}.$$

On en déduit d'abord,

$$\sin B = \sin\beta\cos\beta' + \sin\beta'\cos\beta = \frac{\mathrm{cj}\,b'}{\mathrm{cj}\,c}\cos^2\theta + \frac{\mathrm{cj}\,b}{\mathrm{cj}\,c'}\sin^2\theta,$$

d'où, les coefficients de $\cos^2\theta$ et $\sin^2\theta$ étant égaux, d'après les valeurs égales de $\mathrm{cj}\,x$ (38), des deux expressions suivantes de $\sin B$:

(42) $$\sin B = \frac{\mathrm{cj}\,b'}{\mathrm{cj}\,c}, \qquad \sin B = \frac{\mathrm{cj}\,b}{\mathrm{cj}\,c'}.$$

On trouve ensuite :

$$\cos B = \cos\beta\cos\beta' - \sin\beta\sin\beta' = \sin\theta\cos\theta\left[\mathrm{cj}\,b\,\mathrm{cj}\,b' - \frac{1}{\mathrm{cj}\,c\,\mathrm{cj}\,c'}\right],$$

d'après les mêmes valeurs de $\mathrm{cj}\,x$, la quantité entre crochets s'écrit :

$$\frac{\mathrm{cj}^2 x}{\mathrm{cj}\,c\,\mathrm{cj}\,c'} - \frac{1}{\mathrm{cj}\,c\,\mathrm{cj}\,c'} = \frac{\mathrm{cj}^2 x - 1}{\mathrm{cj}\,c\,\mathrm{cj}\,c'} = \mathrm{j}\,\frac{\mathrm{sj}^2 x}{\mathrm{cj}\,c\,\mathrm{cj}\,c'},$$

alors que les troisièmes égalités (38) donnent :

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{\mathrm{sj}c\,\mathrm{sj}\,c'}{\mathrm{sj}^2 x},$$

d'où, sj x n'étant pas nul, et d'après (39), les deux valeurs suivantes de $\cos B$ en fonction de deux côtés :

(43) $$\cos B = j\,\mathrm{tj}\,c\,\mathrm{tj}\,c',$$

(43′) $$\cos B = j\,\mathrm{sj}\,b\,\mathrm{sj}\,b'.$$

On en déduit enfin, toujours en fonction de deux côtés, deux valeurs de $\operatorname{tg} B$ que, à titre d'exercice, on pourra d'ailleurs calculer directement :

$$\operatorname{tg} B = j\frac{\mathrm{cj}\,b'}{\mathrm{cj}\,c\,\mathrm{tj}\,c\,\mathrm{tj}\,c'} = j\frac{\mathrm{cj}\,b'}{\mathrm{sj}\,c\,\mathrm{tj}\,c'},$$

ou, d'après (41′) :

(44) $$\operatorname{tg} B = j\frac{\mathrm{cj}\,b'}{\mathrm{sj}\,b'\,\mathrm{cj}\,c'\,\mathrm{tj}\,c'} = \frac{j}{\mathrm{sj}\,b'\,\mathrm{tj}\,c'}$$

et de même

(44′) $$\operatorname{tg} B = \frac{j}{\mathrm{tj}\,b\,\mathrm{sj}\,c}.$$

63. On peut d'ailleurs reprendre ces recherches par un procédé qui reste mieux dans l'esprit de la méthode en évitant le recours, imposé par la décomposition de l'angle B, à des additions et soustractions et qui consiste, ainsi qu'on l'a fait pour le fa-triangle rectangle, dans l'emploi de formes-type où l'on place un sommet du

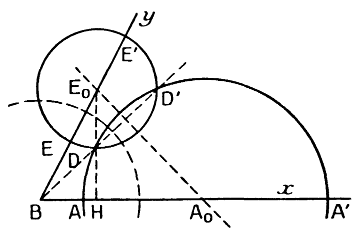

Fig. 55.

fa-rectangle au centre du cercle fondamental. Lorsque ce sommet est celui de l'angle non droit $\overline{B}$ les deux côtés de cet angle $c = [BA]$, $c' = [BE]$ sont portés par des demi-droites Bx, By issues de B, les bases $b = [AD]$, $b' = [ED]$ sont des arcs de deux cercles centrés l'un en un point A_0 de Bx, l'autre en un point E_0 de By et passant par les points opposés A, A′ pour l'un, E, E′ pour l'autre; ces cercles forment avec le cercle fondamental ω un système orthogonal, et si l'on mène la hauteur E_0H du triangle BA_0E_0 ayant pour sommets les centres de ces cercles, la valeur de la puissance du cercle ω centré en B donne l'égalité

$$jR^2 = \overline{BA_0}.\overline{BH} = \overline{BA_0}.\overline{BE_0}\cos B,$$

où $\overline{BA_0}$ et $\overline{BE_0}$ sont reliés aux fa-distances $c = [BA]$, $c' = [BE]$ par les formules générales (31), ce qui donne :

$$j R^2 = \frac{R}{\operatorname{tj} c} \, \frac{R}{\operatorname{tj} c'} \cos B\,;$$

l'on retrouve ainsi la formule (43), puis d'après la dernière égalité (39), la seconde formule (43').

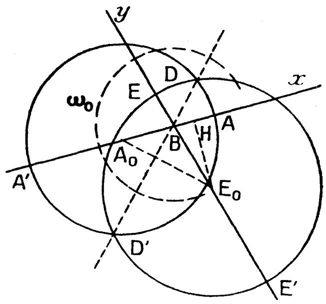

Fig. 56.

Dans une seconde forme-type, c'est le sommet A d'un angle droit non opposé à l'angle non droit qui se place au centre de ω ; le côté $c = [BA]$ et la base adjacente $b = [AD]$ sont des segments rectilignes portés par des demi-droites rectangulaires Az, At issues de A ; la seconde base $b' = [DE]$ est un arc d'un cercle dont le centre D_0 et deux points diamétralement opposés D, D' sont situés sur At ; de même le second côté $c' = [BE]$ est un arc d'un second cercle centré en un point S non situé sur Az et coupant cette droite Az en B et son opposé B' en formant

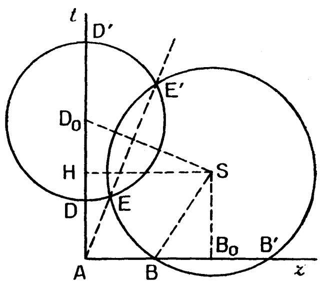

Fig. 57.

