

BULLETIN DE LA S. M. F.

R. DESCOMBES

**Étude diophantienne de certaines formes
linéaires non homogènes**

Bulletin de la S. M. F., tome 82 (1954), p. 197-299

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1954__82__197_0

© Bulletin de la S. M. F., 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DIOPHANTINNE DE CERTAINES FORMES LINÉAIRES NON HOMOGÈNES

LIÉE AU PROBLÈME DE L'APPROXIMATION DES NOMBRES RÉELS
PAR DES FRACTIONS SATISFAISANT A DES CONDITIONS DE CONGRUENCE;

PAR R. DESCOMBES.

Introduction.

Cette thèse est, dans son ensemble, liée à la remarque de l'équivalence du problème de l'approximation d'un nombre réel par des fractions dont le numérateur et le dénominateur appartiennent à deux progressions arithmétiques de même raison ⁽¹⁾, avec la question des valeurs minimales du produit de certains couples de formes linéaires non homogènes à deux variables entières ⁽²⁾.

On sait, grâce aux travaux de Minkowski ⁽³⁾, que le minimum du produit de deux telles formes ne peut dépasser en valeur absolue le quart du déterminant des coefficients des variables, supposé non nul. Plus précisément, si ξ est un nombre irrationnel, et ρ un nombre réel tel que $q\xi - p - \rho = 0$ n'ait aucune solution en p , q entiers, Minkowski ⁽³⁾ a montré que la limite inférieure $\lim_{p,q} |q(q\xi - p - \rho)|$, où p et q prennent toutes les valeurs entières ($q \neq 0$), n'est jamais supérieure à $\frac{1}{4}$. En spécifiant la valeur de ξ , divers auteurs ⁽⁴⁾ ont obtenu pour la limite inférieure en question des bornes supérieures plus petites que $\frac{1}{4}$ et valables pour tout

⁽¹⁾ L'étude de cette question nous a été suggérée, à M. G. Poitou et à moi-même, par une Note de M. S. HARTMAN, intitulée : *Sur une condition supplémentaire dans les approximations diophantiques* (*Colloquium Math.*, II, t. 1, 1951, p. 48).

⁽²⁾ Le rapport entre ces deux questions a été signalé simultanément par M. J. F. KOKSMA : *Sur l'approximation des nombres irrationnels sous une condition supplémentaire* (*Simon Stevin*, t. 4, 1951, p. 199).

⁽³⁾ MINKOWSKI, *Diophantische Approximationen*. Cf. aussi : *Généralisation de la théorie des fractions continues*. (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 13, 1896, p. 41).

⁽⁴⁾ Citons, en particulier :

DAVENPORT, *Non Homogeneous binary quadratic forms*, I, II, III et IV, (*Ned. Akad. Wet. Proc.*, t. 49, 1946, p. 815; t. 50, 1947, p. 378, 484, 741 et 909).

VARNAVIDES, *Non homogeneous binary quadratic forms* (*Ibid.*, t. 51, 1948, p. 396 et 470); *On the quadratic form $x^2 - 7y^2$* (*Proc. Roy. Soc.*, London, t. 197, 1949, p. 256).

BARNES et SWINNERTON-DYER, *The inhomogeneous minima of binary quadratic forms* (*Acta Math.*, t. 89, 1952, p. 259).

nombre ρ satisfaisant à la condition précédente. Au contraire, l'étude du maximum de $\lim_{p,q} |q(q\xi - p - \rho)|$ lorsque ξ varie, ρ restant fixe, n'a été abordée, à ma connaissance, que dans le cas où ρ est égal à $\frac{1}{2}$. Grace ⁽⁵⁾, en 1918, a montré dans ce cas que ce maximum est précisément égal à la borne générale $\frac{1}{4}$ de Minkowski.

Dans le cas où ρ est un *rationnel non entier* arbitrairement fixé, noté $\frac{t}{s}$ (t, s , entiers premiers entre eux, $s \geq 2$), en posant

$$u = ps + t, \quad v = qs,$$

on ramène l'étude de $\lim_{p,q} |q(q\xi - p - \frac{t}{s})|$ à celle de l'approximation de ξ par des fractions $\frac{u}{v}$ telles que $u \equiv t, v \equiv 0 \pmod{s}$. Le chapitre II du présent travail ⁽⁶⁾ a pour objet l'étude directe, et apparemment plus générale, de l'approximation des irrationnels ξ par des fractions $\frac{u}{v}$ telles que

$$(1) \quad u \equiv a, \quad v \equiv b \pmod{s},$$

où s, a, b sont des entiers qu'on peut supposer premiers entre eux dans leur ensemble, avec $s \geq 2$. Or, on peut montrer que l'ensemble des valeurs, lorsque l'irrationnel ξ varie, de

$$H(\xi; s, a, b) = \lim_{u,v} |v(\nu\xi - u)|$$

[u, v , entiers quelconques satisfaisant à (1)], est globalement invariant lorsque a et b varient, s restant fixe, et s, a, b premiers entre eux dans leur ensemble, comme il arrive dans le cas $a = t, b = 0$ évoqué ci-dessus. Le maximum de $H(\xi; s, a, b)$ dans les hypothèses précédentes ne dépend donc que de s , soit $H(s)$. Sa détermination équivaut à celle du maximum de $\lim_{p,q} |q(q\xi - p - \frac{t}{s})|$, soit $G(\frac{t}{s}) = \frac{H(s)}{s^2}$, qui ne peut être supérieur à la borne $\frac{1}{4}$ de Minkowski, atteinte d'après Grace pour $s = 2$. La valeur de $G(\frac{t}{s})$ est donnée en fonction de s à la fin du chapitre II; j'ai pu établir également que $G(\frac{t}{s})$ est, dans le seul cas où s est impair, une valeur isolée dans l'ensemble des valeurs de $\lim_{p,q} |q(q\xi - p - \frac{t}{s})|$ lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels.

La méthode utilisée pour déterminer $H(s)$ s'inspire du Mémoire déjà cité de M. S. Hartman. Elle consiste à choisir en liaison avec le développement de ξ en fraction continue, quelques fractions dites *privilegiées*, qui sont, dans leur ensemble, celles qui approchent le mieux ξ parmi les fractions $\frac{u}{v}$ satisfaisant aux

⁽⁵⁾ GRACE, *Note on a diophantine approximation* (Proc. London Math. Soc., t. 17, 1918, p. 316).

⁽⁶⁾ Les résultats contenus dans ce chapitre ont été résumés dans une Note :

DESCOMBES, *Sur un problème d'approximation non homogène* (C. R. Acad. Sc., t. 236, 1953. p. 1401).

conditions (1). Quoique beaucoup moins maniable qu'un développement en fraction continue, cet algorithme permettrait sans doute de déterminer en plus de $H(s)$, quelques-unes des valeurs suivantes de $H(\xi; s, a, b)$ lorsque $H(s)$ est isolé, c'est-à-dire lorsque s est impair.

On peut enfin remarquer que la connaissance de $H(s)$ ou de $G\left(\frac{t}{s}\right)$, noté indifféremment $G\left(\frac{1}{s}\right)$, entraîne celle du maximum de la limite inférieure du produit de deux formes linéaires non homogènes à coefficients réels $\alpha p + \beta q + \gamma$ et $\alpha' p + \beta' q + \gamma'$, sous réserve que $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\alpha'}{\beta'}$ soient des irrationnels différents, et qu'il existe deux relations linéaires et homogènes

$$\alpha a + \beta b - \gamma s = 0, \quad \alpha' a' + \beta' b' - \gamma' s' = 0$$

où s, a, b sont des entiers supposés premiers entre eux dans leur ensemble, ainsi que s', a', b' , avec $s \geq 2$ et $s' \geq 2$. Dans ces hypothèses, on a

$$\lim_{p, q} |(\alpha p + \beta q + \gamma)(\alpha' p + \beta' q + \gamma')| \leq |\alpha\beta' - \alpha'\beta| \inf \left[G\left(\frac{1}{s}\right), G\left(\frac{1}{s'}\right) \right],$$

le second membre ne pouvant être diminué sans que cette inégalité cesse d'être valable pour quelques couples de formes linéaires en question. Ainsi se trouve résolu de façon précise un cas particulier notable du problème abordé par Minkowski.

Le remplacement de $\frac{u}{v}$ par $\frac{-u}{-v}$ lorsque, par exemple, v est négatif montre que l'étude de l'approximation de ξ par des fractions $\frac{u}{v}$ satisfaisant aux conditions (1) est aussi celle de l'approximation de ξ par des fractions dont les deux termes appartiennent à l'un ou l'autre de deux couples de progressions arithmétiques de même raison s , indéfinies dans un seul sens. Le troisième chapitre (7) aborde, par la même méthode que le précédent, l'étude de l'approximation des irrationnels par des fractions $\frac{u}{v}$ dont les deux termes appartiennent chacun à une progression arithmétique au lieu de deux, indéfinie dans un seul sens tel que v soit positif, par exemple, et de raison s . Ce problème a été envisagé par M. S. Hartman (8) qui a donné la majoration $\lim_{u, v} |v(\nu\xi - u)| < 2s^2$ (u, v entiers quelconques tels que $u \equiv a, v \equiv b, \text{ mod } s, v > 0$) en négligeant l'hypothèse : s, a, b premiers entre eux dans leur ensemble. En conservant cette hypothèse qui écarte les cas triviaux, on peut encore montrer que l'ensemble des valeurs de

$$K(\xi; s, a, b) = \lim_{u, v} |v(\nu\xi - u)| \quad (v > 0)$$

est globalement invariant lorsque a et b varient, s restant fixe. Du maximum $K(s)$

(7) Cf. POITOU et DESCOMBES, *Sur certains problèmes d'approximation* (C. R. Acad. Sc., t. 234, 1952, p. 581 et 1522).

(8) HARTMAN, *loc. cit*

de cet ensemble, on déduit comme précédemment le maximum $\frac{K(s)}{s^2}$ de la limite inférieure $\lim_{p,q} \left| q \left(q\xi - p - \frac{t}{s} \right) \right|$ (p, q entiers quelconques, $q > 0$) lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels. Sans avoir jusqu'ici déterminé pour tout s la valeur exacte de ce maximum, j'ai pu l'encadrer entre les bornes $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{4}$ (cette dernière atteinte pour $s=2$), donner aussi sa valeur exacte et montrer qu'il est isolé pour toutes les valeurs entières de $s=3$ à $s=10$, et citer une infinité de valeurs de s pour lesquelles il est supérieur à $\frac{1}{3}$. Ces bornes sont à rapprocher d'un résultat récent de M. A. J. Cole ⁽⁹⁾ améliorant une majoration de Khintchine, et qui assigne à $\lim_{p,q} |q(q\xi - p - \rho)|$ ($q > 0$) la borne supérieure $\frac{3}{1+2\sqrt{10}} = 0,409 \dots$ valable pour tout irrationnel ξ et tout nombre réel ρ tel que $q\xi - p - \rho = 0$ n'ait pas de solutions en p, q entiers. La valeur

$$\lim_{p,q} \left| q \left(q\xi_0 - p - \frac{t}{10} \right) \right| = \frac{37}{10\sqrt{110}} = 0,3528 \dots$$

que j'ai obtenue pour les irrationnels ξ_0 « critiques » dans le cas $s=10$ semble être, en outre, la plus grande valeur actuellement connue ⁽⁹⁾ de $\lim_{p,q} |q(q\xi - p - \rho)|$ ($q > 0$), que ρ soit rationnel ou non.

Supposons de nouveau que q peut prendre un signe quelconque ($q \neq 0$). Dans les cas où $\rho = \frac{1}{2}$ ou $\rho = \frac{1}{3}$, et aussi dans le cas $\rho = \frac{1}{4}$, l'étude de la limite inférieure $\lim_{p,q} |q(q\xi - p - \rho)|$ équivaut, grâce à une transformation simple, à celle de l'approximation des irrationnels par des fractions à dénominateur impair, ou non divisible par 3. Un autre problème se présente donc, abordé dans le premier chapitre ⁽¹⁰⁾ et qui consiste, d'une manière plus générale, en l'étude de l'approximation des irrationnels par des fractions dont le dénominateur n'est pas divisible par un entier donné s ($s \geq 2$), et appelées ici *s-fractions*. Ce problème, très voisin de celui de l'approximation des irrationnels par des rationnels quelconques, n'a été, à ma connaissance, envisagé jusqu'ici que dans le cas le plus simple, $s=2$, par divers auteurs ⁽¹¹⁾ dont les résultats sont équivalents à celui de Grace déjà

⁽⁹⁾ A. J. COLE, *A problem of diophantine approximation* (Ned. Akad. Wet. Proc. t. 56, 1953, p. 144).

Pendant les travaux d'impression du présent mémoire, J. W. S. CASSELS vient d'établir, dans un article intitulé *Ueber $\lim x | \theta x + \alpha - y |$* (*Math. Ann.*, t. 127, 1954, p. 288), que la meilleure borne possible pour $\lim |q(q\xi - p - \rho)|$ ($q > 0$) est exactement $\frac{27}{28\sqrt{7}} = 0,3644 \dots$ et est obtenue, pour ρ rationnel, dans le cas $s=14$.

⁽¹⁰⁾ Cf. DESCOMBES, *Sur un théorème classique d'Hurwitz* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1460).

⁽¹¹⁾ ROBINSON, *The approximation of irrational numbers by fractions with odd or even terms* (*Duke Math. J.*, t. 7, 1940, p. 354); SCOTT, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 46, 1940, p. 124; KUIPERS et MEULENBELD, *Acta Math.*, t. 87, 1952, p. 1.

cité, et qui peut s'exprimer ici : lorsque l'irrationnel ξ varie, le maximum de $\lim_{p,q} |q(q\xi - p)|$ (q impair), est égal à $\frac{1}{2}$. Une démonstration très simple m'a permis d'établir que pour $s \geq 3$ le maximum analogue vaut $\frac{1}{\sqrt{5}}$; cette valeur est précisément la même que celle qui intervient dans le théorème classique d'Hurwitz ⁽¹²⁾ qu'on peut alors énoncer : pour tout irrationnel ξ , il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $|q(q\xi - p)| < \frac{1}{\sqrt{5}}$, et que q ne soit pas divisible par un entier $s \geq 3$ arbitrairement fixé.

Dans le cas de l'approximation des irrationnels par des rationnels quelconques, on sait que l'ensemble des valeurs de $\overline{\lim}_{p,q} \frac{1}{|q(q\xi - p)|}$ (p, q entiers quelconques, $q \neq 0$), présente, à partir de son minimum $\sqrt{5}$ une infinité de valeurs isolées croissantes $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \frac{\sqrt{221}}{5}, \dots$ que Markoff ⁽¹³⁾ a déterminées, ainsi que leur limite 3, et qui correspondent à des nombres ξ quadratiques. Pour obtenir des résultats de cette nature, concernant l'ensemble des valeurs de $c(\xi; s) = \overline{\lim}_{p,q} \frac{1}{|q(q\xi - p)|}$ (p, q entiers quelconques $q \not\equiv 0 \pmod{s}$), j'ai utilisé un algorithme très voisin de celui des fractions continues, en définissant des *s-réduites* qui jouent, parmi les *s-fractions*, pour l'irrationnel ξ qu'elles approchent le rôle des réduites ordinaires parmi l'ensemble des rationnels. On peut ranger les *s-réduites* de ξ , dans l'ordre croissant de leurs dénominateurs, en une suite où deux *s-réduites* consécutives sont toujours adjacentes. Cette propriété, qui est liée à l'existence d'un entier non divisible par s et diffère de moins 1 de tout irrationnel donné, rend l'algorithme ainsi défini aussi maniable que celui des fractions continues ordinaires. J'ai pu ainsi établir que pour $s = 2$, la borne inférieure $C(2) = 2$ des $c(\xi; 2)$ n'est pas isolée dans l'ensemble des $c(\xi; 2)$ tandis que pour $s \geq 3$, l'ensemble des $c(\xi; s)$ ne prend aucune valeur entre $C(s) = \sqrt{5}$ et $2,34$, sauf si $s = 5$, où cet ensemble prend, en outre, la valeur isolée $\frac{2\sqrt{65}}{7} = 2,30 \dots$ et si $s = 13$, où il prend la valeur isolée $\frac{\sqrt{442}}{9} = 2,33 \dots$. D'une manière plus précise, j'ai pu déterminer, pour tout $s \geq 2$, l'ensemble des valeurs de $c(\xi; s)$ entre sa borne inférieure $C(s)$ et sa plus petite valeur d'accumulation $\Gamma(s)$. On a $C(2) = \Gamma(2) = 2$. Pour $s \geq 3$, la borne $C(s) = \sqrt{5}$ est indépendante de s , mais il n'en est pas de même de $\Gamma(s)$; deux cas doivent être distingués, suivant la parité du plus petit indice $j(s) > 0$, des termes u_k divisibles par s dans la suite de Fibonacci. Si $j(s)$ est pair, $\Gamma(s) = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$ quel que soit s , et $c(\xi; s)$ ne prend aucune valeur entre $\sqrt{5}$ et $1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$; si $j(s)$ est impair, $\Gamma(s)$ dépend de la valeur de $j(s)$, et de plus $c(\xi; s)$

⁽¹²⁾ HURWITZ, *Ueber die angenäherte Darstellung des Irrationalzahlen durch rationale Brüche* (*Math. Ann.*, t. 15, 1889, p. 279).

⁽¹³⁾ MARKOFF, *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, I et II* (*Math. Ann.*, t. 15, 1879, p. 381 et t. 17, 1880, p. 379).

prend entre $\sqrt{5}$ et $\Gamma(s)$ une infinité de valeurs isolées, qui dépendent aussi de $j(s)$, en fait dans des limites très étroites, puisque, à part les trois valeurs signalées plus haut, les valeurs de $c(\xi; s)$ inférieures ou égales à $\Gamma(s)$ sont comprises entre $2,34$ et $1 + \frac{3}{\sqrt{5}} = 2,3416 \dots$

Je suis heureux de pouvoir assurer ici de ma vive reconnaissance M. A. Châtelet dont la grande compétence et la bienveillance m'ont été précieuses. Je le remercie également, ainsi que M. G. Valiron et M. P. Dubreil d'avoir bien voulu constituer le jury de cette Thèse. Je tiens à exprimer aussi ma gratitude à M. Ch. Pisot dont les conseils, et les encouragements m'ont été d'un grand secours. Qu'il me soit permis enfin d'adresser une amicale pensée à M. G. Poitou dont la collaboration a été décisive pour ces recherches.

I. — Approximation des nombres réels par des s -fractions.

Nous appellerons, par définition, s -fraction toute fraction réelle $\frac{p}{q}$ dont le dénominateur n'est pas divisible par un entier donné s que nous supposerons toujours *au moins égal* à 2. Comme le problème bien connu de l'approximation d'un nombre réel ξ par des rationnels quelconques, le problème de l'approximation de ξ par des s -fractions est tout à fait banal dans le cas où ξ est rationnel, que ξ , écrit sous forme irréductible, ait un dénominateur divisible ou non par s . Nous rencontrerons d'ailleurs dans la suite le cas où ce dénominateur est divisible par s . Pour simplifier le langage, nous supposerons désormais ξ *irrationnel* sauf mention expresse du contraire.

Notre but est d'étudier, pour $s \geq 2$, l'ensemble des valeurs de

$$c(\xi; s) = \overline{\lim}_{p, q} \frac{1}{|q(q\xi - p)|} \quad [p, q \text{ entiers quelconques, } q \not\equiv 0 \pmod{s}]$$

lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels, et particulièrement d'en déterminer la borne inférieure $C(s)$, la plus petite valeur d'accumulation $\Gamma(s)$, et les valeurs comprises entre $C(s)$ et $\Gamma(s)$.

1. Si l'on pose

$$c(\xi) = \overline{\lim}_{p, q} \frac{1}{|q(q\xi - p)|} \quad (p, q \text{ entiers quelconques, } q \neq 0),$$

il est clair que $c(\xi; s) \leq c(\xi)$. Par suite, $C(s)$ est au plus égal à la borne inférieure des $c(\xi)$, qui vaut $\sqrt{5}$ d'après le théorème classique d'Hurwitz.

En sens inverse, on peut donner facilement une minoration de $C(s)$. A cet effet introduisons la *suite de meilleure approximation* de ξ , c'est-à-dire l'ensemble des réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ (notées avec des majuscules dans la suite de ce chapitre) du développement de ξ en fraction continue, rangées dans l'ordre des $|Q_n \xi - P_n|$ décroissants (n entier positif ou nul quelconque). On sait qu'on a, pour tout n ,

$|P_n Q_{n+1} - P_{n+1} Q_n| = 1$ (nous dirons que deux réduites consécutives dans la suite de meilleure approximation de ξ sont toujours *adjacentes*). Posons :

$$X_{n+1} = -\frac{Q_{n-1}\xi - P_{n-1}}{Q_n\xi - P_n}, \quad Y_{n+1} = -\frac{Q_{n-1}}{Q_n} \quad (n \geq 1);$$

en convenant une fois pour toutes dans ce chapitre d'identifier les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{-p}{-q}$, on peut supposer les Q_n tous positifs; il vient alors :

$$X_{n+1} - Y_{n+1} = \frac{1}{|Q_n(Q_n\xi - P_n)|}, \quad X_{n+1} > 1, \quad -1 < Y_{n+1} < 0$$

[avec l'exception éventuelle $Y_2 = -1$ (14)] et, en désignant par C_{n+1} la différence $X_{n+1} - Y_{n+1}$:

$$c(\xi) = \overline{\lim}_n \frac{1}{|Q_n(Q_n\xi - P_n)|} = \overline{\lim}_n C_{n+1}.$$

Si donc, à partir d'un certain rang, toutes les réduites de ξ sont des s -fractions, on a $c(\xi; s) = c(\xi) \geq \sqrt{s}$. Dans le cas contraire, il existe une infinité de valeurs de n telles que $Q_n \equiv 0 \pmod{s}$. Soit m l'une d'elles. Comme $\frac{P_m}{Q_m}$ et $\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}$ sont adjacentes, Q_{m-1} est premier avec s ; on a donc $Q_{m-1} \not\equiv 0$ et aussi $Q_m - Q_{m-1} \not\equiv 0 \pmod{s}$. Or, considérons les quantités :

$$C_m = \frac{1}{|Q_{m-1}(Q_{m-1}\xi - P_{m-1})|} = \frac{1}{X_{m+1}} - \frac{1}{Y_{m+1}}$$

$$C'_m = \frac{1}{|(Q_m - Q_{m-1})[(Q_m - Q_{m-1})\xi - (P_m - P_{m-1})]|} = \frac{1}{Y_{m+1} + 1} - \frac{1}{X_{m+1} + 1}.$$

C_m est, dans le domaine $X_{m+1} > 1, -1 < Y_{m+1} < 0$, une fonction continue et décroissante de X_{m+1} , continue et croissante de Y_{m+1} : son minimum, qui vaut 1, correspond à X_{m+1} infini et $Y_{m+1} = -1$, et son maximum, infini, correspond à $X_{m+1} = 1$ et $Y_{m+1} = 0$. C'_m varie en sens inverse de $\frac{1}{2}$ à l'infini. Donc, $\sup(C_m, C'_m)$ est toujours au moins égal à la valeur minimum commune que prennent C_m et C'_m lorsque $C_m = C'_m$, c'est-à-dire lorsque $2X_{m+1}Y_{m+1} + X_{m+1} + Y_{m+1} + 1 = 0$. Or, dans ce cas, on a

$$C_m = C'_m = 2 + \frac{1}{X_{m+1}} - \frac{1}{X_{m+1} + 1} > 2$$

Il en résulte que :

Pour tout irrationnel ξ et tout $s (s \geq 2)$, $c(\xi; s) \geq 2$, et par suite :

$$C(s) \geq 2.$$

On peut améliorer cette minoration dans le cas $s \neq 2$. Dans ce cas, en effet, on a aussi, en conservant les mêmes notations, $Q_m \not\equiv 2Q_{m-1} \pmod{s}$. La s -fraction $\frac{P_m - 2P_{m-1}}{Q_m - 2Q_{m-1}}$ donne alors :

$$C''_m = \frac{1}{|(Q_m - 2Q_{m-1})[(Q_m - 2Q_{m-1})\xi - (P_m - 2P_{m-1})]|} = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2X_{m+1} + 1} - \frac{1}{2Y_{m+1} + 1} \right|.$$

(14) Cf. Note (13), p. 206.

Deux comparaisons, entre C_m et C_m'' et entre C_m' et C_m'' , analogues à la comparaison précédente entre C_m et C_m' , montrent que :

— Si $2Y_{m+1} + 1 > 0$,

$$\sup(C_m, C_m'') \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{X_{m+1}} - \frac{1}{2(2X_{m+1} + 1)} > \frac{5}{2} > \sqrt{5};$$

— Si $2Y_{m+1} + 1 < 0$,

$$\sup(C_m', C_m'') \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2(2X_{m+1} + 1)} - \frac{1}{X_{m+1} + 1}.$$

Or, dans l'intervalle $1 < X_{m+1} < +\infty$, $\frac{5}{2} + \frac{1}{2(2X_{m+1} + 1)} - \frac{1}{X_{m+1} + 1}$ est une fonction continue de X_{m+1} , qui croît de $\frac{13}{6}$ à $\frac{5}{2}$, tandis que $2 + \frac{1}{X_{m+1}} - \frac{1}{X_{m+1} + 1}$ est une fonction continue de X_{m+1} , qui décroît de $\frac{5}{2}$ à 2; l'une de ces deux fonctions est donc supérieure à la valeur commune qu'elles prennent pour $X_{m+1}^2 = X_{m+1} + 1$, c'est-à-dire

$$X_{m+1} = \theta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5});$$

cette valeur commune est $\sqrt{5}$. Ainsi, quel que soit la valeur de Y_{m+1} compatible avec $Q_m - 2Q_{m-1} \not\equiv 0 \pmod{s}$ (d'où $Y_{m+1} \not\equiv -\frac{1}{2}$), on a

$$\sup(C_m, C_m', C_m'') \geq \sqrt{5} \quad \text{et même} \quad \sup(C_m', C_m', C_m'') > \sqrt{5},$$

car l'égalité ne pourrait avoir lieu que pour une valeur irrationnelle de Y_{m+1} qui est essentiellement rationnel. Il en résulte que :

Pour tout irrationnel ξ et tout $s \geq 3$, $c(\xi; s) \geq \sqrt{5}$; par suite $C(s) \geq \sqrt{5}$. On a donc établi le

THÉOREME 1. — *Pour tout s au moins égal à 3, $C(s) = \sqrt{5}$.*

Remarque. — Ce résultat peut encore s'exprimer ainsi : si petit que soit $\varepsilon > 0$, pour tout irrationnel ξ il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que

$$|q(q\xi - p)| < \frac{1}{\sqrt{5}} + \varepsilon, \quad \text{avec} \quad q \not\equiv 0 \pmod{s}$$

pourvu que l'entier s soit au moins égal à 3. La démonstration qui en a été donnée prouve aussi que ce résultat reste valable pour $\varepsilon = 0$.

Le théorème classique d'Hurwitz est ainsi amélioré par la condition supplémentaire : $q \not\equiv 0 \pmod{s}$ (s entier quelconque fixe, au moins égal à 3).

2. Dans la théorie classique de l'approximation des irrationnels par des rationnels quelconques, on est conduit à répartir les irrationnels en classes d'équivalence dont une propriété est que $c(\xi)$ prend la même valeur pour tous

les nombres ξ d'une même classe. Nous dirons ici que deux irrationnels ξ et ξ' sont, par définition, *équivalents* (pour le problème de leur approximation par des *s-fractions*) lorsqu'on a $\xi = \frac{A\xi' + B}{C\xi' + D}$, où la substitution linéaire $p \rightarrow p'$, $q \rightarrow q'$ définie par $p = Ap' + Bq'$, $q = Cp' + Dq'$ associe biunivoquement tout couple d'entiers p, q avec $q \not\equiv 0 \pmod{s}$ et tout couple d'entiers p', q' avec $q' \not\equiv 0 \pmod{s}$.

Les coefficients A, B, C, D doivent donc être entiers et tels que $|AD - BC| = 1$. De plus, si l'on a $C \not\equiv 0 \pmod{s}$ le couple $q' = C$, $p' = -D$ est associé à un couple tel que $q \equiv 0 \pmod{s}$, ce qui contredit la définition. Inversement, $C \equiv 0 \pmod{s}$ entraîne $AD \equiv \pm 1$ ce qui implique que q et q' sont simultanément non divisibles par s . Nous désignerons par S toute substitution modulaire linéaire à deux variables ou homographique à une variable à coefficients entiers A, B, C, D telle que $C \equiv 0 \pmod{s}$. Deux nombres équivalents sont donc caractérisés par leur correspondance dans une substitution homographique quelconque du sous-groupe défini par $C \equiv 0 \pmod{s}$ dans le groupe modulaire.

Or, pour deux tels nombres ξ et ξ' ,

$$|q(q\xi - p)| = \left| \frac{Cp' + Dq'}{C\xi' + D} (q'\xi' - p') \right|$$

et par suite,

$$\lim_{p, q} |q(q\xi - p)| = \lim_{p', q'} |q'(q'\xi' - p')|,$$

où p et q , p' et q' prennent toutes les valeurs entières telles que

$$q \not\equiv 0 \quad \text{et} \quad q' \not\equiv 0 \pmod{s},$$

On a donc $c(\xi; s) = c(\xi'; s)$. Le sous-groupe des substitutions S joue pour le problème de l'approximation des irrationnels par des *s-fractions* un rôle analogue à celui du groupe modulaire pour le problème de l'approximation des irrationnels par des rationnels quelconques.

On peut alors introduire une représentation géométrique analogue à celle d'Humbert, classique pour le problème de l'approximation des irrationnels par des rationnels quelconques. A chaque point ayant pour abscisse une *s-fraction* irréductible $\frac{p}{q}$ sur un axe Ox , associons les cercles $\left(\frac{p}{q}\right)_\lambda$ tangents en ce point à Ox , de rayon $\frac{1}{\lambda q^2}$ où λ est une constante donnée, et situés dans un plan donné, considéré comme un plan complexe d'axe réel Ox . Toute substitution homographique S, considérée comme opérant sur ce plan complexe, laisse globalement invariant l'ensemble de ces cercles et transforme la droite $x = \xi$ en un cercle centré sur Ox . Or, dans le cas où $Q_m \equiv 0 \pmod{s}$, envisagé au paragraphe précédent, la substitution de coefficients $P_m, P_{m-1}, Q_m, Q_{m-1}$ est une substitution S qui transforme la droite $x = \xi$ en le cercle coupé diamétralement par l'axe Ox aux points d'abscisses X_{m+1} et Y_{m+1} , et les cercles $\left(\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right)_\lambda$, $\left(\frac{P_m - P_{m-1}}{Q_m - Q_{m-1}}\right)_\lambda$, $\left(\frac{P_m - 2P_{m-1}}{Q_m - 2Q_{m-1}}\right)_\lambda$ en les cercles $\left(\frac{0}{1}\right)_\lambda$, $\left(\frac{-1}{1}\right)_\lambda$ et $\left(\frac{-1}{2}\right)_\lambda$, ce dernier ne pouvant être considéré, comme son homologue dans S, que si $2 \not\equiv 0 \pmod{s}$, c'est-à-dire

si $s \neq 2$. La démonstration du paragraphe 1 revient donc à prouver que tout cercle orthogonal à Ox et rencontrant cet axe en deux points situés de part et d'autre de O , dont l'un a son abscisse comprise entre -1 et 0 , rencontre l'un au moins des deux cercles $\left(\frac{0}{1}\right)_2$ et $\left(\frac{-1}{1}\right)_2$, ce qui est évident, et, dans le cas $s \geq 3$, que ce même cercle rencontre l'un au moins des trois cercles $\left(\frac{0}{1}\right)_{\sqrt{s}}$, $\left(\frac{-1}{1}\right)_{\sqrt{s}}$ et $\left(\frac{-1}{2}\right)_{\sqrt{s}}$ ce que l'on pourrait établir sans peine directement. Cela éclaire le choix des fractions comparées au paragraphe précédent dans les deux cas $s = 2$ et $s \geq 3$.

3. Pour achever la détermination de $C(2)$, et surtout pour étudier de façon plus précise pour toutes les valeurs de s l'ensemble des valeurs de $c(\xi; s)$ lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels, nous allons définir un algorithme qui met en évidence des s -fractions appelées s -réduites de ξ , qui en un certain sens, sont celles qui approchent le mieux l'irrationnel ξ considéré. On sait que toute ⁽¹⁵⁾ réduite $\frac{P}{Q}$ du développement de ξ en fraction continue ordinaire peut être caractérisée par le fait qu'il n'existe aucune fraction $\frac{p}{q}$ telle que simultanément $|q| < |Q|$ et $|q\xi - p| < |Q\xi - P|$. En disant que $\frac{p}{q}$ est *plus simple* que $\frac{P}{Q}$ si $|q| < |Q|$ et *meilleure* (relativement à ξ) que $\frac{P}{Q}$ si $|q\xi - p| < |Q\xi - P|$, une réduite de ξ est donc une fraction telle qu'il n'en existe aucune autre à la fois plus simple et meilleure (relativement à ξ) qu'elle même. D'une manière analogue, nous dirons par définition qu'une s -réduite de ξ est une s -fraction telle qu'il n'existe aucune autre s -fraction à la fois plus simple et meilleure (relativement à ξ) qu'elle même ⁽¹⁶⁾.

Les s -réduites sont donc irréductibles. Tout irrationnel ξ possède une infinité de s -réduites puisque $|q\xi - p|$ peut être rendu arbitrairement petit, q restant non divisible par s (on s'en rend compte immédiatement à l'aide, par exemple, de la méthode des tiroirs de Dirichlet). Comme on ne distingue pas (§ 1) $\frac{P}{Q}$ et $\frac{-P}{-Q}$, les s -réduites de ξ peuvent être rangées en une suite $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}$, où $|q_n \xi - p_n|$

(15) Rappelons les exceptions bien connues qui correspondent à $Q = 0$ et $Q = 1$. Par convention, pour $Q = 0$, seule est prise en considération la *réduite préliminaire* $\frac{1}{0}$, notée traditionnellement $\frac{P_{-1}}{Q_{-1}}$. Pour $Q = 1$, le plus grand entier au plus égal à ξ , soit a_0 , est par définition égal à la réduite $\frac{P_0}{Q_0}$; si $\xi - a_0 < \frac{1}{2}$, on convient qu'aucune autre réduite n'a pour dénominateur 1; sinon, la réduite $\frac{P_1}{Q_1}$ est, par convention, égale à $a_0 + 1$; aucune autre réduite n'a pour dénominateur 1. Ces conventions entraînent la croissance stricte de $|P_n|$ avec $n \geq 3$ (et même $n \geq 0$ si $\xi > 0$) et de Q_n avec $n \geq 1$.

(16) Cette définition doit être complétée, pour les s -réduites de dénominateur 1, par la convention suivante, analogue à celle de la note (15) : on choisit $q_0 = Q_0 = 1$ et $p_0 = P_0 = a_0$; il existe, par convention, une autre s -réduite de dénominateur 1 (et une seule) dans le cas où $Q_1 = 1$: on a alors $q_1 = Q_1$ et $p_1 = P_1$.

décroit strictement (puisque ξ est irrationnel) lorsque l'entier n croît en partant de 0 (17). Les s -réduites ainsi rangées constituent par définition la suite de meilleure s -approximation de ξ . Il résulte de la définition des s -réduites et du classement qui leur est ainsi assigné que $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ est la plus simple des s -fractions meilleures que $\frac{p_n}{q_n}$ (relativement à ξ), et aussi que $|q_{n+1}| \geq |q_n|$. Mais comme pour $n \geq 2$, on a

$$|q_n \xi - p_n| < |q_1 \xi - p_1| < \frac{1}{2},$$

il en résulte que $|q_{n+1}| \neq |q_n|$: donc $|q_n|$ croît strictement avec n , sauf peut-être de $n = 0$ à $n = 1$ (18), comme dans le cas des réduites ordinaires.

Il résulte encore immédiatement de la définition des s -réduites qu'à toute s -fraction $\frac{p}{q}$ on peut associer une s -réduite $\frac{p_n}{q_n}$ telle que

$$|q_n| \leq |q| \quad \text{et} \quad |q_n \xi - p_n| \leq |q \xi - p|.$$

Par conséquent :

THÉOREME A :

$$c(\xi; s) = \overline{\lim}_{p, q} \frac{1}{|q(q\xi - p)|} = \overline{\lim}_n \frac{1}{|q_n(q_n \xi - p_n)|}.$$

Ainsi, $c(\xi; s)$ peut être calculé en se restreignant parmi les couples p, q à ceux qui constituent les s -réduites de ξ .

Montrons maintenant que deux s -réduites consécutives (dans la suite de meilleure s -approximation d'un irrationnel quelconque ξ) sont toujours adjacentes. Pour cela, comparons les suites de meilleure approximation et de meilleure s -approximation d'un même nombre ξ . Deux réduites ordinaires consécutives étant toujours adjacentes, l'une au moins est une s -réduite. D'autre part, deux réduites consécutives qui sont des s -réduites sont des s -réduites consécutives, d'après la définition. Les deux suites envisagées ne diffèrent donc que dans le cas où il existe des réduites qui ne sont pas des s -fractions. Soit, dans ce cas, $\frac{p_m}{q_m}$ l'une d'elles; alors la précédente $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$ est une s -réduite soit $\frac{p_n}{q_n}$, ainsi que la suivante $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$, soit $\frac{p_{n'}}{q_{n'}}$. Cherchons les s -réduites dont les rangs sont compris entre n et n' . Toute fraction $\frac{p}{q}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{a p_m + b p_{m-1}}{a q_m + b q_{m-1}}$, où a et b sont entiers. Avec les notations introduites au paragraphe 1, les fractions $\frac{p}{q}$ meilleures que $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$ et plus simples que $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ sont caractérisées par

$$(1) \quad |b X_{m+1} - a| < X_{m+1}, \quad |b Y_{m+1} - a| < A_{m+1} - Y_{m+1},$$

(17) Cf. pour $n = 0$ et $n = 1$, la note (15).

(18) Cf., la note (15). On déduit de là les mêmes résultats de croissance pour $|p_n|$ et $|q_n|$ que pour $|P_n|$ et Q_n ; cf. note (15).

où A_{m+1} est le *quotient incomplet* de rang $m+1$ dans le développement de ξ en fraction continue, c'est-à-dire la partie entière de X_{m+1} ; on en déduit puisque $X_{m+1} > 1$ et $-1 < Y_{m+1} < 0$ (19) :

$$|b|(X_{m+1} - Y_{m+1}) < X_{m+1} - Y_{m+1} + A_{m+1} \quad \text{et, par suite,} \quad |b| = 1 \quad \text{ou} \quad 0.$$

Or, puisque $Q_{m-1} \not\equiv 0$ et $Q_m \equiv 0 \pmod{s}$, $b = 0$ implique $q \equiv 0$ et $|b| = 1$ implique $q \not\equiv 0 \pmod{s}$. Comme on peut toujours choisir b positif, les s -réduites cherchées correspondent aux solutions en a et b de (1), avec $b = 1$ et, par suite, $0 < a < A_{m+1}$. Le dénominateur q des fractions ainsi obtenues croît avec $a - Y_{m+1}$ tandis que $|q\xi - p|$ décroît avec $X_{m+1} - a$. On obtient donc toutes les s -réduites meilleures que $\frac{P_n}{q_n}$ et plus simples que $\frac{P_n'}{q_n'}$, dans l'ordre croissant de leurs indices, en donnant à a toutes les valeurs entières croissantes, au moins égales à 1 et au plus égales à $A_{m+1} - 1$. Ces s -réduites, qui ne sont pas des réduites ordinaires, sont donc précisément les *réduites intermédiaires* (au sens habituel) entre $\frac{P_m}{Q_m}$ et $\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$; la valeur $a = 0$ correspond à $\frac{P_n}{q_n}$ et la valeur $a = A_{m+1}$ correspond à $\frac{P_n'}{q_n'}$. Or, le déterminant constitué par les termes de deux quelconques mais consécutives de ces fractions vaut en valeur absolue

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (0 \leq a \leq A_{m+1} - 1).$$

Il en résulte que :

Deux s-réduites consécutives sont toujours adjacentes, qu'elles soient ou non identiques à des réduites ordinaires.

En choisissant convenablement les signes des p_n et q_n , on peut donc écrire comme dans le cas des réduites ordinaires

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (a_n \text{ entier, } n \geq 2),$$

ce qui définit, pour les s -réduites, les *s-quotients incomplets* a_n , pour $n \geq 2$. En posant :

$$(2) \quad x_n = -\frac{q_{n-2}\xi - p_{n-2}}{q_{n-1}\xi - p_{n-1}}, \quad y_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}},$$

on a, comme dans le cas des réduites ordinaires

$$(3) \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n}, \quad |x_n| > 1, \quad |y_n| < 1,$$

avec l'exception éventuelle : $|y_2| = 1$. De plus,

La définition des s-réduites se traduit par la condition pour l'entier a_n d'être, parmi les entiers a tels que $|x_n - a| < 1$ et $aq_{n-1} + q_{n-2} \not\equiv 0 \pmod{s}$,

(19) On est assuré ici, d'après la note (16) que $Y_{m+1} \neq -1$, même si $m = 1$.

celui qui rend $|y_n - a|$ minimum. Son unicité pour n donné résulte de celle de $\frac{p_n}{q_n}$, c'est-à-dire de l'irrationalité de ξ . Enfin en posant $c_n = |x_n - y_n|$, on a comme dans le cas des réduites ordinaires

$$c_n = |x_n - y_n| = \frac{1}{|q_{n-1}(q_{n-1}\xi - p_{n-1})|}$$

et, par suite,

$$c(\xi; s) = \overline{\lim}_n c_n.$$

Remarquons encore que si $\frac{p}{q}$ est une réduite intermédiaire entre $\frac{p_m}{q_m}$ et $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$, soit $\frac{a p_m + p_{m+1}}{a q_m + q_{m+1}}$, on a :

$$\begin{aligned} |q(q\xi - p)| &= \frac{(X_{m+1} - a)(a - Y_{m+1})}{X_{m+1} - Y_{m+1}} \\ &> \inf \left[\frac{(X_{m+1} - A_{m+1})(A_{m+1} - Y_{m+1})}{X_{m+1} - Y_{m+1}}, \frac{|X_{m+1} Y_{m+1}|}{X_{m+1} - Y_{m+1}} \right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$|q(q\xi - p)| > \inf[|Q_{m+1}(Q_{m+1}\xi - P_{m+1})|, |Q_{m-1}(Q_{m-1}\xi - P_{m-1})|],$$

de sorte que si $\frac{p_k}{q_k}$ est une s -réduite, mais non une réduite ordinaire, c_{k+1} est inférieur à la plus grande des deux valeurs c_{n+1} et $c_{n'+1}$ qui correspondent aux deux s -réduites $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n'}}{q_{n'}}$ les plus voisines de part et d'autre de $\frac{p_k}{q_k}$ dans la suite de meilleure s -approximation de ξ , et qui soient aussi des réduites ordinaires.

Par suite :

THÉOREME B. — $\overline{\lim}_n c_n$ reste égal à $c(\xi; s)$ si on ne donne à n que les valeurs telles que la s -réduite $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ soit aussi une réduite ordinaire de ξ .

4. Le théorème B permet de montrer que $C(2) = 2$. Considérons, en effet, le nombre ξ dont le développement en fraction continue ordinaire est

$$\xi = (0 \ 2 \ r_1 \ 2 \ r_2 \ \dots \ 2 \ r_k \ 2 \ \dots),$$

où les r_k sont des entiers positifs quelconques. Les réduites ordinaires de ξ qui sont des s -réduites sont celles, notées $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$, telles que $A_m = 2$. En choisissant $\lim r_k = +\infty$, on a pour toutes les valeurs de m en question

$$\lim_m X_m = 2 \quad \text{et} \quad \lim_m Y_m = 0.$$

Par suite, comme on a

$$c(\xi; 2) = \overline{\lim}_m (X_m - Y_m),$$

où m prend toutes les valeurs en question, on en déduit $c(\xi; 2) = 2$.

Il en résulte que $C(2) \leq 2$; puisque, d'après le paragraphe 1, $C(s) \geq 2$, on a donc

THÉORÈME 2 :

$$C(2) = 2.$$

Les nombres ξ *critiques*, c'est-à-dire ceux pour lesquels $c(\xi; 2) = C(2)$ constituent un ensemble infini ayant la puissance du continu. De plus, en donnant à r_k dans l'exemple ci-dessus une valeur r indépendante de k , on obtient un nombre $\xi(r)$ tel que $c[\xi(r); 2] = 2\sqrt{1 + \frac{2}{r^2}}$; en faisant décrire à r un ensemble infini de valeurs croissantes, on obtient donc un ensemble infini de nombres $\xi(r)$ tels que $c[\xi(r); 2]$ tende vers 2 en restant différent de 2. Donc 2 est une valeur d'accumulation pour les $c(\xi; 2)$. Ainsi

THÉORÈME 2 bis :

$$\Gamma(2) = C(2) = 2.$$

Remarque. — Le résultat $C(2) = 2$ peut s'exprimer ainsi : si petit que soit $\varepsilon > 0$, il existe pour tout irrationnel ξ une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $|q(q\xi - p)| < \frac{1}{2} + \varepsilon$, avec q impair. On peut remarquer que ce résultat reste valable avec $\varepsilon = 0$, ce qui découle de la démonstration même donnée au paragraphe 1 de l'inégalité $C(s) \geq 2$,

5. Définissons le développement en *s-fraction continue* d'un nombre irrationnel ξ . En faisant précéder la suite des *s*-quotients incomplets de ξ , qui commence par a_2 , des nombres a_0 , plus grand entier inférieur ou égal à ξ ⁽²⁰⁾ et a_1 égal à la partie entière de $\frac{1}{\xi - a_0}$ si elle n'est pas divisible par s et à cette partie entière augmentée d'une unité dans le cas contraire, on obtient le développement en *s-fraction continue* de ξ , qu'on notera

$$\xi = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n \ \dots).$$

Cette notation identique à celle d'un développement en fonction continue ordinaire est légitimée par le fait que la *s*-réduite $\frac{p_n}{q_n}$ est la fraction calculée de la manière habituelle dans la théorie des fractions continues ordinaires, en arrêtant ce développement au terme a_n inclus. x_n est la limite des fractions calculées à la manière des *s*-réduites après avoir privé ce développement de ses n premiers termes, bien que le développement ainsi obtenu puisse différer de la *s-fraction continue* qui développe l'irrationnel x_n . En effet, le premier terme du développement de x_n en *s-fraction continue* est le plus grand entier au plus égal à x_n , tandis que a_n est égal à la partie entière ⁽²¹⁾ $[x_n]$ de x_n ou à cette partie entière augmentée en valeur absolue d'une unité dans le cas où

$$[x_n]q_{n-1} + q_{n-2} \equiv 0 \pmod{s}.$$

⁽²⁰⁾ Cf. note ⁽¹⁵⁾, p. 206.

⁽²¹⁾ Par *partie entière* d'un nombre x de signe quelconque, nous entendons l'entier a le plus voisin de zéro tel que $|x - a| < 1$.

Il apparaît donc ici une légère différence avec le développement en fraction continue ordinaire : la condition

$$(4) \quad a_n q_{n-1} + q_{n-2} \not\equiv 0 \pmod{s}$$

qui seule distingue les deux développements entraîne que a_n n'est pas, contrairement au cas habituel, entièrement déterminé par x_n .

Pour donner une autre expression de cette condition (4), posons

$$(s, q_{n-1}) = d_{n-1} \quad (0 < d_{n-1} < s),$$

$$q_{n-1} = d_{n-1} \bar{q}_{n-1}, \quad \bar{q}_{n-1} z_n \equiv -q_{n-2} \pmod{\frac{s}{d_{n-1}}}.$$

(u, v) désigne le p. g. c. d. de u et v , et z_n est un entier défini à un multiple près de $\frac{s}{d_{n-1}}$ et dont l'existence résulte de celle d'un inverse de $\bar{q}_{n-1} \pmod{\frac{s}{d_{n-1}}}$. Si $d_{n-1} \neq 1$, la condition (4) est satisfaite quel que soit a_n , car q_{n-2} n'est pas divisible par d_{n-1} puisque deux s -réduites consécutives sont adjacentes. Si $d_{n-1} = 1$, la condition (4) se traduit par

$$(5) \quad a_n \not\equiv z_n \pmod{s} \quad (d_{n-1} = 1).$$

D'autre part $(q_n, d_{n-1}) = 1$ puisque deux s -réduites consécutives sont adjacentes; donc

$$d_n = (s, q_n) = \left(\frac{s}{d_{n-1}}, q_n \right) = \left(\frac{s}{d_{n-1}}, a_n \bar{q}_{n-1} d_{n-1} - \bar{q}_{n-1} z_n \right) = \left(\frac{s}{d_{n-1}}, a_n d_{n-1} - z_n \right).$$

et

$$-\frac{q_{n-1}}{q_n} = -\frac{q_{n-1}}{q_{n-1} \frac{a_n d_{n-1} - z_n}{d_n} + \frac{\lambda s q_{n-1}}{d_{n-1} d_n}} = \frac{-d_{n-1}^2}{d_{n-1} \frac{a_n d_{n-1} - z_n}{d_n} + \frac{\lambda s}{d_n}} \quad (\lambda \text{ entier}),$$

d'où les formules de récurrence

$$(6) \quad d_n = (s, z_n - a_n d_{n-1}); \quad z_{n+1} \equiv \frac{d_n d_{n-1}}{z_n - a_n d_{n-1}} \pmod{\frac{s}{d_n}}.$$

Dans le cas où s est premier, elles se réduisent à

$$(6') \quad d_n = 1; \quad z_{n+1} \equiv \frac{1}{z_n - a_n} \pmod{s}$$

qu'il convient de rapprocher des formules (3) (§ 4).

Ainsi, la donnée de x_n , du diviseur d_{n-1} de s (autre que s) et de la classe de restes $z_n \pmod{\frac{s}{d_{n-1}}}$ détermine entièrement la suite des s -quotients incomplets de ξ à partir de a_n , ainsi, par suite, que $c(\xi; s) = \overline{\lim} c_n$.

Si deux irrationnels ξ et ξ' (pour lequel nous représenterons tous les éléments

introduits par les mêmes lettres que pour ξ , mais accentuées) sont tels qu'à partir d'un certain rang,

$$x_n = \varepsilon x'_m, \quad d_{n-1} = d'_{m-1}, \quad z_n \equiv \varepsilon z'_m \pmod{\frac{s}{d_{n-1}}}, \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

comme on a

$$\xi = \frac{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}x_n + q_{n-2}},$$

avec l'égalité analogue pour ξ' , et $n - m$ constant, on a

$$\xi = \frac{A\xi' + B}{C\xi' + D}$$

où les entiers A, B, C, D sont tels que

$$|AD - BC| = 1$$

et

$$C = q_{n-1}q'_{m-2} - \varepsilon q_{n-2}q'_{m-1} \equiv q_{n-1}q'_{m-1}(d_{n-1}z'_m - \varepsilon d'_{m-1}z_n) \pmod{\frac{s}{d_{n-1}}},$$

c'est-à-dire

$$C \equiv 0 \pmod{s}.$$

ξ et ξ' sont donc *équivalents*, au sens défini au paragraphe 2.

Réciproquement, si deux irrationnels ξ et ξ' sont équivalents, leurs réduites se correspondent à partir d'un certain rang dans la substitution modulaire de coefficients A, B, C, D qui lie ξ et ξ' ; il en va donc de même de leurs réduites intermédiaires et aussi, par suite, de leurs s -réduites puisque $C \equiv 0 \pmod{s}$ assure la correspondance biunivoque, parmi les réduites et les réduites intermédiaires, de celles d'entre elles qui sont des s -fractions. De plus, les dénominateurs de deux s -réduites correspondantes ont avec s le même p. g. c. d. puisque D est premier avec s ; cela entraîne aussi que les classes de restes z_n et z'_m homologues sont égales ou opposées : *les développements de ξ et ξ' en s -fractions continues sont donc constitués à partir d'un certain rang de termes deux à deux constamment identiques ou constamment opposés.*

6. Dans le cas où l'on a $d_{n-1} \neq 1$ ou bien $d_{n-1} = 1$, avec $[x_n] \not\equiv z_n \pmod{s}$, la valeur $a_n = [x_n]$ (où le crochet désigne la partie entière) satisfait à la condition (4) : $[x_n]$ est donc bien le s -quotient incomplet de rang n puisque c'est, parmi les deux entiers a tels que $|x_n - a| < 1$, celui qui rend $|y_n - a|$ minimum, à cause des inégalités $|x_n| > 1$ et $|y_n| < 1$. D'après (3), x_n et x_{n+1} sont alors de même signe ainsi que, par suite, a_n et a_{n+1} . Enfin, $\frac{p_n}{q_n}$ est la plus simple des fractions meilleures que $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$: c'est donc la réduite ordinaire la plus simple parmi celles qui sont meilleures que $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.

Dans le cas complémentaire du précédent, où $d_{n-1} = 1$, avec $[x_n] \equiv z_n \pmod{s}$, on a $a_n \neq [x_n]$ d'après (5) et, par suite, d'après la caractérisation de a_n qu'on vient de rappeler,

$$a_n = [x_n] + 1 \quad \text{si } x_n > 0 \quad \text{et} \quad a_n = [x_n] - 1 \quad \text{si } x_n < 0.$$

x_n et x_{n+1} sont alors de signes opposés, ainsi que, par suite, a_n et a_{n+1} . La variation de signe $a_n a_{n+1} < 0$ caractérise donc le cas où la réduite ordinaire la plus simple parmi celles qui sont meilleures que $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, n'étant pas une s -fraction, est différente de $\frac{p_n}{q_n}$. De plus d'après les formules (6), qui se réduisent dans ce cas à (6'), on a

$$z_{n+1} \equiv \varepsilon = \pm 1 \pmod{s}, \quad \text{avec } \varepsilon a_n < 0;$$

par suite $|a_{n+1}| \neq 1$. D'autre par l'inégalité $|a_n| > |x_n|$ entraîne aussi $|a_n| \neq 1$.

Dans la théorie classique des fractions continues, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une *séquence* (finie) ou une *suite* (infinie) d'entiers non nuls soit constituée de quotients incomplets consécutifs du développement d'un nombre irrationnel, est que ces entiers aient tous le même signe (22). Dans l'algorithme des s -fractions continues, les s -quotients incomplets peuvent au contraire n'être pas tous du même signe, comme on vient de le voir. Mais, de façon analogue aux séquences et aux suite d'entiers présentant, dans le cas classique, des variations de signe, nous rencontrerons ici des séquences et des suites d'entiers, qualifiées *d'interdites*, qui ne pourront être identiques à une séquence ou une suite de s -quotients incomplets consécutifs du développement d'aucun irrationnel en s -fraction continue, avec s fixé. Voici quelques exemples de cette éventualité :

1° On vient de voir que si $|a_n| = 1$ on ne peut avoir $a_n a_{n-1} < 0$ ni $a_n a_{n+1} < 0$, quel que soit s ;

2° Si $a_{n-1} < 0, a_n > 0$ et $a_{n+1} < 0$, alors $d_n = d_{n-1} = 1, z_n \equiv 1$ et $z_{n+1} \equiv -1$, et par suite, $a_n \equiv z_n + 1 \equiv 2 \pmod{s}$ que soit s ;

3° Si $a_n = a_{n+1} = 2, a_{n-1} < 0$ et $a_{n+2} < 0$, alors $d_{n-1} = d_{n+1} = 1, z_n \equiv 1$ et $z_{n+2} \equiv -1$, d'où $d_n = 1$ et $z_{n+1} \equiv 1$; donc comme $z_n - a_n \equiv \frac{1}{z_{n+1}}$, 0 et 2 doivent être congrus modulo s , ce qui implique $s = 2$.

Toute séquence en contradiction avec l'un de ces trois résultats est interdite.

4° Avant de donner un quatrième exemple, remarquons que $\frac{p_n}{q_n}$ n'est pas une réduite ordinaire si et seulement si l'on peut trouver une fraction $\frac{p}{q}$, qu'on peut écrire $\frac{ap_n + bp_{n-1}}{aq_n + bq_{n-1}}$ (a et b entiers), meilleure et plus simple que $\frac{p_n}{q_n}$, c'est-à-dire telle que

$$|bx_{n+1} - a| < 1 \quad \text{et} \quad |by_{n+1} - a| < 1,$$

ce qui implique, puisque $|x_{n+1}| > 1$ et $|y_{n+1}| < 1$,

$$|a| - 1 < |b| < |a| + 1, \quad \text{d'où} \quad |a| = |b|.$$

(22) En supposant au besoin que le premier terme de cette séquence ait un rang assez élevé dans le développement en question. Le signe commun de ces entiers est ici positif à cause des conventions de la Note (15) p. 206, qui ne sont d'ailleurs pas obligatoires.

Ce cas est donc celui où x_{n+1} et y_{n+1} présentent simultanément avec 1 ou -1 des différences moindres que 1 en valeur absolue. La condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{p_n}{q_n}$ ne soit pas une réduite ordinaire est donc que

$$|a_{n+1}| = 2, \quad \text{avec } a_n a_{n+1} < 0 \quad \text{et} \quad a_{n+1} a_{n+2} < 0,$$

d'où

$$z_{n+1} \equiv \varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon a_n < 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon a_{n+2} < 0.$$

Comme dans un développement en s -fraction continue, il n'y a toujours qu'un nombre fini de s -réduites consécutives qui ne sont pas des réduites ordinaires, puisqu'alors ce sont des réduites intermédiaires, la suite infinie composée de nombres alternativement égaux à 2 et à -2 est interdite; elle impliquerait d'ailleurs $x_n = \pm 1$. On vérifie facilement qu'une telle suite correspond à l'application formelle du développement en s -fraction continue à un nombre rationnel irréductible de dénominateur divisible par s . $c_n = |x_n - y_n|$ tend alors vers zéro, comme on pouvait s'y attendre puisqu'un rationnel n'est pas susceptible d'une approximation en $\frac{1}{q^2}$ par des rationnels $\frac{p}{q}$ différents de lui.

Ces quatre exemples donnés, nous ne chercherons pas une liste exhaustive des séquences interdites. Nous vérifierons chaque fois que ce sera nécessaire que les suites et séquences qui interviendront dans ce chapitre ne sont effectivement pas interdites.

7. Nous allons maintenant, en utilisant les développements en s -fraction continue, retrouver la valeur $C(s)$ et déterminer $\Gamma(s)$ pour tout s . Deux cas sont à distinguer : $s = 2$ et $s \geq 3$.

Premier cas : $s = 2$. — La condition de congruence (4) se réduit ici à la suivante : il est nécessaire et suffisant que les s -quotients incomplets soient *pairs* (pour $n \geq 2$). Nous allons retrouver la borne inférieure 2 des $c(\xi; 2)$ en prouvant que pour tout irrationnel ξ il existe une infinité de rangs de son développement en 2-fraction continue tels que $|x_n - y_n| > 2$. C'est évident si ξ possède dans ce développement une infinité de 2-quotients incomplets de module strictement supérieur à 2, car $|a_n| \geq 4$ implique $|x_n| > 3$ et comme $|y_n| < 1$, on a bien $|x_n - y_n| > 2$. Sinon, tous les 2-quotients incomplets sont égaux à 2 ou -2; or on a vu qu'on ne peut avoir, pour tout n à partir d'un certain rang, $a_{n+1} = -a_n = \pm 2$; donc il existe une infinité de rangs n tels que $a_n = a_{n+1} = 2$, par exemple. Posant alors $x_{n+1} = 1 + \alpha$ et $y_{n+1} = -1 + \beta$, on a $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ et

$$x_{n+1} - y_{n+1} = 2 + \alpha - \beta \quad \text{et} \quad x_n - y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}} = 2 + \frac{\beta - \alpha + 2\alpha\beta}{(1 + \alpha)(1 - \beta)},$$

d'où il résulte que l'une au moins de ces deux différences est supérieure à 2. On a donc $\overline{\lim}_n c_n \geq 2$ et, par suite, $C(2) \geq 2$.

Un exemple de nombre ξ tel que $c(\xi; 2) = 2$ a été donné au paragraphe 4. On vérifierait que dans son développement en 2-fraction continue la suite des 2-quotients incomplets est constituée par $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $|a_n| = 2$ ou 4 , avec $a_{n-1}a_n < 0$ ($n \geq 2$), $r_1 + 1$ étant l'indice du premier 2-quotient incomplet égal à 4 en valeur absolue et r_k la différence entre l'indice du $k^{\text{ième}}$ et l'indice du $(k-1)^{\text{ième}}$.

Deuxième cas : $s \geq 3$. — Pour déterminer l'ensemble des valeurs de $c(\xi; s)$ depuis $C(s)$ jusqu'à $\Gamma(s)$ nous procéderons d'une façon analogue à ce qui vient d'être fait pour $s = 2$. Nous qualifierons cette fois d'exclus à Λ près toute séquence de s -quotients incomplets a_n telle que sa présence une infinité de fois dans le développement de ξ en s -fraction continue entraîne l'existence d'une infinité de rangs n tels que $c_n \geq \Lambda$, c'est-à-dire $c(\xi; s) \geq \Lambda$, où Λ est une constante numérique convenablement choisie. D'autre part, les séquences interdites, qui ne sont plus identiques cette fois à celles contenant des termes non divisibles par s , seront aussi qualifiées d'exclus (quel que soit Λ).

Étudions d'abord les développements en s -fraction continue des nombres ξ tels que $c(\xi; s) < \frac{5}{2}$.

Si $|a_n| \geq 5$, ou si $|a_n| = 4$ avec $a_n a_{n-1} > 0$ ou $a_n a_{n+1} > 0$, on a $c_n = |x_n - y_n| > 3$. Mais si $a_n = 4$, il est impossible d'après ce qu'on a vu au paragraphe 6 que a_{n-1} et a_{n+1} soient tous deux négatifs puisque $4 \not\equiv 2 \pmod{s}$; un résultat analogue vaut pour $a_n = -4$.

Si $a_n = 3$ il est de même impossible que a_{n-1} et a_{n+1} soient tous deux du signe de $-a_n$ et s'ils sont tous deux du signe de a_n , on a encore $|x_n - y_n| > 3$.

Supposons $a_{n-1} > 0$ et $a_n = 3$. Posons $x_n = 2 + \alpha$ et $y_n = -\frac{1}{2} + \beta$; d'une manière analogue à ce qu'on a vu au cas $s = 2$, on a $\alpha > 0$, $\beta < \frac{1}{2}$ et

$$x_n - y_n = 2 + \frac{1}{2} + \alpha - \beta \quad \text{et} \quad x_{n-1} - y_{n-1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{4\beta - \frac{\alpha}{4} + \frac{5}{2}\alpha\beta}{(2+\alpha)\left(\frac{1}{2}-\beta\right)},$$

d'où il résulte que l'une au moins de ces deux différences est supérieure à $\frac{5}{2}$.

Supposons enfin $a_{n+1} > 0$ et $a_n = 3$. En posant $x_n = \frac{7}{2} - \beta$ et $y_n = 1 - \alpha$, on a $\alpha > 0$ et $\beta < \frac{1}{2}$, et l'on trouve pour c_n et c_{n+1} les expressions obtenues ci-dessus en fonction de α et β pour c_n et c_{n-1} respectivement; donc

$$\sup(c_n, c_{n+1}) > \frac{5}{2}.$$

Des résultats analogues valent pour $a_n = -3$. Les séquences comportant des s -quotients incomplets supérieurs à 2 en valeur absolue sont donc toutes exclues à $\frac{5}{2}$ près. Or on a vu que les séquences des s -quotients incomplets consé-

cutifs $-2\ 2\ 2\ -2$ et $2\ -2\ -2\ 2$ sont interdites pour $s \neq 2$ ainsi que la suite pour laquelle $a_n = -a_{n+1} = \pm 2$ pour tout n . De plus, on voit aisément que $|a_n| = 2$ avec $a_n a_{n-1} > 0$ et $a_n a_{n+1} > 0$ implique $c_n > \frac{8}{3}$. Rappelons enfin que $a_n = 1$ ne peut être encadré que de s -quotients incomplets positifs. On peut donc énoncer en rassemblant ces résultats :

LEMME 1. — Si $s \geq 3$, $c(\xi; s) < \frac{5}{2}$ implique la présence dans le développement de ξ en s -fraction continue d'une infinité de s -quotients incomplets égaux à 1 en valeur absolue, les autres s -quotients incomplets éventuels étant, à partir d'un certain rang, égaux à ± 2 et encadrés de s -quotients incomplets égaux à ± 1 ou à ∓ 2 (avec correspondance des doubles signes).

Écartons provisoirement les développements dont les termes sont tous égaux à 1 en valeur absolue à partir d'un certain rang. $c(\xi; s) < \frac{5}{2}$ implique alors l'existence dans le développement de ξ d'une infinité d'indices n tels que (en supposant $a_n > 0$) $a_n = 1$, $a_{n+1} = 2$, $a_{n+2} = -2$, avec $a_{n-1} = 1$ ou 2. Considérons ce cas, dans le but d'étudier l'éventualité où plusieurs s -quotients incomplets consécutifs sont égaux à 2 en valeur absolue.

Si $a_{n+3} = 2$, on a $x_n > \frac{12}{7}$. Un calcul analogue à ceux déjà faits ci-dessus montre alors que :

$$\sup(c_n, c_{n-1}) > \frac{12}{7} + \frac{7}{12} > 2,29.$$

Si $a_{n+3} = 2$ et $a_{n+4} = -2$, on a $x_n > \frac{16}{9}$. Distinguons alors deux cas suivant la valeur de a_{n-1} :

— si $a_{n-1} = 2$, alors $a_{n-2} = -2$ sous peine d'exclusion à $\frac{5}{2}$ près; d'où $y_n < -\frac{3}{5}$ et, par suite,

$$c_n = x_n - y_n > \frac{16}{9} + \frac{3}{5} > 2,37;$$

remarquons en outre que la variation de signe $a_{n+1} a_{n+2} < 0$ implique $z_{n+2} \equiv -1$, d'où $z_{n+4} \equiv 1 \pmod{s}$ et $d_n = 1$, tandis que $a_{n-1} a_{n-2} < 0$ implique $z_{n-1} \equiv 1$, d'où $z_n \equiv -1$ et $d_{n-1} = 1$; comme $\frac{1}{z_{n+1}} \equiv z_n - a_n$, il en résulte $0 \equiv 3 \pmod{s}$, c'est-à-dire $s = 3$;

— si $a_{n-1} = 1$, au contraire, on ne peut avoir $s = 3$ sans quoi la variation de signe $a_{n+1} a_{n+2} < 0$ entraînerait $z_{n-1} \equiv 1 \pmod{s}$ comme le calcul précédent le montre, ce qui contredirait la condition (5) (§5). Si donc $a_{n+5} = -1$, on ne peut avoir $a_{n+6} = -2$ puisque, sous peine d'exclusion à $\frac{5}{2}$ près, cela entraînerait $a_{n+7} = 2$ et, par suite, $s = 3$ (en remplaçant n par $n + 5$ dans le calcul de congruences ci-dessus). On ne peut donc avoir que $a_{n+5} = 2$, d'où $x_n > \frac{20}{11}$, ou bien $a_{n+5} = -1$ et $a_{n+6} = -1$, d'où $x_n > \frac{41}{23}$. Dans les deux cas, comme $\frac{41}{23} < \frac{20}{11}$,

on en déduit comme précédemment :

$$\sup(c_n, c_{n-1}) > \frac{41}{23} + \frac{23}{41} > 2,343.$$

Il est ainsi établi que :

LEMME 2. — *Si $s \geq 3$, à partir d'un certain rang, le développement de ξ en s -fraction continue ne peut contenir plus de trois s -quotients incomplets consécutifs égaux en valeur absolue à 2 si $c(\xi; s) \leq 2,343$, et plus de deux s -quotients incomplets consécutifs égaux en valeur absolue à 2 si $c(\xi; s) \leq 2,29$.*

Si donc $c(\xi; s) \leq 2,29$, la suite des s -quotients incomplets de ξ est constituée à partir d'un certain rang par la répétition indéfinie de 1 (ou de -1) ou par l'alternance de séquences de la forme 2 1 1 ... 1 1 2 et de séquences de la forme $-2 -1 -1 \dots -1 -2$. Or en désignant par $(a \ b \ \dots \ k)$ la fraction continue limitée $a + 1/|b + 1/| \dots + 1/k$, on a identiquement en t :

$$(2 \ -2 \ -t) = (1 \ 1 \ 1 \ t).$$

Chacun des nombres ξ en question est donc déduit du nombre $\theta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ par une substitution modulaire. Il en résulte que pour un tel nombre ξ , $\overline{\lim}_n c_n = \sqrt{5}$ qui est bien inférieur à 2,29. On a ainsi retrouvé que $c(s) = \sqrt{5}$ pour $s \geq 3$, et montré le :

THÉOREME 1 bis. — *Pour tout $s \geq 3$, la borne $C(s) = \sqrt{5}$ est isolée dans l'ensemble des $c(\xi; s)$ qui ne prend aucune valeur entre $\sqrt{5}$ et 2,29.*

8. Pour étudier le cas des irrationnels ξ tels que, pour $s \geq 3$,

$$\sqrt{5} < c(\xi; s) \leq 2,343,$$

qui sont donc aussi tels que

$$2,29 < c(\xi; s) \leq 2,343,$$

cherchons la liaison entre s et le nombre des termes d'une séquence non interdite de la forme $-2 \ 2 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 2 \ -2$. Soit $n-1$ l'indice de son premier terme, $n+m+1$ l'indice de son dernier terme. La variation de signe $a_{n-1} a_n < 0$ se traduit par $q_{n-2} + q_{n-1} \equiv 0 \pmod{s}$. Comme les s -réduites $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ et $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ sont adjacentes, il en résulte que q_{n-2} et q_{n-1} sont premiers avec s , et que les dénominateurs successifs des s -réduites, de q_{n-1} à q_{n+m-3} , sont congrus à $u_1 q_{n-1}$, $u_2 q_{n-1}$, ..., $u_{m-1} q_{n-1}$, où u_k désigne le terme de rang k de la suite de Fibonacci, définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$ (k entier quelconque). La variation de signe $a_{n+m-2} a_{n+m-1} < 0$ se traduit par $u_{m-2} + u_{m-1} \equiv 0 \pmod{s}$, puisque q_{n-1} est premier avec s , ou encore par $u_m \equiv 0 \pmod{s}$. Or on sait ⁽²³⁾ qu'il existe pour

⁽²³⁾ Cf. LUGAS, *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* (Amer. J. Math., t. 1, 1878, p. 184 et 290).

tout s une infinité de termes u_k divisibles par s , et que leurs indices sont les multiples de l'un d'entre eux (positif) que nous désignerons par $j(s)$, ou, en abrégé, j . La liaison entre m et s que nous cherchons est donc exprimée par $m = j$: le nombre des s -quotients incomplets égaux à 1 dans la séquence envisagée est $j - 3$ ($s \geq 3$ implique $j \geq 4$).

On en déduit, en tenant compte des deux lemmes du paragraphe 7, que la suite des s -quotients incomplets du développement en s -fraction continue de tout nombre ξ tel que $\sqrt{5} < c(\xi; s) \leq 2,343$ est constituée à partir d'un certain rang par la succession des séquences suivantes : séquence 2 1 1 ... 1 1 2 ($j - 3$ fois 1), séquence 2 (à un seul terme), et séquences ayant leurs termes opposés à ceux des deux précédentes, cette succession ayant lieu dans un ordre satisfaisant aux conditions suivantes : deux s -quotients incomplets consécutifs égaux à 2 en valeur absolue ont toujours des signes opposés; l'éventualité de quatre s -quotients incomplets consécutifs égaux à 2 en valeur absolue ne se produit jamais; celle de trois tels s -quotients incomplets consécutifs se produit une infinité de fois. En tenant compte des identités

$$(2 \quad -2 \quad -t) = (1 \quad 1 \quad 1 \quad t) \quad \text{et} \quad (2 \quad -2 \quad 2 \quad t) = (1 \quad 2 \quad 1 \quad t),$$

on peut traduire ainsi ce résultat :

LEMME 3. — *Si $s \geq 3$, la suite des quotients incomplets dans le développement en fraction continue ordinaire d'un nombre ξ tel que*

$$\sqrt{5} < c(\xi; s) \leq 2,343,$$

est constituée, à partir d'un certain rang, par la succession de séquences \mathcal{A}_r de la forme 2 1 1 ... 1 (rj termes; r , entier positif quelconque).

Dans la suite, où l'hypothèse $s \geq 3$ sera sous-entendue, il nous sera plus commode de considérer uniquement les développements en *fraction continue ordinaire*; de plus, omettant la locution « à partir d'un certain rang », nous supposerons, sauf mention du contraire, que les indices que nous considérerons sont assez grands pour assurer que les quotients incomplets envisagés appartiennent à des séquences \mathcal{A}_r exclusivement suivies dans le développement de ξ par des séquences du même type, et éventuellement précédées de séquences de ce type en nombre fini convenable pour assurer la validité des majorations et minoration qui seront calculées.

D'après la caractérisation indiquée au paragraphe 6 des réduites qui ne sont pas des s -fractions (par les variations de signe dans le développement en s -fraction continue), on voit que pour les nombres ξ tels que $\sqrt{5} < c(\xi; s) \leq 2,343$, les réduites $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ qui ne sont pas des s -fractions sont celles pour lesquelles n appartient à la progression arithmétique de raison j qui comprend tous les indices n tels que le quotient incomplet A_n soit égal à 2. On a donc pour un tel nombre ξ :

$$c(\xi; s) = \overline{\lim}_n C_n \quad (n \neq n_0 + \mu j, \mu \text{ entier positif quelconque, } A_{n_0} = 2).$$

Montrons que cette limite supérieure ne change pas si l'on ne fait décrire à n qu'un ensemble plus restreint d'indices. Observons que $s \geq 3$ entraîne $j \geq 4$; soit alors N l'indice du troisième terme d'une séquence \mathcal{A}_r , \bar{N} l'indice de son avant-dernier terme; on a $N \leq \bar{N}$. On constate aisément que

$$1 - Y_N > (1 \ 1 \ 2 \ 2) = \frac{12}{7} \quad \text{et} \quad X_N > (1 \ 1 \ 1 \ 3) = \frac{11}{7},$$

d'où

$$X_N - Y_N > \frac{16}{7} \quad \text{et, de même,} \quad X_{\bar{N}} - Y_{\bar{N}} > \frac{16}{7}.$$

(On sait d'ailleurs que $\overline{\lim}_n C_n > 2,29 > \frac{16}{7}$, où n parcourt toutes les valeurs entières). Au contraire, pour tout indice m qui n'appartient pas aux deux suites d'indices ainsi définies, on a

$$X_m < (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3) = \frac{18}{11} \quad \text{et} \quad 1 - Y_m < (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3),$$

d'où

$$X_m - Y_m < \frac{25}{11} < \frac{16}{7}.$$

on a donc :

$$c(\xi; s) = \overline{\lim}_N C_N \quad (N = n_0 \pm 2 + \mu j),$$

où μ prend toutes les valeurs entières positives et où n_0 est un indice tel que $A_{n_0} = 2$. Les rangs N ainsi définis et les réduites de rang $N-1$ (on a, en effet, $C_N = \frac{1}{|Q_{N-1}(Q_{N-1}\xi - P_{N-1})|}$) seront qualifiés de *privilegiés*, pour le nombre ξ considéré. Chaque séquence \mathcal{A}_r possède deux rangs privilégiés, le troisième et l'avant-dernier (qui sont confondus dans le seul cas où $r = 1$ et $j = 4$).

Donnons un exemple de nombre irrationnel tel que $Q_{n_0-1} \equiv 0 \pmod{s}$ et que $A_{n_0} = 2$ soit le premier terme d'une séquence \mathcal{A}_r exclusivement suivie dans le développement de ce nombre de séquences du même type. Il suffit de choisir

$$\Xi = (1 \ s \ \mathcal{A}_{r_1} \ \mathcal{A}_{r_2} \ \dots \ \mathcal{A}_{r_m} \ \dots),$$

où les r_m sont des entiers naturels quelconques. On a en effet pour Ξ ,

$$Q_2 \equiv 0 \pmod{s} \quad \text{et} \quad A_3 = 2, \quad \text{d'où} \quad Q_{2+\mu j} \equiv 0 \pmod{s}$$

quel que soit l'entier positif μ . Les indices des rangs privilégiés du développement de Ξ sont ceux de la forme $N = \sigma_m j$ et $N' = 4 + \sigma_m j$, où σ_m est la somme des m premiers nombres r_m . On peut donc résumer les résultats de ce paragraphe en énonçant :

LEMME 4. — Pour $s \geq 3$, tout nombre ξ tel que

$$\sqrt{5} < c(\xi; s) \leq 2,343$$

est nécessairement équivalent (au sens défini aux § 2 et 5) à un nombre

$$\Xi = (1 \ s \ \mathcal{A}_{r_1} \ \mathcal{A}_{r_2} \ \dots \ \mathcal{A}_{r_m} \ \dots) \quad (r_m \text{ entier positif}).$$

De plus, on a

$$c(\Xi; s) = \overline{\lim}_{N, N'} (C_N, C_{N'}), \quad \text{où } N = \sum_1^m r_m j \quad \text{et} \quad N' = N + 4.$$

9. Posons

$$f(x) = f_1(x) = (1 \ 1 \ \dots \ 1 \ x) \quad (j \text{ termes égaux à } 1, x > 0).$$

Soit $f_r(x)$ la $(r - 1)^{\text{ème}}$ itérée de $f(x)$. Nous écrivons par convention $f_0(x) = x$ quel que soit $x > 0$. $f_r(x)$ est une fonction croissante de x si rj est pair, décroissante si rj est impair. D'autre part, on a

$$f_r(\theta) = \theta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

quels que soient r et j , et $f_r(x)$ tend vers θ lorsque r augmente indéfiniment. Remarquons enfin que

$$f_r(x) = \frac{u_{rj+1}x + u_{rj}}{u_{rj}x + u_{rj-1}}.$$

Considérons deux séquences $\mathcal{A}_r, \mathcal{A}_{r'}$ consécutives dans le développement d'un nombre ξ tel que $\sqrt{5} < c(\xi; s) \leq 2,343$, et soient N et N' leurs rangs privilégiés les plus voisins, c'est-à-dire l'avant dernier de \mathcal{A}_r et le troisième de $\mathcal{A}_{r'}$ ($N' = N + 4$). On a alors :

$$(7) \quad C_N = \frac{1 + f_{r'}(x')}{2 + f_{r'}(x')} - \frac{1 - f_r(x)}{2 - f_r(x)}, \quad C_{N'} = \frac{1 + f_r(x)}{2 + f_r(x)} - \frac{1 - f_{r'}(x')}{2 - f_{r'}(x')},$$

avec $x > 2$ et $x' > 2$. C_N et $C_{N'}$ sont des fonctions croissantes de f_r et $f_{r'}$. Distinguons deux cas, suivant la parité de j .

Premier cas : j pair. — Dans ce cas rj est pair; donc $x > \theta$ entraîne $f_r(x) > \theta$ quel que soit r . Il en résulte que C_N et $C_{N'}$ sont supérieurs à

$$\frac{1 + \theta}{2 + \theta} - \frac{1 - \theta}{2 - \theta} = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}} = 2,34164\dots$$

qui est inférieur à 2,343. L'ensemble des valeurs de $c(\xi; s)$ est donc vide entre $\sqrt{5}$ et $1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Or, pour les nombres Ξ_∞ définis par $\lim_m r_m = +\infty$ parmi les nombres Ξ de la forme indiquée au paragraphe 8, on a, d'après (7)

$$\lim_N C_N = \lim_{N'} C_{N'} = \frac{1 + \theta}{2 + \theta} - \frac{1 - \theta}{2 - \theta}, \quad \text{donc } c(\Xi_\infty; s) = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Au contraire, pour les nombres Ξ tels que $\lim_m r_m$ soit fini, C_N et $C_{N'}$ restent supérieurs à des quantités strictement supérieures à $1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$. Enfin pour les nom-

bres Ξ_r définis par $r_m = r$ quel que soit m , $c(\Xi_r; s)$ tend vers $1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$ lorsque r décrit un ensemble de valeurs indéfiniment croissantes. On peut donc énoncer :

THÉORÈME 3. — Si $s \geq 3$ et si $j(s)$ est pair, $\Gamma(s) = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$. L'ensemble des $c(\xi; s)$ ne prend aucune valeur entre $C(s) = \sqrt{5}$ et $\Gamma(s)$. L'ensemble des nombres ξ tels que $c(\xi; s) = \Gamma(s)$ a la puissance du continu; il est constitué par les nombres équivalents aux nombres Ξ_∞ définis par

$$\Xi_\infty = (1 \ s \ \alpha_{r_1} \ \alpha_{r_2} \ \dots \ \alpha_{r_m} \ \dots), \quad \text{où } \lim r_m = +\infty.$$

Les premières valeurs de s telles que $j(s)$ soit pair sont les suivantes : 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, ... D'autre part, d'après la définition de $j(s)$, si $j(s)$ est pair, $j(ks)$ l'est aussi (k entier naturel quelconque), de sorte que parmi les valeurs de s inférieures à une borne fixée arbitrairement, celles qui rendent $j(s)$ pair sont plus nombreuses que celles qui rendent $j(s)$ impair. (Cf. à la fin du paragraphe 10 la liste des valeurs de s inférieures à 100 telles que $j(s)$ soit impair.)

Deuxième cas : j impair. — L'exemple ci-dessus des nombres Ξ_∞ et Ξ_r permet encore d'établir que $1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$ est une valeur d'accumulation pour l'ensemble des $c(\xi; s)$. Mais nous allons voir qu'il en existe de plus petites.

Si j est impair rj a la parité de r ; donc f_r est croissante si r est pair, décroissante si r est impair. De plus, $x > 2$ implique les inégalités

$$0 < \frac{u_{rj+1}}{u_{rj+2}} < f_r(x) < \frac{u_{rj+1}}{u_{rj}} \quad \text{si } r \text{ est pair,}$$

et les inégalités opposées si r est impair. Donc, quels que soient x et x' supérieurs à 2, si $r > r'$, on a

$$0 < f_r(x) < f_{r'}(x') \quad \text{si } r \text{ et } r' \text{ sont pairs,}$$

et les inégalités opposées si r et r' sont impairs. Avec les notations (7), on voit facilement que $C_N - C_{N'}$ a le signe de $f_r(x) - f_{r'}(x')$; il en résulte que C_N est supérieur à $C_{N'}$ dans les trois cas suivants :

- si r est pair et r' impair;
- si r et r' sont pairs avec $r < r'$;
- si r et r' sont impairs avec $r > r'$,

Considérons alors les nombres Ξ'_∞ définis par les développements

$$\Xi'_\infty = (1 \ s \ \alpha_1 \ \alpha_{r_1} \ \alpha_1 \ \alpha_{r_2} \ \dots \ \alpha_1 \ \alpha_{r_m} \ \alpha_1 \ \dots),$$

où r_m augmente indéfiniment. Il résulte de ce qui précède que $c(\Xi'_\infty; s)$ peut être calculé comme la limite supérieure des C_N correspondant aux rangs privilégiés

des séquences $\mathcal{A}_{r,m}$. Or, pour les rangs privilégiés N qui sont les troisièmes de chaque séquence $\mathcal{A}_{r,m}$, on a

$$\lim_N X_N = 0 \quad \text{et} \quad 1 - \lim_N Y_N = 1 + \frac{1+f(1+\theta)}{2+f(1+\theta)},$$

tandis que pour les rangs privilégiés \bar{N} qui sont les avant-derniers de chaque séquence $\mathcal{A}_{r,m}$ les valeurs de ces limites sont échangées. On a donc :

$$c(\Xi'_s; s) = \frac{1+f(1+\theta)}{2+f(1+\theta)} + 0 < \frac{1+\theta}{2+\theta} + 0 = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}} < 2,343.$$

Posant

$$\gamma(s) = \frac{1+f(1+\theta)}{2+f(1+\theta)} + \theta,$$

on vérifie comme précédemment que $\gamma(s)$ est une valeur d'accumulation pour l'ensemble des valeurs de $c(\xi; s)$. On va montrer que pour s impair *différent de 5*, $\gamma(s)$ n'est autre que $\Gamma(s)$.