avec elle l'angle B du fa-rectangle ; ces deux cercles forment avec le cercle fondamental ω un système orthogonal, leurs points d'intersection E, E' sont alignés avec le centre A de ω et en menant la hauteur SH du triangle formé par les trois centres D_0, S, A, on a comme dans la forme-type précédente :

$$j R^2 = \overline{AD_0} . \overline{AH} = \overline{AD_0} . \overline{B_0 S}\,;$$

d'autre part, les côtés SB, SB_0 du triangle rectangle SB_0B étant perpendiculaires à ceux de l'angle B, on a aussi au moins en valeur absolue :

$$\overline{B_0S} = \overline{BB_0} \operatorname{cotg} B,$$

d'où comme plus haut :

$$j R^2 = \overline{AD_0} . \overline{BB_0} \operatorname{cotg} B,$$

ou

$$j \operatorname{cotg} B = \operatorname{tj} b \operatorname{sj} c,$$

égalité qui, en outre, se vérifie en signe soit que en I^re^, où B est aigu, tous ses termes soient positifs, soit que en II^e^, où sj$c$ est toujours positif, B est saillant, compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\pi(\operatorname{cotg} B < 0, j = -1)$, lorsque la base est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}(\operatorname{tg} b > 0)$, soit que B soit rentrant, compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$ lorsque b est

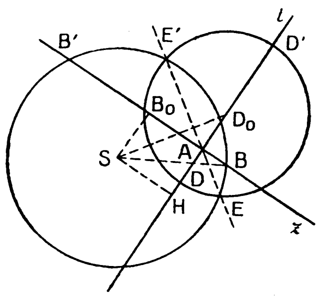

Fig. 58.

compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π ; cette vérification se fait aussi sur les deux formes qu'affecte la figure en II^e^ en y échangeant simplement les points D et D', les fa-rectangles BADE et BAD'E', l'angle saillant de l'un et l'angle rentrant de l'autre, la base $b = [AD]$ du premier et la base supplémentaire $[AD'] = \pi - b$ de l'autre.

On retrouve donc bien la formule générale (44') ainsi que son analogue (44).

Le lecteur pourra retrouver de même directement les formules donnant sin B en utilisant la forme-type où c'est le sommet D opposé à l'angle non droit qui se place au centre du cercle fondamental et en appliquant la relation qui donne l'angle de deux cercles en fonction de leurs rayons AA_0, EE_0 et de la distance A_0E_0 de leurs centres; mais il nous suffira de déduire la valeur de sin B de celles qui viennent d'être trouvées de cos B et cotg B, qui donnent :

$$\sin B = \frac{\cos B}{\operatorname{cotg} B} = \frac{\operatorname{tj} c \operatorname{tj} c'}{\operatorname{tj} b \operatorname{sj} c} = \frac{\operatorname{tj} c'}{\operatorname{tj} b \operatorname{cj} c},$$

d'où d'après (41) une valeur ne dépendant que de deux côtés

$$\sin B = \frac{\operatorname{tj} c'}{\operatorname{tj} b} \frac{\operatorname{sj} b}{\operatorname{sj} c'} = \frac{\operatorname{cj} b}{\operatorname{cj} c'},$$

ce qui reproduit bien l'une des formules (42).

64. Tableau des formules du fa-rectangle. — En résumé on a trouvé comme dans le fa-triangle rectangle, *dix relations générales*, portant chacune sur trois quelconques des cinq éléments et qu'il est bon de reproduire en les répartissant en six types, soit :

Deux relations entre les *deux bases et un côté de l'angle* (40) :

(I) $$\mathrm{tj}\,c = \mathrm{cj}\,b\,\mathrm{tj}\,b', \qquad \mathrm{tj}\,c' = \mathrm{cj}\,b'\,\mathrm{tj}\,b;$$

Deux entre *une base et les côtés de l'angle* (41) :

(II) $$\mathrm{sj}\,c = \mathrm{sj}\,b'\,\mathrm{cj}\,c', \qquad \mathrm{sj}\,c' = \mathrm{sj}\,b\,\mathrm{cj}\,c;$$

Deux entre *l'angle, une base et le côté adjacent* (44) :

(III) $$j\cot\mathrm{g}\,\mathrm{B} = \mathrm{tj}\,b\,\mathrm{sj}\,c, \qquad j\cot\mathrm{g}\,\mathrm{B} = \mathrm{tj}\,b'\,\mathrm{sj}\,c';$$

Deux entre *l'angle, une base et le côté opposé* (42) :

(IV) $$\mathrm{cj}\,b = \mathrm{cj}\,c'\sin\mathrm{B}, \qquad \mathrm{cj}\,b' = \mathrm{cj}\,c\sin\mathrm{B};$$

Une entre *l'angle et ses côtés* (43) :

(V) $$j\cos\mathrm{B} = \mathrm{tj}\,c\,\mathrm{tj}\,c';$$

Une entre *l'angle et les deux bases* (43') :

(VI) $$j\cos\mathrm{B} = \mathrm{sj}\,b\,\mathrm{sj}\,b'.$$

Les mêmes observations générales que pour le fa-triangle rectangle, sur le nombre et la nature des divers termes de ces formules, s'appliquent également ici : nous signalerons encore en II^e que ces formules s'appliquent aussi, mais seulement en valeurs absolues et non plus en signes, à tout fa-quadrilatère ayant trois angles droits, saillants ou rentrants : celui-ci se rattache en effet à un fa-rectangle convexe de telle façon que, en passant de l'un à l'autre, chaque terme de l'une quelconque de toutes ces relations ne change pas ou ne fait que changer de signe.

65. Application au fa-triangle rectangle impropre. — Rapprochant toutes ces relations de celles qui concernent le fa-triangle rectangle, on contate, ainsi que le font prévoir les considérations qui ont conduit à la notion de fa-rectangle, que dans les deux groupes de relations il en est trois qui, rattachant l'angle B et un côté adjacent c (désignés de la même manière dans les deux figures) à un troisième élément, peuvent se mettre sous une forme commune ayant respectivement les mêmes premiers membres, et s'écrivant pour le fa-triangle :

(45) $$\mathrm{sj}\,c\,\mathrm{tg}\,\mathrm{B} = \mathrm{tj}\,b, \qquad \frac{\mathrm{tj}\,c}{\cos\mathrm{B}} = \mathrm{tj}\,a, \qquad \mathrm{cj}\,c\sin\mathrm{B} = \cos\mathrm{C},$$

pour le fa-rectangle :

(45') $$\mathrm{sj}\,c\,\mathrm{tg}\,\mathrm{B} = \frac{j}{\mathrm{tj}\,b}, \qquad \frac{\mathrm{tj}\,c}{\cos\mathrm{B}} = \frac{j}{\mathrm{tj}\,c'}, \qquad \mathrm{cj}\,c\sin\mathrm{B} = \mathrm{cj}\,b'.$$

En II^e où chacun des seconds membres peut prendre toute valeur de $-\infty$ à

$+\infty$ pour les deux premières relatives et de -1 à $+1$ pour les troisièmes, il n'y a pas lieu de s'arrêter davantage sur ce rapprochement où l'on retrouve une correspondance déjà signalée entre un fa-rectangle et un fa-triangle rectangle.