10. Pour faire cette démonstration, on va montrer l'exclusion à $\gamma(s)$ près (noté en abrégé γ) d'un certain nombre de couples ou de triplets de séquences \mathcal{A}_r consécutives. Donnons auparavant quelques résultats faciles pour éclairer les démonstrations d'exclusion qui suivront, en remarquant que $s \geq 3$ et j impair impliquent $j \geq 5$.

Quels que soient r et r' , on a

$$\gamma(s) = \frac{1+f[1+f_r(\theta)]}{2+f[1+f_r(\theta)]} - \frac{1-f_{r'}(\theta)}{2-f_{r'}(\theta)} = F_r(\theta) - \Phi_{r'}(\theta)$$

en introduisant les fonctions

$$F_r(x) = \frac{1+f[1+f_r(x)]}{2+f[1+f_r(x)]} = (0 \quad 1 \quad 2 \quad \underbrace{1 \dots 1}_{j-1 \text{ fois } 1} \quad 2 \quad \underbrace{1 \dots 1}_{rj-1 \text{ fois } 1} \quad x),$$

$$\Phi_{r'}(x) = \frac{1-f_{r'}(x)}{2-f_{r'}(x)} = -(\underbrace{1 \dots 1}_{rj-2 \text{ fois } 1} \quad x)$$

Les arguments des F_r et $\Phi_{r'}$ seront positifs dans toute la suite. $F_r(x)$ et $\Phi_{r'}(x)$ sont des fonctions de x croissantes ou décroissantes selon que r est impair ou pair. Plus précisément :

$$\Phi_{r'}(x) - \Phi_{r'}(x') = \frac{(-1)^{r+1}(x-x')}{(u_{rj-2}x + u_{rj-3})(u_{rj-2}x' + u_{rj-3})},$$

$$F_0(x) - F_0(x') = \frac{x'-x}{(v_{j+1}x + v_{j+2})(v_{j+1}x' + v_{j+2})}, \quad \text{avec } v_k = u_{k+1} + u_{k-1},$$

Notons que pour $k \geq 3$,

$$u_{k+1} < v_k < u_{k+2}.$$

Enfin en utilisant les égalités

$$u_{h+k} = u_h u_{k-1} + u_{h+1} u_k \quad \text{et} \quad u_{-k} = (-1)^{k-1} u_k \quad (h, k \text{ entiers quelconques}),$$

on trouve

$$F_r(x) - F_r(x') = \frac{(-1)^{r+1}(x-x')}{(\omega_{(r+1)j+2}x + \omega_{(r+1)j+1})(\omega_{(r+1)j+2}x' + \omega_{(r+1)j+1})},$$

avec

$$\omega_k = 2u_k + u_{k-2j-3}.$$

Notons que pour $k \geq 2j \geq 10$, on a

$$u_{k+1} < \omega_k < u_{k+2}.$$

Établissons maintenant les exclusions annoncées, en désignant par N le second rang privilégié (rang du $rj - 1^{\text{ème}}$ quotient incomplet) des séquences que nous allons considérer. (Rappelons que désormais $j \geq 5$ est impair.)

1° Séquence $\mathcal{A}_r \mathcal{A}_{r'}$ avec $r \geq 2$ et $r' \geq 2$. On a

$$X_N = 1 + F_0(x') \quad \text{avec} \quad x' < 1$$

et

$$1 - Y_N = -\Phi_2(x) \quad \text{avec} \quad x > f(3)$$

d'où

$$C_N - \gamma = F_0(x') - \Phi_2(x) - \gamma > F_0(1) - F_0(\theta) - \Phi_2(3) + \Phi_3(\theta).$$

Comme $3 - \theta < 3(\theta - 1)$, on en déduit en tenant compte de la majoration $v_k < u_{k+2}$ (valable pour $k \geq 3$) :

$$\frac{C_N - \gamma}{\theta - 1} > \frac{1}{(u_{j+3} + u_{j+4})(\theta u_{j+3} + u_{j+4})} - \frac{3}{(3u_{3j-2} + u_{3j-3})(\theta u_{3j-2} + u_{3j-3})},$$

différence qui est strictement positive car $j \geq 5$. La séquence précédente est donc exclue à γ près, et par suite :

LEMME 5. — *A partir d'un certain rang toute séquence \mathcal{A}_r avec $r \neq 1$ doit être immédiatement suivie et précédée de \mathcal{A}_1 dans le développement de ξ lorsque $j \geq 5$ est impair, et que*

$$\sqrt{5} < c(\xi; s) \leq \gamma.$$

2° Séquence $\mathcal{A}_r \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_{r'}$, avec r pair et r' impair. On a

$$C_N = F_{r'}(x') - \Phi_r(x), \quad \text{avec} \quad x > 2 > \theta \quad \text{et} \quad x' > 2 > \theta.$$

D'après les sens de variation de $F_{r'}$ et Φ_r on a immédiatement $C_N > \gamma$, ce qui prouve l'exclusion de cette séquence à γ près.

3° Séquence $\mathcal{A}_r \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_{r'}$, avec r et r' pairs et $r' \geq r$. On a

$$C_N = F_{r'}(x') - \Phi_r(x), \quad \text{avec} \quad x > 2 \quad \text{et} \quad x' < 3$$

et, par suite,

$$C_N - \gamma > F_{r'}(3) - F_{r'}(\theta) - \Phi_r(2) + \Phi_r(\theta).$$

Comme $3 - \theta < 4(2 - \theta)$, on en déduit en tenant compte de $\omega_k > u_{k+1}$ ($k \geq 2j \geq 10$) et en posant $(r' + 1)j + 3 = R$:

$$\frac{C_N - \gamma}{2 - \theta} > \frac{1}{(2u_{rj-2} + u_{rj-3})(\theta u_{rj-2} + u_{rj-3})} - \frac{4}{(3u_R + u_{R-1})(\theta u_R + u_{R-1})}$$

qui est strictement positif pour $r' \geq r$.

On obtiendrait un résultat analogue au rang $N' = N + j + 4$ dans le cas $r' \leq r$. En rassemblant les trois résultats précédents, on déduit le

LEMME 6. — *Lorsque $j \geq 5$ est impair, l'indice r des séquences \mathcal{A}_r qui interviennent dans le développement de ξ ne peut prendre que des valeurs impaires à partir d'un certain rang si*

$$\sqrt{5} < c(\xi; s) < \gamma,$$

et ne peut pas prendre des valeurs paires bornées si

$$\sqrt{5} < c(\xi; s) \leq \gamma.$$

4° Séquence $\mathcal{A}_r \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_{r'}$, avec r et r' impairs et $r' < r$. On a

$$C_N = F_{r'}(x') - \Phi_r(x),$$

avec, puisque $j \geq 5$,

$$x < (2 \ 1 \ 1 \ 1) = \frac{8}{3} \quad \text{et} \quad x' > (2 \ 1 \ 1) = \frac{5}{2},$$

d'où

$$C_N - \gamma > F_{r'}\left(\frac{5}{2}\right) - F_{r'}(\theta) - \Phi_r\left(\frac{8}{3}\right) + \Phi_r(\theta).$$

Comme $\frac{8}{3} - \theta < \frac{6}{5}\left(\frac{5}{2} - \theta\right)$, on en déduit en tenant compte de $\omega_k < u_{k+2}$ ($k \geq 2j$) et en posant encore $(r' + 1)j + 3 = R$:

$$\frac{C_N - \gamma}{\frac{5}{2} - \theta} > \frac{1}{\left(\frac{5}{2}u_{R+1} + u_R\right)(\theta u_{R+1} + u_R)} - \frac{\frac{6}{5}}{\left(\frac{8}{3}u_{rj-2} + u_{rj-3}\right)(\theta u_{rj-2} + u_{rj-3})}.$$

Comme $\frac{5}{6} > \frac{u_{k-1}}{u_k}$ quel que soit $k \geq 3$, on a

$$\frac{5}{6} \left(\frac{8}{3} u_{rj-2} + u_{rj-3} \right) > \frac{5}{2} u_{rj-3} + u_{rj-4}$$

et, par suite, $C_N - \gamma > 0$ dès que $r \geq r' + 2$ et $j \geq 7$. Un résultat analogue vaut au rang $N' = N + j + 4$ dans le cas $r' > r$. Donc, à condition que j soit différent de 5 (c'est-à-dire $s \neq 5$), les séquences $\mathcal{A}_r \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_{r'}$ sont exclues à γ près sauf peut-être si r et r' sont impairs et égaux. Par suite :

LEMME 7. — *Si $j(s)$ est impair et au moins égal à 7, les nombres ξ tels que $\sqrt{5} < c(\xi; s) < \gamma$ ne peuvent être que des nombres quadratiques équivalents aux nombres Ξ'_r définis par*

$$\Xi'_r = (1 \ s \ \mathcal{A}_1 \ \mathcal{A}_r \ \mathcal{A}_1 \ \mathcal{A}_r \ \dots) \quad (r \text{ impair}).$$

Les $c(\Xi'_r; s)$, sont isolés et ne peuvent tendre vers une limite que lorsque r tend vers l'infini, auquel cas $c(\Xi'_r; s)$ tend vers $\gamma(s)$. Il est donc établi que :

$$\gamma(s) = \frac{1+f(1+\theta)}{2+f(1+\theta)} + \theta$$

est la plus petite valeur d'accumulation $\Gamma(s)$ de l'ensemble des $c(\xi; s)$ lorsque j est impair et au moins égal à 7.

Étudions les nombres quadratiques Ξ'_r en question.

En conservant la notation N pour désigner le second rang privilégié de la séquence $\mathcal{A}_r \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_r$ on a pour cette séquence :

$$C_N = F_r(x) - \Phi_r(y), \quad \text{avec } x < 3 \quad \text{et } y > 2,$$

d'où

$$C_N - \gamma < F_r(3) - F_r(\theta) - \Phi_r(2) + \Phi_r(\theta)$$

et, par suite, $C_N - \gamma < 0$ comme on le voit en prenant $r = r'$ et en changeant les signes (puisque ici r est impair) dans le troisième calcul d'exclusion ci-dessus (cas r et r' pairs). On a donc $c(\Xi'_r; s) < \gamma(s)$ pour tout r impair (et j impair).

Pour comparer enfin $c(\Xi'_r; s)$ et $c(\Xi'_{r'}; s)$, avec $r' \geq r + 2$, remarquons que pour la séquence $\mathcal{A}_r \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_r$ on a plus précisément, avec les notations ci-dessus,

$$x < (2 \ 1 \ 1 \ 1) = \frac{8}{3} \quad \text{et} \quad y > (2 \ 1 \ 1) = \frac{5}{2},$$

d'où

$$C_N < F_r\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi_r\left(\frac{5}{2}\right);$$

au rang analogue N pour la séquence $\mathcal{A}_{r'} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_{r'}$ la quantité C'_N est donnée par

$$C'_N = F_r(x') - \Phi_r(y'),$$

avec

$$x' > (1 \ 1 \ 1) = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y' < (1 \ 1 \ 1 \ 1) = \frac{5}{3};$$

on en déduit

$$C'_N - C_N > F_r\left(\frac{3}{2}\right) - F_r\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi_r\left(\frac{5}{3}\right) + \Phi_r\left(\frac{5}{2}\right).$$

Comme $\frac{8}{3} - \frac{3}{2} = \frac{7}{5} \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{3}\right)$, on a

$$\frac{C'_N - C_N}{\frac{5}{6}} > \frac{1}{\left(\frac{5}{2} u_{rj-2} + u_{rj-3}\right) \left(\frac{5}{3} u_{rj-2} + u_{rj-3}\right)} - \frac{\frac{7}{5}}{\left(\frac{8}{3} u_{R+1} + u_R\right) \left(\frac{3}{2} u_{R+1} + u_R\right)}$$

qui est strictement positif. Donc $c(\Xi'_r; s)$ croît avec r lorsque r impair croît depuis 1 jusqu'à l'infini.

En résumé on peut énoncer :

THÉOREME 4. — Si $j(s)$ est impair et au moins égal à 7, on a

$$\Gamma(s) = 0 + \frac{1+f(1+\theta)}{2+f(1+\theta)} = 0 + \frac{\theta u_{j+2} + u_{j+3}}{\theta v_{j+1} + v_{j+2}} \quad (v_k = u_{k+1} + u_{k-1}).$$

Les irrationnels ξ tels que $c(\xi; s) = \Gamma(s)$ sont les nombres équivalents aux nombres

$$\Xi'_\infty = (1 \ s \ \alpha_1 \ \alpha_{r_1} \ \alpha_1 \ \alpha_{r_2} \ \dots \ \alpha_1 \ \alpha_{r_m} \ \alpha_1 \ \dots), \quad \text{où } \lim_m r_m = +\infty.$$

Entre $C(s) = \sqrt{5}$ et $\Gamma(s)$, l'ensemble des $c(\xi; s)$ possède une infinité de valeurs isolées correspondant dans l'ordre croissant aux nombres quadratiques équivalents aux nombres Ξ'_r dont le développement est constitué par les périodes $[\alpha_1]$, $[\alpha_1 \alpha_3]$, \dots , $[\alpha_1 \alpha_r]$, \dots (r impair) précédées des quotients incomplets $A_0 = 1$ et $A_1 = s$.

Calcul des $c(\Xi'_r; s)$ avec r impair. — Pour les nombres Ξ'_r comme pour les nombres Ξ_∞ , par raison de symétrie, C_N tend vers une limite unique lorsque N décrit, dans le développement de Ξ'_r , l'ensemble des rangs privilégiés des séquences α_r autres (si $r \neq 1$) que α_1 . Donc $c(\Xi'_r; s)$ est égal à la différence des racines de l'équation en x suivante :

$$x = (1 \ 1 \ 2 \ \underbrace{1 \ \dots \ 1}_{j-1 \text{ fois } 1} \ 2 \ \underbrace{1 \ \dots \ 1}_{rj-3 \text{ fois } 1} \ x)$$

C'est une équation du type $x = \frac{Ax + B}{Cx + D}$, avec A, B, C, D entiers et $AD - BC = \pm 1$; en fait, $AD - BC = 1$ puisque le nombre des termes de la période du développement de la solution x positive par exemple est pair. Par suite

$$c(\Xi'_r; s) = \frac{1}{C} \sqrt{(A - D)^2 + 4BC} = \frac{1}{C} \sqrt{(A + D)^2 - 4}.$$

Or, l'équation considérée peut encore s'écrire

$$x = 1 + F_r \left(\frac{x - 1}{2 - x} \right);$$

on en déduit

$$A = \omega_{(r+1)j} + u_{(r+1)j} - u_{(r-1)j-2} + u_j u_{rj}, \quad C = \omega_{(r+1)j}, \quad D = \omega_{(r+1)j-1},$$

d'où en tenant compte de la valeur des ω_k :

$$c(\Xi'_r; s) = \frac{\sqrt{(u_{(r+1)j+3} + u_j u_{rj})^2 - 4}}{\omega_{(r+1)j}}.$$

Pour $r = 1$, cette expression se simplifie, comme on pouvait s'y attendre puisqu'alors x possède une période de développement de j termes au lieu de $(r + 1)j$ termes; elle se réduit à :

$$c(\Xi'_1; s) = \frac{2\sqrt{u_{j+1}^2 + 1}}{\nu_{j-1}}.$$

On peut encore remarquer que dans l'hypothèse du théorème 4, $\Gamma(s)$ croit avec j depuis

$$\theta + \frac{34\theta + 55}{47\theta + 76} = 2,34158\dots$$

pour $j = 7 (s = 13)$ jusqu'à sa limite pour j infini qui est précisément

$$\frac{1+\theta}{2+\theta} + \theta = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}},$$

valeur de $\Gamma(s)$ pour j pair, et qui vaut 2,34164... La valeur isolée qui suit immédiatement $C(s) = \sqrt{5}$ est aussi la plus petite dans le cas $s = 13$ et vaut

$$\frac{\sqrt{442}}{9} = 2,3359\dots$$

Les valeurs de s correspondant aux premières valeurs de j impaires supérieures à 5 sont les suivantes :

Pour $j = 7$, $s = 13$; pour $j = 9$, $s = 17$ et 34; pour $j = 11$, $s = 89$; pour $j = 13$, $s = 233$; pour $j = 15$, $s = 10, 61, 122, 305$ et 610; pour $j = 17$, $s = 1\ 597$; pour $j = 19$, $s = 4\ 181$; etc...

Voici d'ailleurs, pour $3 \leq s \leq 100$, la liste des valeurs de s telles que $j(s)$ soit impair, avec les valeurs de j correspondantes :

s :	5	10	13	17	25	26	34	50	53	61	65	73	85	89	97
j :	5	15	7	9	25	21	9	75	27	15	35	37	45	11	49

Nous allons maintenant étudier le cas laissé de côté $s = 5 = j$.

11. Cas $s = 5 = j$. — Dans ce cas, on a comme dans les précédents $c(\Xi_n; 5) > c(\Xi'_n; 5)$, ces deux nombres étant encore des valeurs d'accumulation de l'ensemble des $c(\xi; 5)$; mais nous allons voir qu'il en existe de plus petites. Les lemmes 5 et 6 (§ 10) montrent encore dans ce cas que si $\sqrt{5} < c(\xi; 5) < \gamma(5)$, le développement de ξ doit être exclusivement constitué, à partir d'un certain rang, de séquences \mathcal{A}_r successives avec r impair, toute séquence \mathcal{A}_r avec $r \neq 1$ devant, en outre, être immédiatement encadrée de deux séquences \mathcal{A}_1 . Pour poursuivre l'étude des nombres ainsi définis, nous allons introduire une nouvelle constante d'exclusion γ' , qui ne sera autre que $\Gamma(5)$. Dans ce but, désignons par \mathcal{B}_r la séquence obtenue en répétant r fois consécutivement \mathcal{A}_1 , et considérons les nombres Ξ''_n définis par les développements

$$\Xi''_n = (1\ 5\ \mathcal{B}_{r_1}\ \mathcal{A}_3\ \mathcal{B}_{r_2}\ \mathcal{A}_3\ \dots\ \mathcal{A}_3\ \mathcal{B}_{r_m}\ \mathcal{A}_3\ \dots),$$

où r_m augmente indéfiniment. Si N désigne un rang privilégié de l'une quelconque des séquences \mathcal{A}_3 qui figurent dans ce développement, on a

$$X_N > (1\ 1\ 1\ 2) = \frac{8}{5} \quad \text{et} \quad 1 - Y_N > (1\ 1\ 2\ 2) = \frac{12}{7},$$

ou bien

$$X_N > (1\ 1\ 2\ 2) \quad \text{et} \quad 1 - Y_N > (1\ 1\ 1\ 2),$$

donc, dans les deux cas,

$$C_N > \frac{8}{5} + \frac{5}{7} = \frac{81}{35}.$$

Si N' désigne un rang privilégié de l'une (autre que la première) des séquences \mathcal{A}_1 qui figurent dans ce développement par l'intermédiaire des séquences \mathcal{B}_{r_m} , on a au contraire

$$X_{N'} < (1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2) = \frac{19}{12} \quad \text{et} \quad 1 - Y_{N'} < (1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2) = \frac{19}{11},$$

ou

$$X_{N'} < (1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2) \quad \text{et} \quad 1 - Y_{N'} < (1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2),$$

d'où

$$C_{N'} < \frac{19}{12} + \frac{8}{11} = \frac{305}{132}.$$

Or, $\frac{81}{35} > \frac{305}{132}$; donc, $c(\Xi''_\infty; 5)$ peut être calculé comme la limite supérieure des C_N correspondant aux rangs privilégiés des séquences \mathcal{A}_3 qui interviennent dans le développement de Ξ''_∞ .

Posons

$$g(x) = (1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ x) = \frac{12x + 7}{7x + 4} \quad (x > 0)$$

et désignons par η la racine positive de l'équation $x = g(x)$. Pour les rangs privilégiés N qui sont les troisièmes de chaque séquence \mathcal{A}_3 intervenant dans Ξ''_∞ , on a

$$\lim_N X_N = \frac{u_{12}\eta + u_{11}}{u_{11}\eta + u_{10}} \quad \text{et} \quad 1 - \lim_N Y_N = \eta = \frac{4 + \sqrt{65}}{7},$$

tandis que pour les rangs privilégiés qui sont les avant-derniers de chacune de ces séquences \mathcal{A}_3 , les valeurs de ces limites sont échangées. On a donc :

$$c(\Xi''_\infty; 5) = \eta + \frac{u_{10}\eta + u_9}{u_{11}\eta + u_{10}} = \eta + \frac{55\eta + 34}{89\eta + 55} = 2,3412111\dots$$

On constate comme précédemment que $\gamma' = \eta + \frac{55\eta + 34}{89\eta + 55}$ est une valeur d'accumulation pour l'ensemble des $c(\xi; 5)$. Or,

$$\gamma(5) = \theta + \frac{u_7\theta + u_8}{v_6\theta + v_7} = \theta + \frac{13\theta + 21}{18\theta + 29} = 2,3412121\dots > \gamma'.$$

Donc $\gamma(5)$ n'est pas la plus petite valeur d'accumulation $\Gamma(5)$ des $c(\xi; 5)$. On va montrer que $\Gamma(5) = \gamma'$.

Notons $g_r(x)$ la r -ième itérée de $g(x) = g_1(x)$ et posons

$$g_0(x) = x \quad \text{et} \quad G_r(x) = \frac{55g_r(x) + 34}{89g_r(x) + 55} = (0 \ \underbrace{1 \ \dots \ 1}_{10 \text{ fois } 1} \ g(x)).$$

Les arguments des g_r et G_r seront positifs dans tout ce qui suit. $g_r(x)$ croît avec $x > 0$ si r est pair et décroît si r est impair; $G_r(x)$ varie en sens inverse. Quels que soient r et r' , on a

$$\gamma' = g_r(\eta) + G_{r'}(\eta)$$

D'autre part, $g_r(x) = \frac{h_r x + h'_r}{h''_r x + h''_r}$, où h_r , h'_r , et h''_r satisfont à la même relation de

réurrence $h_{r+1} = 16h_r + h_{r-1}$, avec $h_0 = 1$, $h'_0 = 0$, $h''_0 = 1$; $h_1 = 12$, $h'_1 = 7$, $h''_1 = 4$. Avec ces notations, on a

$$g_r(x) - g_r(x') = \frac{(-1)^r(x-x')}{(h_r x + h''_r)(h'_r x' + h''_r)},$$

$$G_r(x) - G_r(x') = \frac{(-1)^r(x'-x)}{(H_r x + H'_r)(H_r x' + H'_r)},$$

avec

$$H_r = 89h_r + 55h'_r, \quad H'_r = 89h'_r + 55h''_r.$$

Pour établir que $\gamma' = \Gamma(5)$, on va prouver comme précédemment l'exclusion à γ' près de quelques séquences constituées par des séquences \mathcal{A}_r ou \mathcal{B}_r consécutives.

1° *Séquence $\mathcal{A}_r \mathcal{A}_1$, avec r impair ≥ 5 .* Désignons par N le second rang privilégié de cette séquence (rang de l'avant-dernier terme de \mathcal{A}_r). On a

$$X_N = g_2(x'), \quad -Y_N = G_0(x),$$

avec

$$x' > (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) = \frac{21}{13} \quad \text{et} \quad x < (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2) = \frac{34}{21},$$

d'où

$$C_N - \gamma' > g_2\left(\frac{21}{13}\right) - g_2(\eta) + G_0\left(\frac{34}{21}\right) - G_0(\eta).$$

Comme $\eta - \frac{21}{13} < \frac{29}{28}\left(\eta - \frac{34}{21}\right)$, on en déduit :

$$\frac{C_N - \gamma'}{\eta - \frac{34}{21}} > \frac{1}{\left(89\frac{34}{21} + 55\right)(89\eta + 55)} - \frac{\frac{29}{28}}{\left(112\frac{21}{13} + 65\right)(112\eta + 65)} > 0.$$

Comme $\eta > \frac{34}{21}$, ce résultat, joint aux lemmes 5 et 6 (§ 10), implique que si $\sqrt{5} < c(\xi; 5) \leq \gamma'$, le développement de ξ doit être constitué exclusivement, à partir d'un certain rang, de séquences \mathcal{A}_3 et \mathcal{B}_r consécutives, deux séquences \mathcal{A}_3 n'étant jamais consécutives.

2° *Séquence $\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_r \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_{r'} \mathcal{A}_3$, avec r impair et r' pair.* Désignons par N le second rang privilégié de la seconde séquence \mathcal{A}_3 qui figure dans la séquence envisagée. On a

$$C_N = g_{r'+1}(x') + G_{r+1}(x),$$

avec

$$x' < (1 \ 1 \ 2) < \eta \quad \text{et} \quad x < (1 \ 1 \ 2) < \eta.$$

D'après les sens de variation de $g_{r'+1}$ et G_{r+1} , on en déduit immédiatement $C_N > \gamma'$, ce qui prouve l'exclusion à γ' près de cette séquence.

3° *Séquence $\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_r \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_{r'} \mathcal{A}_3$, avec r et r' pairs et $r' \leq r$.* En conservant la même définition pour le rang N, on trouve la même expression pour C_N , avec

$$x' < (1 \ 1 \ 2) = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad x > (1 \ 1 \ 1) = \frac{3}{2}.$$

Comme $\eta - \frac{3}{2} < 4\left(\eta - \frac{5}{3}\right)$, on en déduit

$$\frac{C_N - \gamma'}{\eta - \frac{5}{3}} > \frac{1}{\left(\frac{5}{3} h_{r'+1} + h_{r'+1}''\right) (\eta h_{r'+1} + h_{r'+1}''')} - \frac{4}{\left(\frac{3}{2} H_{r+1} + H_{r+1}'\right) (\eta H_{r+1} + H_{r+1}')}$$

Or $H_r > 55 h_r'$ et $H_r > 55 h_r''$; par suite $C_N - \gamma' > 0$; on obtiendrait un résultat analogue au rang privilégié $N' = N - 11$ dans le cas où $r' \geq r$. Il en résulte que l'indice r des séquences \mathcal{B}_r qui interviennent dans le développement de ξ ne peut prendre que des valeurs impaires si $\sqrt{5} < c(\xi; 5) < \gamma'$, et ne peut pas prendre des valeurs paires bornées si $c(\xi; 5) = \gamma'$ (en supposant qu'on n'écrive jamais consécutivement deux séquences \mathcal{B}_r puisque $\mathcal{B}_r \mathcal{B}_{r'}$ est identique à $\mathcal{B}_{r+r'}$).

4° Séquence $\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_r \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_{r'} \mathcal{A}_3$, avec r et r' impairs et $r' > r$. En conservant la définition de N , et par suite, l'expression de C_N , on a, grâce aux bornes $x' > \frac{21}{13}$, $x < \frac{34}{21}$ déjà utilisées ci-dessus :

$$\frac{C_N - \gamma'}{\eta - \frac{34}{21}} > \frac{1}{\left(\frac{34}{21} H_{r+1} + H_{r+1}'\right) (\eta H_{r+1} + H_{r+1}')} - \frac{\frac{29}{28}}{\left(\frac{21}{13} h_{r'+1} + h_{r'+1}''\right) (\eta h_{r'+1} + h_{r'+1}''')}$$

Or, comme $r' \geq r + 2$, on a, d'après la formule de récurrence des h_r ,

$$h_{r'+1}' > 16^2 h_{r+1}', \quad h_{r'+1}'' > 16^2 h_{r+1}'';$$

d'autre part, on constate aisément que pour $r \geq 2$,

$$h_r < \frac{7}{4} h_r' \quad \text{et} \quad h_r < \frac{7}{4} h_r'';$$

il en résulte ici

$$H_{r+1} < 211 h_{r+1}' \quad \text{et} \quad H_{r+1} < 211 h_{r+1}'';$$

de ces inégalités, on tire facilement $C_N - \gamma' > 0$. Un résultat analogue vaut au rang $N' = N - 11$ dans le cas où $r > r'$. Les séquences $\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_r \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_{r'} \mathcal{A}_3$ sont donc exclues à γ' près sauf peut-être si r et r' sont égaux et impairs. Par suite :

LEMME 8. — *Les nombres ξ tels que $\sqrt{5} < c(\xi; 5) < \gamma'$ ne peuvent être que des nombres quadratiques équivalents au nombre*

$$\Xi_1 = (1 \ 5 \ \alpha_1 \ \alpha_1 \ \alpha_1 \ \dots)$$

ou aux nombres

$$\Xi_r = (1 \ 5 \ \beta_r \ \alpha_3 \ \beta_r \ \alpha_3 \ \dots) \quad (r \text{ impair}).$$

Les $c(\Xi_r''; 5)$ sont isolés et ne peuvent tendre vers une limite que lorsque r tend vers l'infini, auquel cas $c(\Xi_r''; 5)$ tend vers γ' . Il est donc établi que :

$$\gamma' = \eta + \frac{55\eta + 34}{89\eta + 55}$$

est la plus petite valeur d'accumulation $\Gamma(5)$ de l'ensemble des $c(\xi; 5)$.

Étudions les nombres quadratiques Ξ_r^n en question.

En conservant la notation N pour désigner le second rang privilégié de la seconde séquence \mathcal{A}_3 qui figure dans $\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_r \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_r \mathcal{A}_3$, on a pour cette dernière séquence

$$C_N = g_{r+1}(x) + G_{r+1}(y).$$

avec $x < \frac{5}{3}$ et $y > \frac{3}{2}$, d'où

$$C_N - \gamma' < g_{r+1}\left(\frac{5}{3}\right) - g_{r+1}(\eta) + G_{r+1}\left(\frac{3}{2}\right) - G_{r+1}(\eta) < 0,$$

comme on le voit en prenant $r = r'$ et en changeant les signes (puisqu'ici r est impair) dans le troisième calcul d'exclusion ci-dessus (cas r et r' pairs). On a donc $c(\Xi_r^n; 5) < \Gamma(5)$ pour tout r impair.

Pour comparer enfin $c(\Xi_r^n; 5)$ et $c(\Xi_{r'}^n; 5)$ avec $r' \geq r + 2$, remarquons qu'au rang analogue N pour la séquence $\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_{r'} \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_{r'} \mathcal{A}_3$, la quantité C'_N est donnée par

$$C'_N = g_{r+1}(x') + G_{r+1}(y'),$$

avec

$$x' > (1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1) = \frac{12}{7} \quad \text{et} \quad y' < (1 \ 1 \ 2) = \frac{5}{3},$$

d'où

$$C'_N - C_N > g_{r+1}\left(\frac{12}{7}\right) - g_{r+1}\left(\frac{5}{3}\right) + G_{r+1}\left(\frac{5}{3}\right) - G_{r+1}\left(\frac{3}{2}\right);$$

comme $\frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \left(\frac{12}{7} - \frac{5}{3}\right)$, on a

$$21(C'_N - C_N) > \frac{1}{\left(\frac{12}{7} h_{r+1} + h_{r+1}''\right) \left(\frac{5}{3} h_{r+1}' + h_{r+1}''\right)} - \frac{\frac{7}{2}}{\left(\frac{3}{2} H_{r+1} + H_{r+1}'\right) \left(\frac{5}{3} H_{r+1} + H_{r+1}'\right)},$$

différence strictement positive puisque $H_{r+1} > 55 h_{r+1}'$ et $H_{r+1}' > 55 h_{r+1}''$. Donc $c(\Xi_r^n; 5)$ croît avec r impair lorsque r croît depuis 1 jusqu'à l'infini.

D'autre part, en reprenant les notations et les calculs du paragraphe 10, on voit que $\Xi_1^n = \Xi_3^n$ et que

$$c(\Xi_3^n; 5) > c(\Xi_1^n; 5).$$

En résumé, on peut énoncer :

THÉOREME 5. — Pour $s = 5$, on a $j = 5$ et

$$\Gamma(5) = \eta + \frac{55\eta + 34}{89\eta + 55}, \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{4 + \sqrt{65}}{7}.$$

Les irrationnels ξ tels que $c(\xi; 5) = \Gamma(5)$, sont les nombres équivalents aux nombres

$$\Xi_m^n = (1 \ s \ \mathcal{B}_{r_1} \ \mathcal{A}_3 \ \mathcal{B}_{r_2} \ \mathcal{A}_3 \ \dots \ \mathcal{A}_3 \ \mathcal{B}_{r_m} \ \mathcal{A}_3 \ \dots), \quad \text{ou} \quad \lim_m r_m = +\infty.$$

Entre $C(5) = \sqrt{5}$ et $\Gamma(5)$, l'ensemble des $c(\xi; 5)$ possède une infinité de valeurs isolées correspondant dans l'ordre croissant aux nombres quadratiques équivalents aux nombres Ξ'_1 et Ξ''_r dont le développement est constitué par les périodes $[\mathcal{A}_1]$, $[\mathcal{B}_1 \mathcal{A}_3]$, $[\mathcal{B}_3 \mathcal{A}_5]$, ... (r impair), précédées des quotients incomplets $A_0 = 1$ et $A_1 = 5$.

On a $\Gamma(5) = 2, 3412111\dots$ et les deux valeurs isolées qui suivent immédiatement $C(5)$, c'est-à-dire celles qui correspondent à Ξ'_1 de période $[\mathcal{A}_1]$ et $\Xi''_1 = \Xi'_2$ de période $[\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3]$ valent respectivement, d'après les calculs du paragraphe précédent :

$$\frac{2\sqrt{u_3^2+1}}{v_3} = \frac{2\sqrt{65}}{7} = 2,303502\dots$$

et

$$\frac{\sqrt{(u_{23} + u_5 u_{15})^2 - 4}}{w_{20}} = \frac{\sqrt{31707^2 - 4}}{13543} = 2,341209\dots$$

On calcule enfin $c(\Xi''_r; 5)$ de façon analogue à $c(\Xi'_r; s)$ (§ 10) : $c(\Xi''_r; 5)$ est égal à la différence des racines de l'équation en x :

$$x = 1 + G_{r+1} \left(\frac{1}{x-1} \right)$$

qui s'écrit $x = \frac{A'x + B'}{Cx + D'}$ avec

$$A' = 144h'_{r+1} + 89h''_{r+1}, \quad C' = 89h'_{r+1} + 55h''_{r+1}, \quad D' = 89h_{r+1} - 34h'_{r+1} - 55h''_{r+1},$$

d'où :

$$c(\Xi''_r; 5) = \frac{\sqrt{(89h_{r+1} + 110h'_{r+1} + 34h''_{r+1})^2 - 4}}{89h'_{r+1} + 55h''_{r+1}}.$$

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS.

Les résultats obtenus dans ce chapitre peuvent être rassemblés de la manière suivante (th. 1 à 5) :

s étant un entier donné au moins égal à 2, lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels, la borne inférieure $C(s)$, la plus petite valeur d'accumulation $\Gamma(s)$, et les valeurs intermédiaires de

$$c(\xi; s) = \overline{\lim}_{p, q} \frac{1}{|q(q\xi - p)|} \quad (p, q \text{ entiers quelconques, } q \not\equiv 0 \pmod{s})$$

sont les suivantes :

POUR $s = 2$, $C(2) = \Gamma(2) = 2$.

POUR $s \geq 3$, $C(s) = \sqrt{5}$. En désignant par j le plus petit entier positif tel

que $u_j \equiv 0 \pmod{s}$ ($\{u_k\}$ étant la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$), on a $j \geq 4$ et :

— Si j EST PAIR ($s = 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, \dots$)

$$\Gamma(s) = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}} = 2,3416407\dots$$

et l'ensemble des $c(\xi; s)$ ne prend aucune valeur entre $C(s) = \sqrt{5}$ et $\Gamma(s)$.

— Si j EST IMPAIR ET AU MOINS ÉGAL À 7 ($s = 10, 13, 17, 25, 26, 34, \dots$)

$$\Gamma(s) = \theta + \frac{u_{j+2}\theta + u_{j+3}}{v_{j+1}\theta + v_{j+2}},$$

où

$$\theta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \quad \text{et} \quad v_k = u_{k+1} + u_{k-1}.$$

Entre $C(s)$ et $\Gamma(s)$, l'ensemble des $c(\xi; s)$ prend une infinité de valeurs représentées dans l'ordre croissant par $\frac{\sqrt{(u_{(r+1)j+1} + u_j u_{rj})^2 - 4}}{2u_{(r+1)j} + u_{(r-1)j-3}}$, où $r > 0$ prend toutes les valeurs entières impaires croissantes.

En tenant compte de $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \theta$, on vérifierait que cette expression tend vers $\Gamma(s)$ lorsque r tend vers l'infini. De plus, lorsque j impair augmente indéfiniment, $\Gamma(s)$ tend vers $1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$. Les valeurs numériques successives de $c(\xi; s)$ sont d'ailleurs dans ce cas :

pour $j = 7$ ($s = 13$) :

$$C(s) = \sqrt{5}, \quad 2,33597\dots, \quad 2,34157\dots, \quad \dots, \quad \Gamma(s) = 2,34158\dots;$$

pour $j = 9$ ($s = 17$ ou 34) :

$$C(s) = \sqrt{5}, \quad 2,34081\dots, \quad 2,341631\dots, \quad \dots, \quad \Gamma(s) = 2,341632\dots;$$

pour $j = 11$ ($s = 89$) :

$$C(s) = \sqrt{5}, \quad 2,34157\dots, \quad 2,341639\dots, \quad \dots, \quad \Gamma(s) = 2,341640\dots;$$

pour $j = 13$ ($s = 233$) :

$$C(s) = \sqrt{5}, \quad 2,34162\dots, \quad 2,341640\dots, \quad \dots, \quad \Gamma(s) = 2,341640\dots;$$

pour $j = 15$ ($s = 10, 61, 122, 305$ ou 610) :

$$C(s) = \sqrt{5}, \quad 2,341640\dots, \quad \dots, \quad \Gamma(s) = 2,341640\dots$$

Toutes ces valeurs restent inférieures à $1 + \frac{3}{\sqrt{5}} = 2,3416407\dots$

— Si j EST ÉGAL À 5 ($s = 5$),

$$\Gamma(5) = \frac{89\eta^2 + 110\eta + 34}{89\eta + 55}, \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{4 + \sqrt{65}}{7}.$$

Entre $C(5)$ et $\Gamma(5)$, l'ensemble des $c(\xi; 5)$ prend une infinité de valeurs dont la première est $\frac{2\sqrt{65}}{7}$ et dont les autres sont représentées dans l'ordre croissant par $\frac{\sqrt{(89h_r + 110h'_r + 34h''_r)^2 - 4}}{89h'_r + 55h''_r}$, où $r > 0$ prend toutes les valeurs entières paires croissantes, et où h_r, h'_r et h''_r sont définis par $h_0 = 1, h'_0 = 0, h''_0 = 1, h_1 = 12, h'_1 = 7, h''_1 = 4$ et par la formule de récurrence unique

$$h_{k+1} = 16h_k + h_{k-1}.$$

Comme $\frac{h_k}{h'_k}$ et $\frac{h''_k}{h'_k}$ tendent vers η lorsque k augmente indéfiniment, cette expression tend bien vers $\Gamma(5)$ lorsque r tend vers l'infini. Les valeurs successives de $c(\xi; 5)$ sont d'ailleurs les suivantes :

$$C(5) = \sqrt{5}, \quad 2,303502\dots, \quad 2,341209\dots, \quad \dots, \quad \Gamma(5) = 2,341211\dots$$

REMARQUES COMPLÉMENTAIRES.

Si $s = 2$, la condition $q \not\equiv 0 \pmod{s}$ équivaut à $q = 2p' + 1$, où p' est entier. En posant $\xi' = \frac{1}{2\xi}$, on a

$$|q(q\xi - p)| = \left| 2 \frac{p' + \frac{1}{2}}{\xi'} \left(p\xi' - p' - \frac{1}{2} \right) \right|;$$

lorsque $q\xi - p$ tend vers zéro, $\frac{p' + \frac{1}{2}}{p\xi'}$ tend vers un. La correspondance entre les irrationnels ξ et ξ' étant biunivoque, l'égalité $C(2) = 1$ peut se traduire, par conséquent :

COROLLAIRE 1. — Pour tout irrationnel ξ' il existe une infinité de couples d'entiers p, p' , avec $p \neq 0$ tels que $\left| p \left(p\xi' - p' - \frac{1}{2} \right) \right| < k$ lorsque $k > \frac{1}{4}$, cette proposition étant fausse pour $k < \frac{1}{4}$ (24).

La condition $q \not\equiv 0 \pmod{2}$ équivaut encore à $q = 4p' + 1$ ou $-q = 4p' + 1$, p' étant un autre entier. En posant cette fois $\xi' = \frac{1}{4\xi}$, $|q(q\xi - p)|$ est égal

$$\text{à } 4 \left| \frac{p' + \frac{1}{4}}{\xi'} \left(p\xi' - p' - \frac{1}{4} \right) \right| \text{ ou à } 4 \left| \frac{p' + \frac{1}{4}}{\xi'} \left(-p\xi' - p' - \frac{1}{4} \right) \right| \text{ et on en déduit :}$$

COROLLAIRE 2. — Pour tout irrationnel ξ' il existe une infinité de couples d'entiers p, p' , avec $p \neq 0$ tels que $\left| p \left(p\xi' - p' - \frac{1}{4} \right) \right| < k$ lorsque $k > \frac{1}{8}$, cette proposition étant fausse pour $k < \frac{1}{8}$.

(24) Cf. GRACE, loc. cit.