Mais en Ire, en se reportant aux valeurs pour $x > 0$ des fonctions $\operatorname{th} x$, $\operatorname{ch} x$, $\cos x$, on constate que *les trois expressions* $\operatorname{sh} c \operatorname{tg} B$, $\frac{\operatorname{th} c}{\cos B}$, $\operatorname{ch} c \sin B$ *sont inférieures à* 1 *dans un fa-triangle rectangle, supérieures à* 1 *dans un fa-rectangle*, et qu'il existe un cas limite intermédiaire répondant aux relations :

$$(45'') \qquad \operatorname{sh} c \operatorname{tg} B = 1, \qquad \frac{\operatorname{th} c}{\cos B} = 1, \qquad \operatorname{ch} c \sin B = 1$$

et aux valeurs particulières $C = 0$, $b' = 0$, a, b, c' infinis, cas qui comme on l'avait prévu dans la construction initiale du paragraphe 59 est celui du *fa-triangle rectangle impropre*; on retrouve bien d'ailleurs dans ces relations (45''), celles qui rattachent une fa-distance $c = x$ à l'angle de parallélisme correspondant $B = \varphi$.

Quant aux autres des dix relations de chacun des deux groupes, où ne figure au plus qu'un seul des deux éléments c, B, on constate qu'elles sont toutes vérifiées identiquement pour les valeurs particulières signalées de a, b, C dans le fa-triangle, c', b, b' dans le fa-rectangle. Ainsi *les dix relations entre éléments soit du fa-triangle rectangle, soit du fa-retcangle, s'appliquant aussi au fa-triangle rectangle impropre, sept d'entre elles se réduisent alors à des identités.*

Une application, que nous étendrons plus loin, montre l'importance de ces rapprochements; elle conserve un caractère de ces relations (45), (45'); jusqu'ici et de même que pour toutes les autres des deux groupes de dix relations, il ne leur a été attribué qu'un *caractère nécessaire* en ce sens qu'elles sont vérifiées quel que soit le fa-triangle rectangle ou le fa-rectangle ou encore que, pour que les trois éléments figurant dans chacune d'elles appartiennent à une telle figure, il faut qu'ils satisfassent à cette relation. La question se pose donc d'examiner si la relation possède aussi le *caractère suffisant*, c'est-à-dire, si lorsque trois éléments, donnés *a priori*, satisfont à cette relation, il existe une figure, fa-triangle rectangle ou fa-rectangle, admettant ces trois éléments.

Le raisonnement étant le même pour toutes ces relations considérons, par exemple, en Ire, la relation

$$\operatorname{sh} c \operatorname{tg} B = \operatorname{th} b,$$

et supposons, donnés *a priori* deux fa-longueurs c, b positives et un angle B, compris entre 0 et π vérifiant cette relation. Ainsi qu'on l'a vu au début du paragraphe 59 on peut construire, à la position près, une figure et une seule, fa-triangle rectangle ou fa-rectangle, ayant un premier côté [BA] égal à c et un angle adjacent égal à B; cette figure est ici un fa-triangle rectangle car, d'après l'hypothèse, le produit $\operatorname{sh} c \operatorname{tg} B$ est inférieur à 1 comme étant égal à $\operatorname{th} b$, et le second côté [CA] de son angle droit a une valeur bien déterminée $b' = [CA]$ qui, puisque le fa-triangle existe, satisfait à la relation $\operatorname{sh} c \operatorname{tg} B = \operatorname{th} b'$, ce qui entraine $\operatorname{th} b' = \operatorname{th} b$, et enfin $b' = b$, à une valeur comprise entre 0 et 1 des $\operatorname{th} x$ correspondant une valeur positive de x et une seule; le fa-triangle rectangle BAC ainsi construit a donc bien trois éléments égaux respectivèment aux valeurs données c, b, B et la relation proposée est suffisante.

Le même raisonnement s'applique aux relations parallèles (45'), (45'')

$$\operatorname{sh} c \operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{th} b}, \qquad \operatorname{sh} c \operatorname{tg} B = 1,$$

concernant le fa-rectangle et le fa-triangle rectangle impropre; il s'applique aussi en II^e, aux relations correspondantes :

$$\sin c \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} b, \qquad \sin c \operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} b},$$

où b variant de o à π, $\operatorname{tg} b$ prend toute valeur positive de o à $+\infty$, et où il y a lieu de tenir compte de cette condition qu'un angle B d'un fa-triangle rectangle est compris entre o et π, tandis que celui d'un fa-rectangle l'est entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Comme il en est de même pour toutes les autres, on en déduit que *chacune des trois relations* (45), (45') *ou* (45''), *entre éléments d'un fa-triangle rectangle, d'un fa-rectangle, ou d'un fa-triangle rectangle impropre, est une condition nécessaire et suffisante entre ces éléments.*

66. **Fa-pentagone droit.** — Il y a lieu d'étudier de même les autres relations des deux groupes; mais auparavant et de même que nous avons associé la notion de fa-rectangle à celle de fa-triangle rectangle en remplaçant au moins en I^re, deux fa-droites sécantes et leur angle par deux fa-droites non sécantes et la fa-longueur de leur perpendiculaire commune, nous étudierons la figure obtenue lorsque, aux deux fa-droites sécantes qui portent les côtés de l'angle non droit d'un fa-rectangle, on substitue deux fa-droites non sécantes. Cette circonstance se présente en I^re, lorsqu'en se donnant arbitrairement les deux bases $b = [DA]$, $b' = [DE]$ d'un fa-rectangle (D pouvant être placé au centre du cercle fonda-

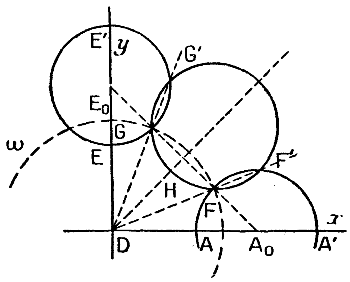

Fig. 59.

mental), on porte ces bases sur deux fa-droites rectangulaires Dx, Dy, et l'on mène les perpendiculaires en A à Dx et en E à Dy; celles-ci peuvent être non sécantes, auquel cas elles admettent une perpendiculaire commune FG coupant la première en un point F, la seconde en un point G, d'où une nouvelle figure, constituée par un fa-polygone de cinq côtés DAFGE, dont tous les angles sont droits et qui sera dit *fa-pentagone droit*; ce fa-pentagone est *convexe*, car deux de ses côtés non consécutifs [DE] et [FG], par exemple, sont toujours portés par deux fa-droites qui, perpendiculaires à une même troisième EG, sont non sécantes, ce qui entraîne que les sommets F et G, puis pour la même raison, F et A, sont situés d'un même côté de la fa-droite DE joignant les deux autres sommets D, E; ce fa-pentagone droit a, d'autre part, comme le fa-triangle rectangle et le fa-rectangle, cinq éléments, qui sont ses côtés, $b=[DA]$, $b'=[DE]$, $c=[AF]$, $c'=[EG]$, $a=[FG]$, mais qui jouent alors tous le même rôle.

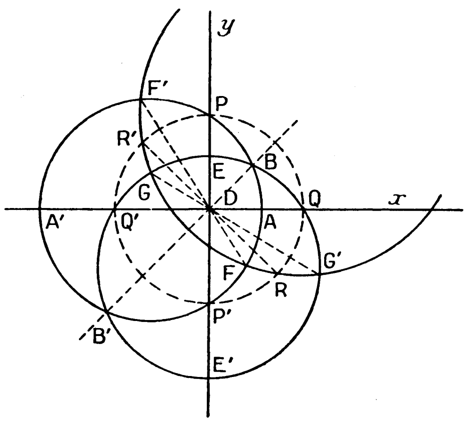

Fig. 60.

Comme au paragraphe 59 un cas limite se présente, celui où les perpendiculaires en A à Dx et en E à Dy sont parallèles, d'où une forme limite commune au fa-rectangle et au fa-pentagone droit dans laquelle s'annule l'angle non droit du premier ou un côté du second, qui sera dite *fa-rectangle impropre*, l'un de ses sommets étant le point fa-impropre commun à ses deux côtés parallèles.

Reprenant cette question en II° où deux fa-droites ont à la fois deux points d'intersection opposés et une perpendiculaire commune, on pourrait obtenir simultanément, à partir des mêmes données, un fa-rectangle et un fa-pentagone droit. Pour en discuter, reprenons et poursuivons la construction du paragraphe 60, avec un premier sommet D placé au centre du cercle fondamental ω et de son contraire ω_0 et où l'on a déjà placé dans le cas général deux premières fa-droites rectangulaires Dx, Dy, issues d'un premier sommet D, puis deux autres perpendiculaires l'une APA'P' à Dx, l'autre EQE'Q' à Dy, celles-ci, constituées par les cercles de diamètres AA' et EE', se coupant en deux points opposés B, B' non situés en général sur ω_0, l'un que l'on peut toujours supposer être B étant intérieur à ω_0 et l'autre B' extérieur. Il reste, pour former un fa-pentagone droit à placer une cinquième fa-droite perpendiculaire commune aux deux précédentes; celle-ci qui a pour pôles B, B' est placée sur un cercle centré sur la droite BB' et coupant ω_0 aux extrémités R, R' du diamètre perpendiculaire à BB'; elle coupe la fa-droite APA'P' en des points opposés F, F' et de même EQE'Q' en G, G', le dernier côté du pentagone ayant donc pour extrémités F ou F', G ou G'; or les fa-distances à B de tous ses points étant toutes égales à $\frac{\pi}{2}$, donc supérieures aux côtés [BA], [BE] de l'angle B du fa-rectangle DABE, les points D, A, E sont tous situés dans la même région limitée à ce cinquième côté, tandis que A′ et E′ ne sont pas dans la même région que D : le fa-pentagone ne pourrait donc être convexe que si trois de ses premiers sommets sont D, A, E; par rapport au côté DA, les trois autres sommets doivent donc être E, G, F′, et par rapport à DE, ils doivent être A, G′ et F, d'où contradiction et, par suite, impossibilité en II^e^ de construire un fa-pentagone droit convexe.

Le lecteur curieux pourra vérifier, en conservant toujours le premier sommet D et en choisissant pour chacun des suivants entre A et A′, F et F′, G et G′, E et E′ qu'aucun des 16 pentagones ainsi formés, tout en ayant ses cinq angles tous droits, n'est convexe, certains comme DAFGE, DAFG′E, DAFG′E′ ayant un angle droit rentrant de sommet D, A ou F, d'autres comme DAF′G′E, ayant tous leurs angles saillants, mais dont le périmètre est une ligne polygonale formée avec un point de croisement B.

La conclusion est qu'*il n'existe de fa-pentagone droit convexe qu'en* I^re^ et que les relations entre ses côtés qui vont être établies ne seront pas valables en II^e^, si ce n'est que, de même qu'on l'a vu pour les fa-rectangles non convexes, ces relations puissent encore s'appliquer entre valeurs absolues seulement.

Remarquons enfin, en rapprochant cette conclusion de celles qui concernent le fa-triangle rectangle et le fa-rectangle et en rappelant la valeur classique en Géométrie euclidienne de la somme des angles d'un polygone, que nous rencontrons ici une nouvelle opposition entre les trois espèces de Géométrie, opposition qui se confirmera plus tard à propos des aires sous une forme plus concrète, et par suite que *les seuls fa-polygones convexes à angles tous droits ont trois côtés en* II^e^, *quatre en* III^e^ *et cinq au moins en* I^re^.

67. **Relations entre côtés d'un fa-pentagone droit.** — Ces principes établis, on observe que de même que pour un fa-triangle rectangle et un fa-rectangle, un fa-pentagone droit admet encore d'une part *cinq éléments* qui sont ses côtés, et sa construction d'autre part dépend de deux arbitraires telles que les deux côtés consécutifs [DA], [DE]; il existe donc une relation générale entre trois quelconques des cinq côtés et le problème se pose d'établir ces diverses relations.