Enfin la condition $q \not\equiv 0 \pmod{3}$ équivalant à $q = 3p' + 1$, où $-q = 3p' + 1$ (p' entier), l'égalité $C(3) = \sqrt{5}$ peut se traduire de la même manière :

COROLLAIRE 3. — *Pour tout irrationnel ξ' il existe une infinité de couples d'entiers p, p' avec $p \neq 0$ tels que $\left| p \left(p\xi' - p' - \frac{1}{3} \right) \right| < k$ lorsque $k > \frac{1}{3\sqrt{5}}$, cette proposition étant fausse pour $k < \frac{1}{3\sqrt{5}}$.*

On peut obtenir d'une façon analogue un quatrième résultat du type précédent, relatif à la valeur minimum des bornes k telles que $\left| p \left(p\xi' - p' - \frac{1}{6} \right) \right| < k$ ait pour tout irrationnel ξ' une infinité de solutions entières p, p' avec $p \neq 0$. Pour cela, on remarque que l'égalité $6p' + 1 = \pm q$ est équivalente à $q \not\equiv 0 \pmod{2}$ et $\pmod{3}$. Or, des méthodes analogues à celles exposées au début de ce chapitre permettent d'aborder, parmi d'autres, les deux problèmes A et B suivants :

Déterminer le minimum, lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels, de $\overline{\lim}_{p,q} \frac{1}{|q(q\xi - p)|}$, où p et q prennent toutes les valeurs entières telles que :

Problème A : $p \not\equiv 0 \pmod{r}$, $q \not\equiv 0 \pmod{s}$, r et s entiers donnés $\neq 1$;

Problème B : $q \not\equiv 0 \pmod{s_1}$, $q \not\equiv 0 \pmod{s_2}$, s_1 et s_2 entiers donnés tels qu'aucun d'eux ne soit divisible par l'autre.

Pour étudier ces deux problèmes, appelons σ -fraction toute fraction $\frac{p}{q}$ satisfaisant aux conditions de congruence qui caractérisent le problème envisagé, qu'il s'agisse du problème A ou du problème B. Pour ces deux problèmes, on vérifie aisément que si deux fractions adjacentes $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ ne sont pas des σ -fractions, les quatre fractions définies par $\frac{p \pm p'}{q \pm q'}$ sont des σ -fractions.

Posons

$$c(\xi; \sigma) = \overline{\lim}_{p,q} \frac{1}{|q(q\xi - p)|},$$

où $\frac{p}{q}$ décrit l'ensemble des σ -fractions et $C(\sigma) = \min c(\xi; \sigma)$, où ξ décrit l'ensemble des irrationnels. Si ξ possède une infinité de réduites (au sens habituel) qui sont des σ -fractions, on a, d'après une propriété bien connue des réduites, $c(\xi; \sigma) \geq 1$. Sinon, soient $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P_n}{Q_n}$ deux réduites consécutives dans le développement de ξ en fraction continue, et qui ne sont pas des σ -fractions ; $\frac{P_{n-1} + P_n}{Q_{n-1} + Q_n}$ et $\frac{P_n - P_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}}$ sont alors des σ -fractions, puisque $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P_n}{Q_n}$ sont adjacentes. Or, on a

$$C'_n = \frac{1}{|(Q_n - Q_{n-1})[(Q_n - Q_{n-1})\xi - (P_n - P_{n-1})]|} = \frac{1}{Y_{n+1} + 1} - \frac{1}{X_{n+1} + 1},$$

$$C''_n = \frac{1}{|(Q_n + Q_{n-1})[(Q_n + Q_{n-1})\xi - (P_n + P_{n-1})]|} = \frac{1}{X_{n+1} - 1} - \frac{1}{Y_{n+1} - 1}.$$

Dans le domaine défini par $X_{n+1} > 1$ et $-1 < Y_{n+1} < 0$, C'_n et C''_n varient continuellement et en sens inverses en fonction de X_{n+1} et Y_{n+1} ; donc $\sup(C'_n, C''_n)$ est au moins égal à la valeur minimum commune que prennent C'_n et C''_n lorsque $C'_n = C''_n$, c'est-à-dire lorsque

$$X_{n+1} Y_{n+1} + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad C'_n = C''_n = \frac{X_{n+1}^2 + 1}{X_{n+1}^2 - 1},$$

expression qui est supérieure à 1. Il existe donc pour tout irrationnel ξ une infinité de σ -fractions $\frac{p}{q}$ telles que $|q(q\xi - p)| < 1$. On a donc quel que soit ξ , $c(\xi; \sigma) \geq 1$, d'où

$$C(\sigma) \geq 1.$$

On peut donner une minoration meilleure de $C(\sigma)$ dans le cas du problème B, où s_1 et s_2 ont un p. g. c. d. d différent de 1. Dans ce cas, en effet, puisque deux réduites consécutives de ξ sont toujours adjacentes, on est assuré que si la réduite $\frac{P_n}{Q_n}$ n'est pas une σ -fraction, la réduite $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ en est une, ainsi que $\frac{P_n - P_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}}$, et aussi, dans le cas où $d \geq 3$, $\frac{P_n - 2P_{n-1}}{Q_n - 2Q_{n-1}}$. On en déduit donc comme pour le problème de l'approximation de ξ par des s -fractions (§ 1), $c(\xi; \sigma) \geq 2$ et, si $d \geq 3$, $c(\xi; \sigma) \geq \sqrt{5}$. Comme, en sens inverse, on a évidemment $c(\xi; \sigma) \leq c(\xi; d)$, il vient

$$C(\sigma) = 2 \quad \text{si} \quad d = 2 \quad \text{et} \quad C(\sigma) = \sqrt{5} \quad \text{si} \quad d \geq 3.$$

Pour poursuivre l'étude de $c(\xi, \sigma)$ et, en particulier, pour déterminer $C(\sigma)$ dans le cas du problème A et dans celui du problème B où $(s_1, s_2) = 1$, on peut définir des σ -réduites de la même manière que pour les problèmes de l'approximation de ξ par des rationnels quelconques ou par des s -fractions. Une σ -réduite de ξ est, par définition, une σ -fraction telle qu'il n'en existe aucune autre à la fois meilleure et plus simple qu'elle (relativement à ξ). En classant les σ -réduites $\frac{p'}{q}$ dans l'ordre des $|q'\xi - p'|$ décroissants, on obtient la suite $\left\{ \frac{P'_m}{q'_m} \right\}$ de meilleure σ -approximation de ξ qui est telle que

$$c(\xi; \sigma) = \overline{\lim}_m \frac{1}{|q'_m(q'_m\xi - P'_m)|}.$$

Comparons-la avec la suite des réduites ordinaires de ξ .

D'après la définition, une réduite qui est une σ -fraction est une σ -réduite, et deux réduites consécutives qui sont des σ -fractions sont des σ -réduites consécutives. Pour étudier le cas où une réduite $\frac{P_n}{Q_n}$ n'est pas une σ -fraction, remarquons qu'on a établi au paragraphe 3 que la plus simple des fractions meilleures que $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ est, si l'on excepte $\frac{P_n}{Q_n}$, la réduite intermédiaire $\frac{P_n + P_{n-1}}{Q_n + Q_{n-1}}$, identique d'ailleurs à $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ si le quotient incomplet A_{n+1} vaut 1. Améliorons ce résultat en cherchant les fractions $\frac{p}{q}$ meilleures que $\frac{P_n - P_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}}$ et telles que $|q| \leq |Q_{n+1}|$. Comme les formules

$$p = aP_n + bP_{n-1}, \quad q = aQ_n + bQ_{n-1} \quad (a \text{ et } b \text{ entiers})$$

représentent tous les couples d'entiers p, q , les fractions $\frac{p}{q}$ cherchées sont caractérisées par :

$$|bX_{n+1} - a| < X_{n+1} + 1, \quad |bY_{n+1} - a| \leq A_{n+1} - Y_{n+1},$$

d'où l'on déduit

$$|b|(X_{n+1} - Y_{n+1}) < X_{n+1} - Y_{n+1} + A_{n+1} + 1, \quad \text{d'où} \quad |b| = 0, 1 \text{ ou } 2.$$

Or, $b = 2$ implique

$$|2X_{n+1} - a| < X_{n+1} + 1 \quad \text{et} \quad |a - 2Y_{n+1}| \leq A_{n+1} - Y_{n+1},$$

mais ce couple d'inégalités n'est satisfait par aucune valeur entière de a puisque $X_{n+1} > 1$, $-1 < Y_{n+1} < 0$ et que A_{n+1} est la partie entière de X_{n+1} . Ainsi, comme on peut toujours supposer $b \geq 0$, les fractions en question sont, comme au paragraphe 3, $\frac{P_n}{Q_n}$ qui correspond à $b = 0$, et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, et les réduites intermédiaires entre $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ qui correspondent à $b = 1$ et a entier tel que $0 \leq a \leq A_{n+1}$. Or, si $\frac{P_n}{Q_n}$ n'est pas une σ -fraction, ou bien $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ en est une, ou bien $\frac{P_n - P_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}}$ en est une. Il en résulte qu'on obtient la suite de meilleure σ -approximation de ξ en remplaçant dans la suite de meilleure approximation de ξ chaque réduite $\frac{P_n}{Q_n}$ qui n'est pas une σ -fraction par la suite des réduites intermédiaires entre les réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, et en supprimant, en outre, les réduites intermédiaires qui ne sont pas des σ -fractions. Cette dernière suppression ne peut jamais viser deux réduites intermédiaires consécutives $\frac{p'}{q'}$ et $\frac{p''}{q''}$, car deux telles fractions sont adjacentes à la réduite $\frac{P_n}{Q_n}$ différente d'une σ -fraction, et liées par

$$p'' = p' \pm P_n, \quad q'' = q' \pm Q_n.$$

On déduit aisément des considérations précédentes que le déterminant constitué par les termes de deux σ -réduites consécutives dans la suite de meilleure σ -approximation d'un irrationnel ξ vaut en valeur absolue 1 ou 2.

Considérons deux réduites ordinaires consécutives $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P_n}{Q_n}$ d'un irrationnel ξ , et l'ensemble des fractions définies par

$$p = aP_n + P_{n-1}, \quad q = aQ_n + Q_{n-1}, \quad 0 \leq a \leq A_{n+1},$$

Sur cet ensemble, $q(q\xi - p)$ est un trinôme du second degré en a dont les racines encadrent 0 et A_{n+1} ; il en résulte que le minimum de $|q(q\xi - p)|$ correspond à l'une des valeurs extrêmes 0 et A_{n+1} de a , tandis que le minimum de $|q(q\xi - p)|$ sur l'ensemble défini par $1 \leq a \leq A_{n+1} - 1$ (si $A_{n+1} \geq 2$) correspond à $a = 1$ ou $a = A_{n+1} - 1$. Ces deux remarques assurent

que $\overline{\lim}_m \frac{1}{|q'_m(q'_m \xi - p'_m)|}$ reste égal à $c(\xi; \sigma)$ lorsqu'on ne fait décrire à la σ -réduite $\frac{p'_m}{q'_m}$ qu'un ensemble plus restreint (choisi d'une manière analogue à celle du paragraphe 3) que la suite de meilleure σ -approximation de ξ , dans le cas où elle ne coïncide pas avec la suite de meilleure approximation de ξ . En particulier, si, à partir d'un certain rang, aucune réduite de ξ n'est une σ -fraction, on a

$$c(\xi; \sigma) = \sup \left(\overline{\lim}_n C'_n, \overline{\lim}_n C''_n \right),$$

avec, comme ci-dessus :

$$C'_n = \frac{1}{Y_{n+1} + 1} - \frac{1}{X_{n+1} + 1}, \quad C''_n = \frac{1}{X_{n+1} - 1} - \frac{1}{Y_{n+1} - 1}.$$

Or, envisageons, dans le cas du problème A, les nombres ξ définis par

$$\xi = (k_1 r \ k_2 s \ k_3 r \ \dots \ k_{m-1} r \ k_m s \ k_{m+1} r \ \dots)$$

et dans le cas du problème B où $(s_1, s_2) = 1$, les nombres ξ définis par

$$\xi = (A_0 \ k_1 s_1 \ k_2 s_2 \ k_3 s_1 \ \dots \ k_{m-1} s_1 \ k_m s_2 \ k_{m+1} s_2 \ \dots),$$

où k_m tend vers l'infini avec m dans les deux cas, et où, dans le second cas, A_0 est un entier positif quelconque et k_1 choisi tel que $k_1 s_1 + 1 \equiv 0 \pmod{s_2}$, ce qui est possible puisque $(s_1, s_2) = 1$. Dans les deux cas, aucune réduite de ξ (sauf la première) n'est une σ -fraction, et de plus $X_{n+1} \rightarrow +\infty$ et $Y_{n+1} \rightarrow 0$ lorsque n augmente indéfiniment. Donc C'_n et C''_n tendent vers un et l'on a $c(\xi; \sigma) = 1$. Ainsi, pour le problème A et pour le cas où s_1 et s_2 sont premiers entre eux dans le problème B, on a $C(\sigma) \leq 1$, d'où

$$C(\sigma) = 1,$$

d'après la minoration $C(\sigma) \geq 1$. La forme des exemples précédents montre de plus que cette borne inférieure $C(\sigma)$ est aussi une valeur d'accumulation pour l'ensemble des $c(\xi; \sigma)$ dans ces deux cas.

On peut résumer ainsi les résultats qu'on vient d'établir :

THÉORÈME 6. — *r et s étant deux entiers arbitrairement fixés au moins égaux à 2, pour tout irrationnel ξ il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $p \not\equiv 0 \pmod{r}$, $q \not\equiv 0 \pmod{s}$ et $|q(q\xi - p)| < k$ lorsque $k \geq 1$, cette proposition étant fautive si $k < 1$.*

THÉORÈME 6 bis. — *s_1 et s_2 étant deux entiers positifs tels qu'aucun d'eux ne soit un multiple de l'autre, pour tout irrationnel ξ il existe une infinité de fractions $\frac{p'}{q}$ telles que $q' \not\equiv 0 \pmod{s_1}$ et $\pmod{s_2}$ et $|q'(q'\xi - p')| < k'$, lorsque $k' \geq 1$, ou $k' \geq \frac{1}{2}$, ou $k' \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ respectivement dans les cas où $(s_1, s_2) = 1$, $(s_1, s_2) = 2$, $(s_1, s_2) \geq 3$, cette proposition étant fautive si $k' < 1$ ou $k' < \frac{1}{2}$, ou $k' < \frac{1}{\sqrt{5}}$ respectivement.*

Posant alors $s_1 = 2, s_2 = 3$, on déduit de la seconde de ces propositions, par une transformation analogue à celles du début de ces « remarques complémentaires », comme il a été annoncé :

COROLLAIRE 4. — *Pour tout irrationnel ξ' , il existe une infinité de couples d'entiers p, p' , avec $p \neq 0$, tels que $\left| p \left(p \xi' - p' - \frac{1}{6} \right) \right| < k$ lorsque $k > \frac{1}{6}$, cette proposition étant fausse pour $k < \frac{1}{6}$.*

Au chapitre suivant, une autre méthode permettra, indépendamment de ce qui précède, de déterminer plus généralement la valeur minimum de la borne k telle que $|p(p\xi' - p' - \rho)| < k$ ait une infinité de solutions entières p, p' ($p \neq 0$) quel que soit l'irrationnel ξ' , lorsque ρ est un rationnel non entier arbitrairement fixé, et non plus seulement, comme ici, lorsque ρ est égal à $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{6}$.

II. — Étude diophantienne de la forme $q\xi - p - \frac{t}{s}$.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier l'approximation de zéro par la forme linéaire non homogène $q\xi - p - \rho$, où ρ est un nombre rationnel donné et où p et q peuvent prendre toutes les valeurs entières. Le cas où ξ est un nombre rationnel est banal, et dans celui où ρ est un entier, on se ramène immédiatement au problème bien connu de l'approximation de ξ par des nombres rationnels quelconques. Nous supposons donc désormais ξ *irrationnel* et ρ *rationnel non entier*. Nous nous attacherons particulièrement à donner, en fonction de ρ , des résultats valables pour tout ξ , lorsque ρ est fixé, Posant $\rho = \frac{t}{s}$ (t, s premiers entre eux $s \geq 2$), nous rechercherons une méthode de calcul de la quantité

$$G\left(\xi; \frac{t}{s}\right) = \lim_{p, q} \left| q \left(q \xi - p - \frac{t}{s} \right) \right| \quad (q \neq 0)$$

et nous déterminerons ensuite sa borne supérieure $G\left(\frac{t}{s}\right)$ lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels.

La limitation générale $G\left(\frac{t}{s}\right) \leq \frac{1}{4}$ résulte immédiatement des travaux classiques de Minkowski. D'autre part, quatre valeurs de $G\left(\frac{t}{s}\right)$ découlent des résultats signalés à la fin du chapitre précédent (corol. 1, 2, 3, 4); ce sont

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3\sqrt{5}}, \quad G\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}, \quad G\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}.$$

1. On a évidemment

$$s^2 q \left(q \xi - p - \frac{t}{s} \right) = v(v\xi - u),$$

en posant $v = sq$ et $u = sp + t$; il en résulte que

$$s^2 G\left(\xi; \frac{t}{s}\right) = \lim_{\substack{u, v \\ u, v}} |v(\nu\xi - u)|,$$

où u et v prennent toutes les valeurs entières satisfaisant aux conditions $u \equiv t$, $v \equiv 0 \pmod{s}$, avec $v \neq 0$. On est ainsi conduit à examiner, d'une manière apparemment plus générale, la quantité

$$H(\xi; s, a, b) = \lim_{\substack{u, v \\ u, v}} (v(\nu\xi - u)|,$$

où u et v prennent toutes les valeurs entières satisfaisant aux conditions

$$(1) \quad u \equiv a, \quad v \equiv b \pmod{s}, \quad v \neq 0,$$

où a et b sont deux entiers donnés, premiers dans leur ensemble avec s ($s \geq 2$)
On a ainsi :

$$s^2 G\left(\xi; \frac{t}{s}\right) = H(\xi; s, t, 0).$$

Montrons qu'en réalité, l'ensemble des valeurs que prend $H(\xi; s, a, b)$ lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels est indépendant de a et b pourvu que s, a, b restent premiers entre eux dans leur ensemble.

Considérons à cet effet la substitution modulaire $x \rightarrow x', y \rightarrow y'$ définie par $x = Ax' + By', y = Cx' + Dy'$ (A, B, C, D entiers, $AD - BC = \pm 1$) qui associe biunivoquement les couples d'entiers x, y et x', y' . Remarquons que les fractions $\frac{y}{x}$ telles que $y' = 0$ étant toutes égales, on a ⁽²⁵⁾

$$\lim_{\substack{u, v \\ u, v}} |v(\nu\xi - u)| = +\infty$$

si l'on se borne, parmi les couples u, v vérifiant (1), à ceux pour lesquels $v' = 0$, en désignant par u', v' les transformés de u, v par la substitution modulaire; par suite $\lim_{\substack{u, v \\ u, v}} |v(\nu\xi - u)|$ ne change pas si l'on se borne, parmi les couples u, v vérifiant (1) à ceux pour lesquels $v' \neq 0$. Introduisons alors l'irrationnel ξ' défini par $\xi = \frac{A\xi' + B}{C\xi' + D}$. On a

$$|v(\nu\xi - u)| = \left| \frac{Cu' + Dv'}{C\xi' + D} (v'\xi' - u') \right|$$

et, par suite, $\lim_{\substack{u, v \\ u, v}} |v(\nu\xi - u)|$ [où u et v vérifient (1)] est égale à $\lim_{\substack{u', v' \\ u', v'}} |v'(v'\xi' - u')|$
où u' et v' prennent toutes les valeurs entières satisfaisant à

$$u' \equiv a', \quad v' \equiv b' \pmod{s}, \quad v' \neq 0,$$

(25) Si $C \neq 0$; sinon, $v' = 0$ implique $v = 0$, incompatible avec les conditions (1).

a', b' étant le couple transformé de a, b par la substitution modulaire envisagée. On a ainsi

$$H(\xi; s, a, b) = H(\xi'; s, a', b').$$

Pour établir le résultat annoncé, il suffit donc de montrer (puisque la correspondance entre ξ et ξ' est biunivoque) que, si s, a, b sont premiers entre eux dans leur ensemble, on peut déterminer A, B, C, D de façon par exemple que $a' = 1$ et $b' = 0$, c'est-à-dire par les conditions

$$A \equiv a, \quad C \equiv b \pmod{s}, \quad AD - BC = \pm 1.$$

Or, puisque $(s, a, b) = 1$, on peut trouver deux nombres A et C respectivement congrus à a et b modulo s et premiers entre eux; B et D seront ensuite déterminés grâce à l'identité de Bezout. Ainsi :

THÉOREME 1. — Lorsque t, a et b varient, s restant fixe avec $(t, s) = 1$ et $(s, a, b) = 1$, les deux fonctions de $\xi : G\left(\xi; \frac{t}{s}\right)$ et $H(\xi; s, a, b)$ conservent globalement les mêmes ensembles de valeurs, celui de $G\left(\xi; \frac{t}{s}\right)$ étant déduit de celui de $H(\xi; s, a, b)$ par l'homothétie de rapport $\frac{1}{s^2}$.

En particulier, si l'on désigne par $H(s)$ la borne supérieure de $H(\xi; s, a, b)$ lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels (cette notation étant légitimée par ce qui précède), on a la relation

$$s^2 G\left(\frac{t}{s}\right) = H(s).$$

Remarque 1. — On peut ramener immédiatement au problème que nous étudions celui de l'approximation de zéro par une forme $\alpha p + \beta q + \gamma$ lorsqu'il existe une relation linéaire et homogène à coefficients entiers entre α, β et γ , sans que le coefficient de γ puisse être égal à 1 et sans qu'il en existe une entre α et β (car sinon le problème serait trivial). En effet, si $s\gamma - \alpha\alpha - b\beta = 0$, s, α, b étant des entiers qu'on peut supposer premiers entre eux dans leur ensemble, avec $s \geq 2$, on a

$$s^2 q(\alpha p + \beta q + \gamma) = \alpha qs \left[(ps + a) + \frac{\beta}{\alpha}(qs + b) \right]$$

et l'on est ramené à l'approximation de $-\frac{\beta}{\alpha}$ par des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont respectivement congrus à a et b modulo s . On en déduit :

$$\lim_{\substack{p, q \\ p, q}} |q(\alpha p + \beta q + \gamma)| = \frac{|\alpha|}{s^2} H\left(-\frac{\beta}{\alpha}; s, \alpha, b\right) \leq |\alpha| G\left(\frac{1}{s}\right) \quad (\alpha \neq 0).$$

Remarque 2. — Si

$$L(p, q) = \alpha p + \beta q + \gamma \quad \text{et} \quad L'(p, q) = \alpha' p + \beta' q + \gamma'$$

sont deux formes linéaires du type précédent, telles que de plus $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$,

la limite inférieure du produit $|L(p, q)L'(p, q)|$ lorsque p et q prennent toutes les valeurs entières est obtenue en donnant au couple p, q un ensemble infini de valeurs qui rendent $|L|$ ou $|L'|$ arbitrairement grande, l'autre forme tendant vers zéro. L'étude de $\lim_{p, q} |LL'|$ se ramène donc à celles de $\lim_{p, q} |qL|$ et de $\lim_{p, q} |qL'|$, avec $q \neq 0$. Si donc on a

$$s\gamma - \alpha x - b\beta = 0 \quad \text{et} \quad s'\gamma' - \alpha' x' - b'\beta' = 0,$$

avec

$$(s, a, b) = 1, \quad (s', a', b') = 1, \quad s \geq 2 \quad \text{et} \quad s' \geq 2,$$

on en conclut

$$\lim_{p, q} |L(p, q)L'(p, q)| = |\alpha\beta' - \alpha'\beta| \inf \left[\frac{1}{s^2} H\left(-\frac{\beta}{\alpha}; s, a, b\right); \frac{1}{s'^2} H\left(-\frac{\beta'}{\alpha'}; s', a', b'\right) \right],$$

d'où

$$\lim_{p, q} |L(p, q)L'(p, q)| \leq |\alpha\beta' - \alpha'\beta| \inf \left[G\left(\frac{1}{s}\right), G\left(\frac{1}{s'}\right) \right].$$

2. Dans le but d'obtenir de $|\nu(\nu\xi - u)|$ une expression qui permette un calcul commode de $H(\xi; s, a, b)$, introduisons ⁽²⁶⁾ le développement $(a_0 a_1 \dots a_n \dots)$ de ξ en fraction continue ordinaire. Soit $\frac{p_n}{q_n}$ la réduite de rang n et posons

$$x_n = -\frac{q_{n-2}\xi - p_{n-2}}{q_{n-1}\xi - p_{n-1}} \quad \text{et} \quad y_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}.$$

Comme $|p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}| = 1$, on peut représenter toute fraction $\frac{u}{\nu}$ satisfaisant aux conditions (1) sous la forme

$$u = cp_{n-2} + dp_{n-1}, \quad \nu = cq_{n-2} + dq_{n-1},$$

avec

$$(2) \quad c = c_n + hs, \quad d = d_n + ks, \quad 0 \leq c_n < s, \quad 0 \leq d_n < s,$$

où toutes les lettres représentent des nombres entiers. Nous désignerons par $f_n^{h, k}$ la fraction $\frac{u}{\nu}$ qui admet la représentation précédente. D'autre part, comme

$$q_{n-1}(q_{n-1}\xi - p_{n-1})(x_n - y_n) = \pm 1,$$

on a

$$|\nu(\nu\xi - u)| = \left| \frac{(d - cx_n)(d - cy_n)}{x_n - y_n} \right|.$$

⁽²⁶⁾ Les réduites, les quotients incomplets et les expressions x_n et y_n seront désormais notés avec des minuscules. D'une façon générale, les notations du chapitre II seront valables pour le chapitre III, mais indépendantes de celles du chapitre I.

D'autre part, bien que l'on ne puisse plus désormais, à cause des conditions (1), confondre $\frac{u}{\nu}$ et $\frac{-u}{-\nu}$, on supposera toujours — ce qui reste licite — les dénominateurs q_n des réduites tous positifs, ainsi que les quotients incomplets a_n , sauf peut-être a_0 , qui a le signe de ξ , conformément aux conventions de la note ⁽¹³⁾ p. 206.

Telle est l'expression cherchée, qui sera désignée par $H(c, d; x_n, y_n)$, ou plus brièvement par $H_n^{h,k}$.

Donnons quelques formules de récurrence utiles pour la suite. Supposons que $f_n^{h,k}$ et $f_{n+1}^{h',k'}$ soient identiques, et remplaçons dans l'expression de $f_{n+1}^{h',k'}$ par p_n et q_n par $a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ et $a_n q_{n-1} + q_{n-2}$; il vient :

$$f_{n+1}^{h',k'} = \frac{p_{n-2}(d_{n+1} + k's) + p_{n-1}[a_n d_{n+1} + c_{n+1} + (a_n k' + h')s]}{q_{n-2}(d_{n+1} + k's) + q_{n-1}[a_n d_{n+1} + c_{n+1} + (a_n k' + h')s]}.$$

La comparaison avec l'expression de $f_n^{h,k}$ fournit les congruences :

$$d_{n+1} \equiv c_n, \quad a_n d_{n+1} + c_{n+1} \equiv d_n \pmod{s}$$

qui d'après les inégalités de (2), se réduisent à :

$$(3) \quad d_{n+1} = c_n, \quad c_{n+1} = d_n - a_n c_n + g_n s,$$

où g_n est le plus petit entier au moins égal à $\frac{a_n c_n - d_n}{s}$. De plus, on a les formules :

$$(3') \quad \begin{cases} k' = h, & h' = k - a_n h - g_n, \\ h = k', & k = h' + a_n k' + g_n. \end{cases}$$

Ainsi, la forme de l'expression $H(c, d; x_n, y_n)$ et les formules de récurrence (3) montrent que $H(\xi; s, a, b)$ est entièrement déterminé par s et par la donnée, à partir d'un certain rang, de la suite des quotients incomplets a_n et de celle des coefficients c_n associés (que l'on peut réduire à la donnée de deux d'entre eux par exemple consécutifs).

D'autre part, si l'on se donne arbitrairement une suite indéfinie d'entiers strictement positifs $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ et un couple d'entiers c_0, d_0 ($0 \leq c_0 < s$, $0 \leq d_0 < s$), sous réserve que s, c_0, d_0 soient premiers entre eux dans leur ensemble, on peut toujours trouver un nombre ξ qui admette, à partir d'un certain rang, les entiers b_n, b_{n+1}, \dots pour quotients incomplets successifs, associés aux coefficients c_n, c_{n+1}, \dots déduits de c_0 et d_0 par les formules (3) après remplacement des a_n par les b_n . Il suffit de choisir $\xi = \frac{A + B\eta}{C + D\eta}$, avec $\eta = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ et où les entiers A, B, C, D vérifient les conditions :

$$(4) \quad A c_0 + B d_0 \equiv a, \quad C c_0 + D d_0 \equiv b \pmod{s}, \quad AD - BC = \pm 1.$$

En effet, en désignant par $\frac{p'_n}{q'_n}$ les réduites successives de η , les formules (3) qui définissent c_n et d_n se traduisent par les congruences, valables pour tout n :

$$c_n p'_{n-2} + d_n p'_{n-1} \equiv d_0, \quad c_n q'_{n-2} + d_n q'_{n-1} \equiv c_0 \pmod{s}.$$

Dans la partie commune des développements en fraction continue de ξ et η , dont l'existence est assurée par $AD - BC = \pm 1$, les réduites $\frac{p_m}{q_m}$ de ξ se

déduisent des réduites $\frac{p'_n}{q'_n}$ de η par

$$p_m = A q'_n + B p'_n, \quad q_m = C q'_n + D p'_n \quad (n - m \text{ constant}),$$

d'où d'après (4),

$$c_n p_{m-2} + d_n p_{m-1} = A (c_n q'_{n-2} + d_n q'_{n-1}) + B (c_n p'_{n-2} + d_n p'_{n-1}) \equiv A c_0 + B d_0 \equiv a$$

et, de même, $c_n q_{m-2} + d_n q_{m-1} \equiv b$, ce qui établit bien que les coefficients c_n , d_n sont associés à b_n pour ξ comme pour η .

Or, on a vu au paragraphe précédent que les équations (4) sont susceptibles d'une solution en A, B, C, D entiers dans le cas où $c_0 = 1$ et $d_0 = 0$, pourvu que $(s, a, b) = 1$. Inversement si l'on a $a = 1$ et $b = 0$, ces équations se réduisent à :

$$D \equiv \varepsilon c_0, \quad C \equiv -\varepsilon d_0 \pmod{s}, \quad AD - BC = \varepsilon = \pm 1$$

et sont résolubles en A, B, C, D entiers pourvu que

$$(s, c_0, d_0) = 1.$$

Par suite, les équations (4) sont résolubles en A, B, C, D entiers quels que soient a, b, c_0, d_0 pourvu que

$$(s, a, b) = (s, c_0, d_0) = 1.$$

De deux solutions A, B, C, D et A', B', C', D' des équations (4), on déduit deux nombres

$$\xi = \frac{A + B\eta}{C + D\eta} \quad \text{et} \quad \xi' = \frac{A' + B'\eta}{C' + D'\eta}$$

que nous qualifierons d'*équivalents* (relativement au triplet s, a, b). On peut caractériser autrement cette relation d'équivalence. Considérons en effet les deux substitutions modulaires Σ et Σ' suivantes :

$$\begin{aligned} \Sigma : \quad u &= A c + B d, & v &= C c + D d, \\ \Sigma' : \quad u' &= A' c + B' d, & v' &= C' c + D' d. \end{aligned}$$

Le produit $\Sigma'^{-1} \Sigma$ est une substitution modulaire $S(a, b)$:

$$u = A_1 u' + B_1 v', \quad v = C_1 u' + D_1 v'$$

telle que

$$a \equiv A_1 a + B_1 b, \quad b \equiv C_1 a + D_1 b \pmod{s}$$

et l'on a

$$\xi = \frac{A_1 \xi' + B_1}{C_1 \xi' + D_1}.$$

Les substitutions $S(a, b)$ définies par les conditions de congruence précédentes constituent un sous-groupe du groupe modulaire puisqu'elles sont caractérisées par la propriété de laisser invariant, modulo s , le couple d'entiers a, b . D'autre part, deux irrationnels ξ et ξ' qui se correspondent dans la relation homographique induite par une substitution $S(a, b)$ ont, à partir d'un certain rang,

les mêmes quotients incomplets et des réduites homologues dans $S(a, b)$, donc aussi les mêmes coefficients c_n et d_n associés aux quotients égaux a_n : Les relations homographiques induites par les substitutions $S(a, b)$ caractérisent donc les nombres équivalents ξ et ξ' . Pour deux tels nombres on a

$$H(\xi; s, a, b) = H(\xi'; s, a, b),$$

et si une suite de couples d'entiers u, v satisfaisant à (1) est telle que $|\nu(\nu\xi - u)|$ tende vers $H(\xi; s, a, b)$, la suite des couples u', v' transformés des u, v par $S(a, b)$ est telle que $|\nu'(\nu'\xi' - u')|$ tende vers $H(\xi'; s, a, b)$. *Le sous-groupe des substitutions $S(a, b)$ joue pour le problème qui nous occupe un rôle analogue à celui du groupe modulaire pour le problème de l'approximation des irrationnels par des rationnels quelconques.*

3. Parmi l'ensemble des fractions $\frac{u}{v}$ satisfaisant à (1), nous allons définir une famille plus restreinte de fractions $\frac{u}{v}$ telle que la limite inférieure de $|\nu(\nu\xi - u)|$ lorsque $\frac{u}{v}$ décrit cette famille soit égale à $\lim_{u, v} |\nu(\nu\xi - u)|$, où u et v prennent toutes les valeurs satisfaisant à (1), c'est-à-dire égale à $H(\xi; s, a, b)$.

Associons à chaque indice n l'ensemble \mathfrak{Z}_n des fractions $f_n^{h,k}$ telles que

$$\left| \frac{q_{n-1}\xi - p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \leq \left| \frac{\nu\xi - u}{\nu} \right| \leq \left| \frac{q_{n-2}\xi - p_{n-2}}{q_{n-2}} \right|,$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad 1 \leq \left| \frac{\frac{d}{c} - x_n}{d - y_n} \right| \leq \left| \frac{x_n}{y_n} \right|.$$

La réunion des ensembles \mathfrak{Z}_n à partir de $n = 1$ (en désignant par $\frac{p-1}{q-1}$ la réduite préliminaire $\frac{1}{0}$) est évidemment l'ensemble des fractions satisfaisant à (1). De plus, comme $x_n > 1$ et $-1 \leq y_n \leq 0$, la condition (5) de définition de \mathfrak{Z}_n se traduit par

$$0 \leq \frac{d}{c} \leq \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{ou} \quad 0 \leq -\frac{c}{d} \leq \frac{-\frac{1}{y_n} - \frac{1}{x_n}}{2};$$

\mathfrak{Z}_n peut donc être décomposé en quatre sous-ensembles Z_n, Z'_n, Z''_n, Z'''_n . Z_n est défini par les conditions (2) et par les inégalités

$$(6) \quad c \geq 0, \quad d \geq 0, \quad 0 \leq \frac{d}{c} \leq \frac{1}{2}(x_n + y_n);$$

on obtient la définition de Z'_n en conservant les conditions (2) et en effectuant dans les inégalités (6) la substitution (qui sera désignée par R) de $d, -c, -\frac{1}{y_n}$ et $-\frac{1}{x_n}$ à c, d, x_n et y_n respectivement; les substitutions itérées R^2 et R^3 livrent de même les définitions de Z''_n et Z'''_n respectivement.

L'identité

$$H(c, d; x_n, y_n) = H\left(d, -c; -\frac{1}{y_n}, -\frac{1}{x_n}\right)$$

permet de se ramener, pour l'étude des variations de $H_n^{h,k}$ aux fractions $f_n^{h,k}$ de Z_n .

Or, lorsque $f_n^{h,k}$ appartient à Z_n , $cx_n - d$ et $d - cy_n$ restent positifs; donc

$$H_n^{h,k} = \frac{(cx_n - d)(d - cy_n)}{x_n - y_n}.$$

Cette fonction est croissante par rapport à chacune des variables c (ou h) et d (ou k) dans le domaine défini par les inégalités (6); elle est même croissante par rapport à c (ou h) dans le domaine \mathcal{O}_n défini par $c \geq 0$, $d \geq 0$ et $0 \leq \frac{d}{c} \leq x_n$, qui contient le précédent. On en déduit immédiatement

$$H_n^{h,k} \geq H_n^{h,0} \geq H_n^{i,0},$$

où i est le plus petit entier tel que $f_n^{i,0}$ appartienne à l'ensemble correspondant à \mathcal{O}_n ; mais, puisque $x_n > 1$, $f_n^{1,0}$ appartient toujours à cet ensemble. On obtient donc le :

LEMME 1. — Lorsque $f_n^{h,k}$ décrit Z_n , $H_n^{h,k}$ reste au moins égal à $H_n^{0,0}$ si $c_n x_n - d_n > 0$ et à $H_n^{1,0}$ si $c_n x_n - d_n < 0$.

Il sera plus commode d'utiliser l'énoncé suivant :

LEMME 2. — Lorsque $f_n^{h,k}$ décrit Z_n , $H_n^{h,k}$ reste au moins égal au minimum de $H_n^{0,0}$ et de $H_n^{0,-1}$, et même à $H_n^{0,0}$ si $d_n = 0$.

Pour prouver le lemme 2, il suffit, d'après le lemme 1, de montrer que si $c_n x_n - d_n < 0$ et $H_n^{1,0} < H_n^{0,0}$, alors $H_n^{1,0} > H_n^{0,-1}$. Or, ces dernières hypothèses entraînent

$$[(c_n + s)x_n - d_n][d_n - y_n(c_n + s)] < (d_n - c_n x_n)(d_n - c_n y_n),$$

ce qui, compte tenu de l'inégalité évidente $d_n - y_n(c_n + s) > d_n - c_n y_n$ implique $(c_n + s)x_n - d_n < d_n - c_n x_n$ ou encore $d_n > x_n \left(c_n + \frac{s}{2}\right)$, d'où en particulier $d_n > \frac{s}{2}$. On en déduit, dans le cas où $d_n - s - y_n c_n < 0$, l'inégalité

$$d_n - y_n(c_n + s) > |d_n - s - y_n c_n|,$$

cette inégalité étant évidente dans le cas contraire. Comme on a aussi

$$(c_n + s)x_n - d_n > c_n x_n - d_n + s,$$

on obtient bien $H_n^{1,0} > H_n^{0,-1}$, et le lemme 2 est démontré.

Les lemmes 1 et 2 peuvent être transposés de Z_n à Z'_n , Z''_n et Z'''_n à l'aide des

substitutions R, R^2, R^3 . Les quantités qui interviennent dans le lemme 2 ainsi transposé sont alors respectivement :

— Pour $Z'_n : H_n^{-1,0}$ et $H_n^{0,0}$, et si $c_n = 0$, on peut se restreindre à $H_n^{0,0}$ d'après le lemme 1;

— Pour $Z''_n : H_n^{-1,-1}$ et $H_n^{-1,0}$, sauf si $c_n = 0$, auquel cas ce sont $H_n^{0,-1}$ et $H_n^{0,0}$; si $d_n = 0$ [alors $c_n \neq 0$ puisque $(s, c_n, d_n) = 1$], on peut se restreindre à $H_n^{-1,0}$;

— Pour $Z'''_n : H_n^{0,-1}$ et $H_n^{-1,-1}$, sauf si $d_n = 0$, auquel cas ce sont $H_n^{0,0}$ et $H_n^{-1,0}$; si $c_n = 0$, on peut se restreindre à $H_n^{0,-1}$,

En résumé, on peut donc énoncer :

LEMME 3. — Lorsque $f_n^{h,k}$ décrit \mathfrak{Z}_n , $H_n^{h,k}$ reste au moins égal au minimum qu'il prend pour les deux ou quatre fractions $\frac{u}{v}$ définies par les conditions (2) et par $|c| < s, |d| < s$.

Les fractions ainsi définies seront nommées *fractions privilégiées de ξ au rang n* (relativement au triplet s, a, b). Elles seront désignées dans la suite par des notations abrégées : f_n, f'_n, f''_n, f'''_n remplaceront respectivement $f_n^{0,0}, f_n^{-1,0}, f_n^{-1,-1}, f_n^{0,-1}$ et H_n, H'_n, H''_n, H'''_n remplaceront $H_n^{0,0}, H_n^{-1,0}, H_n^{-1,-1}, H_n^{0,-1}$. Dans le seul cas où $c_n d_n = 0$, les fractions privilégiées sont au nombre de deux : f_n et f'''_n si $c_n = 0, f_n$ et f'_n si $d_n = 0$.

Désignons encore par \mathfrak{H}_n le minimum des quatre quantités H_n, H'_n, H''_n, H'''_n (réduites à deux dans le cas où $c_n d_n = 0$). Le lemme 3 indique alors que, lorsque $f_n^{h,k}$ décrit \mathfrak{Z}_n , on a $H_n^{h,k} \geq \mathfrak{H}_n$. Du fait que l'ensemble des fractions satisfaisant à (1) coïncide avec la réunion des \mathfrak{Z}_n résulte donc que

$$\lim_n \mathfrak{H}_n \leq \lim_{h,k} H_n^{h,k} = H(\xi; s, a, b),$$

la dernière limite inférieure étant calculée pour l'ensemble des fractions satisfaisant à (1). Mais cet ensemble contient toutes les fractions privilégiées de ξ ; on aura donc

$$\lim_n \mathfrak{H}_n = \lim_{h,k} H_n^{h,k}$$

si aucune fraction n'est privilégiée à une infinité de rangs. Or, si la fraction $\frac{u}{v}$ était privilégiée à une infinité de rangs n , les coefficients c et d correspondants pour cette fraction seraient bornés en valeur absolue; il existerait donc une infinité de rangs n pour lesquels c et d prendraient les mêmes valeurs fixes. Des relations

$$u = cp_{n-2} + dp_{n-1}, \quad v = cq_{n-2} + dq_{n-1},$$

on tirerait alors

$$v\xi - u = c(q_{n-2}\xi - p_{n-2}) + d(q_{n-1}\xi - p_{n-1}),$$

ce qui est impossible puisque, pour n assez grand, le second membre est arbitrairement petit.

On a donc démontré le :

THEOREME A :

$$H(\xi; s, a, b) = \lim_{\frac{1}{n}} \mathcal{H}_n,$$

qui peut encore s'exprimer : *Pour le calcul de $H(\xi; s, a, b)$, on peut se restreindre à la considération des fractions privilégiées de ξ .*

4. Le rang n étant arbitraire mais fixe dans ce paragraphe, nous allons chercher des majorations valables quels que soient x_n et y_n du minimum \mathcal{H}_n des quatre quantités H_n, H'_n, H''_n, H'''_n (éventuellement réduites à deux). Comme les ensembles de valeurs x_n et $-\frac{1}{y_n}$ sont les mêmes, savoir l'intervalle $(1, +\infty)$, ainsi que ceux de y_n et $-\frac{1}{x_n}$, savoir l'intervalle $(-1, 0)$, on peut sans restreindre la généralité, supposer grâce à l'existence des substitutions R, R^2 ou R^3 , qu'à ce rang n , c'est pour la fraction f_n que les coefficients de $p_{n-2}, q_{n-2}, p_{n-1}, q_{n-1}$ ont la plus petite valeur absolue, c'est-à-dire que :

$$(h) \quad 0 \leq c_n \leq \frac{s}{2}, \quad 0 < d_n \leq \frac{s}{2}$$

(car si $c_n d_n = 0$, on peut, pour les mêmes raisons, supposer que $c_n = 0$ et $d_n \neq 0$; rappelons qu'on n'a jamais $c_n = d_n = 0$). Cette hypothèse (h) vaudra, sauf mention du contraire, pour tout ce paragraphe, où l'on supprimera, en outre, l'indice n (fixe) après les lettres $c, d, x, y, f, H, \mathcal{H}$.

Pour obtenir des majorations de \mathcal{H} , nous distinguerons plusieurs cas suivant les signes des facteurs des numérateurs de H, H', H'', H''' . Dans chacun de ces cas, celles de ces quatre quantités qui seront envisagées seront des fonctions continues et monotones par rapport à chaque variable x et y dans les intervalles de variation considérés, qui seront respectivement intérieurs à $(1, +\infty)$ et $(-1, 0)$.

Supposons d'abord $d - cx > 0$.

H est une fonction croissante de y et décroissante de x . Donc

$$H(c, d; x, y) < H(c, d; 1, 0) = (d - c)d.$$

Par suite :

— Si s est impair, $d \leq \frac{1}{2}(s - 1)$, donc $H < \frac{1}{4}(s - 1)^2$;

— Si s est pair et différent de 2, comme on ne peut avoir $c = 0$ avec $d = \frac{s}{2}$ sans

que (s, c, d) soit différent de 1, on a $H < \frac{1}{4}s(s - 2)$;

— Si $s = 2$, (h) impose $d = 1$ et $c = 0$ ou 1, d'où $H < 1$.

On peut donc énoncer :

LEMME 4. — *Dans l'hypothèse (h) , $d - cx > 0$ implique :*

— Si $s = 2$, $H < 1$;

— Si s est pair et différent de 2, $H < \frac{1}{4}s(s - 2)$;

— Si s est impair, $H < \frac{1}{4}(s - 1)^2$.

Supposons maintenant $d - cx < 0$. Dans ce cas, c (et aussi d par hypothèse) n'est pas nul; il y a effectivement quatre fractions privilégiées. De plus $-cy - s + d < 0$ d'après (h); donc H est une fonction croissante de x et décroissante de y , tandis que les sens de variation de H''' sont opposés. Comparons H et H''' . Le maximum de H et le minimum de H''' (non atteints) correspondent aux mêmes valeurs: $+\infty$ pour x et -1 pour y . On a

$$\max H = c(c + d), \quad \min H''' = c(s - c - d).$$

Deux cas sont donc à distinguer :

— Si $c + d \leq \frac{s}{2}$, $H < H'''$ et, de plus, $H < \frac{s}{2} c$;

— Si $c + d > \frac{s}{2}$, $\max H > \min H'''$; de plus, le minimum de H et le maximum de H''' (non atteints) correspondent aux mêmes valeurs 1 ou $\frac{d}{c}$ pour x et 0 pour y ; par suite : si $d \geq c$,

$$\min H = 0 < \max H'''$$

et si $d < c$,

$$\min H = (c - d)d < (s + d - c)(s - d) = \max H'''.$$

Donc, si $c + d > \frac{s}{2}$, $\inf(H, H''')$ est toujours au plus égal à la valeur commune maximum de H et H''' lorsque $H = H'''$, c'est-à-dire lorsque

$$(7) \quad 2c^2xy + c(s - 2d)(x + y) + d^2 + (s - d)^2 = 0,$$

équation qui définit y comme fonction croissante de x . Lorsque cette condition (7) est réalisée, on a

$$H = H''' = \frac{s}{2(x - y)} [s - 2d + c(x + y)],$$

d'où, en différentiant :

$$\frac{2(x - y)^2}{s} \delta H = -(s - 2d + 2cy) \delta x + (s - 2d + 2cx) \delta y.$$

Or la différentiation de (7) donne

$$(s - 2d + 2cy) \delta x + (s - 2d + 2cx) \delta y = 0,$$

d'où

$$\frac{(x - y)^2}{s} \delta H = (s - 2d + 2cx) \delta y.$$

Lorsque la condition (7) est réalisée, avec $d - cx < 0$, H et H''' croissent donc avec x et y . Le maximum de $\inf(H, H''')$ correspond donc aux valeurs $+\infty$ pour x et $-\frac{s - 2d}{2c}$ (qui est bien compris entre -1 et 0) pour y ; ce maximum, non atteint, vaut $\frac{s}{2} c$. Par suite :

LEMME 5. — Dans l'hypothèse (h), $d - cx < 0$ implique :

$$\inf(H, H''') < \frac{s}{2} c.$$

Supposant toujours $d - cx < 0$, comparons H et H' dans le cas

où $d + (s - c)y \geq 0$. Les sens de variation de H et H' en fonction de x et y sont opposés; les extrema de H et H' correspondent encore aux mêmes valeurs : $+\infty$ pour x et $-\frac{d}{s-c}$ pour y d'une part, 1 ou $\frac{d}{c}$ pour x et 0 pour y d'autre part. On a, d'une part, $\min H' = 0 < \max H$ et, d'autre part, $\min H = 0 < \max H'$ si $d \geq c$ et $\min H = (c - d)d < (s - c + d)d = \max H'$ si $d < c$. Donc $\inf(H, H')$ est toujours, dans ces hypothèses, inférieur ou égal à la valeur commune maximum de H et H' lorsque $H = H'$, c'est-à-dire lorsque

$$[c^2 + (s - c)^2]xy + (s - 2c)d(x + y) + 2d^2 = 0.$$

Un calcul analogue à celui qui a été fait à propos de la comparaison de H et H'' permet d'établir que cette valeur commune maximum de H et H' correspond aux valeurs $+\infty$ pour x et $-\frac{2c(s-c)}{c^2 + (s-c)^2}$ pour y et vaut

$$\frac{s}{2}d \frac{2c(s-c)}{c^2 + (s-c)^2} \leq \frac{s}{2}d.$$

Par suite :

LEMME 6. — Dans l'hypothèse (h), $d - cx < 0$ et $d + (s - c)y \geq 0$ impliquent :

$$\inf(H, H') < \frac{s}{2}d \frac{2c(s-c)}{c^2 + (s-c)^2},$$

d'où en particulier :

$$\inf(H, H') < \frac{s}{2}d.$$

Enfin, si $d - cx < 0$ et $d + (s - c)y < 0$, H' est une fonction croissante de x et décroissante de y . Donc $H' < H(c - s, d; +\infty, -1)$, c'est-à-dire $H' < (s - c)(s - c - d)$. Par suite :

LEMME 7. — Dans l'hypothèse (h), $d - cx < 0$ et $d + (s - c)y < 0$ impliquent :

$$H' < (s - c)(s - c - d).$$

Regroupons ces résultats, en tenant toujours compte de l'hypothèse (h) :

— Si $s = 2$, d'après les lemmes 4 et 5, on a :

$$\inf(H, H'') < \sup\left(1, \frac{s}{2}c\right) = 1;$$

— Si s est pair mais différent de 2, d'après les lemmes 4 et 5 :

$$\inf(H, H'') < \sup\left(\frac{1}{4}s(s-2), \frac{s}{2}c\right),$$

c'est-à-dire $\inf(H, H'') < \frac{1}{4}s(s-2)$, sauf si $c = \frac{s}{2}$. Mais dans ce dernier cas, d est différent de $\frac{s}{2}$ (et de 0) puisque $(s, c, d) = 1$ et que $s \neq 2$; donc, d'après les lemmes 6 et 7, $\inf(H, H') < \frac{1}{4}s(s-2)$ ou $H' < (s - c)(s - c - d) \leq \frac{1}{4}s(s-2)$.

Donc s pair différent de 2 implique

$$\inf(\mathbf{H}, \mathbf{H}', \mathbf{H}'') < \frac{1}{4}s(s-2);$$

— Si s est impair, d'après les lemmes 4 et 5, on a :

$$\inf(\mathbf{H}, \mathbf{H}'') < \sup \left[\frac{1}{4}(s-1)^2, \frac{s}{2}c \right] \leq \frac{1}{4}s(s-1).$$

On en déduit l'énoncé suivant, *indépendant de l'hypothèse (h)*.

LEMME 8. — Si $s = 2$, à tout rang n , $\mathcal{H}_n < 1$;

— Si s est pair et différent de 2, à tout rang n , $\mathcal{H}_n < \frac{1}{4}s(s-2)$;

— Si s est impair, à tout rang n , $\mathcal{H}_n < \frac{1}{4}s(s-1)$.

Telles sont les majorations que nous avons en vue, et d'où l'on tire immédiatement :

$$\mathbf{H}(2) \leq 1, \quad \mathbf{H}(s) \leq \frac{1}{4}s(s-2) \quad (s \text{ pair } \neq 2);$$

$$\mathbf{H}(s) \leq \frac{1}{4}s(s-1) \quad (s \text{ impair}).$$

5. Montrons que les bornes qui viennent d'être obtenues sont exactes si s est pair.

Si $s = 2$, supposons par exemple $a = b = 1$ et considérons un nombre

$$\xi = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n \ \dots)$$

dont tous les quotients incomplets sont pairs et augmentent indéfiniment avec n . Pour un tel nombre, x_n tend vers l'infini et y_n vers zéro lorsque n tend vers l'infini; de plus, à tous les rangs, $c_n = d_n = 1$. Donc $\mathbf{H}_n, \mathbf{H}'_n, \mathbf{H}''_n, \mathbf{H}'''_n$ tendent vers un et l'on a $\mathbf{H}(\xi; 2, a, b) = 1$. Il en résulte que $\mathbf{H}(2) \geq 1$ et, par suite, on peut énoncer, compte tenu des inégalités qui terminent le paragraphe 4 :

THÉORÈME 2. — $\mathbf{H}(2) = 1$.

Les nombres ξ critiques, c'est-à-dire ceux pour lesquels $\mathbf{H}(\xi; 2, a, b) = \mathbf{H}(2)$, constituent une ensemble infini ayant la puissance du continu.

Considérons encore un nombre ξ' dont tous les quotients incomplets sont égaux à un entier fixe r pair. Pour un tel nombre ξ' , x_n et la limite de y_n lorsque n augmente indéfiniment sont respectivement égaux aux racines de l'équation $x^2 = rx + 1$. De plus, à tous les rangs, $c_n = d_n = 1$. On en déduit que $\mathbf{H}_n, \mathbf{H}'_n, \mathbf{H}''_n$ et \mathbf{H}'''_n tendent vers $\frac{r}{\sqrt{r^2+4}}$. Cette quantité tendant vers un lorsque r augmente indéfiniment, il en résulte le

THÉORÈME 2 bis. — La borne $\mathbf{H}(2) = 1$ est une valeur d'accumulation pour l'ensemble des $\mathbf{H}(\xi; 2, a, b)$.

Remarque. — On peut énoncer ainsi le résultat $H(2) = 1$: pour tout irrationnel ξ , il existe une infinité de fractions $\frac{u}{v}$ telles que

$$|v(v\xi - u)| < 1 + \varepsilon, \quad u \equiv a, \quad v \equiv b \pmod{2} \quad [(2, a, b) = 1]$$

si petit que soit ε positif. Mais puisque à tout rang n , $\mathcal{H}_n < 1$, ce résultat vaut aussi pour $\varepsilon = 0$.

Si s est pair et différent de 2, supposons par exemple $a = \frac{s}{2}$ et $b = \frac{s}{2} - 1$, et considérons un nombre ξ dont tous les quotients incomplets sont divisibles par s et augmentent indéfiniment avec leur indice n . Pour un tel nombre, x_n tend vers l'infini et y_n vers zéro lorsque n tend vers l'infini; de plus on vérifie facilement que les coefficients c_n valent alternativement $\frac{s}{2}$ et $\frac{s}{2} - 1$. Pour n infiniment grand, les quantités H_n, H'_n, H''_n, H'''_n sont respectivement équivalentes à $c_n d_n, (s - c_n) d_n, (s - c_n)(s - d_n), c_n(s - d_n)$. Leur limite inférieure vaut donc $\frac{1}{4}s(s - 2)$. Donc

$$H(\xi; s, a, b) = \frac{1}{4}s(s - 2) \quad \text{et} \quad H(s) \geq \frac{1}{4}s(s - 2).$$

On peut donc énoncer en tenant compte des inégalités qui terminent le paragraphe 4 :

THÉOREME 3. — Si s est pair et différent de 2, $H(s) = \frac{1}{4}s(s - 2)$.

Les nombres ξ critiques, c'est-à-dire ceux pour lesquels $H(\xi; s, a, b) = H(s)$ constituent un ensemble infini ayant la puissance du continu.

Considérons encore un nombre ξ' dont tous les quotients incomplets sont égaux à un entier fixe r divisible par s . Les coefficients c_n valent alternativement $\frac{s}{2}$ et $\frac{s}{2} - 1$; un calcul facile fournit alors la limite inférieure de \mathcal{H}_n , égale à $\frac{r \frac{s(s-2)}{4} - 1 - s}{\sqrt{r^2 + 4}}$ ce qui, lorsque r augmente indéfiniment tend vers $\frac{1}{4}s(s - 2)$.

Il en résulte le

THÉOREME 3 bis. — La borne $H(s) = \frac{1}{4}s(s - 2)$ est une valeur d'accumulation pour l'ensemble des $H(\xi; s, a, b)$ (s pair $\neq 2$).

Remarque. — On peut énoncer ainsi le résultat $H(s) = \frac{1}{4}s(s - 2)$: si s est pair et différent de 2, et si $(s, a, b) = 1$, pour tout irrationnel ξ , il existe une infinité de fractions $\frac{u}{v}$ telles que

$$|v(v\xi - u)| < \frac{1}{4}s(s - 2) + \varepsilon, \quad u \equiv a, \quad v \equiv b \pmod{s}$$

si petit que soit ε positif. Mais puisque à tout rang n , on a $\mathcal{H}_n < \frac{1}{4}s(s-2)$, ce résultat vaut aussi pour $\varepsilon = 0$.

6. La majoration $H(s) \leq \frac{1}{4}s(s-1)$ obtenue au paragraphe 4 pour s impair n'est au contraire pas exacte. La détermination de la valeur exacte de $H(s)$ pour s impair est l'objet de la fin de ce chapitre, où s sera désormais supposé impair sauf mention du contraire.

La majoration $\mathcal{H}_n < \frac{1}{4}s(s-1)$ valable à tout rang n , peut être améliorée immédiatement dans les cas qui suivent :

Plaçons-nous à un rang où l'hypothèse

$$(h) \quad 0 \leq c_n \leq \frac{s}{2}, \quad 0 < d_n \leq \frac{s}{2}$$

est satisfaite;

— Si, de plus, $c_n \leq \frac{1}{2}(s-3)$, alors (lemmes 4 et 5)

$$\inf(H_n, H_n'') < \frac{1}{4}(s-1)^2;$$

— Si $d_n + (s - c_n)y_n \geq 0$, alors (lemme 6)

$$\inf(H_n, H_n') < \frac{1}{4}s(s-1) \frac{s^2-1}{s^2+1};$$

-- Si $d_n + (s - c_n)y_n < 0$, avec $c_n = \frac{s-1}{2}$ et $d_n \geq 2$, alors (lemme 7)

$$H_n' < \frac{1}{4}(s^2 - 2s - 3);$$

— Si $d_n + (s - c_n)y_n < 0$, avec $c_n = \frac{s-1}{2}$ et $y_n \geq -\frac{1}{2}$, alors

$$H_n' < H\left(c_n - s, d_n; +\infty, -\frac{1}{2}\right)$$

(démonstration comme au lemme 7), d'où

$$H_n' < (s - c_n) \left(\frac{s - c_n}{2} - d_n \right) \leq \frac{1}{8}(s^2 - 1).$$

En résumé, l'hypothèse (h) entraîne

$$\inf(H_n, H_n', H_n'') < \frac{1}{4}s(s-1) \frac{s^2-1}{s^2+1},$$

sauf peut-être dans le cas où l'on a simultanément

$$c_n = \frac{1}{2}(s-1), \quad d_n = 1 \quad \text{et} \quad y_n < -\frac{1}{2}.$$

En supprimant l'hypothèse (h) et en tenant compte de la substitution \mathbb{R} , on en déduit que l'on a

$$\mathcal{H}_n < \frac{1}{4} s(s-1) \frac{s^2-1}{s^2+1}$$

pour tous les indices n sauf peut-être pour ceux où l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée :

$$(k_n) \quad c_n = \frac{1}{2}(s-1), \quad d_n = 1, \quad y_n < -\frac{1}{2} \quad (\text{c'est-à-dire } a_{n-1} = 1),$$

$$(K_n) \quad c_n = s-1, \quad d_n = \frac{1}{2}(s-1), \quad x_n < 2 \quad (\text{c'est-à-dire } a_n = 1),$$

$$(k'_n) \quad c_n = \frac{1}{2}(s+1), \quad d_n = s-1, \quad y_n < -\frac{1}{2} \quad (\text{c'est-à-dire } a_{n-1} = 1),$$

$$(k''_n) \quad c_n = 1, \quad d_n = \frac{1}{2}(s+1), \quad x_n < 2 \quad (\text{c'est-à-dire } a_n = 1).$$

Si (k_n) est satisfaite, seule (k_{n+1}) peut être satisfaite au rang $n+1$ d'après les formules de récurrence (2) ; pour cela, il faut et il suffit que

$$a_{n+1} = 1 \quad \text{et} \quad -1 \equiv c_{n+1} \equiv d_n - a_n c_n \equiv 1 - a_n \frac{s-1}{2} \pmod{s},$$

c'est-à-dire $a_n \equiv -4 \pmod{s}$. D'autre part, (k'_{n+1}) implique (k''_{n+2}) ; (k''_{n+2}) avec $a_{n+2} \equiv -4 \pmod{s}$ et $a_{n+3} = 1$ impliquent (k''_{n+3}) qui implique (k_{n+4}) . On en déduit l'existence de développements où, à tous les rangs d'indice assez élevé, l'une des quatre conditions précédentes est satisfaite, et l'énoncé :

LEMME 9. — *Pour tout irrationnel ξ , on a, si s est impair*

$$\mathcal{H}_n < \frac{1}{4} s(s-1) \frac{s^2-1}{s^2+1}$$

à une infinité de rangs n et, par suite,

$$H(\xi, s, a, b) \leq \frac{1}{4} s(s-1) \frac{s^2-1}{s^2+1},$$

sauf peut-être pour les nombres ξ dont le développement est constitué à partir d'un certain rang, par la répétition indéfinie de séquences de la forme suivante, où les r_m et les r'_m sont des entiers tels que $r_m s - 4$ et $r'_m s - 4$ soient positifs :

$$\begin{array}{cccc} a_n : & 1 & r_m s - 4 & 1 & r'_m s - 4 \\ c_n : & 1 & \frac{1}{2}(s-1) & s-1 & \frac{1}{2}(s+1) \\ d_n : & \frac{1}{2}(s+1) & 1 & \frac{1}{2}(s-1) & s-1 \end{array}$$

Pour simplifier le langage, on supposera désormais que les indices n tels que $c_n = 1$ et $d_n = \frac{1}{2}(s+1)$ sont de la forme $4m-1$, avec m entier. On désignera par W un tel développement et par $\xi(W)$ les irrationnels corres-

pondants; de plus la restriction « à partir d'un certain rang » sera sous-entendue. Enfin, sauf indication contraire, nous nous bornerons dans la suite aux nombres $\xi(W)$ satisfaisant à la condition supplémentaire (c) suivante pour tout n :

$$(c) \quad \mathcal{H}_n \geq \frac{1}{4} s(s-1) \frac{s^2-1}{s^2+1}.$$

Cette condition (c) exige $r_m \geq 2$ et $r'_m \geq 2$; en effet, dans le cas contraire, on aurait $x_{4m} < s$ ou $x_{4m+2} < s$, et, par suite, H_{4m} ou H'_{4m+2} serait inférieur à :

$$H\left(\frac{s-1}{2}, 1; s, -1\right) = \frac{\left(s \frac{s-1}{2} - 1\right) \left(1 + \frac{s-1}{2}\right)}{s+1} = \frac{s^2-s-2}{4}$$

et (c) ne serait pas satisfaite.

Le fait que r_m et r'_m soient au moins égaux à 2 pour tout m implique de plus que les quantités H'_{4m} et H_{4m+2} sont au moins égales à

$$H\left(s-1, \frac{s-1}{2}; 2s-4, 0\right) = \frac{[(s+1)(s-2) - (s-1)](s-1)}{2s-4}$$

qui est supérieur à $\frac{1}{4}s(s-1)$ dès que $s \geq 3$. Donc, pour les nombres $\xi(W)$ satisfaisant à (c),

$$\mathcal{H}_{4m} \neq H_{4m} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{4m+2} \neq H_{4m+2}.$$

La recherche de $H[\xi(W); s, a, b]$ est encore simplifiée par les égalités suivantes faciles à vérifier :

$$\begin{aligned} f_{4m-1} &= f_{4m}, & f'_{4m-1} &= f_{4m}^{-1}, & f''_{4m-1} &= f''_{4m}, & f'''_{4m-1} &= f'''_{4m}; \\ f_{4m+1} &= f_{4m+2}, & f'_{4m+1} &= f'_{4m+2}, & f''_{4m+1} &= f''_{4m+2}, & f'''_{4m+1} &= f'''_{4m+2}. \end{aligned}$$

Il résulte de ce qui précède que :

LEMME 10. — Pour les nombres $\xi(W)$ satisfaisant à (c), $H[(\xi W); s, a, b]$ est égal à la limite inférieure, lorsque m augmente indéfiniment, de l'ensemble des quantités $H_{4m}, H'_{4m}, H''_{4m}, H'_{4m+2}, H''_{4m+2}, H'''_{4m+2}$.

7. Nous nous proposons de montrer que (pour s impair) les nombres ξ critiques sont effectivement des nombres $\xi(W)$ et de déterminer les r_m et les r'_m correspondants.

Nous allons d'abord montrer que pour s assez grand (en fait $s \geq 13$) les ξ critiques sont les nombres que nous désignerons par $\xi(W_2)$ où les r_m et les r'_m sont tous égaux à 2.

Pour un tel nombre $\xi(W_2)$, lorsque m augmente indéfiniment, x_{4m} et x_{4m+2} sont égaux à la racine positive \bar{x} de l'équation

$$x^2 = (2s-4)(x+1),$$

tandis que y_{4m} et y_{4m+2} tendent vers la racine négative \bar{y} . Donc

$$\begin{aligned} \lim_m H_{4m} &= \lim_m H''_{4m+2} = \frac{\left(\frac{s-1}{2}\bar{x}-1\right)\left(1-\frac{s-1}{2}\bar{y}\right)}{\bar{x}-\bar{y}} = \frac{s^2-2s-1}{4}\left(1-\frac{2}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \lim_m H'_{4m} &= \lim_m H'''_{4m+2} = \frac{\left(\frac{s+1}{2}\bar{x}+1\right)\left(-\frac{s+1}{2}\bar{y}-1\right)}{\bar{x}-\bar{y}} = \frac{s^2-2s-1}{4}\left(1-\frac{2}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \lim_m H'''_{4m} &= \lim_m H'_{4m+2} = \frac{\left(\frac{s-1}{2}\bar{x}+s-1\right)\left(\frac{s-1}{2}\bar{y}+s-1\right)}{\bar{x}-\bar{y}} = \frac{s^2-2s+1}{4}\left(1-\frac{2}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par suite, d'après le lemme 10 (§ 6) :

$$H[\xi(W_2); s, a, b] = \frac{s^2-2s-1}{4}\left(1-\frac{2}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Une expression asymptotique de cette quantité pour s infiniment grand est donnée par $\frac{1}{4}\left[s^2-s-\frac{3}{2}+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]$, tandis que la quantité $\frac{1}{4}s(s-1)\frac{s^2-1}{s^2+1}$ a pour expression asymptotique $\frac{1}{4}\left[s^2-s-2+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]$. La différence entre ces deux quantités tend donc vers la limite finie $\frac{1}{8}$ lorsque s tend vers l'infini. En fait, on vérifie que, dès que $s \geq 9$,

$$\frac{s^2-2s-1}{4}\left(1-\frac{2}{s}\right)^{-\frac{1}{2}} > \frac{1}{4}s(s-1)\frac{s^2-1}{s^2+1}.$$

Donc, pour s impair au moins égal à 9, les ξ critiques sont à coup sûr des nombres $\xi(W)$.

Pour décider si ce sont précisément les $\xi(W_2)$, considérons un nombre $\xi(W)$ satisfaisant à (c) et différent des $\xi(W_2)$, c'est-à-dire tel que pour une infinité de valeurs de m , r_m ou r'_m soient au moins égaux à 3. Les indices $n=4m$ (pour $r_m \geq 3$) et $n=4m+2$ (pour $r'_m \geq 3$) ayant tous la même parité, lorsque n augmente indéfiniment on a

$$\overline{\lim} x_n \geq s + \bar{x} \quad \text{et} \quad \overline{\lim} y_n \leq \bar{y},$$

puisque (c) implique, pour tout m , $r_m \geq 2$ et $r'_m \geq 2$. Il en résulte que $\frac{\lim H'_n}{n}$ ou $\frac{\lim H''_n}{n}$ et, par suite, $\frac{\lim \mathcal{H}_n}{n}$ sont majorées par :

$$\frac{\left[s-1+\frac{s-1}{2}(s+\bar{x})\right]\left(s-1+\frac{s-1}{2}\bar{y}\right)}{s+\bar{x}-\bar{y}} = \frac{1}{4}(s-1)^2 \frac{s+2-s\sqrt{1-\frac{2}{s}}}{1+2\sqrt{1-\frac{2}{s}}}.$$

Une expression asymptotique de cette quantité pour s infiniment grand est donnée par $\frac{1}{4}\left[s^2-\frac{7}{6}s+O(1)\right]$. Sa différence avec $\frac{s^2-2s-1}{4}\left(1-\frac{2}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}$ augmente donc in-

définiment avec s . En fait, on vérifie que

$$\frac{1}{4}(s-1)^2 \frac{s+2-s\sqrt{1-\frac{2}{s}}}{1+2\sqrt{1-\frac{2}{s}}} < \frac{s^2-2s-1}{4} \left(1-\frac{2}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

dès que $s \geq 13$. On peut donc énoncer :

THÉOREME 4. — *Si s est impair et au moins égal à 13, les nombres quadratiques $\xi(W_2)$ sont les nombres critiques; on a*

$$H(s) = \frac{s^2-2s-1}{4} \left(1-\frac{2}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et cette valeur est isolée dans l'ensemble des $H(\xi; s, a, b)$.

Remarque 1. — Dans la démonstration qui vient d'être donnée, on a vu que pour les nombres ξ critiques, $H(\xi; s, a, b)$ apparaît comme la limite commune à $H_{4m}, H'_{4m}, H''_{4m+2}$ et H'''_{4m+2} qui sont des fonctions toutes décroissantes de y_{4m} ou y'_{4m+2} . Or, ces deux quantités, ayant des indices de même parité, tendent toutes deux de la même manière monotone vers leur limite commune \bar{y} . Il existe donc des nombres ξ critiques pour lesquels la limite $H(\xi; s, a, b)$ n'est approchée que par valeurs supérieures par $H_{4m}, H'_{4m}, H''_{4m+2}$ et H'''_{4m+2} , et pour lesquels il n'existe donc qu'un nombre fini de fractions $\frac{u}{v}$ telles que $|\nu(\nu\xi - u)| \leq H(s)$, avec $u \equiv a, v \equiv b, (s, a, b) = 1$. On obtient un tel nombre ξ , par exemple dans le cas où $a = \frac{1}{2}(s+1)$ et $b = s-1$ en choisissant $\xi = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ \dots)$, où $a_1 = 0$ et où les c_n et les a_n ont, à partir de $n = 2$, les valeurs indiquées dans le développement W_2 . (Dans cet exemple, la réduite préliminaire $\frac{1}{0}$ est notée $\frac{p_0}{q_0}$).

Remarque 2. — On vérifie aisément que, si $s \geq 15$, on a :

$$\frac{1}{4}s(s-1) \frac{s^2-1}{s^2+1} > \frac{1}{4}(s-1)^2 \frac{s+2-s\sqrt{1-\frac{2}{s}}}{1+2\sqrt{1-\frac{2}{s}}}$$

au contraire, pour $s = 13$, cette inégalité vaut en sens inverse, le second membre étant cependant inférieur à 38,56, tandis que

$$H(13) = \frac{71\sqrt{13}}{2\sqrt{11}} = 38,592\dots$$

On en conclut :

Pour $s = 13$, l'ensemble des $H(\xi; s, a, b)$ ne prend aucune valeur entre

$$H(13) = 38,592\dots \text{ et } 38,56.$$

Pour s impair ≥ 15 , l'ensemble des $H(\xi; s, a, b)$ ne prend aucune valeur entre

$$H(s) = \frac{s^2 - 2s - 1}{4} \left(1 - \frac{2}{s}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} s(s-1) \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}.$$

Remarque 3. — $H(s)$ exceptée, il n'existe donc, dans l'ensemble des $H(\xi; s, a, b)$ aucune valeur asymptotiquement supérieure d'une quantité finie à

$$\frac{1}{4}(s^2 - s - 2) = \frac{1}{4} s(s-1) \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1} + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

En fait, il existe des nombres ξ tels que, pour s infiniment grand, on ait

$$H(\xi; s, a, b) = \frac{1}{4} \left[s^2 - s - 2 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right].$$

Considérons, en effet, un nombre ξ^* dont le développement présente à partir d'un certain rang la période suivante pour les a_n et les c_n :

$$\begin{aligned} a_n : & \quad rs + 2 \quad s - 2 \quad rs + 2 \quad s - 2 \\ c_n : & \quad \frac{1}{2}(s-1) \quad \frac{1}{2}(s+1) \quad \frac{1}{2}(s+1) \quad \frac{1}{2}(s-1) \end{aligned}$$

où r est égal, par exemple, à la partie entière de $\frac{s}{3}$. Des considérations analogues à celles qui ont été développées pour les nombres $\xi(W_2)$ montrent qu'en posant

$$\Delta^2 = (rs + 2)(s - 2)[(rs + 2)(s - 2) + 4]$$

$4H(\xi^*; s, a, b)$ est égal à la plus petite des deux quantités

$$(rs + 2)(s^2 - 3s^2 - 3s + 1) - (s - 2)(s - 1)^2 \quad \text{et} \quad (rs + 2)(s - 1)^3 - (s - 2)(s - 1)^2,$$

d'où l'on déduit

$$4H(\xi^*; s, a, b) = s^2 - s - 2 + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

8. Revenons maintenant aux cas laissés de côté où s est impair et inférieur à 13 en commençant par les trois cas où s est égal à 7, 9 ou 11.

Pour $s = 7, 9$ ou 11 , notons qu'on a respectivement pour valeur de $\frac{1}{4} s(s-1) \frac{s^2-1}{s^2+1}$:

$$\frac{21.48}{100} < 10, 1, \quad \frac{18.40}{41} < 17, 6, \quad \frac{55.30}{61} < 27, 1.$$

Considérons un nombre $\xi(W)$ [satisfaisant à (c)] tel que pour une infinité de valeurs de m, r_m ou r'_m soit au moins égal à 4. Pour les indices $n = 4m$ (pour $r_m \geq 4$) ou $n = 4m + 2$ (pour $r'_m \geq 4$), on a alors :

$$x_n > 4s - 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2s-4}} = 4s - 4 + \frac{2s-4}{2s-3} \quad \text{et} \quad y_n < -\frac{2s-4}{2s-3}.$$

Il en résulte que $\lim_n H'_n$ ou $\lim_n H''_n$ et, par suite, $\lim_n \mathcal{H}_n$ sont majorées par :

$$\frac{1}{4}(s-1)^2 \frac{\left(4s-2 + \frac{2s-4}{2s-3}\right) \left(2 - \frac{2s-4}{2s-3}\right)}{4s-4 + 2 \frac{2s-4}{2s-3}},$$

expression qui vaut respectivement pour $s = 7, 9$ et 11 :

$$9 \frac{74.12}{71.11} < 10,24, \quad 16 \frac{131.16}{127.15} < 17,7, \quad 25 \frac{204.20}{199.19} < 27.$$

Considérons ensuite un nombre $\xi(W)$ tel que pour une infinité de valeurs de m , on ait $r'_{m-1} = 2$, $r_m = 2$ et $r'_m \leq 3$. Pour les indices $n = 4m$ correspondants, on a

$$x_n < 2s-4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3s-3}} = 2s-4 + \frac{3s-3}{3s-2} \quad \text{et} \quad y_n > -\frac{2s-3}{2s-2};$$

par suite :

$$\lim_n H_n \leq \frac{\left[\frac{s-1}{2} \left(2s-4 + \frac{3s-3}{3s-2}\right) - 1\right] \left(1 + \frac{s-1}{2} \frac{2s-3}{2s-2}\right)}{2s-4 + \frac{3s-3}{3s-2} + \frac{2s-3}{2s-2}},$$

expression qui vaut respectivement pour $s = 7, 9$ et 11 :

$$\frac{605.45}{2705} < 10,1, \quad \frac{1471.76}{6539} < 17,6, \quad \frac{2909.115}{12349} < 27,1.$$

Ces limitations valent évidemment pour $\lim_n \mathcal{H}_n$ dans le cas envisagé et dans celui où l'on a une infinité de triplets $r_m = r'_m = 2$, $r_{m+1} \leq 3$.

Considérons enfin un nombre $\xi(W)$ tel que pour une infinité de valeurs de m , on ait $r'_{m-1} = 3$, avec $r_m = 3$. Pour les indices $n = 4m$ correspondants, on a

$$x_n > 3s-4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2s-4}} = 3s-4 + \frac{2s-4}{2s-3} \quad \text{et} \quad y_n < -\frac{3s-4}{3s-3};$$

par suite :

$$\lim_n H''_n \leq \frac{1}{4}(s-1)^2 \frac{\left(3s-2 + \frac{2s-4}{2s-3}\right) \left(2 - \frac{3s-4}{3s-3}\right)}{3s-4 + \frac{2s-4}{2s-3} + \frac{3s-4}{3s-3}},$$

expression qui vaut respectivement pour $s = 7, 9$ et 11 :

$$9 \frac{219.19}{3733} < 10,1, \quad 16 \frac{389.25}{8961} < 17,4, \quad 25 \frac{607.31}{17621} < 27.$$

Ces limitations valent évidemment pour $\lim_n \mathcal{H}_n$ dans le cas envisagé et dans celui où l'on a une infinité de couples $r_m = r'_m = 3$.

Il résulte des diverses inégalités qui viennent d'être établies que *les seuls nombres ξ pour lesquels $H(\xi; s, a, b)$ puisse être supérieur à 10,24, 17,7 et 27,1 dans les cas respectifs où $s = 7, 9$ et 11 , sont ceux des nombres $\xi(W)$ pour lesquels pour tout m assez grand, $r_m = 2$ et $r'_m = 3$ et ceux pour lesquels $r_m = 3$ et $r'_m = 2$. Notons-les respectivement $\xi(W_{2,3})$ et $\xi(W_{3,2})$. On va prouver que ce sont les nombres critiques en montrant que, pour eux, $H(\xi; s, a, b)$ est supérieur aux bornes qui viennent d'être indiquées.*

Remarquons d'abord qu'à cause d'une symétrie évidente (qui traduit R^2), on a

$$H[\xi(W_{2,3}); s, a, b] = H[\xi(W_{3,2}); s, a, b].$$

On peut donc se restreindre à l'étude des nombres $\xi(W_{2,3})$.

Pour ces derniers nombres, lorsque m augmente indéfiniment, x_{4m} et x_{4m+2} sont respectivement égaux aux racines positives des équations

$$\begin{aligned} (3s-2)x^2 &= (3s-2)(2s-4)x + (3s-3)(2s-3) - 1, \\ (2s-2)x'^2 &= (2s-2)(3s-4)x' + (3s-3)(2s-3) - 1, \end{aligned}$$

tandis que y_{4m} et y_{4m+2} tendent respectivement vers les racines négatives des mêmes équations. Désignant par Δ^2 et B le discriminant et le terme indépendant de x ou x' que ces équations ont en commun; on a, lorsque m augmente indéfiniment :

$$\begin{aligned} \Delta \lim H_{4m} &= -(3s-2) + \frac{1}{2}(s-1)(3s-2)(2s-4) + \frac{B}{4}(s-1)^2, \\ \Delta \lim H'_{4m} &= -(3s-2) - \frac{1}{2}(s+1)(3s-2)(2s-4) + \frac{B}{4}(s+1)^2, \\ \Delta \lim H''_{4m} &= (s-1)^2 \left[3s-2 + \frac{1}{2}(3s-2)(2s-4) - \frac{B}{4} \right]; \end{aligned}$$

H''_{4m+2} , H'_{4m+2} et H_{4m+2} ont des limites analogues, telles que

$$\begin{aligned} \Delta \lim H_{4m} &= \Delta \lim H''_{4m+2} = \Delta \lim H'_{4m} - s^2 = \Delta \lim H''_{4m+2} - s^2, \\ \Delta \lim H'_{4m} &= \Delta \lim H'_{4m+2}. \end{aligned}$$

Pour déterminer $H[\xi(W_{2,3}); s, a, b]$, il ne reste donc, d'après le lemme 10 (§ 6), qu'à trouver la plus petite des deux expressions $\Delta \lim H_{4m}$ et $\Delta \lim H''_{4m}$. Or :

— Pour $s = 7$,

$$\Delta \lim H_{4m} = 2\,324 \quad \text{et} \quad \Delta \lim H''_{4m} = 2\,331;$$

— Pour $s = 9$,

$$\Delta \lim H_{4m} = 7\,119 \quad \text{et} \quad \Delta \lim H''_{4m} = 7\,056;$$

— Pour $s = 11$,

$$\Delta \lim H_{4m} = 16\,984 \quad \text{et} \quad \Delta \lim H''_{4m} = 16\,775.$$

Les discriminants Δ^2 correspondants valant respectivement 51 072, 158 400

et 381 920, on a pour les nombres $\xi(W_{2,3})$ considérés :

$$H(\xi; 7, a, b) = \frac{2\ 324}{\sqrt{51\ 072}} = \frac{83\sqrt{7}}{2\sqrt{114}},$$

$$H(\xi; 9, a, b) = \frac{7056}{\sqrt{158\ 400}} = \frac{294}{5\sqrt{11}},$$

$$H(\xi; 11, a, b) = \frac{16\ 775}{\sqrt{381\ 920}} = \frac{305\sqrt{55}}{4\sqrt{434}}.$$

Comme $\frac{83\sqrt{7}}{2\sqrt{114}} > 10,24$, $\frac{294}{5\sqrt{11}} > 17,7$ et $\frac{305\sqrt{55}}{4\sqrt{434}} > 27,1$, on peut énoncer :

THÉOREME 5. — *Pour $s = 7, 9$ et 11 , les nombres $\xi(W_{2,3})$ et $\xi(W_{3,2})$ sont les nombres critiques. Les bornes $H(7)$, $H(9)$ et $H(11)$ sont isolées et valent :*

$$H(7) = \frac{83\sqrt{7}}{2\sqrt{114}} = 10,283\dots$$

$$H(9) = \frac{294}{5\sqrt{11}} = 17,728\dots, \quad H(11) = \frac{305\sqrt{55}}{4\sqrt{434}} = 27,144\dots$$

L'ensemble des $H(\xi; s, a, b)$ ne prend aucune valeur entre $H(s)$ et $10,24$, $17,7$ et $27,1$ respectivement pour $s = 7, 9$ et 11 .

Remarque. — D'une manière analogue à ce qui a été dit dans le cas $s \geq 13$, il existe, dans les trois cas qui viennent d'être étudiés, des nombres ξ critiques pour lesquels la limite $H(\xi; s, a, b)$ n'est approchée que par valeurs supérieures par H_{4m} et H_{4m+2}'' ou par H_{4m}'' et H_{4m+2}' , et pour lesquels il n'existe donc qu'un nombre fini de fractions $\frac{u}{v}$ telles que $|\nu(\nu\xi - u)| \leq H(s)$, avec $u \equiv a$ et $\nu \equiv b \pmod{s}$, $(s, a, b) = 1$.

9. Étudions le cas $s = 5$.