A cet effet nous décomposons le fa-pentagone DAFGE en deux fa-rectangles DAFH, DEGH, en abaissant du sommet D sur le côté opposé [FG] la perpendiculaire [DH]; cette perpendiculaire, représentée dans la forme-type utilisée plus haut par la droite joignant D au centre du cercle portant le côté [FG], appartient au même faisceau que les deux autres perpendiculaires [GE], [FA] à la même fa-droite [FG]; elle se situe donc, comme son point D, entre ces deux dernières, son pied H est placé entre les sommets F et G et le fa-pentagone est bien décomposé en deux fa-rectangles DAFH, DEGH qui ont un côté commun [DH] $= x$ et dont les angles non droits, de sommet commun D, $\theta =$ ADH, $\theta' =$ EDH sont aigus et complémentaires; deux des autres côtés de chacun de ces fa-rectangles, [DA] $= b$, [AF] $= c$ pour l'un, [DE] $= b'$, [EG] $= c'$ pour l'autre, sont aussi des côtés du fa-pentagone et l'on distingue ainsi dans chacun quatre éléments, l'angle θ ou $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$, les deux côtés de l'angle x, b ou x, b', et une base c, ou c', d'où entre ces quatre éléments, les quatre relations suivantes, appartenant respectivement aux types (II), (III), (IV), (V)

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} c \operatorname{ch} b, \quad \operatorname{cotg} \theta = \operatorname{th} c \operatorname{sh} b, \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} x \sin \theta, \quad \cos \theta = \operatorname{th} x \operatorname{th} b;$$
$$\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} c' \operatorname{ch} b', \quad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{th} c' \operatorname{sh} b', \quad \operatorname{ch} c' = \operatorname{ch} x \cos \theta, \quad \sin \theta = \operatorname{th} x \operatorname{th} b';$$

ces relations ont la même forme que les relations (38) du paragraphe 61 et les mêmes calculs donnent d'abord en égalant entre elles les deux valeurs qui s'en déduisent

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} x \operatorname{th} x \operatorname{th} b' = \operatorname{sh} x \operatorname{th} b', \qquad \operatorname{ch} c' = \operatorname{sh} x \operatorname{th} b,$$

puis, en laissant de côté diverses relations portant sur quatre côtés, et remplaçant $\operatorname{sh} x$ par ses premières valeurs, on obtient entre trois côtés les relations suivantes :

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{sh} c \operatorname{ch} b \operatorname{th} b', \qquad \operatorname{ch} c = \operatorname{sh} c' \operatorname{ch} b' \operatorname{th} b',$$

ou

$$\operatorname{th} c \operatorname{ch} b \operatorname{th} b' = 1, \tag{46}$$
$$\operatorname{ch} c = \operatorname{sh} c' \operatorname{sh} b' \tag{47}$$

et de même :

$$\operatorname{th} c' \operatorname{ch} b' \operatorname{th} b = 1, \qquad \operatorname{ch} c' = \operatorname{sh} c \operatorname{sh} b.$$

Ces quatre relations sont deux à deux de même forme, vérifiant ainsi que les cinq côtés du fa-pentagone jouent tous le même rôle; deux portent sur trois côtés consécutifs $c = [AF]$, $b = [DA]$, $b' = [ED]$, ou c', b', b, ou mieux sur un côté b ou b', compris entre deux autres; deux autres portent sur trois côtés non consécutifs, ou mieux sur un côté c ou c', opposé à deux autres nécessairement adjacents c', b' ou c, b.

Comme chacun des cinq côtés peut jouer le même rôle, on en déduit des conclusions analogues à celles qui concernent le fa-triangle rectangle et le fa-rectangle et d'après lesquelles *il existe dix relations générales liant trois par trois les cinq côtés d'un fa-pentagone droit, et ces dix relations appartiennent cinq par cinq à deux types seulement, suivant qu'elles portent sur un côté compris entre deux autres ou opposé à deux autres.*

68. **Application au fa-rectangle impropre.** — De même qu'au paragraphe 65, il y a lieu de rapprocher ces diverses relations de celles qui, en Ire, concernent le fa-rectangle, et plus particulièrement celles de ces relations où figurent les bases initiales b, b' et qui s'écrivent, pour le fa-rectangle :

$$\operatorname{ch} b \operatorname{th} b' = \operatorname{th} c, \qquad \operatorname{ch} b' \operatorname{th} b = \operatorname{th} c', \qquad \operatorname{sh} b \operatorname{sh} b' = \cos B, \tag{48}$$

et pour le fa-pentagone droit, a étant le côté opposé à b et b' :

$$\operatorname{ch} b \operatorname{th} b' = \frac{1}{\operatorname{th} c}, \qquad \operatorname{ch} b' \operatorname{th} b = \frac{1}{\operatorname{th} c'}, \qquad \operatorname{sh} b \operatorname{sh} b' = \operatorname{ch} a \tag{48'}$$

On constate ainsi (comme au paragraphe 65) que *les trois expressions* $\operatorname{ch} b \operatorname{th} b'$, $\operatorname{ch} b' \operatorname{th} b$, $\operatorname{sh} b \operatorname{sh} b'$ *sont inférieures à* 1 *dans un fa-rectangle, supérieures à* 1 *dans un fa-pentagone droit*, et qu'il existe un cas limite intermédiaire dit du *fa-rectangle* impropre dans lequel l'angle non droit du fa-rectangle ou un côté du fa-pentagone est nul ($B = 0$ ou $a = 0$), tandis que les deux côtés c, c' adjacents à cet angle ou à ce premier côté sont infinis; ce cas se caractérise par chacune des relations :

$$(48'') \qquad \operatorname{ch} b \operatorname{th} b' = 1, \qquad \operatorname{ch} b' \operatorname{th} b = 1, \qquad \operatorname{sh} b \operatorname{sh} b' = 1,$$

les sept autres relations entre les cinq éléments étant identiquement vérifiées.

Il est intéressant de transformer ces relations en fonction des angles de parallélisme φ, φ' correspondant aux fa-longueurs b, b'; elles s'écrivent ainsi

$$\frac{1}{\sin\varphi}\cos\varphi' = 1, \qquad \frac{1}{\sin\varphi'}\cos\varphi = 1, \qquad \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi'} = 1,$$

ou

$$\sin\varphi = \cos\varphi', \qquad \sin\varphi' = \cos\varphi, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}\varphi',$$

et se réduisant à une seule $\varphi + \varphi' = \frac{\pi}{2}$, et l'on retrouve bien, ainsi qu'on pouvait le prévoir dans la décomposition du fa-rectangle en deux fa-triangles rectangles et du fa-pentagone en deux fa-rectangles un cas particulier des angles complémentaires θ, θ'.

69. **Synthèse de relations entre éléments des trois figures.** — Le rapprochement entre les formules (48), (48'), (48'') et son analogie entre les formules (45), (45'), (45'') vont nous permettre de discuter du caractère nécessaire et suffisant de ces diverses relations; mais auparavant il conduit à une synthèse de toutes ces formules.

Nous rendrons d'abord plus expressives les relations (46), (47) entre côtés d'un fa-pentagone droit en désignant ces côtés, rangés dans l'ordre où ils se succèdent en parcourant le périmètre du fa-pentagone par p, q, r, s, t, et en substituant à $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, d'autres notations $S(x)$, $C(x)$, $T(x)$ qui, confondues avec les précédentes dans le cas du fa-pentagone, auront un sens plus général en s'appliquant aussi bien aux deux autres polygones et aux deux espèces I^re et II^e, les relations (46), (47) concernant un côté quelconque p du fa-pentagone associé à ses côtés adjacents q, t pour l'une, ou à ses côtés opposés r, s pour l'autre, se mettant ainsi sous les formes :

$$(49) \qquad C(p) = \frac{1}{T(q)\,T(t)},$$

$$(50) \qquad C(p) = S(r),\ S(s).$$

Reprenons alors en les complétant les rapprochements des paragraphes 65 et 68 en écrivant sous les formes précédentes ou sous des formes voisines, les types (46), (47) des relations concernant le fa-pentagone droit dont les côtés se succèdent dans l'ordre b, c, a, c', b', puis ceux du paragraphe 64 qui concernent le fa-rectangle dont les cinq éléments successifs sont b, c, B, c', b', et enfin ceux du

paragraphe 58 qui concernent le fa-triangle rectangle d'éléments successifs b, C, a, B, c, nous relevons, appartenant au premier type (49), les relations suivantes :

Pour le fa-pentagone :

$$\mathrm{ch}\, b = \frac{1}{\mathrm{th}\, c\, \mathrm{th}\, b'};$$

Pour le fa-rectangle :

$$\mathrm{cj}\, b = \frac{\mathrm{tj}\, c}{\mathrm{tj}\, b'}, \qquad \mathrm{sj}\, c = \frac{j}{\mathrm{tj}\, b\, \mathrm{tg}\, \mathrm{B}}, \qquad j \cos \mathrm{B} = \mathrm{tj}\, c\, \mathrm{tj}\, c'$$

et pour le fa-triangle rectangle :

$$\mathrm{sj}\, c = \frac{\mathrm{tj}\, b}{\mathrm{tg}\, \mathrm{B}}, \qquad \cos \mathrm{B} = \frac{\mathrm{tj}\, c}{\mathrm{tj}\, a}, \qquad \mathrm{cj}\, a = \frac{1}{\mathrm{tg}\, \mathrm{B}\, \mathrm{tg}\, \mathrm{C}};$$

et appartenant au second type (50) :

Pour le fa-pentagone :

$$\mathrm{ch}\, a = \mathrm{sh}\, b\, \mathrm{sh}\, b'$$

Pour le fa-rectangle :

$$\mathrm{cj}\, b' = \mathrm{cj}\, c \sin \mathrm{B}, \qquad \mathrm{sj}\, c = \mathrm{sj}\, b'\, \mathrm{cj}\, c', \qquad j \cos \mathrm{B} = \mathrm{sj}\, b\, \mathrm{sj}\, b',$$

et pour le fa-triangle-rectangle :

$$\cos \mathrm{C} = \mathrm{cj}\, c \sin \mathrm{B}, \qquad \mathrm{sj}\, b = \mathrm{sj}\, a \sin \mathrm{B}, \qquad \mathrm{cj}\, a = \mathrm{cj}\, b\, \mathrm{cj}\, c.$$

De ces rapprochements on déduit que *toutes les relations établies entre trois éléments* de l'un ou l'autre des trois polygones ou de leurs formes-limites impropres *sont de la forme générale* (49) *ou* (50) *suivant qu'elles relient un élément aux deux éléments adjacents ou opposés*, à condition que les trois expressions $\mathrm{S}(x)$, $\mathrm{C}(x)$, $\mathrm{T}(x)$ répondent aux définitions suivantes qui entraînent toutes :

$$\mathrm{T}(x) = \frac{\mathrm{S}(x)}{\mathrm{C}(x)}$$

et qui se rapportent toutes aux cinq éléments, côtés ou angles, rangés dans un ordre déterminé :

Si *x est un côté non adjacent à un angle ou adjacent à deux*, ce qui est le cas d'un côté du fa-pentagone, d'une base du fa-rectangle, de l'hypoténuse du fa-triangle, on a :

$$(51^1) \qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{sj}\, x, \qquad \mathrm{C}(x) = \mathrm{cj}\, x, \qquad \mathrm{T}(x) = \mathrm{tj}\, x.$$

Si *x est un côté adjacent à un angle et un seul*, côté de l'angle non droit du fa-rectangle, ou côté de l'angle droit du fa-triangle, il y a échange, et l'on a :

$$(51^2) \qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{cj}\, x, \qquad \mathrm{C}(x) = \mathrm{sj}\, x, \qquad \mathrm{T}(x) = \frac{1}{\mathrm{tj}\, x};$$

Si *x est l'angle non droit unique du fa-rectangle*, on a :

$$(51^3) \qquad \mathrm{S}(x) = \sin x, \qquad \mathrm{C}(x) = j \cos x, \qquad \mathrm{T}(x) = j\, \mathrm{tg}\, x$$

et *si x est un angle du fa-triangle rectangle* :

$$(51^4) \qquad \mathrm{S}(x) = \sin x, \qquad \mathrm{C}(x) = \cos x, \qquad \mathrm{T}(x) = \mathrm{tg}\, x.$$

On notera que toutes ces notations et interprétations s'appliquent dans les cas limites, soit en Ire ceux du fa-rectangle et du fa-triangle tous deux impropres dont certains éléments sont nuls, d'autres infinis, ce qui répond à

$$\mathrm{sj}\,o = \mathrm{sh}\,o = o, \qquad \mathrm{cj}\,o = \mathrm{ch}\,o = 1, \qquad \mathrm{tj}\,o = \mathrm{th}\,o = o,$$

et

$$\mathrm{sj}(+\infty) = \mathrm{sh}(+\infty) = +\infty, \qquad \mathrm{cj}(+\infty) = \mathrm{ch}(+\infty) = +\infty, \qquad \mathrm{tg}(+\infty) = \mathrm{th}(+\infty) = 1,$$

soit en IIe, celui du fa-triangle bi ou tri-rectangle où il importe d'observer que un ou deux angles ont alors une valeur particulière égale à un droit tout en restant des éléments de ce fa-triangle, et se distinguent ainsi de l'angle droit initial qui ne compte pas parmi les cinq éléments.

70. **Caractère suffisant des relations.** — Cette synthèse posée et toutes les relations envisagées entre trois éléments se présentant d'après leur origine avec un caractère nécessaire, leur caractère suffisant s'établira, s'il y a lieu, ainsi qu'on l'a déjà fait sur un exemple particulier, en observant que la démonstration repose sur deux circonstances essentielles : la première est que la construction géométrique de la figure peut toujours se faire connaissant deux éléments consécutifs figurant dans la relation envisagée et cela sans aucune condition ou bien sous une condition qui est remplie du fait que cette relation est vérifiée; la seconde est que cette relation donne pour le troisième élément, en fonction des deux premiers, une valeur et une seule, définie par l'une de ses fonctions circulaires ou hyperboliques.