Notons que pour $s = 5$,

$$\frac{1}{4}s(s-1)\frac{s^2-1}{s^2+1} = \frac{60}{13} < 4,62.$$

Considérons un nombre $\xi(W)$ tel que pour une infinité de valeurs de m , r_m ou r'_m soit au moins égal à 6 [r_m et r'_m étant, rappelons-le, au moins égaux à 2 pour tout m en vertu de la condition (c)]. Pour les indices $n = 4m$ (pour $r_m \geq 6$) et $n = 4m + 2$ (pour $r'_m \geq 6$), on a (en utilisant la notation des développements en fraction continue limités) :

$$x_n > (26 \ 1 \ 6 \ 1 \ 6) = 26 + \frac{48}{55} \quad \text{et} \quad y_n < -\frac{48}{55}.$$

Il en résulte que $\lim_n H'_n$ ou $\lim_n H''_n$ et, par suite, $\lim_n \mathcal{H}_n$ sont majorées par

$$4 \frac{\left(2 + 26 + \frac{48}{55}\right)\left(2 - \frac{48}{55}\right)}{26 + \frac{96}{55}} = 4 \frac{794.62}{763.55} < 4,7.$$

Considérons ensuite un nombre $\xi(W)$ tel que pour une infinité de valeurs de m , on ait $r'_{m-1} \geq 3$ et $r_m \geq 3$. Pour les indices $n = 4m$ correspondants, on a

$$x_n > (11 \ 1 \ 6) = 11 + \frac{6}{7} \quad \text{et} \quad y_n < -(0 \ 1 \ 11) = -\frac{11}{12};$$

par suite,

$$\lim_{\frac{n}{4}} H_n'' \leq 4 \frac{\left(2 + 11 + \frac{6}{7}\right) \left(2 - \frac{11}{12}\right)}{11 + \frac{6}{7} + \frac{11}{12}} = 4 \frac{97 \cdot 13}{1073} < 4,701.$$

Cette limitation vaut évidemment pour $\lim_{\frac{n}{4}} \mathcal{H}_n$ dans le cas envisagé et dans celui où l'on a une infinité de couples $r_m \geq 3, r'_m \geq 3$.

Considérons enfin un nombre $\xi(W)$ tel que pour une infinité de valeurs de m , on ait $r'_{m-1} \leq 4, r_m = 2$ et $r'_m \leq 5$. Pour les indices $n = 4m$ correspondants, on a :

$$x_n < (6 \ 1 \ 22) = 6 + \frac{22}{23} \quad \text{et} \quad y_n > -(0 \ 1 \ 17) = -\frac{17}{18};$$

par suite

$$\lim_{\frac{n}{4}} H_n \leq \frac{\left[2 \left(6 + \frac{22}{23}\right) - 1\right] \left(1 + \frac{17}{9}\right)}{6 + \frac{22}{23} + \frac{17}{18}} = \frac{297 \cdot 52}{3 \cdot 271} < 4,722.$$

Cette limitation vaut évidemment pour $\lim_{\frac{n}{4}} \mathcal{H}_n$ dans le cas envisagé et dans celui où l'on a une infinité de triplets $r_m \leq 4, r'_m = 2, r_{m+1} \leq 5$.

Il résulte des diverses inégalités qui viennent d'être établies que *les seuls nombres ξ pour lesquels $H(\xi; 5, a, b)$ puisse être supérieur à 4,722 sont ceux des nombres $\xi(W)$ pour lesquels, pour tout m assez grand, $r_m = 2$ et $r'_m = 5$ et ceux pour lesquels $r_m = 5$ et $r'_m = 2$. Notons-les $\xi(W_{2,5})$ et $\xi(W_{5,2})$. On va montrer que ce sont les nombres critiques, en se bornant comme précédemment aux nombres $\xi(W_{2,5})$.*

Pour ces derniers nombres, lorsque m augmente indéfiniment, x_{4m} et x_{4m+2} sont respectivement égaux aux racines positives des équations

$$23x^2 = 138x + 153 \quad \text{et} \quad 8x'^2 = 168x' + 153,$$

tandis que y_{4m} et y_{4m+2} tendent respectivement vers les racines négatives. Désignant par Δ^2 le discriminant commun de ces équations, on a $\Delta = 12\sqrt{230}$ et

$$\Delta \lim H'_{4m} = \Delta \lim H'_{4m+2} > \Delta \lim H_{4m} = \Delta \lim H''_{4m+2} > \Delta \lim H''_{4m} = \Delta \lim H'_{4m+2},$$

cette dernière expression étant égale à 860. Donc, d'après le lemme 10 (§ 6) :

$$H[\xi(W_{2,5}); 5, a, b] = \frac{860}{12\sqrt{230}} = \frac{43\sqrt{5}}{3\sqrt{46}}.$$

Comme on a $\frac{43\sqrt{5}}{3\sqrt{46}} > 4,722$, on peut énoncer :

THÉOREME 6. — Pour $s = 5$, les nombres $\xi(W_{2,5})$ et $\xi(W_{5,2})$ sont les nombres critiques. La borne $H(5)$ est isolée et vaut $\frac{43\sqrt{5}}{3\sqrt{46}} = 4,7255\dots$. L'ensemble des $H(\xi; 5, a, b)$ ne prend aucune valeur entre $H(5)$ et $4,722$.

Remarque. — D'une manière analogue à ce qui a été dit dans les cas précédents où s est impair, il existe des nombres ξ critiques pour lesquels la limite $H(\xi; 5, a, b)$ n'est approchée que par valeurs supérieures par H'_{4m} et H'_{4m+2} , et pour lesquels il n'existe donc qu'un nombre fini de fractions $\frac{u}{v}$ telles que $|\nu(\nu\xi - u)| \leq H(5)$, avec $u \equiv a$ et $\nu \equiv b \pmod{5}$, $(5, a, b) = 1$.

10. Étudions le cas restant : $s = 3$.

Notons que pour $s = 3$,

$$\frac{1}{4}s(s-1)\frac{s^2-1}{s^2+1} = 1,2 < \frac{4}{3}.$$

Considérons un nombre $\xi(W)$ tel que pour une infinité de valeurs de m , $r_m = 2$. Pour les indices $n = 4m$ correspondants, on en déduit $x_n < 3$ et $H_n < 1$; d'où $\lim_n H_n \leq 1$. Cette dernière limitation vaut évidemment pour $\lim_n \mathcal{H}_n$ dans le cas envisagé et dans celui où $r'_m = 2$ pour une infinité de valeurs de m .

Considérons encore un nombre $\xi(W)$ tel que pour une infinité de valeurs de m , $r'_{m-1} \geq 3$ et $r_m \geq 4$. Pour les indices $n = 4m$ correspondants, on a $x_n > 8$ et $y_n < -\frac{5}{6}$ et, par suite, $H'_n < \frac{4}{3}$. La limitation $\lim_n \mathcal{H}_n \leq \frac{4}{3}$ vaut évidemment dans ce cas et dans celui où l'on a une infinité de couples $r_m \geq 3$, $r'_m \geq 4$.

Il résulte des diverses inégalités qui viennent d'être établies que les seuls nombres ξ pour lesquels $H(\xi; 3, a, b)$ puisse être supérieur à $\frac{4}{3}$ sont ceux des nombres $\xi(W)$ pour lesquels, pour tout m assez grand, $r_m = r'_m = 3$. Notons-les $\xi(W_3)$.

Pour ces derniers nombres, lorsque m augmente indéfiniment, x_{4m} et x_{4m+2} sont égaux à la racine positive de l'équation $x^2 = 5(x+1)$, tandis que y_{4m} et y_{4m+2} tendent vers sa racine négative. On en déduit que les limites de H_{4m} , H'_{4m} , H''_{4m} , H'_{4m+2} , H''_{4m+2} et H'_{4m+2} sont toutes égales à $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Donc

$$H[\xi(W_3); 3, a, b] = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Comme on a $\frac{3}{\sqrt{5}} > \frac{4}{3}$, on peut énoncer :

THÉOREME 7. — Pour $s = 3$, les nombres $\xi(W_3)$ sont les nombres critiques. La borne $H(3)$ est isolée et vaut $\frac{3}{\sqrt{5}} = 1,3416\dots$. L'ensemble des $H(\xi; 3, a, b)$ ne prend aucune valeur entre $H(3)$ et $\frac{4}{3}$.

Remarque. — Parmi les six fonctions de $y_{\lambda m}$ ou de $y_{\lambda m+2}$ indiquées ci-dessus et dont la limite commune est $H(3)$ lorsque ξ est un nombre critique, certaines sont croissantes et d'autres décroissantes par rapport aux variables $y_{\lambda m}$ et $y_{\lambda m-2}$ qui tendent toutes deux de la même manière monotone vers leur limite commune lorsque m augmente indéfiniment. Pour tout nombre ξ critique, $H(\xi; 3, a, b)$ est donc approché par valeurs supérieures et par valeurs inférieures par ces six fonctions, contrairement à ce qui avait lieu dans les cas précédents (s impair). Il en résulte que :

Pour tout nombre ξ il existe une infinité de fractions $\frac{u}{v}$ telles que

$$|v(v\xi - u)| < \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad u \equiv a, \quad v \equiv b \pmod{3}, \quad \text{si } (3, a, b) = 1$$

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS.

Résumons les résultats qui ont été obtenus dans ce chapitre, en les traduisant pour le problème de l'approximation de zéro par la forme linéaire non homogène $q\xi - p - \rho$, où ξ est un irrationnel et ρ un rationnel non entier donnés, et où p et q peuvent prendre toutes les valeurs entières ($q \neq 0$). En écrivant ρ sous la forme irréductible $\frac{t}{s}$ ($s \geq 2$), ces résultats (th. 1 à 7) impliquent les valeurs suivantes pour $G\left(\frac{t}{s}\right)$:

Si s est pair et au moins égal à 4 :

$$G\left(\frac{t}{s}\right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{s}\right).$$

Si s est impair et au moins égal à 13 :

$$G\left(\frac{t}{s}\right) = \frac{1}{4} \frac{1 - \frac{2}{s} - \left(\frac{1}{s}\right)^2}{\sqrt{1 - \frac{2}{s}}}.$$

Enfin :

$$\begin{aligned} G\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4}, & G\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{3\sqrt{5}}, & G\left(\frac{1}{5}\right) &= \frac{43}{15\sqrt{230}}, \\ G\left(\frac{1}{7}\right) &= \frac{83}{14\sqrt{798}}, & G\left(\frac{1}{9}\right) &= \frac{98}{135\sqrt{11}}, & G\left(\frac{1}{11}\right) &= \frac{305\sqrt{5}}{44\sqrt{4774}}. \end{aligned}$$

En fait, les théorèmes cités et les remarques qui leur sont jointes permettent les énoncés plus précis qui suivent :

Si s est pair et différent de 2, t étant un entier quelconque fixe premier avec s , pour tout irrationnel ξ il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $\left|q\left(q\xi - p - \frac{t}{s}\right)\right| < k$ lorsque

$$k \geq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{s}\right).$$

Il existe des nombres ξ critiques, qu'on peut définir ceux pour lesquels il n'existe qu'un nombre fini de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $\left| q\left(q\xi - p - \frac{t}{s}\right) \right| < k$ pour toutes les valeurs de k strictement inférieures à $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{s}\right)$. Un exemple de nombre critique ξ est fourni par $\xi = \frac{A + B\eta}{C + D\eta}$, où η est un irrationnel dont les quotients incomplets sont tous divisibles par s et tendent vers l'infini avec leur rang dans le développement de η , et où les entiers A, B, C, D satisfont aux conditions

$$AD - BC = \varepsilon = \pm 1, \quad Dt \equiv \varepsilon \frac{s}{2}, \quad Ct \equiv -\varepsilon \left(\frac{s}{2} - 1\right) \pmod{s}.$$

Il existe aussi des irrationnels ξ pour lesquels $\lim_{p,q} \left| q\left(q\xi - p - \frac{t}{s}\right) \right| (q \neq 0)$ est arbitrairement voisin de $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{s}\right)$.

Si $s = 2$, pour tout irrationnel ξ il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $\left| q\left(q\xi - p - \frac{1}{2}\right) \right| < k$ lorsque

$$k \geq \frac{1}{4}.$$

Des exemples de nombres ξ critiques [qu'on peut définir encore ceux pour lesquels il n'existe qu'un nombre fini de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $\left| q\left(q\xi - p - \frac{1}{2}\right) \right| < k$ pour toutes les valeurs de k strictement inférieures à $G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$] sont fournis par $\xi = (r_1 \ 2 \ r_2 \dots \ 2 \ r_j \ 2 \dots)$, où les r_j sont des entiers indéfiniment croissants avec j . Il existe aussi des nombres ξ pour lesquels $\lim_{p,q} \left| q\left(q\xi - p - \frac{1}{2}\right) \right| (q \neq 0)$ est arbitrairement voisin de $\frac{1}{4}$.

Remarque. — Dans les cas $s = 2$, $s = 4$ et $s = 6$, on retrouve, avec des précisions supplémentaires, les résultats signalés à la fin du chapitre précédent.

Si s est impair et au moins égal à 13, pour tout irrationnel ξ il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $\left| q\left(q\xi - p - \frac{t}{s}\right) \right| < k$ lorsque

$$k > \frac{1}{4} \frac{1 - \frac{2}{s} - \left(\frac{1}{s}\right)^2}{\sqrt{1 - \frac{2}{s}}}.$$

Tous les nombres critiques ξ (définis comme ci-dessus) sont déduits de la racine positive η de l'équation en x : $x = (12s - 4x)$ par $\xi = \frac{A + B\eta}{C + D\eta}$, où

$$AD - BC = \varepsilon = \pm 1, \quad Dt \equiv \varepsilon, \quad Ct \equiv -\varepsilon \frac{s+1}{2} \pmod{s}.$$

Parmi eux, il y a des nombres ξ tels qu'il n'existe qu'un nombre fini de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $\left| q\left(q\xi - p - \frac{t}{s}\right) \right| \leq k$ lorsque $k = G\left(\frac{t}{s}\right)$.

Si l'on écarte tous les nombres critiques, on peut remplacer la constante

$$G\left(\frac{t}{s}\right) = \frac{1 - \frac{2}{s} - \left(\frac{1}{s}\right)^2}{4\sqrt{1 - \frac{2}{s}}}$$

par une autre strictement plus petite, égale par exemple pour $s = 13$ à 0,2282 [au lieu de $G\left(\frac{t}{13}\right) = 0,22835 \dots$ lorsqu'on conserve les nombres critiques] et, pour $s \geq 15$, égale à $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{s}\right)\frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}$, dont une expression asymptotique pour s infiniment grand est donnée par $\frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]$ tandis que pour $G\left(\frac{t}{s}\right)$, une expression asymptotique est donnée par $\frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{s} - \frac{3}{2s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]$.

Dans chacun des cas $s = 3, 5, 7, 9$ et 11 , pour tout irrationnel ξ il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $\left| q\left(q\xi - p - \frac{t}{s}\right) \right| < k$ lorsque, respectivement :

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{1}{3\sqrt{5}} = 0,1490\dots \text{ pour } s = 3; & k &> \frac{43}{15\sqrt{230}} = 0,1890\dots \text{ pour } s = 5; \\ k &> \frac{83}{14\sqrt{798}} = 0,2098\dots \text{ pour } s = 7; & k &> \frac{98}{135\sqrt{11}} = 0,2188\dots \text{ pour } s = 9; \\ & & k &> \frac{305\sqrt{5}}{44\sqrt{4774}} = 0,2243\dots \text{ pour } s = 11. \end{aligned}$$

Les nombres ξ critiques sont encore de la forme $\xi = \frac{A + B\eta}{C + D\eta}$, où A, B, C, D satisfont aux mêmes conditions que dans le cas s impair ≥ 13 , mais où η est cette fois la racine positive des équations en x suivantes :

$$\begin{aligned} x &= (1 \ 5 \ x) \text{ pour } s = 3; & x &= (1 \ 6 \ 1 \ 21 \ x) \text{ pour } s = 5; \\ x &= (1 \ 2s - 4 \ 1 \ 3s - 4 \ x) \text{ pour } s = 7, 9 \text{ et } 11. \end{aligned}$$

Parmi ces nombres critiques, et seulement dans les cas $s = 5, 7, 9$ et 11 , il y a des nombres ξ tels qu'il n'existe qu'un nombre fini de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $\left| q\left(q\xi - p - \frac{t}{s}\right) \right| \leq k$ lorsque $k = G\left(\frac{t}{s}\right)$. Si l'on écarte les nombres critiques, on peut remplacer les bornes $G\left(\frac{t}{s}\right)$ ci-dessus par d'autres strictement plus petites que 0,1478, 0,1889, 0,2090, 0,2186 et 0,2240 dans les cinq cas respectifs en question.

Le problème se pose de déterminer exactement ces valeurs suivantes et les analogues pour s impair quelconque. Il est résolu dans le seul cas où $s = 3$, par les résultats du chapitre précédent, dont les méthodes sont plus aisées : c'est

ainsi que, pour $s = 3$, la borne $G\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{1}{3\sqrt{5}}$, déduite de $C(3) = \sqrt{5}$ dès la fin du chapitre précédent, peut être remplacée, si l'on écarte ici les nombres critiques, par $\frac{1}{3\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)} = 0,1423\dots$, déduite de façon analogue de $\Gamma(3) = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Les résultats du chapitre I permettent encore d'ajouter que cette seconde valeur $\frac{1}{3\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)}$ est la plus grande valeur d'accumulation de l'ensemble des

valeurs de $\lim_{p, q} |q\left(q\xi - p - \frac{t}{3}\right)|$ ($q \neq 0$) lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels.

III. — Étude diophantienne de la forme $q\xi - p - \frac{t}{s}$ sous la condition $q > 0$.

Un problème analogue à celui envisagé dans le chapitre précédent consiste dans l'étude de l'approximation de zéro par la forme linéaire non homogène $q\xi - p - \rho$, où ρ est un nombre rationnel donné, et où les variables p et q peuvent prendre toutes les valeurs entières, l'une d'elles, q par exemple, étant en outre astreinte à rester positive. Pour q assez grand et $\frac{p}{q}$ suffisamment voisin de ξ , le signe de p est alors aussi déterminé : c'est évidemment celui de ξ . En étudiant ce problème dans le présent chapitre, nous laisserons de côté le cas banal où ξ est rationnel, et celui où ρ est entier, dans lequel on se ramène encore immédiatement au problème de l'approximation de ξ par des rationnels quelconques.

1. Posons encore $\rho = \frac{t}{s}$ (t, s entiers premiers entre eux, $s \geq 2$); la transformation du paragraphe 1 du chapitre II ramène le problème envisagé à l'étude de $\lim_{u, v} |v(\nu\xi - u)|$, où u et v prennent toutes les valeurs entières telles que $u \equiv t$, $v \equiv 0 \pmod{s}$, avec $v > 0$. Plus généralement, nous poserons comme au chapitre II :

$$K(\xi; s, a, b) = \lim_{u, v} |v(\nu\xi - u)|,$$

où u et v prennent toutes les valeurs entières satisfaisant aux conditions

$$(1) \quad u \equiv a, \quad v \equiv b \pmod{s}, \quad v > 0,$$

où a et b sont deux entiers donnés, premiers dans leur ensemble avec s .

Comme pour l'ensemble des valeurs de $H(\xi; s, a, b)$ (chap. II), montrons que l'ensemble des valeurs que prend $K(\xi; s, a, b)$ lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels est indépendant de a et b pourvu qu'il restent premiers dans leur ensemble avec s .

Considérons à cet effet deux solutions en nombres entiers A, B, C, D et A', B', C', D' des congruences modulo s :

$$(2) \quad a \equiv A a' + B b', \quad b \equiv C a' + D b'$$

telles que

$$(2) \quad AD - BC = \varepsilon = \pm 1, \quad A'D' - B'C' = \varepsilon' = \pm 1,$$

où a' et b' sont deux entiers tels que $(s, a', b') = 1$, et associons à l'irrationnel ξ les irrationnels ξ' et ξ'' définis par

$$\xi = \frac{A\xi' + B}{C\xi' + D}, \quad \xi = \frac{A'\xi'' + B'}{C'\xi'' + D'}$$

Les substitutions modulaires

$$\begin{aligned} u &= A u' + B v', & u &= A' u'' + B' v''; \\ v &= C u' + D v', & v &= C' u'' + D' v'' \end{aligned}$$

associent biunivoquement à tout couple d'entiers u, v tels que $u \equiv a, v \equiv b \pmod{s}$ des couples d'entiers u', v' et u'', v'' tels que

$$u' \equiv u'' \equiv a', \quad v' \equiv v'' \equiv b' \pmod{s}.$$

Lorsque le couple u, v prend un ensemble infini de valeurs tel que v soit strictement positif et que $\lim_{u,v} |v(\nu\xi - u)|$ soit finie, u', v' et u'', v'' décrivent des ensembles tels que (*cf.* chap. II, § 1) :

$$\lim_{u,v} |v(\nu\xi - u)| = \lim_{u',v'} |v'\xi' - u'| = \lim_{u'',v''} |v''(\nu''\xi'' - u'')|$$

et que, à un nombre fini d'exceptions près, v' et v'' gardent des signes constants, puisque, lorsque ν augmente indéfiniment, $\frac{v'}{\nu}$ et $\frac{v''}{\nu}$ tendent respectivement vers les limites finies non nulles $\varepsilon(A - C\xi)$ et $\varepsilon'(A' - C'\xi)$; par suite, si

$$\varepsilon(A - C\xi) > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon'(A' - C'\xi) > 0,$$

ν, ν' et ν'' sont simultanément positifs pour ν assez grand, et l'on a

$$K(\xi; s, a, b) = K(\xi'; s, a', b') = K(\xi''; s, a', b').$$

Pour alléger les calculs, supposons $a' = 1$ et $b' = 0$. Les conditions (2) se réduisent à :

$$(2') \quad \begin{cases} A \equiv A' \equiv a, & C \equiv C' \equiv b \pmod{s}, \\ AD - BC = \varepsilon, & A'D' - B'C' = \varepsilon' : \end{cases}$$

Or, en posant $t = (a, b)$, on peut choisir d'une infinité de manières des entiers α, β, σ et τ tels que

$$a\alpha + b\beta = t, \quad t\tau + s\sigma = 1,$$

puisque $(s, a, b) = 1$. Dès lors, comme

$$(a + \sigma\beta s) \left(a\tau + \frac{b}{t} \right) + (b - \sigma\alpha s) \left(\beta\tau - \frac{a}{t} \right) = 1,$$

on obtient une infinité de solutions des équations (2') en prenant

$$A = a + \sigma\beta s, \quad C = b - \sigma\alpha s,$$

et B et D tels que $AD - BC = \varepsilon$, ce qui est possible puisque $(A, C) = 1$. Choisissons, par exemple, deux valeurs de σ qui fournissent deux solutions A, B, C, D et A', B', C', D' telles que C et C' soient positifs, et $\frac{A}{C} > \frac{A'}{C'}$; l'indétermination de B et D, B' et D' permet encore de faire en sorte que $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon' = -1$. Quel que soit ξ , l'une au moins des deux expressions $\varepsilon(A - C\xi)$ et $\varepsilon'(A' - C'\xi)$ est alors positive; à tout irrationnel ξ , on peut ainsi associer un irrationnel ξ' ou un irrationnel ξ'' tel que $K(\xi'; s, 1, 0)$ ou $K(\xi''; s, 1, 0)$ soit égal à $K(\xi; s, a, b)$: donc l'ensemble des valeurs de $K(\xi; s, a, b)$ est contenu dans l'ensemble des valeurs de $K(\xi; s, 1, 0)$.

En supposant au contraire $a = 1$ et $b = 0$, on montrerait de façon analogue que l'ensemble des valeurs de $K(\xi; s, 1, 0)$ est contenu dans l'ensemble des valeurs de $K(\xi; s, a', b')$ pourvu que $(s, a', b') = 1$. L'ensemble des valeurs de $K(\xi; s, a, b)$ est donc globalement identique à l'ensemble des valeurs de $K(\xi; s, 1, 0)$ et l'on peut énoncer :

THÉORÈME 1. — *Lorsque a et b varient, s restant fixe avec $(s, a, b) = 1$, la fonction de ξ : $K(\xi; s, a, b)$ conserve globalement le même ensemble de valeurs.*

En particulier, on peut donc désigner par $K(s)$ la borne supérieure de $K(\xi; s, a, b)$ lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels.

La méthode développée au chapitre II pour l'étude de $H(\xi; s, a, b)$ et la détermination de $H(s)$, analogues à $K(\xi; s, a, b)$ et $K(s)$ mais où la restriction $\nu > 0$ est levée, utilise un classement des couples u, ν relatif aux couples de réduites consécutives de l'irrationnel ξ . Ce classement répartit les couples u, ν en ensembles Z_n, Z'_n, Z''_n, Z'''_n qui possèdent notamment la propriété suivante : pour chacun d'eux les formes linéaires ν et $\nu\xi - u$ conservent toutes deux un signe constant. L'étude de $K(\xi; s, a, b)$ pourra donc être abordée par un algorithme voisin de celui du chapitre II, mais où seules seront prises en considération les fractions appartenant à certains des ensembles Z_n, Z'_n, Z''_n, Z'''_n , en fait Z_n et Z'_n . Cependant, le problème de la détermination de $K(s)$ paraissant beaucoup plus difficile que celui de la détermination de $H(s)$, nous nous attacherons plus particulièrement à trouver des limitations pour $K(s)$ valables pour tout s , et nous déterminerons $K(s)$ pour $\frac{1}{2} \leq s \leq 10$.

Rappelons enfin que tous les développements en fractions continues qui seront envisagés dans la suite seront supposés écrits de façon que les dénominateurs des réduites et les quotients incomplets, sauf peut-être le premier, soient positifs (cf. note (26), p. 242).

2. Conservant les notations du paragraphe 2 du chapitre II, on voit de la même façon que $K(\xi; s, a, b)$ est entièrement déterminé par s et par la donnée, à partir d'un certain rang, de la suite des quotients incomplets a_n du développement en fraction continue de ξ et de celle des coefficients c_n associés, qu'on peut réduire à la donnée de deux d'entre eux consécutifs grâce aux formules de récurrence

$$(3) \quad d_{n+1} = c_n, \quad c_{n+1} = d_n - a_n c_n + g_n s \quad (0 \leq c_n < s),$$

où g_n est le plus petit entier au moins égal à $\frac{a_n c_n - d_n}{s}$.

Si l'on se donne arbitrairement une suite indéfinie d'entiers strictement positifs $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ et un couple d'entiers c_0, d_0 , avec $0 \leq c_0 < s, 0 \leq d_0 < s, (s, c_0, d_0) = 1$, pour n assez grand, les réduites $\frac{p'_m}{q'_m}$ ($n - m$ constant) du nombre $\xi = \frac{A + B\eta}{C + D\eta}$, où $\eta = (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n \ \dots)$ et où A, B, C, D vérifient

$$(4) \quad \begin{cases} A c_0 + B d_0 \equiv a, & C c_0 + D d_0 \equiv b \pmod{s}, \\ AD - BC = \pm 1, & C + D\eta > 0 \end{cases}$$

ont leurs termes déduits des termes des réduites $\frac{p'_n}{q'_n}$ de η par

$$p_m = A q'_n + B p'_n, \quad q_m = C q'_n + D p'_n;$$

la condition $C + D\eta > 0$ assure donc que q_m est positif comme q'_n ; de plus, on a vu (chap. II, § 2) que les coefficients c_n et d_n ($0 \leq c_n < s, 0 \leq d_n < s$) associés à b_n dans le développement de η sont aussi associés au quotient incomplet a_m égal à b_n dans le développement de ξ ; on a donc

$$u = c_n p_{m-2} + d_n p_{m-1} \equiv a, \quad v = c_n q_{m-2} + d_n q_{m-1} \equiv b \pmod{s}, \quad \text{avec } v > 0.$$

Or, il résulte de la démonstration du paragraphe 1 qu'on peut toujours trouver des solutions entières A, B, C, D aux conditions (4). On est donc assuré de trouver des nombres ξ qui admettent à partir d'un certain rang, les entiers b_n, b_{n+1}, \dots pour quotients incomplets successifs, avec des réduites à dénominateurs tous positifs, et des coefficients c_n, c_{n+1}, \dots associés déduits de c_0, d_0 par les formules de récurrence (3) après remplacement des a_n par les b_n .

De deux solutions A, B, C, D et A', B', C', D' des conditions (4) on déduit, comme au chapitre II, deux nombres ξ et ξ' qui seront dits *équivalents* pour le problème qui nous occupe. ξ et ξ' sont tels que

$$K(\xi; s, a, b) = K(\xi'; s, a, b);$$

ils se correspondent dans une relation homographique $\xi = \frac{A_1 \xi' + B_1}{C_1 \xi' + D_1}$ telle que

$$\begin{aligned} a \equiv A_1 a + B_1 b, \quad b \equiv C_1 a + D_1 b \pmod{s}, \\ A_1 D_1 - B_1 C_1 = \varepsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

avec

$$C_1 \xi' + D_1 > 0 \quad \text{ou, encore,} \quad -C_1 \varepsilon \xi + A_1 \varepsilon > 0;$$

on vérifie facilement que cette relation entre ξ et ξ' est bien une relation d'équivalence.

3. Parmi l'ensemble des fractions $\frac{u}{v}$ satisfaisant à (1), nous allons définir une famille plus restreinte telle que la limite inférieure de $|v(\nu\xi - u)|$ lorsque $\frac{u}{v}$ décrit cette famille soit cependant égale à $K(\xi; s, a, b)$.

L'ensemble des fractions satisfaisant à (1) remplit la condition $d - cy_n > 0$ qui traduit $\nu > 0$ puisqu'on a supposé positifs les dénominateurs des réduites de ξ . Or, parmi les fractions des ensembles \mathfrak{Z}_n introduits au chapitre II, seules celles des sous-ensembles Z_n et Z'_n satisfont à cette condition. A chaque indice n , nous associons donc ici les ensembles Z_n et Z'_n (à l'exclusion de Z''_n et Z'''_n). Leur réunion lorsque n varie à partir de $n = 1$ ($\frac{p-1}{q-1}$ désignant la réduite préliminaire $\frac{1}{0}$) est identique à l'ensemble des fractions satisfaisant à (1).

Nous dirons qu'on est dans le cas A_n si $c_n x_n - d_n > 0$ et dans le cas B_n si $c_n x_n - d_n < 0$. Remarquons que l'irrationalité de ξ implique $c_n x_n - d_n \neq 0$. B_n implique $d_n > a_n c_n$ et, par suite, $g_n = 0$, tandis que $g_n = 0$ implique :

$$\frac{1}{x_{n+1}}(c_{n+1}x_{n+1} - d_{n+1}) = d_n - c_n x_n,$$

c'est-à-dire B_n ou B_{n+1} . B_n implique donc A_{n+1} . Enfin, si l'on a A_n et A_{n+1} , alors $g_n \neq 0$ et $f_{n+1}^{-1,0} = f_n^{g_n-1}$ a un dénominateur positif.

Le lemme 1 du chapitre II affirme que :

LEMME 1. — Lorsque $f_n^{h,k}$ décrit Z_n , $H_n^{h,k} \geq H_n^{0,0}$ si l'on a A_n et $H_n^{h,k} \geq H_n^{1,0}$ si l'on a B_n .

Il résulte de la démonstration même de ce lemme 1 que si $f_n^{0,0}$ n'appartient pas à Z_n , lorsque $f_n^{h,k}$ décrit Z_n , $H_n^{h,k} \geq H_n^{1,0}$ même dans le cas A_n . En transposant ces résultats pour Z'_n à l'aide de la substitution R, on peut énoncer

LEMME 2. — Lorsque $f_n^{h,k}$ décrit Z'_n , $H_n^{h,k} \geq H_n^{-1,0}$ (qu'on doit remplacer par $H_n^{0,0}$ si $c_n = 0$, ce qui implique B_n) si $f_n^{-1,0}$ a un dénominateur positif, et $H_n^{h,k} \geq H_n^{-1,1}$ si $f_n^{-1,0}$ n'appartient pas à Z'_n .

1° Supposons qu'on soit dans le cas B_n .

— Si $a_n \geq 2$, on a $(c_n + s)x_n - d_n > s > d_n - c_n x_n > 0$, et comme $y_n < 0$ entraîne $d_n - (c_n + s)y_n > d_n - c_n y_n$, on en déduit : $H_n^{1,0} > H_n^{0,0}$.

— Si $a_n = 1$, comme $g_n = 0$, $f_n^{1,0}$ et $f_{n+1}^{-1,1}$ sont identiques : $H_n^{1,0} = H_{n+1}^{-1,1}$.

De plus $g_n = 0$ implique aussi $f_n^{0,0} = f_{n+1}^{0,0}$, d'où $H_n^{0,0} = H_{n+1}^{0,0}$.

Le lemme 1 peut donc s'énoncer dans le cas B_n : lorsque $f_n^{h,k}$ décrit Z'_n , on a $H_n^{h,k} \geq \inf(H_n^{0,0}, H_{n+1}^{-1,1})$.

D'autre part, si $f_n^{-1,0}$ appartient à Z'_n , on a $0 < \frac{s-c_n}{d_n} \leq \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{y_n} - \frac{1}{x_n} \right)$, et comme $0 \geq -\frac{c_n}{d_n} > -\frac{1}{x_n}$, on a $H\left(d_n, s-c_n; \frac{-1}{y_n}, \frac{-1}{x_n}\right) > H\left(d_n, -c_n; \frac{-1}{y_n}, \frac{-1}{x_n}\right)$, ce qui, en vertu de l'identité $H(c, d; x_n, y_n) = H\left(d, -c; \frac{-1}{y_n}, \frac{-1}{x_n}\right)$, s'exprime : $H_n^{-1,0} > H_n^{0,0}$.

De plus, B_n implique $d_n + s + (s - c_n)x_n > d_n - c_n x_n > 0$, d'où $H_n^{-1,1} > H_n^{0,0}$, puisque $d_n + s + (s - c_n)y_n > d_n - c_n y_n$.

Le lemme 2 peut donc s'énoncer dans le cas B_n : lorsque $f_n^{h,k}$ décrit Z'_n , on a $H_n^{h,k} \geq H_n^{0,0} = H_{n+1}^{0,0}$.

En résumé, on peut énoncer :

LEMME 3. — Dans le cas B_n (qui implique A_{n+1}), lorsque $f_n^{h,k}$ décrit Z_n et Z'_n , on a

$$H_n^{h,k} \geq \inf(H_{n+1}^{0,0}, H_{n+1}^{-1,1}).$$

2° Supposons qu'on soit dans le cas A_n .

— Si l'on a A_{n-1} on a vu que $f_n^{-1,0}$ a un dénominateur positif et par suite les lemmes 1 et 2 impliquent :

LEMME 4. — Si l'on a A_{n-1} et A_n , lorsque $f_n^{h,k}$ décrit Z_n et Z'_n , on a

$$H_n^{h,k} \geq \inf(H_n^{0,0}, H_n^{-1,0}).$$

— Si l'on a B_{n-1} , on a $g_{n-1} = 0$ d'où $\frac{s - c_n}{d_n} = \frac{s - d_n + a_{n-1}c_{n-1}}{c_{n-1}} > a_{n-1} \geq \frac{-1}{2\gamma_n}$; donc $f_n^{-1,0}$ ne peut appartenir à Z'_n et par suite, les lemmes 1 et 2 impliquent :

LEMME 5. — Si l'on a B_{n-1} et A_n , lorsque $f_n^{h,k}$ décrit Z_n et Z'_n , on a

$$H_n^{h,k} \geq \inf(H_n^{0,0}, H_n^{-1,1}).$$

Posons alors

$$\mathcal{K}_n = \inf(H_n^{0,0}, H_n^{-1,0}) \quad \text{si } A_{n-1} \text{ et } A_n,$$

et

$$\mathcal{K}_n = \inf(H_n^{0,0}, H_n^{-1,1}) \quad \text{si } B_{n-1} \text{ et } A_n.$$

Comme la réunion des Z_n et des Z'_n est l'ensemble des fractions $\frac{u}{v}$ satisfaisant à (1), et que le nombre des rangs n tels qu'une fraction $\frac{u}{v}$ donnée satisfaisant à (1) puisse se mettre sous l'une des formes $f_n^{0,0}, f_n^{-1,0}, f_n^{-1,1}$ est fini (cf. démonstration donnée à la fin du paragraphe 3 au chapitre II), il résulte des lemmes 3, 4 et 5 :

THÉORÈME A :

$$h(\xi; s, a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}_n,$$

où n décrit l'ensemble des indices tel que l'on ait A_n , ce qui peut s'exprimer :

Pour le calcul de $K(\xi; s, a, b)$, on peut se restreindre aux fractions suivantes :

$$\text{Si } A_{n-1} \text{ et } A_n : f_n^{0,0} \text{ et } f_n^{-1,0}; \quad \text{si } B_{n-1} \text{ et } A_n : f_n^{0,0} \text{ et } f_n^{-1,1}.$$

Ces fractions seront nommées fractions privilégiées de ξ au rang n (relativement au triplet s, a, b et à la condition $v > 0$). Elles seront désignées dans la suite respectivement par f_n, f'_n et f''_n au lieu de $f_n^{0,0}, f_n^{-1,0}$ et $f_n^{-1,1}$. Les quantités $H_n^{h,k}$ correspondantes seront notées H_n, H'_n et H''_n .

Remarque. — Aucune fraction privilégiée n'est rattachée aux rangs n tels que l'on ait B_n . Cependant, pour obtenir par exemple des majorations de $K(\xi; s, \alpha, b)$, on pourra bien entendu utiliser telle fraction que l'on voudra, et en particulier pour de tels indices n , des fractions comme $f_n^{0,0}, f_n^{1,0}, \dots$.

4. En supposant que l'on soit dans le cas où A_{n-1} et A_n , nous allons chercher une majoration de $\mathcal{K}_n = \inf(H_n, H'_n)$, valable quels que soient x_n et y_n . Le calcul de comparaison de H_n et H'_n a été fait au paragraphe 4 du chapitre II en supposant c_n et d_n au plus égaux à $\frac{s}{2}$. Si l'on supprime cette restriction, H_n reste une fonction croissante de x_n et décroissante de y_n dans les intervalles de variation qu'implique A_n , tandis que les sens de variation de H'_n sont opposés. Le maximum de H_n et le minimum de H'_n correspondent aux mêmes valeurs : $+\infty$ pour x_n et $-\frac{d_n}{s-c_n}$ ou -1 pour y_n ; donc, en supprimant l'indice n pour alléger l'écriture :

-- ou bien $\min H' = 0 < \max H$, dans le cas où $s - c \geq d$;

-- ou bien $\min H' = (s - c)(d + c - s) < c(c + d) = \max H$, dans le cas où $s - c < d$.

Le minimum de H et le maximum de H' correspondent aux mêmes valeurs : $\frac{d}{c}$ ou 1 pour x et 0 pour y ; donc :

-- ou bien, si $d \geq c$, $\min H = 0 < \max H'$;

-- ou bien, si $d < c$, $\min H = d(c - d)$ et $\max H' = d(d + s - c)$, ce qui implique $\min H < \max H'$, à moins que $c - d \geq \frac{s}{2}$, auquel cas $H' < \frac{1}{2}sd$.

Si $c - d < \frac{s}{2}$, $\inf(H, H')$ est donc toujours inférieur ou égal à la valeur commune maximum de H et H' lorsque $H = H'$, qui, d'après le calcul déjà cité du paragraphe 4 du chapitre II, correspond aux valeurs $x = \frac{2d}{2c - s}$, $y = 0$ si $c > \frac{s}{2}$ et $x = +\infty$, $y = -\frac{d(s - 2c)}{c^2 + (s - c)^2}$ si $c \leq \frac{s}{2}$. Dans le cas où $c > \frac{s}{2}$, cette valeur commune maximum est $\frac{1}{2}sd$, et dans le cas où $c \leq \frac{s}{2}$, elle vaut

$$\frac{1}{2}sd \frac{2c(s - c)}{c^2 + (s - c)^2} \leq \frac{1}{2}sd.$$

Dans tous les cas, on peut donc énoncer :

LEMME 6. — *Si l'on a A_{n-1} et A_n , alors*

$$\mathcal{K}_n = \inf(H_n, H'_n) < \frac{1}{2}sd_n.$$

Supposons maintenant que l'on soit dans le cas où B_{n-1} et A_n et comparons H_n et H'_n . Les sens de variation de ces fonctions de x_n et y_n sont encore opposés dans les intervalles de variation qu'implique A_n . Leurs extrema correspondent donc aux mêmes valeurs : $+\infty$ pour x_n et -1 pour y_n , d'une part ; 1 ou $\frac{d_n}{c_n}$ pour x_n et 0 pour y_n , d'autre part. On en déduit, en supprimant de nouveau l'indice n :

$$\max H = c(d + c) \quad \text{et} \quad \min H' = (s - c)(d + c),$$

ce qui implique $\max H > \min H^v$ à moins que $c \leq s - c$, auquel cas $H < \frac{1}{2}s(c + d)$:

$\min H = 0 < \max H^v$, dans le cas où $d \geq c$;

$\min H = d(c - d) < (2s + d - c)(s + d) = \max H^v$, dans le cas où $d < c$.

Si $c > \frac{1}{2}s$, $\inf(H, H^v)$ est donc toujours inférieur ou égal à la valeur commune maximum de H et H^v lorsque $H = H^v$, c'est-à-dire lorsque

$$(5) \quad [c^2 + (s - c)^2]xy + [(s - c)(s + d) - cd](x + y) + (s + d)^2 + d^2 = 0,$$

équation qui définit y comme fonction croissante de x . Lorsque cette condition (5) est réalisée, on a

$$H = H^v = \frac{s(c + d)}{[c^2 + (s - c)^2](x - y)} [c(s - c)(x + y) + s(c - d) + 2cd],$$

d'où, en différentiant :

$$\frac{c^2 + (s - c)^2}{s(c + d)}(x - y)^2 \delta H = -[s(c - d) + 2cd + 2yc(s - c)]\delta x + [s(c - d) + 2cd + 2xc(s - c)]\delta y.$$

Or, la différentiation de (5) donne

$$[(s - c)(s + d) - cd + y((s - c)^2 + c^2)]\delta x + [(s - c)(s + d) - cd + x((s - c)^2 + c^2)]\delta y = 0,$$

d'où

$$\frac{c^2 + (s - c)^2}{s(c + d)}(x - y)^2 \delta H = -s^2(1 + y)\delta x - (s - 2c)[(s - 2c)x + s + 2d]\delta y.$$

Mais $y > -1$ implique, d'après (5), $x > \frac{s + 2d}{2c - s}$. Donc, comme $c > \frac{s}{2}$, les coefficients de x et y sont tous deux négatifs dans l'expression ci-dessus, et la valeur commune maximum de H et H^v correspond précisément à $x = \frac{s + 2d}{2c - s}$, $y = -1$, et vaut $\frac{1}{2}s(c + d)$.

Comme on a vu que $c \leq s - c$ implique $H < \frac{1}{2}s(c + d)$, on peut donc énoncer dans tous les cas :

LEMME 7. — Si l'on a B_{n-1} et A_n , alors

$$\mathfrak{X}_n = \inf(H_n, H_n^v) < \frac{1}{2}s(c_n + d_n).$$

Enfin, un calcul analogue permet d'établir le lemme suivant :

LEMME 8. — Si l'on a B_n , alors $\inf(H_n^{0,0}, H_n^{1,0}) < \frac{1}{2}sd_n$.

Ce dernier résultat est à rapprocher du précédent, en remarquant que dans le cas B_n on a $g_n = 0$ et A_{n+1} , et aussi

$$e_{n+1} + d_{n+1} = d_n - (a_n - 1)e_n.$$

5. Nous allons déduire des lemmes 6, 7 et 8 la majoration suivante de $K(s)$, valable pour tout $s \geq 2$:

$$K(s) \leq \frac{2}{5} s^2.$$

1° *Supposons qu'on soit dans le cas A_n .* — Si $c_n \leq \frac{4}{5} s$, on a, d'après les lemmes 6 et 8 : si A_{n+1} , $\inf(H_{n+1}^{0,0}, H_{n+1}^{-1,0}) < \frac{2}{5} s^2$; si B_{n+1} , $\inf(H_{n+1}^{0,0}, H_{n+1}^{1,0}) < \frac{2}{5} s^2$.

Si $c_n > \frac{4}{5} s$, ou bien $d_n + (s - c_n)y_n > 0$ assure que le dénominateur de $f_n^{-1,0}$ est positif et, par suite,

$$H_n^{-1,0} < \frac{d_n[d_n + 5(s - c_n)]}{5} < \frac{2s^2}{5} \quad \text{dès que } x_n > 5;$$

— ou bien $d_n + (s - c_n)y_n \leq 0$ implique

$$\begin{aligned} H_n^{-1,1} &= \frac{[d_n + s + x_n(s - c_n)][d_n + s + y_n(s - c_n)]}{x_n - y_n} \\ &\leq s \left(\frac{s}{x_n - y_n} + s - c_n \right) < \frac{2}{5} s^2 \quad \text{dès que } x_n > 5. \end{aligned}$$

Mais si $c_n > \frac{4}{5} s$ et $a_n \leq 4$, on a

$$c_{n+1} = c_{n-1} + a_n(s - c_n) + (g_n - a_n)s < s + \frac{4}{5}s + (g_n - a_n)s$$

et, par suite :

— ou bien $g_n = a_n - 1$, d'où $c_{n+1} < \frac{4}{5} s$, donc $\inf(H_{n+2}^{0,0}, H_{n+2}^{1,0}, H_{n+2}^{-1,0}) < \frac{2}{5} s^2$, sauf peut-être si l'on a B_{n+1} (lemmes 6 et 8) ;

— ou bien $g_n = a_n$, d'où $c_{n+1} = c_{n-1} - c_n + (a_n - 1)(s - c_n) + s < s$, ce qui implique $c_n > c_{n-1}$, éventualité qui ne saurait avoir lieu pour tout n .

En résumé, pour tout irrationnel ξ il existe une infinité de fractions $\frac{u}{v}$ satisfaisant aux conditions (1) et telles que $|v(v\xi - u)| < \frac{2}{5} s^2$, sauf peut-être si le cas B_n intervient une infinité de fois dans le développement de ξ , le cas A_n n'intervenant en outre que pour les indices n tels que $a_n \leq 4$.

2° *Supposons qu'on soit dans le cas B_n .* On a donc

$$g_n = 0 \quad \text{et} \quad c_{n+1} = c_{n-1} - a_n c_n \leq c_{n-1}.$$

Si $c_{n+1} \leq \frac{4}{5} s$, comme A_{n+1} , on a $\inf(H_{n+2}^{0,0}, H_{n+2}^{1,0}, H_{n+2}^{-1,0}) < \frac{2}{5} s^2$ (lemmes 6 et 8).

Si $c_{n+1} > \frac{4}{5} s$, ce qui ne peut arriver que pour $s > 5$, on a

$$c_n = \frac{c_{n-1} - c_{n+1}}{a_n} < \frac{s}{5}.$$

Mais alors $c_{n+2} = c_n + a_{n+1}(s - c_{n+1}) + (g_{n+1} - a_{n+1})s$ est inférieur à $\frac{4}{5} s$ si

$a_{n+1} \leq 3$. Donc, ou bien A_{n+2} implique, d'après les lemmes 6 et 8 appliqués au rang $n + 3$: $\inf(H_{n+3}^{0,0}, H_{n+3}^{1,0}, H_{n+3}^{-1,0}) < \frac{2}{5} s^2$ sauf peut-être si $a_{n+1} = 4$;

— ou bien on a B_{n+2} d'où $c_{n+3} \leq c_{n+1} \leq c_{n-1}$, les égalités n'étant simultanées que si $c_n = c_{n+2} = 0$, ce qui entraîne $a_{n+1}(s - c_{n+1}) \equiv 0 \pmod{s}$, d'où, comme $(s, c_{n+1}, c_n) = 1$, $a_{n+1} \equiv 0 \pmod{s}$, donc $H_{n+1}^{-1,1} < s(s - c_{n+1} + 1) < \frac{s^2}{5} + s$, qui est inférieur à $\frac{2}{5} s^2$ pour tout $s > 5$. Les éventualités $c_{n+3} \leq c_{n+1} < c_{n-1}$ ou $c_{n+3} < c_{n+1} \leq c_{n-1}$ ne pouvant avoir lieu pour tout n , il en résulte que (en tenant compte du résultat relatif au cas A_n) :

Pour tout irrationnel ξ il existe une infinité de fractions $\frac{u}{v}$ satisfaisant à (1) et telles que $|v(v\xi - u)| < \frac{2}{5} s^2$ sauf peut-être si le triplet $B_{n-1} A_n A_{n+1}$ intervient une infinité de fois dans le développement de ξ , avec, en outre,

$$a_n = 4 = g_n, \quad d_n = c_{n-1} < \frac{s}{5}, \quad d_{n+1} = c_n > \frac{4}{5} s.$$

3° Étudions cette dernière possibilité, en distinguant deux cas :

— Si $d_n + y_n(s - c_n) > 0$, $f_n^{-1,0}$ a un dénominateur positif, donc comme $a_n = 4$,

$$H_n^{-1,0} < \frac{d_n[d_n + 4(s - c_n)]}{4} < \frac{s^2}{20};$$

— Si, au contraire, $d_n + y_n(s - c_n) \leq 0$, on a

$$H_n^{-1,1} \leq s \left(\frac{s}{x_n - y_n} + s - c_n \right).$$

De plus, la plus petite des quantités $H_n^{0,0}$ et $H_{n+1}^{-1,0} = H_n^{0,3}$ (puisque $g_n = a_n = 4$) est toujours inférieure à la valeur commune qu'elles prennent pour

$$c_n x_n - d_n - 3s = d_n - c_n y_n;$$

donc :

$$\inf(H_n^{0,0}, H_n^{0,3}) \leq \left(c_n \frac{x_n - y_n}{2} + \frac{3}{2} s \right) \left[\frac{c_n}{2} - \frac{3s}{2(x_n - y_n)} \right].$$

On achève la démonstration en observant que $c_n > \frac{4}{5} s$ et $x_n - y_n > 4$, et en distinguant les cinq cas suivants :

— Si $x_n - y_n \geq 5$,

$$H_n^{-1,1} < s \left(\frac{s}{5} + \frac{s}{5} \right) = \frac{2}{5} s^2;$$

— Si $x_n - y_n < 5$ et $c_n < \frac{37}{45} s$,

$$\inf(H_n^{0,0}, H_n^{0,3}) < \frac{1}{4} \left(\frac{37}{9} + 3 \right) \left(\frac{37}{45} - \frac{3}{5} \right) s^2 = \frac{32}{81} s^2 < \frac{2}{5} s^2;$$

— Si $c_n \geq \frac{37}{45} s$ et $x_n - y_n > \frac{9}{2}$,

$$H_n^{-1,1} < s \left(\frac{2}{9} s + \frac{8s}{45} \right) = \frac{2}{5} s^2;$$

— Si $x_n - y_n \leq \frac{9}{2}$ et $c_n < \frac{13}{15}s$,

$$\inf(H_n^{0,0}, H_n^{0,3}) < \left(\frac{39}{20} + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{13}{30} - \frac{1}{3}\right) s^2 = \frac{69s^2}{200} < \frac{2}{5}s^2;$$

— Si $c_n \geq \frac{13}{15}s$, comme $x_n - y_n > 4$,

$$H_n^{-1,1} < s \left(\frac{s}{4} + \frac{2s}{15}\right) = \frac{23}{60}s^2 < \frac{2}{5}s^2.$$

Il en résulte donc bien dans tous les cas :

THÉOREME 2. — *Pour tout irrationnel ξ il existe une infinité de fractions $\frac{u}{v}$ satisfaisant à (1) et telles que $|\nu(\nu\xi - u)| < \frac{2}{5}s^2$.*

Par suite, pour tout s au moins égal à 2, $K(s) \leq \frac{2}{5}s^2$.

6. Pour obtenir des minoration de $K(s)$, il suffit de donner des exemples d'irrationnels ξ , en étudiant l'approximation que fournissent leurs fractions privilégiées.

Pour s impair, choisissons $\xi = (s \ s \ s \ \dots)$, $a = b = \frac{1}{2}(s + 1)$, d'où $c_n = d_n = \frac{1}{2}(s + 1)$ et A_n quel que soit n . Les fractions privilégiées sont donc f_n et f'_n . Lorsque n augmente indéfiniment, x_n est égal à la racine positive de l'équation $x^2 = sx + 1$, tandis que y_n tend vers l'autre racine. Il en résulte que H_n tend vers $\frac{1}{4}(s + 1)^2 \frac{s}{\sqrt{s^2 + 4}}$ et H'_n vers $\frac{s(s^2 + 3)}{4\sqrt{s^2 + 4}}$. Donc

$$K(\xi; s, a, b) = \frac{s(s^2 + 3)}{4\sqrt{s^2 + 4}}.$$

Pour s divisible par 4, choisissons le même nombre ξ , mais $a = b = \frac{1}{2}(s + 2)$.

On a bien $(s, a, b) = 1$, puis $c_n = d_n = \frac{1}{2}(s + 2)$ et A_n pour tout n . H_n tend vers $\frac{1}{4}(s + 2)^2 \frac{s}{\sqrt{s^2 + 4}}$ et H'_n vers $\frac{s}{4}\sqrt{s^2 + 4}$. Donc

$$K(\xi; s, a, b) = \frac{s}{4}\sqrt{s^2 + 4}.$$

Pour $s \equiv 2 \pmod{4}$, choisissons $\xi = \left(\frac{s}{2} \ r_1 s \ \frac{s}{2} \ r_2 s \ \dots \ \frac{s}{2} \ r_m s \ \dots\right)$, où r_m est un entier naturel qui croît indéfiniment avec m , et $a = \frac{s}{2}$, $b = \frac{s}{2} + 1$. On a bien $(s, a, b) = 1$, puis $c_n = \frac{s}{2}$, $d_n = \frac{s}{2} + 1$ aux rangs n où $a_n = \frac{s}{2}$, et $c_n = \frac{s}{2} + 1$, $d_n = \frac{s}{2}$ aux rangs n où a_n est divisible par s . A tous les rangs, on est dans le cas A_n . H'_n tend vers $\frac{1}{4}s^2$ lorsque n augmente indéfiniment; H_n tend

vers la même limite pour l'ensemble des rangs n tels que $a_n = \frac{s}{2}$, et vers $\frac{s(s+4)}{4}$ pour l'ensemble des autres rangs. Donc

$$K(\xi; s, a, b) = \frac{1}{4} s^2.$$

Ces exemples montrent qu'on a $K(s) \geq \frac{1}{4} s^2$ pour tout s . On peut donc énoncer :

THÉOREME 3. — On a pour tout $s \geq 2$:

$$\frac{1}{4} s^2 \leq K(s) \leq \frac{2}{5} s^2.$$

7. On verra dans la suite que la minoration $K(s) \geq \frac{1}{4} s^2$ est précise au moins dans le cas $s = 2$. Cependant, on peut donner de meilleures minoration de $K(s)$ valables pour des valeurs de s assez rares, mais en nombre infini.

Soit, en effet, $s = 2u_{2t+3}$, $a = u_{2t}$, $b = s - u_{2t+1}$, où t est un entier quelconque au moins égal à 1, et où $\{u_k\}$ est la suite de Fibonacci, définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$, avec k entier de signe quelconque (27). ξ sera le nombre dont le développement en fraction continue a tous ses quotients incomplets égaux à 1, sauf ceux dont le rang est multiple de $T = 4t + 2$ (y compris α_0), qui sont égaux à 4. Soit $i \equiv n \pmod{T}$, avec $1 \leq i \leq T$, et $j = T - i$. Ces hypothèses entraînent la périodicité $c_n = c_i$, $g_n = g_i$, avec :

— Pour $1 \leq i \leq 2t$:

$$c_i = s - u_{2t+1-i}, \quad g_i = 1 \quad (i \neq 2t), \quad g_{2t} = 0 \quad \text{et} \quad A_n;$$

— Pour $2t + 1 \leq i \leq T$:

si i est pair :

$$c_i = s - u_{t-2t-i}, \quad g_i = 1 \quad (i \neq T), \quad g_T = 4 \quad \text{et} \quad A_n;$$

si i est impair :

$$c_i = u_{t-2t-i}, \quad g_i = 0 \quad \text{et} \quad B_n.$$

De plus, x_n ne prend que T valeurs distinctes x_i , au plus, et les y_n tendent vers T limites \bar{y}_i lorsque n augmente indéfiniment. x_i et \bar{y}_i sont les racines de l'équation

$$x = \frac{(u_i u_{j+3} + u_{i+2} u_{j+1})x + u_{i-1} u_{j+3} + u_{i+1} u_{j+1}}{(u_i u_{j+2} + u_{i+2} u_j)x + u_{i-1} u_{j+2} + u_{i+1} u_j}$$

qui peut encore s'écrire :

$$(6) \quad (u_i u_{j+2} + u_{i+2} u_j) (x^2 - x - 1) - (-1)^i [(u_{i-j-2} + u_{i-j+1})x + u_{i-j-3} + u_{i-j+1}] = 0.$$

(27) On rappelle les formules, utiles pour les calculs qui vont suivre :

$$u_{-k} = (-1)^{k-1} u_k, \quad u_{k+h} = u_k u_{h+1} + u_{k-1} u_h,$$

déjà rencontrées au chapitre I.

$K(\xi; s, a, b)$ sera donc déterminé en comparant un nombre fini de quantités $\bar{H}_i^{h,k}$, limites des $H_n^{h,k}$ lorsque n augmente indéfiniment.

Les fractions privilégiées sont les suivantes :

- Pour $1 \leq i \leq 2t$: f_n et f'_n , d'ailleurs identique à f_{n-1} si $i \geq 2$;
- Pour $2t+1 \leq i \leq T$, avec i pair : f_n et f'_n .

1° Comparons \bar{H}_i et \bar{H}_i^v pour i pair compris entre $2t+1$ et $4t+1$. On a, en posant $i' = i - 2t - 1$:

$$(x_i - \bar{y}_i)(\bar{H}_i^v - \bar{H}_i) = x_i \bar{y}_i [u_{i'}^2 + (s - u_{i'})^2] + (x_i + \bar{y}_i)[u_{i'}(s + u_{i'-1}) - u_{i'-1}(s - u_{i'})] + u_{i'-1}^2 + (s + u_{i'-1})^2.$$

On minore le second membre en négligeant le terme en $x_i + \bar{y}_i$, manifestement positif, et en remarquant que

$$\frac{(s + u_{i'-1})^2 + u_{i'}^2}{(s - u_{i'})^2 + u_{i'}^2} = 1 + 2u_{i'+1} \frac{s - u_{i'} - 2}{s^2 - 2u_{i'}(s - u_{i'})} > 1 + \frac{2u_{i'+1}}{s}$$

tandis que, d'après (6), et puisque i est pair

$$x_i \bar{y}_{i+1} = - \frac{u_{i-j-3} + u_{i-j+1}}{u_i u_{j+2} + u_{i+2} u_j},$$

d'où

$$(x_i - \bar{y}_i)(\bar{H}_i^v - \bar{H}_i) > [u_{i'}^2 + (s - u_{i'})^2] \left[\frac{u_{i-2t}}{u_{2t+3}} - \frac{u_{i-j-3} + u_{i-j+1}}{u_i u_{j+2} + u_{i+2} u_j} \right].$$

Le second crochet est supérieur à

$$\frac{u_{i-2t}}{u_{2t+3}} - \frac{u_{i-j+2}}{2u_{i+j}} > \frac{u_{i-2t}}{u_{2t+3}} - \frac{u_{2t-4t}}{u_{4t+3}},$$

expression positive pour i pair compris entre $2t+1$ et $4t+1$. Par suite, $\bar{H}_i^v > \bar{H}_i$ pour i pair compris entre $2t+1$ et $4t+1$.

Mais la symétrie de la période du développement de ξ entraîne la relation $x_i \bar{y}_{j+1} + 1 = 0$; en tenant compte des valeurs des c_i , on en conclut pour i pair : $\bar{H}_i = \bar{H}'_{j+1} = \bar{H}_j$. En posant, grâce à la périodicité,

$$x_0 = x_T, \quad \bar{y}_0 = \bar{y}_T, \quad \bar{H}_0 = \bar{H}_T, \quad \dots,$$

et en observant que $\bar{H}'_1 = \bar{H}_0$, d'après la formule précédente et $\bar{H}'_i = \bar{H}_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq 2t$, d'après ce qu'on a vu, on en conclut :

LEMME A :

$$K(\xi; s, a, b) = \inf(\bar{H}_0, \bar{H}_1, \bar{H}_0^v) \quad (1 \leq i \leq 2t).$$

2° Comparons \bar{H}_i et \bar{H}_{i-1} pour i pair compris entre 1 et $2t+1$. On a $\bar{H}_{i-1} = \bar{H}'_i$ et en posant $j' = 2t - 1 - i$, on voit que la différence

$$(x_i - \bar{y}_i)(\bar{H}_i - \bar{H}'_i) = -x_i \bar{y}_i [(s - u_{j'})^2 + u_{j'}^2] + (x_i + \bar{y}_i) [(s - u_{j'+1})(s - 2u_{j'}) - 2(s - u_{j'+1})^2]$$

a le même signe que l'expression

$$\Delta = -x_i \bar{y}_i \frac{(s - u_{j'})^2 + u_{j'}^2}{(s - u_{j'+1})^2} + (x_i + \bar{y}_i) \frac{s - 2u_{j'}}{s - u_{j'+1}} - 2.$$

Dans Δ le coefficient de $-x_i \bar{y}_i$ est manifestement supérieur à 1, et celui de $x_i + \bar{y}_i$ inférieur à 1. Désignons-les par $1 + \gamma$ et $1 - \delta$ respectivement, Posons, de même,

$$-x_i \bar{y}_i = 1 + \alpha, \quad x_i + \bar{y}_i = 1 - \beta.$$

Il vient, d'après (6) :

$$\beta = (-1)^i \frac{u_{j-i-2} + u_{j-i+2}}{u_i u_{j+2} + u_{i+2} u_j}, \quad \alpha - \beta = (-1)^i \frac{u_{j-i-3} + u_{j-i+1}}{u_i u_{j+2} + u_{i+2} u_j},$$

d'où $\beta > 0$ et $\alpha - \beta > 0$, puisque i est pair et inférieur à $j - 1$; d'autre part :

$$\gamma - \delta = \frac{s(3u_{j'-1} - u_{j'}) + 2}{(s - u_{j'+1})^2}$$

est positif pour $j' > 1$, c'est-à-dire $i < 2t$. Donc, pour i pair compris entre 1 et $2t - 1$,

$$\Delta = (1 + \alpha)(1 + \gamma) + (1 - \beta)(1 - \delta) - 2 = \alpha - \beta + \gamma - \delta + \alpha\gamma + \beta\delta > \alpha - \beta + \gamma - \delta > 0.$$

On en conclut en tenant compte du lemme A :

LEMME B :

$$K(\xi; s, a, b) = \inf(\bar{H}_0, \bar{H}_i, \bar{H}_{2t}, \bar{H}_0^{IV}) \quad (i \text{ impair avec } 0 < i < 2t).$$

3° Comparons $\bar{H}_{i-1} = \bar{H}'_i$ et $\bar{H}_{i+1} = \bar{H}'_{i+1}$ pour i pair compris entre 1 et $2t + 1$. On a, en posant encore $j' = 2t + 1 - i$:

$$\frac{1}{s}(x_i - \bar{y}_i)(\bar{H}'_{i+1} - \bar{H}'_i) = x_i \bar{y}_i (s - 2u_{j'}) - (x_i + \bar{y}_i)(2s - u_{j'} - u_{j'+1}) + 3s - 2u_{j'+1}$$

qui a le même signe que

$$\Delta' = 3 + x_i \bar{y}_i \frac{s - 2u_{j'}}{s - \frac{2}{3}u_{j'+1}} - 2(x_i + \bar{y}_i) \frac{s - \frac{1}{2}u_{j'+2}}{s - \frac{2}{3}u_{j'+1}}.$$

Désignant par $1 - \gamma'$ et $1 - \delta'$ les coefficients de $x_i \bar{y}_i$ et de $-2(x_i + \bar{y}_i)$, on vérifie sans peine que $\gamma' > 2\delta' > 0$. Or, on a vu que $\alpha > \beta > 0$; de plus, d'après (6) :

$$\alpha - 2\beta = (-1)^{i+1} \frac{u_{j-i-4} - u_{j-i}}{u_i u_{j+2} + u_{i+2} u_j},$$

donc $\alpha - 2\beta \leq 0$ pour i pair au plus égal à $2t$. Pour ces valeurs de i , on a donc :

$$\Delta' = 3 - (1 + \alpha)(1 - \gamma') - 2(1 - \beta)(1 - \delta') = \gamma' + 2\delta' - (\alpha - 2\beta) + \alpha\gamma' - 2\beta\delta' > 0.$$

On en conclut en tenant compte du lemme B :

LEMME C :

$$K(\xi; s, a, b) = \inf(\bar{H}_0, \bar{H}_1, \bar{H}_{2t}, \bar{H}_0^{IV})$$

De plus, pour $i = 2t - 1$, on a :

$$\Delta' = \frac{3}{6u_{2t+3} - 4} - \frac{3}{u_{2t-1}u_{2t+5} + u_{2t+1}u_{2t+3}} - \frac{21}{(3s-4)(u_{2t-1}u_{2t+5} + u_{2t+1}u_{2t+3})},$$

expression positive pour $t \geq 2$; pour $t \geq 2$, on en déduit donc

$$\bar{H}_{2t} > \bar{H}_{2t-2} > \bar{H}_{2t-3} \geq \bar{H}_1.$$

Pour $t = 1 (s = 10)$, on vérifie directement que $\bar{H}_2 > \bar{H}_1$. Dans tous les cas, on a donc :

LEMME D :

$$K(\xi; s, a, b) = \inf(\bar{H}_0, \bar{H}_1, \bar{H}_0^v).$$

4° Or, d'après (6), $x_0 = x_T$ et $\bar{y}_0 = \bar{y}_T$ sont les racines de l'équation $u_T^2 x^2 = 4u_T x + 3u_{T-1} + u_T$. En désignant par ν la fraction $\frac{u_{2t+4}}{u_{2t+3}} = \frac{2}{s} u_{2t+4}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} (x_0 - \bar{y}_0) \bar{H}_0 &= (u_{2t+4}x_0 - u_{2t})(u_{2t} - \bar{y}_0 u_{2t+4}) = \frac{s^2}{4} \left(5\nu^2 - 9 + 3\nu^2 \frac{u_{T-1}}{u_T} \right), \\ (x_0 - \bar{y}_0) \bar{H}_0^v &= (u_{2t+1}x_0 + u_{2t+2} + u_{2t+4})(u_{2t+1}\bar{y}_0 + u_{2t+2} + u_{2t+4}) \\ &= \frac{s^2}{4} \left(-5\nu^2 + 20\nu - 11 - 3(2-\nu)^2 \frac{u_{T-1}}{u_T} \right) \\ (x_0 - \bar{y}_0) \bar{H}_1 &= (x_0 - y_0) \bar{H}_0^{0,4} = (8u_{2t+3} + u_{2t} - u_{2t+4}x_0)(8u_{2t+3} + u_{2t} - u_{2t+4}\bar{y}_0) \\ &= \frac{s^2}{4} \left(25 - 5\nu^2 - 3\nu^2 \frac{u_{T-1}}{u_T} \right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{4(x_0 - \bar{y}_0)(\bar{H}_0 - \bar{H}_1)}{s^2} &= 10\nu^2 - 34 + 6\nu^2 \frac{u_{T-1}}{u_T}, \\ \frac{4(x_0 - \bar{y}_0)(\bar{H}_0^v - \bar{H}_1)}{s^2} &= 20\nu - 36 + 12(\nu - 1) \frac{u_{T-1}}{u_T}. \end{aligned}$$

Or, en posant $\theta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, on a, comme $t \geq 1$, $\frac{u_6}{u_5} = \frac{8}{5} \leq \nu < \theta$ et comme T est pair $\frac{u_{T-1}}{u_T} > \frac{1}{\theta} > \frac{21}{34}$. On en déduit d'après les expressions ci-dessus :

$$\bar{H}_0 > \bar{H}_1 \quad \text{et} \quad \bar{H}_0^v > \bar{H}_1.$$

Donc finalement en tenant compte du lemme D :

LEMME E :

$$K(\xi; s, a, b) = \bar{H}_1.$$

Or, $x_0 - \bar{y}_0 = 2\sqrt{\frac{u_{T+3}}{u_T}}$. Comme $\frac{u_{k+2}}{u_k}$ est une fonction décroissante de l'entier k lorsque k est pair, et que $T = 4t + 2 \geq 2t + 4$, on a

$$x_0 - \bar{y}_0 < \frac{2u_{T+2}}{u_T} \leq \frac{2u_{2t+6}}{u_{2t+4}} = 2\left(2 + \frac{1}{\nu}\right).$$

D'autre part, $\frac{u_{k-1}}{u_k}$ étant dans les mêmes conditions une fonction décroissante de k , on a $\frac{u_{t-1}}{u_t} \leq \frac{1}{v}$. D'où

$$8 \frac{\overline{H}_1}{s^2} > \frac{25v - 3v^2 - 5v^3}{2v + 1},$$

qui est une fonction décroissante de v dans l'intervalle $\left(\frac{3}{2} < v < \theta\right)$; par suite :

$$8 \frac{\overline{H}_1}{s^2} > \frac{25\theta - 3\theta^2 - 5\theta^3}{2\theta + 1} = \frac{44}{7\theta + 5},$$

c'est-à-dire

$$K(\xi; s, a, b) > \frac{11s^2}{2(7\theta + 5)} = \frac{s^2}{2,968\dots}$$

THÉOREME 4. — *Pour l'ensemble infini de valeurs de s déterminé par $s = 2u_{2t+3}$, on a :*

$$\frac{11s^2}{2(7\theta + 5)} < K(s) \leq \frac{2}{5}s^2;$$

en particulier, on a donc

$$\frac{1}{3} < \frac{K(s)}{s^2} \leq \frac{2}{5}.$$

Des exemples analogues, obtenus en donnant au quotient incomplet différent de 1 dans la période du développement de ξ une autre valeur que 4, fourniraient pour d'autres valeurs de s des minoration de $K(s)$ peut-être moins bonnes que $\frac{1}{3}s^2$, mais meilleures que la minoration générale $\frac{1}{4}s^2$.

Enfin remarquons que pour $s = 10 (t = 1)$ ⁽²⁸⁾ les calculs précédents fournissent la minoration :

$$K(10) \geq \frac{37s^2}{10\sqrt{110}} = \frac{s^2}{2,834\dots}$$

On montrera à la fin de ce chapitre qu'on a en fait $K(10) = \frac{370}{\sqrt{110}}$.

8. La fin de ce chapitre va être consacrée à la détermination pour $2 \leq s \leq 10$, des valeurs exactes de $K(s)$ et des nombres ξ critiques correspondants, c'est-à-dire ceux pour lesquels $K(\xi; s, a, b) = K(s)$.

Pour $s = 2$, il est évident que $K(\xi; s, a, b) = H(\xi; s, a, b)$ quels que soient ξ, a

⁽²⁸⁾ D'ailleurs, en exprimant $\frac{u_{t+4}}{u_t}$ et $\frac{u_{t-1}}{u_t}$ à l'aide de v , soit respectivement $\frac{2v-1}{-3v^2+10v-8}$ et $\frac{5v^2-16v+13}{-3v^2+10v-8}$, on obtient

$$8 \frac{\overline{H}_1}{s^2} = \frac{-2v^3 - 74v^2 + 250v - 200}{\sqrt{-6v^3 + 23v^2 - 26v + 8}},$$

fonction décroissante de v , de sorte que la minoration $\frac{K(s)}{s^2} \geq \frac{\overline{H}_1}{s^2}$ est la plus forte pour $t = 1 (s = 10)$, parmi toutes les valeurs de t .

et b , puisque les deux classes de restes modulo 2 sont chacune leur propre opposée. Les résultats relatifs à l'ensemble des valeurs de $H(\xi; 2, a, b)$ (chap. II) valent donc pour celui de $K(\xi; 2, a, b)$. En particulier $K(2) = 1$, et c'est une valeur d'accumulation pour l'ensemble des valeurs de $K(\xi; 2, a, b)$. Les nombres ξ dont tous les quotients incomplets sont pairs et augmentent indéfiniment avec leur indice, sont encore critiques pour le choix $a = b = 1$.

Pour $3 \leq s \leq 10$, la méthode de détermination de $K(s)$ est analogue à celle utilisée au chapitre II pour trouver $H(s)$. Nous qualifierons cette fois d'*exclue* à λs^2 près toute séquence de quotients incomplets a_n et de coefficients c_n associés telle que sa présence une infinité de fois dans le développement de ξ entraîne l'existence d'une infinité de fractions $\frac{u}{v}$ satisfaisant à (1) et telles que $|\nu(\nu\xi - u)| < \lambda s^2$ et, par suite, $K(\xi; s, a, b) \leq \lambda s^2$, où λ est une constante numérique convenablement choisie dans chaque cas.

Les lemmes 6, 7 et 8 (§ 4) entraînent immédiatement l'exclusion des séquences à un terme telles que $c_n \leq 2\lambda s$ si A_n , et $d_n \leq 2\lambda s$ si B_n . De plus $d_n \geq s - c_n$ assure que le dénominateur de f'_n est positif, et dans ce cas $d_n \leq 2\lambda s$ entraîne l'exclusion même dans le cas A_n . Enfin, B_n entraîne A_{n+1} et $c_{n+1} = d_n - a_n c_n \leq d_n - c_n$; donc $d_n - c_n \leq 2\lambda s$ est exclu dans le cas B_n .

Dans chaque cas numérique, λ sera toujours choisi strictement supérieur à $\frac{1}{4}$. Il en résulte, d'après ce qu'on vient de voir, que, à moins d'être exclu à λs^2 près, le couple c_n, d_n ne peut prendre ses valeurs que dans trois ensembles E_1, E_2, E_3 sans valeurs communes, définis par :

$$\begin{aligned} E_1: & \quad 2\lambda s < c_n < s, & \quad 2\lambda s < d_n < s \\ E_2: & \quad 2\lambda s < c_n < s, & \quad 0 \leq d_n < s - c_n \\ E_3: & \quad d_n - c_n > 2\lambda s, & \quad c_n \geq 0, \quad d_n < s. \end{aligned}$$

De plus, en remarquant que B_n entraîne

$$c_n = \frac{1}{a_n}(d_n - c_{n+1}), \quad \text{donc} \quad c_n < (1 - 2\lambda)s < 2\lambda s,$$

puisque A_{n+1} implique $c_{n+1} > 2\lambda s$ sous peine d'exclusion, on voit que, sauf exclusion à λs^2 près :

- l'appartenance de c_n, d_n à E_1 implique A_{n-1} et A_n ;
- l'appartenance de c_n, d_n à E_2 implique B_{n-1} et A_n ;
- l'appartenance de c_n, d_n à E_3 implique B_n .

Si c_n, d_n appartient à E_2, c_{n-1}, d_{n-1} appartient donc à E_3 et réciproquement. Rappelons enfin la condition nécessaire $(s, c_n, d_n) = 1$.

9. Pour $s = 3$, nous choisirons $9\lambda = 2,84$.

Les seuls couples non exclus sont alors les suivants :

$$\begin{aligned} c_n = d_n = 2, & \quad \text{avec} \quad A_{n-1} \text{ et } A_n; \\ c_n = 0, \quad d_n = 2 & \quad \text{avec} \quad c_{n+1} = 2, \quad d_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad B_n \text{ et } A_{n+1}. \end{aligned}$$

1^{er} cas. — $c_n = 0, d_n = 2; c_{n+1} = 2, d_{n+1} = 0.$

$a_n \geq 2$ implique $H_n < 2$; donc $a_n = 1$ sous peine d'exclusion et, par suite, $y_{n+1} < -\frac{1}{2}$; $a_{n+1} \geq 18$ implique alors $H'_{n+1} < \frac{(3+18)(3-\frac{1}{2})}{18+\frac{1}{2}} < 2,84$. Donc,

sous peine d'exclusion, on doit avoir aussi $a_{n+1} \leq 17$. De plus, comme c_{n+2} ne peut être égal qu'à 0 ou 2 sous peine d'exclusion, les formules de récurrence (3) impliquent $a_{n+1} \equiv 0$ ou $2 \pmod{3}$.

2^e cas. — $c_n = 2, d_n = 2.$

$a_n \geq 5$ implique $H'_n < \frac{2(2+5)}{5} = 2,8$: exclu; $a_n = 1$ implique $x_n < 2$, d'où $H_n < \frac{8}{3}$: exclu; de plus, comme on doit avoir $a_n \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$ pour que c_{n-1} soit égal à 0 ou 2, on a en fait $a_n = 3$ ou 4 . Or, $a_n = 4$ implique $c_{n+1} = 0$ d'où $a_{n+1} = 1$ et $a_{n+2} \geq 2$, c'est-à-dire $x_n > 4 + \frac{2}{3}$ sous peine d'exclusion; d'autre part

a_{n-1} ne peut être supérieur à 17, d'où $y_n < -\frac{1}{18}$ et $H'_n < \frac{(2+4+\frac{2}{3})(2-\frac{1}{18})}{4+\frac{2}{3}+\frac{1}{18}} < 2,8$

ce qui entraîne l'exclusion de $a_n = 4$. Comme $a_n = 3$ implique $c_{n+1} = 2$, l'éventualité $c_n = d_n = 2$ ne peut intervenir, sous peine d'exclusion, que par sa répétition indéfinie; or, dans ce dernier cas, $x_n > 3 + \frac{1}{4}$ et $y_n < -\frac{1}{4}$, et, par

suite, $H'_n \leq \frac{(5+\frac{1}{4})(2-\frac{1}{4})}{5+\frac{1}{2}} < 2,7$, ce qui est encore exclu. Le 2^e cas est donc

complètement exclu.

Reprenons le 1^{er} cas. On doit donc avoir $c_{n+2} = 0$, d'où $a_{n+1} \equiv 0$ et aussi $a_{n-1} \equiv 0 \pmod{3}$. Donc $a_{n+1} \geq 3$ et $a_{n-1} \geq 3$ d'où $y_{n+1} < -\frac{3}{4}$ puisque $a_n = 1$.

— Si $a_{n+1} \geq 9$, $H'_{n+1} < \frac{(3+9)(3-\frac{3}{4})}{9+\frac{3}{4}} < 2,8$: exclu; donc $a_{n+1} \leq 6$ et, de

même, $a_{n-1} \leq 6$;

— Si $a_{n-1} = a_{n+1} = 6$, $H'_{n+1} < \frac{(3+6)(3-\frac{6}{7})}{6+\frac{6}{7}} < 2,82$: exclu;

— Si $a_{n-1} = a_{n+1} = 3$, $H_{n+1} < \frac{4}{1+\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$: exclu.

Seul peut donc échapper à l'exclusion à 2,84 près le développement périodique suivant :

$c :$	0	2	0	2
$d :$	2	0	2	0
$a :$	1	3	1	6
indice n modulo 4 :	0	1	2	3

En désignant par ξ_0 un nombre correspondant à un tel développement, on calcule aisément que $K(\xi_0; 3, a, b)$ est fourni par la limite commune $\frac{9}{\sqrt{10}}$ des H_1, H_3 et H_3^v , où l'indice, augmentant indéfiniment, est écrit modulo 4. Comme on a $\frac{9}{\sqrt{10}} > 2,84$, on peut énoncer :

Les nombres ξ_0 sont les nombres critiques, et la borne $K(3)$, isolée, vaut

$$K(3) = \frac{9}{\sqrt{10}} = 2,8460\dots$$

L'ensemble des $K(\xi; 3, a, b)$ ne prend aucune valeur entre $K(3)$ et $2,84$.

10. Pour $s = 4$, nous choisirons $16\lambda = 4,942$.

Les seuls couples non exclus sont alors les suivants :

$$\begin{aligned} c_n = 0, \quad d_n = 3, \quad \text{avec } c_{n+1} = 3, \quad d_{n+1} = 0 \quad \text{et } B_n \text{ et } A_{n+1}; \\ c_n = d_n = 3, \quad \text{avec } A_{n-1} \text{ et } A_n. \end{aligned}$$

1^{er} cas. — $c_n = 0, \quad d_n = 3; \quad c_{n+1} = 3, \quad d_{n+1} = 0$.

$a_n \geq 2$ implique $H_n < \frac{9}{2}$; donc $a_n = 1$ sous peine d'exclusion et, par suite,

$$y_{n+1} < -\frac{1}{2}; \quad a_{n+1} \geq 8 \text{ implique alors } H_{n+1}^v < \frac{(4+8)\left(4-\frac{1}{2}\right)}{8+\frac{1}{2}} < 4,942. \text{ Donc,}$$

sous peine d'exclusion, on doit avoir aussi $a_{n+1} \leq 7$. De plus, c_{n+2} ne peut être égal qu'à 0 ou 3 sous peine d'exclusion; les formules de récurrence (3) impliquent donc $a_{n+1} \equiv 0$ ou 3 (mod 4).

2^e cas. — $c_n = 3, \quad d_n = 3$.

$a_n \geq 5$ implique $H_n' < \frac{3(3+5)}{5} = 4,8$: exclu; de plus, comme on doit avoir $a_n \equiv 0$ ou 1 (mod 4) pour que c_{n+1} soit égal à 3 ou 0, on a en fait $a_n = 1$ ou 4.

Or, $a_n = 1$ implique $c_{n+1} = 0$, d'où $a_{n+1} = 1$ et $a_{n+2} \leq 7$, c'est-à-dire $x_{n+1} > 1 + \frac{1}{8}$ sous peine d'exclusion; d'autre part, a_{n-1} ne peut être inférieur à 3, d'où $y_{n+1} < -\frac{3}{4}$ et, par suite, $H_{n+1} < \frac{9}{\frac{9}{8} + \frac{3}{4}} = 4,8$, ce qui entraîne l'exclusion

de $a_n = 1$. Comme $a_n = 4$ implique $c_{n+1} = 3$, l'éventualité $c_n = d_n = 3$ ne peut intervenir, sous peine d'exclusion, que par sa répétition indéfinie; or, dans ce

dernier cas, $x_n > 4$ et $y_n < -\frac{1}{5}$ d'où $H_n' < \frac{(3+4)\left(3-\frac{1}{5}\right)}{4+\frac{1}{5}} = \frac{14}{3}$, ce qui est encore

exclu. Le 2^e cas est donc complètement exclu.

Reprenons le 1^{er} cas. On doit donc avoir $c_{n+2} = 0$, d'où $a_{n+1} \equiv 0$ (mod 4), donc

$a_{n+1} = 4$. Seul peut donc échapper à l'exclusion à $4,942$ près le développement périodique suivant :

$$\begin{array}{rcl} c : & 0 & 3 \\ d : & 3 & 0 \\ a : & 1 & 4 \\ \text{indice } n \text{ modulo } 2 : & 0 & 1 \end{array}$$

En désignant par ξ_0 un nombre correspondant à un tel développement, on calcule aisément que $K(\xi_0; 4, a, b)$ est fourni par la limite $\frac{7}{\sqrt{2}}$ des H_1^n où l'indice, augmentant indéfiniment, est écrit modulo 2. Comme on a $\frac{7}{\sqrt{2}} > 4,942$, on peut énoncer :

Les nombres ξ_0 sont les nombres critiques, et la borne $K(4)$, isolée, vaut :

$$K(4) = \frac{7}{\sqrt{2}} = 4,9497\dots$$

L'ensemble des $K(\xi; 4, a, b)$ ne prend aucune valeur entre $K(4)$ et $4,942$.

11. Pour $s = 5$, nous choisirons $25\lambda = 7,8$.

Les seuls couples non exclus sont alors les suivants :

$$\begin{array}{l} c_n = 0, \quad d_n = 4, \quad \text{avec } c_{n+1} = 4, \quad d_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad B_n \text{ et } A_{n+1}; \\ c_n = d_n = 4, \quad \text{avec } A_{n-1} \text{ et } A_n. \end{array}$$

1^{er} cas. — $c_n = 0, \quad d_n = 4; \quad c_{n+1} = 4, \quad d_{n+1} = 0$.