La question est donc de passer en revue les diverses relations envisagées et d'examiner si l'on y retrouve ces deux circonstances. Ceci est d'abord le cas en Ire pour le fa-pentagone droit que l'on a appris à construire connaissant deux côtés consécutifs et dont un troisième côté x a une valeur positive et une seule définie, suivant que la relation est de la forme (46) ou (47), par $\mathrm{th}\,x$ ou $\mathrm{ch}\,x$.

Considérons ensuite en Ire et en IIe, un fa-rectangle dont les éléments se rangent dans l'ordre b, c, B, c', b'; si l'on se donne les deux bases b, b', la construction est immédiate, c'est celle qui a conduit à la notion de fa-pentagone droit; et qui, suivant les valeurs de b et b' donne un fa-rectangle ou un fa-pentagone droit, si l'on se donne une base b, et le côté adjacent c, la construction se fait en portant sur les fa-droites côtés d'un angle droit DAB les fa-longueurs $[AD] = b$, $[AB] = c$, puis menant Dx perpendiculaire en D à [AD] et abaissant de B la perpendiculaire [BE] à Dx; si enfin les données sont l'angle non droit B et un côté $c = [BA]$ de cet angle, la construction est tout aussi immédiate, c'est celle qui a conduit à la notion de fa-rectangle et qui suivant les valeurs de B et c donne un fa-triangle rectangle ou un fa-rectangle.

De même avec un fa-triangle rectangle BAC, d'éléments successifs c, B, a, C, b, si l'on se donne un angle B et le côté adjacent c (ou C et b), la construction est celle que nous venons de rappeler; elle est aussi immédiate si l'on se donne les deux côtés b, c de l'angle droit; et enfin si les données sont l'hypoténuse $a = [BC]$ et un angle B, elle se réduit à placer cet angle B, porter $[BC] = a$ sur l'un des côtés de cet angle et abaisser de C la perpendiculaire [CA] sur l'autre côté.

Cette première circonstance ainsi établie sans réserve aucune, il reste à examiner la seconde, la détermination unique par la relation envisagée du troisième élément x : celle-ci est immédiate en I^re^ où tout fa-côté est bien défini par une valeur positive de l'une quelconque de ses trois fonctions hyperboliques, alors que tout angle non droit d'un fa-triangle rectangle ou d'un fa-rectangle, étant alors aigu, l'est aussi par l'une quelconque de ses trois fonctions circulaires ; il en est de même en II^e^ si l'on considère seulement des fa-triangles rectangles à éléments tous aigus et des fa-rectangles à angle saillant dont les quatre côtés sont aigus et dont l'angle B, compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, est encore bien défini par l'une quelconque des trois fonctions $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$, en observant que les deux dernières sont alors négatives.

Mais certaines réserves sont à observer et les trois fonctions ne jouent plus le même rôle si, toujours en II^e^, on considère des fa-triangles rectangles et des fa-rectangles quelconques, à éléments aigus ou obtus, à angle saillant ou rentrant. Si la relation envisagée est d'abord du type (49) où x est alors un terme extrême d'un groupe de trois éléments consécutifs, il est donné et défini par $T(x)$, donc dans tous les cas (51^1) et (51^2) par $\operatorname{tg} x$, et la relation a le caractère suffisant. Si la relation est du type (50) où les seuls éléments consécutifs sont r, s, elle donne x par $C(x)$, donc suivant les cas par $\cos x$ ou $\sin x$; lorsque x est un côté, il est donc bien défini dans le premier cas (51^1) et l'est aussi dans le second (51^2) s'il s'agit d'un fa-rectangle, x étant alors aigu comme côté de l'angle non droit, mais il ne l'est plus s'il s'agit d'un fa-triangle rectangle, ce qui fait ainsi réserver la relation entre un côté x d'un fa-triangle rectangle et les deux éléments opposés, l'angle opposé et l'hypoténuse ; lorsque x est un angle, $C(x)$ égal au signe près à $\cos x$ (51^3), (51^4), définit bien encore x s'il s'agit d'un angle aigu ou obtus, d'un fa-triangle rectangle mais non plus si x est l'angle non droit d'un fa-rectangle, une valeur de $\cos x$ répondant alors à deux angles compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ l'un saillant, l'autre rentrant de somme égale à 2π ; ceci fait donc réserver la relation, dans le fa-rectangle entre l'angle B et les deux bases b, b', éléments opposés à cet angle.

En résumé, *toutes les dix relations générales entre trois éléments d'un fa-triangle rectangle, d'un fa-rectangle, ou d'un fa-pentagone droit, ont en* I^re^ *le caractère suffisant et il en est de même en* II^e^ *en se limitant au fa-triangle rectangle à éléments tous aigus, et au fa-rectangle à angle saillant* ; *en* II^e^, *avec un fa-triangle rectangle ou un fa-rectangle quelconque, les seules de ces dix relations n'ayant pas le caractère suffisant sont les deux relations entre un côté, l'angle opposé et l'hypoténuse d'un fa-triangle rectangle et celle entre l'angle non droit et les deux bases d'un fa-rectangle.* Il y a lieu d'observer que cette dernière conclusion n'est valable qu'en raison du caractère essentiel des deux côtés c, c' de l'angle non droit d'être inférieurs à $\frac{\pi}{2}$.

71. Systèmes suffisants de relations entre les cinq éléments. — Toutes les considérations précédentes concernent seulement trois éléments et non tous les cinq de l'un des trois fa-polygones étudiés. Il y aurait donc lieu de rechercher si entre les dix relations établies on peut en séparer certaines qui, exprimant déjà comme on sait des conditions nécessaires pour que cinq éléments soient ceux d'un fa-polygone correspondant, expriment aussi des conditions suffisantes et sont donc telles que si elles sont vérifiées par cinq éléments donnés *a priori* il existe un fa-polygone admettant ces cinq éléments. Sans entrer dans cette recherche, que pourra traiter le lecteur, nous ne ferons que signaler certains systèmes simples qui répondent immédiatement à la question.

Étant donné le caractère suffisant de certaines des dix relations, il suffira d'envisager une première relation qui, à partir de deux éléments consécutifs quelconques p, q, en détermine un troisième x, puis une seconde qui, à partir soit de p et q, soit plus généralement de deux des éléments p, q, x pourvu qu'ils soient consécutifs, en détermine un quatrième y, et enfin une troisième relation déterminant le cinquième élément z en fonction soit de p, q, soit de deux éléments consécutifs choisis entre p, q, x, y : un tel système de trois relations possède bien le caractère suffisant car si cinq éléments quelconques, donnés *a priori*, satisfont à ces trois relations, il existe un fa-polygone et un seul qui admet d'après la première, les trois éléments donnés p, q, x, puis aussi d'après la seconde l'élément y et d'après la troisième l'élément z. On peut donc dire d'une manière générale que *les conditions nécessaires et suffisantes pour que cinq éléments quelconques appartiennent à un même fa-triangle rectangle, un même fa-rectangle, un même fa-pentagone droit peuvent s'exprimer par trois relations, convenablement choisies, entre les dix relations générales reliant trois par trois ces cinq éléments.*

Par exemple, dans un fa-triangle rectangle, en s'inspirant des premières relations qui ont été établies entre ses éléments, on peut choisir comme éléments consécutifs initiaux p, q, un angle B et le côté adjacent c, comme relations celles qui donnent successivement l'hypoténuse a en fonction de c et B (32), le second angle C en fonction de a et B (34), et le dernier côté b en fonction de a et C, soit le système de trois relations,

$$(52) \qquad \operatorname{tj} c = \operatorname{tj} a \cos B, \qquad \operatorname{cj} a = \frac{1}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}, \qquad \operatorname{tj} b = \operatorname{tj} a \cos C.$$

De même avec un fa-rectangle, chosissant pour éléments initiaux par analogie avec les précédents, l'angle non droit B et l'un de ses côtés c, les trois relations pourront être celles qui donnent successivement le second côté c', puis la base b en fonction de B et c, et enfin la seconde base b' en fonction de c et B, soit les trois relations établies directement au paragraphe 63 :

$$(52') \qquad \cos B = j \operatorname{tj} c \operatorname{tj} c', \qquad \operatorname{tg} B = \frac{j}{\operatorname{tj} b \operatorname{sj} c}, \qquad \operatorname{tg} B = \frac{j}{\operatorname{tj} b' \operatorname{sj} c'}.$$

72. Une première application de ce caractère suffisant d'un système de trois relations est que toute autre relation générale entre trois éléments est nécessairement une conséquence des trois premières, étant vérifiée par toute solution de celles-ci. Elle peut donc se déduire de ce premier système et en le vérifiant on rencontre non seulement une grande variété d'exercices de calcul, mais encore un nouveau procédé permettant d'établir les diverses relations entre trois éléments, une fois acquises trois d'entre elles, convenablement choisies, et, par exemple, les relations (52) ou (52′) qui viennent d'être rappelées; les calculs restent encore rationnels mais peuvent comporter, contrairement à ceux du paragraphe 57, des additions et des soustractions et à ce titre utiliseront non seulement la relation monome entre les trois fonctions $\mathrm{sj}\,x$, $\mathrm{cj}\,x$, $\mathrm{tj}\,x$, mais aussi les relations entre les carrés de deux quelconques d'entre elles (27), (27′), (27″).

Opérant, par exemple, avec un fa-triangle rectangle sur le système établi plus haut (52), on peut entre les deux premières relations où ne figure pas b, éliminer soit a, soit B. En choisissant d'abord B, on obtient successivement d'après (27′) :

$$\frac{1}{\cos B} = \frac{\mathrm{tj}\,a}{\mathrm{tj}\,c}, \qquad \operatorname{tg} B = \frac{1}{\mathrm{cj}\,a \operatorname{tg} C}, \qquad \frac{\mathrm{tj}^2 a}{\mathrm{tj}^2 c} - \frac{1}{\mathrm{cj}^2 a \operatorname{tg}^2 C} = 1,$$

$$\mathrm{sj}^2 a \operatorname{tg}^2 C - \mathrm{tj}^2 c = \mathrm{tj}^2 c\, \mathrm{cj}^2 a \operatorname{tg}^2 C;$$

cette relation, où ne figurent que des carrés peut se mettre sous diverses formes en donnant pour l'un quelconque x des trois éléments a, c, C et l'un quelconque des trois carrés $\mathrm{cj}^2 x$, $\mathrm{sj}^2 x$, $\mathrm{tj}^2 x$ une expression rationnelle en fonction des deux autres, cela en utilisant toujours les formules (27), (27′), (27″). Sans reproduier les trois essais qui doivent tous être tentés, on constate que l'une des expressions obtenues est un carré parfait : c'est ici le cas pour $\mathrm{sj}^2 a$, la relation s'écrivant en effet successivement :

$$\mathrm{sj}^2 a \operatorname{tg}^2 C - \mathrm{tj}^2 c = (1 + j\,\mathrm{sj}^2 a)\, \mathrm{tj}^2 c \operatorname{tj}^2 C, \qquad \mathrm{sj}^2 a \operatorname{tg}^2 C (1 - j\,\mathrm{tj}^2 c) = \mathrm{tj}^2 c (1 + \operatorname{tg}^2 C),$$

$$\mathrm{sj}^2 a \operatorname{tg}^2 C \frac{1}{\mathrm{cj}^2 c} = \mathrm{tj}^2 c \frac{1}{\cos^2 C}, \qquad \mathrm{sj}^2 a \sin^2 C = \mathrm{sj}^2 c$$

et comme les trois sinus sont toujours positifs, on retrouve ainsi la relation (33),

$$\mathrm{sj}\,a \sin C = \mathrm{sj}\,c,$$

puis on obtient de même, le système (52) ne changeant pas en échangeant c et C avec b et B, la relation analogue entre b, a, B.

Ayant ainsi retrouvé les formules (32), (33), (34) du paragraphe 56, les calculs, sans addition ni soustraction, du paragraphe 57 s'appliquent, et l'on déduit bien ainsi, des trois relations (52) seulement, les sept autres relations générales entre trois éléments.

Le procédé est identiquement le même, dans un fa-rectangle avec les relations (52′).

Une application naturelle de ce caractère suffisant concerne le problème de la *résolution de l'un des trois fa-polygones* qui consiste dans le calcul des trois éléments inconnus connaissant les deux autres et qui se ramène, à l'aide d'un système suffisant formé par trois des relations générales, à la résolution et la discussion d'un système de trois équations à trois inconnues.

Mais auparavant nous traiterons une autre application qui nous permettra d'approfondir les caractères des Géométries non euclidiennes et des fonctions hyperboliques.

(*à suivre*).

ERRATA A LA PREMIÈRE PARTIE

Page 95, ligne 8, *au lieu de* π, *lire* $\frac{\pi}{2}$.

« 105, ligne 16, *intercaler* δ *entre* ω *et* un.

« 106, ligne 21, *supprimer* δ_1.

« 110, ligne 6, *au lieu de* A_1, *lire* A; ligne 9, *au lieu de* A_0 *lire* A_1.

« 115, aux deux dernières lignes, *au lieu de* δ', lire δ.