$a_{n+1} \geq 9$ implique $H_{n+1}^{IV} < \frac{(5+9)^5}{9} < 7,8$: exclu ; comme $c_{n+2} = 0$ ou 4 sous peine d'exclusion $a_{n+1} \equiv 0$ ou $4 \pmod{5}$, donc $a_{n+1} = 4$ ou 5. Dès lors, $a_n \geq 2$ implique $x_n > 2 + \frac{1}{6}$, d'où $H_n < \frac{16}{2 + \frac{1}{6}} < 7,5$: exclu. Donc $a_n = 1$; or $a_{n+1} = 5$

implique $c_{n+2} = 0$, d'où $a_{n+2} = 1$ et $a_{n+3} = 4$ ou 5, d'où $x_{n+3} > 4$ et $y_{n+3} < -\frac{5}{6}$ et,

par suite, $H_{n+3}^{IV} < \frac{(5+4)\left(5 - \frac{5}{6}\right)}{4 + \frac{5}{6}} < 7,8$. On doit donc avoir, sous peine d'exclusion,

$a_n = 1$ et $a_{n+1} = 4$, d'où $c_{n+2} = d_{n+2} = 4$.

2^e cas. — $c_n = 4, \quad d_n = 4$.

$a_n \geq 5$ implique $H_n' < \frac{4(4+5)}{5} = 7,2$: exclu ; comme on doit avoir $a_n \equiv 0$ ou $1 \pmod{5}$ pour que c_{n+1} soit égal à 4 ou 0, on a en fait $a_n = 1$, d'où $c_{n+1} = 0$.

Seul peut donc échapper à l'exclusion à $7,8$ près le développement périodique suivant :

$$\begin{array}{rcl} c : & 4 & 0 & 4 \\ d : & 4 & 4 & 0 \\ a : & 1 & : & 4 \\ \text{indice } n \text{ modulo } 3 : & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

En désignant par ξ_0 un nombre correspondant à un tel développement, on calcule aisément que $K(\xi_0; 5, a, b)$ est fourni par la limite commune $\frac{40}{\sqrt{26}}$ des H_0 et H_2 (indices modulo 3). Comme on a $\frac{40}{\sqrt{26}} > 7,8$, on peut donc énoncer :

Les nombres ξ_0 sont les nombres critiques, et la borne $K(5)$, isolée, vaut :

$$K(5) = \frac{40}{\sqrt{26}} = 7,8446\dots$$

L'ensemble des $K(\xi; 5, a, b)$ ne prend aucune valeur entre $K(5)$ et 7,8.

12. Pour $s = 6$, nous choisirons $36\lambda = 11$.

Les seuls couples non exclus sont alors les suivants :

$$\begin{array}{llll} c_n = 0, & d_n = 5, & \text{avec } c_{n+1} = 5, & d_{n+1} = 0 \quad \text{et } B_n \text{ et } A_{n+1}; \\ c_n = 1, & d_n = 5, & \text{avec } c_{n+1} = 4, & d_{n+1} = 1 \quad \text{et } B_n \text{ et } A_{n+1}; \\ c_n = d_n = 5; & c_n = 5, & d_n = 4; & c_n = 4, \quad d_n = 5; \quad \text{tous ces cas avec } A_{n-1} \text{ et } A_n. \end{array}$$

1^{er} cas. — $c_n = 0, \quad d_n = 5; \quad c_{n+1} = 5, \quad d_{n+1} = 0$.

$a_n \geq 3$ implique $H_n < \frac{25}{3}$: exclu ; donc $a_n = 1$ ou 2 ; par suite, $y_{n+1} < -\frac{1}{3}$.

$a_{n+1} \geq 6$ implique alors $H_{n+1} < \frac{(6+6)\left(6-\frac{1}{3}\right)}{6+\frac{1}{3}} < 11$. Comme, pour que $c_{n+2} = 0$,

1, 4 ou 5, on doit avoir $a_{n+1} \equiv 0, 1, 4$ ou 5 (mod 6), on a en fait $a_{n+1} = 1, 4$ ou 5 et $a_n = 1$ ou 2 sous peine d'exclusion.

2^e cas. — $c_n = 1, \quad d_n = 5; \quad c_{n+1} = 4, \quad d_{n+1} = 1$.

$a_n \geq 2$ implique $H_n < \frac{5(5-2)}{2} = 7,5$: exclu ; donc $a_n = 1$; de plus, $d_{n+2} = 4$, d'où $c_{n+2} = 5$ sous peine d'exclusion ; on doit donc avoir $a_{n+1} \equiv 2$ ou 5 (mod 6).

3^e cas. — $c_n = 5, \quad d_n = 4$.

Si $c_{n+1} = 1$ ou 4, $a_n \equiv 3$ ou 0 (mod 6) ; si $c_{n+1} = 0$; $a_n \equiv 2$, avec, d'après ce qu'on vient de voir (1^{er} cas), $a_{n+1} = 1$ ou 2 ; dans tous ces cas, on a donc, sous

peine d'exclusion $x_n > 2 + \frac{1}{3}$, d'où $H_n < \frac{4\left(4+2+\frac{1}{3}\right)}{2+\frac{1}{3}} < 11$. On doit donc avoir,

sous peine d'exclusion $a_n = 1$, d'où $c_{n+1} = 5 = d_{n+1}$.

4^e cas. — $c_n = 5, \quad d_n = 5$.

$a_n \geq 5$ implique $H_n < \frac{5(5+5)}{5} = 10$: exclu ; comme $a_n = 3$ ou 4 conduit à des valeurs de c_{n+1} exclues, on doit avoir $a_n = 1$ ou 2. Or, $a_n = 1$ implique $c_{n+1} = 0$, $y_{n+1} < -\frac{1}{2}$, et si $a_{n+1} = 2$, $H_{n+1} < \frac{25}{2+\frac{1}{2}} = 10$, ce qui est exclu.

L'examen global des différents cas montre alors que le premier implique, sous peine d'exclusion, $c_{n-1} = d_{n-1} = 5$ et $a_n = 1$; sous ces hypothèses, $a_{n+1} = 5$

implique $H_{n+1}^{IV} < \frac{(6+5)\left(6-\frac{1}{2}\right)}{5+\frac{1}{2}} = 11$ et est exclu; il en résulte que dans le

1^{er} cas on doit avoir $a_{n+1} = 1$ ou 4, et que, d'autre part, $c_n = d_n = 5$ implique sous peine d'exclusion $d_{n-1} = 4$ et, par suite, $a_{n-1} = 1$; si donc dans le 4^e cas on a $a_n = 2$, cela implique $c_{n+1} = 1$, d'où $a_{n+1} = 1$, $a_{n+2} \geq 2$ (2^e cas), d'où $x_n > 2 + \frac{2}{3}$

et, par suite, $H_n' < \frac{\left(5+2+\frac{2}{3}\right)\left(5-\frac{1}{2}\right)}{2+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} < 11$, ce qui est encore exclu.

En résumé, les seules séquences qui puissent échapper à l'exclusion à 11 près sont les suivantes, désignées par \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' :

$$\mathfrak{S} \left\{ \begin{array}{l} c: \quad 5 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \quad 1 \quad 4 \\ d: \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \quad 1 \\ a: \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad - \\ \text{rang: } n \quad n+1 \quad n+2 \quad n+3 \quad n+4 \quad n+5 \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{S}' \left\{ \begin{array}{l} c: \quad 5 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \quad 4 \\ d: \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \\ a: \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad - \\ \text{rang: } n' \quad n'+1 \quad n'+2 \quad n'+3 \quad n'+4 \end{array} \right.$$

et celles qui s'en déduisent par leur juxtaposition avec, en outre :

$$\begin{array}{lll} a_{n+5} \equiv 2 \text{ ou } 5 \pmod{6}, & c_{n+5} = 5, & d_{n+5} = 4 \text{ pour } \mathfrak{S}; \\ a_{n'+4} \equiv 0 \text{ ou } 3 \pmod{6}, & c_{n'+5} = 5, & d_{n'+5} = 4 \text{ pour } \mathfrak{S}'. \end{array}$$

De plus, pour \mathfrak{S} , $a_{n+5} = 2$ implique $x_{n+4} > 1 + \frac{1}{3}$ et $y_{n+4} < -\frac{1}{2}$, et, par suite

$H_{n+4} < \frac{\left(5-1-\frac{1}{3}\right)\left(5+\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 11$; donc $a_{n+5} \geq 5$ sous peine d'exclusion.

Supposons que la séquence \mathfrak{S}' soit immédiatement précédée de la séquence \mathfrak{S} ($n' = n + 6$) ou bien d'une autre séquence de type \mathfrak{S}' , mais avec $a_{n'-1} \neq 3$; dans les deux cas, $a_{n'-1} \geq 5$, d'où $y_{n'} > -\frac{1}{5}$, et $x_{n'+3} > 4$, d'où $x_{n'} < \frac{14}{5}$, ce

qui implique $H_{n'} < \frac{\left(\frac{70}{9}-4\right)5}{\frac{14}{9}+\frac{1}{5}} < 11$: exclu. Supposons, au contraire, que la

séquence \mathfrak{S}' soit précédée d'une autre séquence de type \mathfrak{S}' avec $a_{n'-1} = 3$; $x_{n'+4} > 3$ implique $x_{n'} > \frac{45}{29}$, tandis que $y_{n'-2} < -\frac{3}{5}$ implique $y_{n'} < -\frac{23}{74}$, d'où

l'on déduit $H_{n'} < \frac{\left(4+\frac{45}{29}\right)\left(4-\frac{23}{74}\right)}{\frac{45}{29}+\frac{23}{74}} < 11$. La séquence \mathfrak{S}' est donc complètement

exclue.

Supposons encore que la séquence \mathfrak{S} soit immédiatement précédée d'une autre séquence de type \mathfrak{S} , avec $a_{n-1} \geq 8$, d'où $\gamma_n > -\frac{1}{8}$; comme $x_{n+5} > 5$ implique $x_n < \frac{45}{28}$, cela implique $H_n < \frac{\left(\frac{225}{28} - 4\right) \left(4 + \frac{5}{8}\right)}{\frac{45}{28} + \frac{1}{8}} < 11$, ce qui est encore exclu.

Finalement, seul peut donc échapper à l'exclusion à 11 près le développement périodique suivant :

$$\begin{array}{cccccc} c : & 5 & 5 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ d : & 4 & 5 & 5 & 0 & 5 & 1 \\ a : & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ \text{indice } n \text{ modulo } 6 : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

En désignant par ξ_0 un nombre correspondant à un tel développement, on calcule aisément que $K(\xi_0; 6, a, b)$ est fourni par la limite $\frac{69}{\sqrt{39}}$ de $H_0 = H'_i$ (indices modulo 6). Comme on a $\frac{69}{\sqrt{39}} > 11$, on peut énoncer :

Les nombres ξ_0 sont les nombres critiques, et la borne $K(6)$, isolée, vaut :

$$K(6) = \frac{69}{\sqrt{39}} = 11,0489 \dots$$

L'ensemble des $K(\xi; 6, a, b)$ ne prend aucune valeur entre $K(6)$ et 11.

13. Pour $s = 7$, nous choisirons $49\lambda = 16,2$.

Les seuls couples non exclus sont alors les suivants :

$$\begin{array}{llll} c_n = 0, & d_n = 6, & \text{avec } c_{n+1} = 6, & d_{n+1} = 0 \text{ et } B_n \text{ et } A_{n+1}; \\ c_n = 0, & d_n = 5, & \text{avec } c_{n+1} = 5, & d_{n+1} = 0 \text{ et } B_n \text{ et } A_{n+1}; \\ c_n = 1, & d_n = 6, & \text{avec } c_{n+1} = 5, & d_{n+1} = 1 \text{ et } B_n \text{ et } A_{n+1}; \\ c_n = d_n = 6; & c_n = d_n = 5; & c_n = 6, & d_n = 5; \quad c_n = 5, \quad d_n = 6; \quad \text{avec } A_{n-1} \text{ et } A_n. \end{array}$$

1^{er} cas. — $c_n = 0, d_n = 6; c_{n+1} = 6, d_{n+1} = 0$.

$a_n \geq 3$ implique $H_n < \frac{36}{3}$: exclu; donc $a_n = 1$ ou 2 d'où $\gamma_{n+1} < -\frac{1}{3}$; $a_{n+1} \geq 5$ implique alors $H_{n+1} < \frac{(7+5) \left(7 - \frac{1}{3}\right)}{5 + \frac{1}{3}} = 15$: exclu; comme, pour que $c_{n+2} = 0, 1, 5$ ou 6 , on doit avoir $a_{n+1} \equiv 0, 1, 5$ ou $6 \pmod{7}$, on a en fait $a_{n+1} = 1$, d'où $x_n > a_n + \frac{1}{2}$; $a_n = 2$ implique alors $H_n < \frac{36}{2 + \frac{1}{2}} < 15$. Donc, sous peine d'exclusion,

$$a_n = a_{n+1} = 1, \quad \text{d'où} \quad c_{n+2} = 1.$$

2^e cas. — $c_n = 1, d_n = 6; c_{n+1} = 5, d_{n+1} = 1$.

$a_n \geq 2$ implique $H_n < \frac{6(6-2)}{2} = 12$: exclu; donc $a_n = 1$. De plus, on doit avoir $c_{n+2} = 5, 0$ ou 6 , d'où respectivement $a_{n+1} \equiv 2, 3$ ou $6 \pmod{7}$.

3^e cas. — $c_n = 0$, $d_n = 5$; $c_{n+1} = 5$, $d_{n+1} = 0$,

$a_n \geq 2$ implique $H_n < \frac{25}{2}$: exclu; donc $a_n = 1$ d'où $y_{n+1} < -\frac{1}{2}$; $a_{n+1} \geq 10$ implique alors $H_{n+1} < \frac{(7+20)(7-1)}{10 + \frac{1}{2}} < 16$: exclu; comme on doit avoir $c_{n+2} = 6$, 5 ou 0, d'où respectivement $a_{n+1} \equiv 0, 3$ ou $6 \pmod{7}$, on ne peut avoir, sauf exclusion, que :

$$a_n = 1 \quad \text{avec} \quad a_{n+1} = 3, 6 \text{ ou } 7.$$

4^e cas. — $c_n = 6$, $d_n = 5$.

$a_n = 2$ entraîne $c_{n+1} = 0$, d'où $a_{n+1} = 1$ (1^{er} et 3^e cas); donc $a_n \geq 2$ entraîne $x_n > 2 + \frac{1}{2}$ et, par suite, $H_n < \frac{(5 + 2 + \frac{1}{2})5}{2 + \frac{1}{2}} = 15$: exclu. Sous peine d'exclusion, on doit donc avoir

$$a_n = 1, \quad \text{d'où} \quad c_{n+1} = 6.$$

5^e cas. — $c_n = 6$, $d_n = 6$.

$a_n \geq 6$ implique $H_n < 12$ et est exclu; pour que c_{n+1} ait une valeur non exclue, on doit donc avoir $a_n = 1$ ou 2. Or, $a_n = 2$ implique $c_{n+1} = 1$, d'où $a_{n+1} = 1$, (2^e cas) donc $x_n > 2 + \frac{1}{2}$; d'autre part, l'examen des différents cas montre qu'on ne peut avoir que $d_{n-1} = 0$ ou 5 (et $c_{n-1} = 6$), d'où $a_{n-1} = 1$ et $y_n < -\frac{1}{2}$ et, par suite, $H_n < \frac{(6 - \frac{1}{2})(6 + 2 + \frac{1}{2})}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} < 16$: exclu; donc, sous peine d'exclusion, on a

$$a_n = 1, \quad \text{d'où} \quad c_{n+1} = 0.$$

6^e cas. — $c_n = 5$, $d_n = 5$.

$a_n \geq 4$ implique $H_n < \frac{5(5+8)}{4} < 16$; pour que a_n et c_{n+1} aient des valeurs non exclues, on doit donc avoir $a_n = 1$. Or, cela implique $c_{n+1} = 0$, d'où $a_{n+1} = 1$ (3^e cas) et, d'autre part, l'examen des différents cas montre qu'on ne peut avoir que $d_{n-1} = 0$ ou 1, d'où $a_{n-1} \geq 2$ et $y_{n+1} < -\frac{2}{3}$, d'où $H_{n+1} < \frac{25}{1 + \frac{2}{3}} = 15$. Il en résulte

que ce 6^e cas est complètement exclu, ainsi que la valeur $a_{n+1} = 6$ dans le 3^e cas. De plus, l'éventualité $a_{n+1} \equiv 2 \pmod{7}$ dans le 2^e cas est aussi exclue.

Remarquons encore que l'éventualité $c_n = 5$, $d_n = 6$, qui ne peut suivre aucun des cas envisagés, est par là même exclue, puisqu'elle ne peut intervenir par sa répétition exclusive.

Reprenons la séquence du 3^e cas : ce qui vient d'être établi montre qu'elle ne peut être précédée, sous peine d'exclusion, que par $c_{n-1} = 5$, $d_{n-1} = 0$ ou 1, d'où

$a_{n-1} \geq 3$ et $y_{n+1} < -\frac{3}{4}$; si donc $a_{n+1} = 7$, on a $H_{n+1}^{IV} < \frac{(7+14)\left(7-\frac{3}{2}\right)}{7+\frac{3}{4}} < 15$, ce

qui est exclu; donc $a_{n+1} = 3$, sous peine d'exclusion.

Dès lors, aux exclusions près, la valeur de a_n n'est plus susceptible d'un choix que pour $c_n = 5$, $d_n = 1$ (2° cas). Envisageons dans ce cas les diverses possibilités :

— Si $a_n \equiv 6 \pmod{7}$, on a $\{a_{n\pm 1} = a_{n\pm 2} = a_{n\pm 3} = a_{n\pm 4} = a_{n\pm 5} = 1$, et, par suite $x_{n+1} < \frac{13}{8}$, $y_{n+1} > -\frac{5}{33}$ d'où $H_{n+1} < \frac{\left(\frac{7^8}{8} - 5\right)\left(5 + \frac{30}{33}\right)}{\frac{13}{8} + \frac{5}{33}} < 16$: exclu; donc $a_n \equiv 3 \pmod{7}$;

— Si $a_n \geq 17$, alors $a_{n+1} = 1$ et $a_{n+2} = 3$, d'où $x_{n+2} > 3 + \frac{3}{5}$ et $y_{n+2} < -\frac{17}{18}$ et, par suite, $H_{n+2}^{IV} < \frac{\left(7 + 6 + \frac{6}{5}\right)\left(7 - \frac{17}{9}\right)}{3 + \frac{3}{5} + \frac{17}{18}} < 16$: exclu; donc $a_n = 3$ ou 10 ;

— Si $a_n = 3$, alors $\{x_{n+2} < 3 + \frac{5}{8}$ et $y_{n+2} > -\frac{29}{37}$, d'où $H_{n+2} < \frac{25}{\frac{8}{29} + \frac{37}{29}} < 16,2$:

ce qui est encore exclu.

Finalement, seul peut donc échapper à l'exclusion à 16,2 près le développement périodique suivant :

c :	6	6	0	6	1	5	0	5
d :	5	6	6	0	6	1	5	0
a :	1	1	1	1	1	10	1	3
indice n modulo 8 :	0	1	2	3	4	5	6	7

En désignant par ξ_0 un nombre correspondant à un tel développement, on calcule aisément que $K(\xi_0; 7, a, b)$ est fourni par la limite commune $\frac{6\ 853}{4\sqrt{11\ 130}}$ des H_n et des H_n^{IV} (indices modulo 8). Comme on a $\frac{6\ 853}{4\sqrt{11\ 130}} > 16,2$, on peut énoncer :

Les nombres ξ_0 sont les nombres critiques, et la borne $K(7)$, isolée, vaut :

$$K(7) = \frac{6\ 853}{4\sqrt{11\ 130}} = 16,2395 \dots$$

L'ensemble des $K(\xi; 7, a, b)$ ne prend aucune valeur entre $K(7)$ et 16,2.

14. Pour $s = 8$, nous choisirons $64\lambda = 22$.

Les seuls couples non exclus sont alors les suivants :

$c_n = 0$, $d_n = 7$, avec $c_{n+1} = 7$, $d_{n+1} = 0$ et B_n et A_{n+1} ;
 $c_n = 1$, $d_n = 7$, avec $c_{n+1} = 6$, $d_{n+1} = 1$ et B_n et A_{n+1} ;
 $c_n = d_n = 7$; $c_n = 7$, $d_n = 6$; $c_n = 6$, $d_n =$ tous ces cas avec A_{n-1} et A_n .

1^{er} cas. — $c_n=0$, $d_n=7$; $c_{n+1}=7$, $d_{n+1}=0$.

$a_{n+1} \geq 6$ implique $H_{n+1}^{\alpha} < \frac{(8+6)8}{6} < 19$: exclu; comme, pour que $c_{n+2}=0$, 1, 6 ou 7, on doit avoir $a_{n+1} \equiv 0, 1, 6$ ou $7 \pmod{8}$, on a en fait $a_{n+1}=1$, d'où $x_n > a_n + \frac{1}{2}$. Dès lors, $a_n \geq 2$ implique $H_n < \frac{49}{2 + \frac{1}{2}} < 20$: exclu. Donc, sous

peine d'exclusion, on a

$$a_n = a_{n+1} = 1, \quad \text{d'où} \quad c_{n+2} = 1.$$

2^e cas. — $c_n=1$, $d_n=7$; $c_{n+1}=6$, $d_{n+1}=1$.

$a_n \geq 2$ implique $H_n < \frac{7(7-2)}{2} < 18$: exclu; donc $a_n=1$; de plus, on a $d_{n+2}=6$ d'où, sous peine d'exclusion $c_{n+2}=7$ et, par suite, $a_{n+1} \equiv 3$ ou $7 \pmod{8}$.

3^e cas. — $c_n=7$, $d_n=6$.

$a_n=2$ implique $c_{n+1}=0$, d'où $a_{n+1}=1$ et $x_n > a_n + \frac{1}{2}$; donc $a_n \geq 2$

implique $H_n' < \frac{6(6+2+\frac{1}{2})}{2+\frac{1}{2}} < 21$; donc, sous peine d'exclusion, on a

$$a_n=1, \quad \text{d'où} \quad c_{n+1}=7.$$

4^e cas. — $c_n=7$, $d_n=7$.

$a_n \geq 4$ implique $H_n' < \frac{7(7+4)}{4} < 20$: exclu; comme $a_n=3$ conduit à une valeur de c_{n+1} exclue, on doit avoir $a_n=1$ ou 2. Or, $a_n=2$ implique $c_{n+1}=1$, d'où $a_{n+1}=1$ et $x_n > 2 + \frac{1}{2}$; d'autre part, l'examen des différents cas montre que l'on ne peut avoir que $d_{n-1}=0$ ou 6 (et $c_{n-1}=7$), d'où $a_{n-1}=1$ et $y_n < -\frac{1}{2}$

et, par suite, $H_n' < \frac{(7+2+\frac{1}{2})(7-\frac{1}{2})}{3} < 21$: exclu. Donc, sous peine d'exclusion, on doit avoir

$$a_n=1, \quad \text{d'où} \quad c_{n+1}=0.$$

Remarquons comme précédemment que l'éventualité $c_n=6$, $d_n=7$ qui ne peut suivre aucun des cas envisagés, est par là même exclue.

Le seul cas où l'on puisse avoir un quotient incomplet différent de 1 sans que cela entraîne d'exclusion est le 2^e cas; or, si dans ce cas $a_{n+1} \geq 7$, on a $y_{n+2} > -\frac{1}{7}$ et

$a_{n+2}=a_{n+3}=a_{n+4}=a_{n+5}=1$, d'où $x_{n+2} < \frac{5}{3}$ et $H_{n+2} < \frac{(\frac{35}{3}-6)(6+1)}{\frac{5}{3}+\frac{1}{7}} < 22$: exclu.

Finalement, seul peut donc échapper à l'exclusion à 22 près le développement périodique suivant :

$c :$	7	7	0	7	1	6
$d :$	6	7	7	0	7	1
$a :$	1	1	1	1	1	3
indice n modulo 6 :	0	1	2	3	4	5

En désignant par ξ_0 un nombre correspondant à un tel développement, on calcule aisément que $K(\xi_0; 8, a, b)$ est fourni par la limite $\frac{94}{3\sqrt{2}}$ des $H_0 = H'_1$ (indices modulo 6). Comme on a $\frac{94}{3\sqrt{2}} > 22$, on peut énoncer :

Les nombres ξ_0 sont les nombres critiques, et la borne $K(8)$, isolée, vaut :

$$K(8) = \frac{94}{3\sqrt{2}} = 22,1560 \dots$$

L'ensemble des $K(\xi; 8, a, b)$ ne prend aucune valeur entre $K(8)$ et 22.

15. Pour $s = 9$, nous choisirons $81 \lambda = 25,75$.

Les seuls couples non exclus sont alors les suivants :

$c_n = 0, d_n = 8,$ avec $c_{n+1} = 8, d_{n+1} = 0$ et B_n et A_{n+1}
 $c_n = 0, d_n = 7,$ avec $c_{n+1} = 7, d_{n+1} = 0$ et B_n et A_{n+1} ;
 $c_n = 1, d_n = 8,$ avec $c_{n+1} = 6$ ou $7, d_{n+1} = 1$ et B_n et A_{n+1} ;
 $c_n = 1, d_n = 7,$ avec $c_{n+1} = 6$ ou $7, d_{n+1} = 1$ et B_n et A_{n+1} ;
 $c_n = 2, d_n = 8,$ avec $c_{n+1} = 6, d_{n+1} = 2$ et B_n et A_{n+1} ;
 $c_n = 6, d_n = 7; c_n = 6, d_n = 8; c_n = 7, d_n = 6; c_n = 7 = d_n; c_n = 7, d_n = 8;$
 $c_n = 8, d_n = 6; c_n = 8, d_n = 7; c_n = 8 = d_n;$ tous ces cas avec A_{n-1} et A_n .

1^{er} cas. — $c_n = 0, d_n = 8; c_{n+1} = 8, d_{n+1} = 0:$

$a_{n+1} \geq 5$ implique $H_{n+1}^v < \frac{9(9+5)}{5} = 25,2$: exclu ; comme a_{n+1} ne peut être égal à 3 ou 4 sans que c_{n+2} ait une valeur exclue, on doit avoir $a_{n+1} = 1$ ou 2. Or, $a_n \geq 2$ et $a_n = 2$ avec $a_{n+1} = 1$ impliquent $x_n > 2 + \frac{1}{2}$, d'où $H_n < \frac{64}{2 + \frac{1}{2}} = 25,6$: exclu.

Donc, sous peine d'exclusion, on doit avoir :

- ou bien $a_n = a_{n+1} = 1$, d'où $c_{n+2} = 1$ (et $d_{n+2} = 8$);
- ou bien $a_n = 1$ ou 2, avec $a_{n+1} = 2$, d'où $c_{n+2} = 2$ (et $d_{n+2} = 8$).

2^o cas. — $c_n = 0, d_n = 7; c_{n+1} = 7, d_{n+1} = 0.$

$a_n \geq 2$ implique $H_n < \frac{49}{2}$: exclu ; donc $a_n = 1$ et $y_{n+1} < -\frac{1}{2}$; $a_{n+1} \geq 8$ implique alors $H_{n+1}^v < \frac{(9+16)(9-1)}{8 + \frac{1}{2}} < 25$: exclu. Pour que c_{n+2} ait une valeur

non exclue, on doit donc avoir $a_{n+1} = 3, 4$ ou 5, d'où respectivement $c_{n+2} = 6, 8$ ou 1 (et $d_{n+2} = 7$).

3^o cas. — $c_n = 2, d_n = 8; c_{n+1} = 6, d_{n+1} = 2.$

$a_n \geq 2$ implique $H_n < 16$: exclu ; donc $a_n = 1$; de plus on vérifie aisément que l'on ne peut avoir que $c_{n+2} = 8$ (et $d_{n+2} = 6$), avec $a_{n+1} \equiv 2, 5$ ou 8 (mod 9).

4° cas. — $c_n = 1$, $d_n = 8$; $c_{n+1} = 6$ ou 7 , $d_{n+1} = 1$.

$a_n \geq 2$ implique $H_n < 24$: exclu; donc $a_n = 1$, d'où $c_{n+1} = 7$ et $y_{n+1} < -\frac{1}{2}$.
 $a_{n+1} \geq 10$ implique alors $H'_{n+1} < \frac{(10+20)(10-1)}{10 + \frac{1}{2}} < 25,72$: exclu; de plus, $a_{n+1} = 1$

ou 2 entraîne pour c_{n+2} des valeurs exclues; donc $3 \leq a_{n+1} \leq 9$.

5° cas. — $c_n = 1$, $d_n = 7$; $c_{n+1} = 6$ ou 7 , $d_{n+1} = 1$.

$a_n \geq 2$ implique $H_n < 18$: exclu; donc $a_n = 1$, d'où $c_{n+1} = 6$. De plus, on vérifie aisément qu'on ne peut avoir que $c_{n+2} = 7$ (et $d_{n+2} = 6$), avec $a_{n+1} \equiv 2, 5$ ou $8 \pmod{9}$.

6° cas. — $c_n = 6$, $d_n = 7$; $c_{n+1} = 7$ ou 8 , $d_{n+1} = 6$.

Les formules de récurrence (3) imposent en fait $c_{n+1} = 7$, avec $a_n \equiv 0, 3$ ou $6 \pmod{9}$; donc $a_n \geq 3$.

7° cas. — $c_n = 6$, $d_n = 8$; $c_{n+1} = 7$ ou 8 , $d_{n+1} = 6$.

Les formules (3) imposent en fait $c_{n+1} = 8$, avec $a_n \equiv 0, 3$ ou $6 \pmod{9}$; donc $a_n \geq 3$.

8° cas. — $c_n = 7$, $d_n = 6$.

$a_n \geq 3$ implique $H'_n < 24$: exclu; $a_n = 2$ implique $c_{n+1} = 1$ (et $d_{n+1} = 7$), d'où
 (5° cas) $a_{n+1} = 1$ et $a_{n+2} \geq 2$; donc $x_n > 2 + \frac{2}{3}$ et $H'_n < \frac{6(6+4+\frac{4}{3})}{2 + \frac{2}{3}} = 25,5$: exclu;

$a_n = 1$, enfin, implique $c_{n+1} = 8$ (et $d_{n+1} = 7$); or, l'examen des cas précédents montre que l'on a $d_{n-1} = 1$ ou 7 , d'où $a_{n-1} \geq 2$ et $y_{n+1} < -\frac{2}{3}$; dès lors :

— ou bien $x_{n+1} > \frac{3}{2}$, d'où $H'_{n+1} < \frac{(7-\frac{2}{3})(7+\frac{3}{2})}{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}} = 25$: exclu;

— ou bien $x_{n+1} < \frac{3}{2}$, ce qui implique $a_{n+1} = 1$ et $a_{n+2} \geq 2$, donc $c_{n+2} = d_{n+2} = 8$, $y_{n+2} < -\frac{1}{2}$ et, si $a_{n+2} = 2$, $c_{n+3} = 1$ et $a_{n+3} = 1$, avec $a_{n+4} \geq 3$ (4° cas), d'où, de

toutes façons, $x_{n+2} > \frac{11}{4}$ et, par suite, $H'_{n+2} < \frac{(8+\frac{11}{4})(8-\frac{1}{2})}{\frac{11}{4} + \frac{1}{2}} < 25$, ce qui est

exclu.

Ainsi, ce 8° cas est complètement exclu, ainsi par suite que ceux qui impliquent sa présence, par exemple immédiatement à leur suite, comme les 5° et 6° cas.

9° cas. — $c_n = 7$, $d_n = 7$.

$a_n \geq 5$ implique $H'_n < \frac{7(7+10)}{5} < 24$: exclu; donc, en tenant compte de

l'exclusion des 5° et 6° cas, on voit qu'on doit avoir $a_n = 1$, avec $c_{n+1} = 0$, $d_{n+1} = 7$, $a_{n+1} = 1$, $a_{n+2} = 4$ (d'après le 2° cas).

10° cas. — $c_n = 7$, $d_n = 8$.

$a_n \geq 7$ implique $H'_n < \frac{8(8+14)}{7} < 25,2$: exclu; en tenant compte de l'exclusion du 5° cas, on voit qu'on ne peut donc avoir que :

— ou bien $a_n = 4$, d'où $c_{n+1} = d_{n+1} = 7$;

— ou bien $a_n = 5$, d'où $c_{n+1} = 0$, $d_{n+1} = 7$, $a_{n+1} = 1$, $a_{n+2} = 4$.

Reprenons alors le 9° cas. Il résulte de ce qui précède qu'il implique sous peine d'exclusion $d_{n-1} = 8$ et $a_{n-1} = 4$ (10° cas au rang $n-1$) ou $d_{n-1} = 1$ et $a_{n-1} = 3$ (4° cas aux rangs $n-2$ et $n-1$), donc de toutes façons $y_{n+1} < -\frac{3}{4}$; or on a vu qu'il implique aussi $a_{n+1} = 1$ et $a_{n+2} = 4$, d'où $x_{n+1} > \frac{6}{5}$ et, par suite, $H_{n+1} < \frac{49}{\frac{6}{5} + \frac{3}{4}} < 25,2$: exclu. Donc le 9° cas est complètement exclu, et le 10°

se réduit au second terme de l'alternative indiquée.

11° cas. — $c_n = 8$, $d_n = 6$.

$a_n \geq 2$ implique $H'_n < 24$: exclu; or, $a_n = 1$ implique $c_{n+1} = 7$ (et $d_{n+1} = 8$) donc, d'après le 10° cas, $a_{n+1} = 5$ et $a_{n+2} = 1$, d'où $x_{n+1} > 5 + \frac{1}{2}$, $y_{n+1} < -\frac{1}{2}$, et, par suite, $H'_{n+1} < \frac{(8-1)(8+10+1)}{5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} < 23$. Ce 11° cas est donc complètement

exclu, et aussi ceux qui impliquent sa présence par exemple à leur suite, comme les 3° et 7° cas et le second terme de l'alternative du 1^{er} cas.

12° cas. — $c_n = 8$, $d_n = 7$.

$a_n \geq 3$ implique $H'_n < \frac{7(7+3)}{3} < 24$: exclu; $a_n = 2$ implique $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$ et $a_{n+4} \geq 3$ (cf. 1^{er} 4° et 11° cas); donc $x_n > \frac{29}{11}$, d'où $H'_n < \frac{7(7 + \frac{29}{11})}{\frac{29}{11}} < 25,7$.

Donc, sous peine d'exclusion, on a $a_n = 1$, d'où $c_{n+1} = d_{n+1} = 8$.

13° cas. — $c_n = 8$, $d_n = 8$.

L'examen des cas précédents montre qu'on doit avoir sous peine d'exclusion $c_{n-1} = 8$, $d_{n-1} = 7$, $a_{n-1} = 1$, d'où $y_n < -\frac{1}{2}$; de plus $a_n = 2$ implique $c_{n+1} = 1$, d'où $a_{n+1} = 1$ et $a_{n+2} \geq 3$ (4° cas); donc $a_n \geq 2$ implique $x_n > \frac{11}{4}$ et, par suite,

$H'_n < \frac{(8 + \frac{11}{4})(8 - \frac{1}{2})}{\frac{11}{4} + \frac{1}{2}} < 25$: exclu. On doit donc avoir $a_n = 1$, d'où $c_{n+1} = 0$

sous peine d'exclusion.

Remarquons ici que le 10° cas, qui ne peut suivre aucun des cas non exclus, est par là même exclu complètement.

Ainsi, les seuls cas qui échappent encore à l'exclusion à 25,75 près sont les 1°, 2°, 4°, 12° et 13° cas. De plus, le 2° cas ne peut intervenir qu'immédiatement après le 4° cas pour former la séquence suivante :

$c :$	1	7	0	7	8
$d :$	8	1	7	0	7
$a :$	1	4	1	4	1
rang :	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$

qui implique $x_{n+1} > 4 + \frac{1}{2}$, $y_{n+1} < -\frac{4}{5}$, d'où $H_{n+1}^v < \frac{(9+9)(9-\frac{8}{5})}{4+\frac{1}{2}+\frac{4}{5}} < 25$, et qui

est donc aussi exclue, ainsi par suite que le 2° cas.

Seul peut donc échapper à l'exclusion à 25,75 près le développement périodique suivant :

$c :$	8	8	0	8	1	7
$d :$	7	8	8	0	8	1
$a :$	1	1	1	1	1	8
indice n modulo 6 :	0	1	2	3	4	5

En désignant par ξ_0 un nombre correspondant à un tel développement, on calcule aisément que $K(\xi_0; 9, a, b)$ est fourni par la limite $\frac{159}{\sqrt{38}}$ des H_s^v (indice modulo 6). Comme on a $\frac{159}{\sqrt{38}} > 25,75$, on peut énoncer :

Les nombres ξ_0 sont les nombres critiques, et la borne $K(9)$, isolée, vaut :

$$K(9) = \frac{159}{\sqrt{38}} = 25,7932\dots$$

L'ensemble des $K(\xi; 9, a, b)$ ne prend aucune valeur entre $K(9)$ et 25,75.

16. Pour $s = 10$, nous choisirons $100\lambda = 34$.

Les seuls couples non exclus sont alors les suivants :

$$\begin{aligned} & c_n = 0, \quad d_n = 9, \quad \text{avec} \quad c_{n+1} = 9, \quad d_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad B_n \quad \text{et} \quad A_{n+1}; \\ & c_n = 1, \quad d_n = 9, \quad \text{avec} \quad c_{n+1} = 8, \quad d_{n+1} = 1 \quad \text{et} \quad B_n \quad \text{et} \quad A_{n+1}; \\ & c_n = d_n = 9; \quad c_n = 9, \quad d_n = 8; \quad c_n = 8, \quad d_n = 9; \quad \text{tous ces cas avec} \quad A_{n-1} \quad \text{et} \quad A_n. \end{aligned}$$

1^{er} cas. — $c_n = 0, \quad d_n = 9; \quad c_{n+1} = 9, \quad d_{n+1} = 0.$

$a_{n+1} \geq 8$ implique $H_{n+1}^v < \frac{(10+8)10}{8} < 23$: exclu; comme, pour que $c_{n+2} = 0$, 1, 8 ou 9, on doit avoir $a_{n+1} \equiv 0, 1, 8$ ou $9 \pmod{10}$, on a en fait $a_{n+1} = 1$. Dès lors $a_n \geq 2$ implique $x_n > 2 + \frac{1}{2}$ et, par suite $H_n < \frac{81}{2+\frac{1}{2}} < 33$. Donc, sous peine d'exclusion, on a $a_n = a_{n+1} = 1$, d'où $c_{n+2} = 1$ (et $d_{n+2} = 9$).

2° cas. — $c_n = 1$, $d_n = 9$; $c_{n+1} = 8$, $d_{n+1} = 1$.

$a_n \geq 2$ implique $H_n < \frac{9(9-2)}{2} < 32$: exclu; $a_{n+1} \geq 9$ implique d'autre part $H_{n+1}^r < \frac{11(11+18)}{9} < 32$ exclu; de plus, on a $d_{n+2} = 8$, d'où $c_{n+2} = 9$ et, par suite, $a_{n+1} = 4$ sous peine d'exclusion, ainsi que $a_n = 1$.

3° cas. — $c_n = 9$, $d_n = 8$.

$a_n = 2$ implique $c_{n+1} = 0$, d'où $a_{n+1} = 1$; donc $a_n \geq 2$ implique $x_n > 2 + \frac{1}{2}$, d'où $H_n \frac{8(8+2+\frac{1}{2})}{2+\frac{1}{2}} < 34$; donc sous peine d'exclusion, on doit avoir $a_n = 1$, d'où $c_{n+1} = d_{n+1} = 9$.

4° cas. — $c_n = 9$, $d_n = 9$.

$a_n \geq 4$ implique $H_n < \frac{9(9+4)}{4} < 30$: exclu; comme $a_n = 3$ conduit à une valeur exclue pour c_{n+1} , on doit avoir $a_n = 1$ ou 2. Or, $a_n = 2$ implique $c_{n+1} = 1$, d'où $a_{n+1} = 1$ et $x_n > 2 + \frac{1}{2}$; d'autre part, l'examen des différents cas montre qu'on ne peut avoir que $d_{n-1} = 0$ ou 8 (et $c_{n-1} = 9$), d'où $a_{n-1} = 1$ et $y_n < -\frac{1}{2}$ et, par suite, $H_n < \frac{(9+2+\frac{1}{2})(9-\frac{1}{2})}{2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} < 33$: exclu. Donc, sous peine d'exclusion, on doit avoir $a_n = 1$, d'où $c_{n+1} = 0$.

Remarquons que l'éventualité $c_n = 8$, $d_n = 9$, qui ne peut suivre aucun des cas envisagés, est par là même exclue.

Il résulte donc de ce qui précède que seul peut échapper à l'exclusion à 34 près le développement périodique suivant :

c :	9	9	0	9	1	8
d :	8	9	9	0	9	1
a :	1	1	1	1	1	4
indice n modulo 6 :	0	1	2	3	4	5

En désignant par ξ_0 un nombre correspondant à un tel développement, on calcule aisément que $K(\xi_0; 10, a, b)$ est fourni par la limite $\frac{370}{\sqrt{110}}$ des $H_0 = H'_1$ (indices modulo 6). Comme on a $\frac{370}{\sqrt{110}} > 34$, on peut énoncer :

Les nombres ξ_0 sont les nombres critiques, et la borne $K(10)$, isolée, vaut :

$$K(10) = \frac{370}{\sqrt{110}} = 35,2781\dots$$

L'ensemble des $K(\xi; 10, a, b)$ ne prend aucune valeur entre $K(10)$ et 34.

Reprenant les notations du paragraphe 7, on constate que, dans le cas $t = 1$, le nombre ξ utilisé au paragraphe 7 pour obtenir seulement une minoration de $K(s)$, n'est autre qu'un nombre critique pour $s = 10$, et fournit donc la valeur exacte de $K(10)$, comme il avait été annoncé à la fin du paragraphe 7.

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS.

Comme au chapitre II, résumons les résultats obtenus dans le présent chapitre, en les traduisant pour le problème de l'approximation de zéro par la forme linéaire non homogène $q\xi - p - \rho$, où ξ est un irrationnel et ρ un rationnel irréductible $\frac{t}{s}$ ($s \geq 2$) donnés, et où p et q peuvent prendre toutes les valeurs entières telles que $q > 0$. Les résultats des paragraphes 5 à 16 permettent d'énoncer :

t étant un entier quelconque fixe premier à s ($s \geq 2$), pour tout irrationnel ξ , il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $\left| q\left(q\xi - p - \frac{t}{s}\right) \right| < k$, avec $q > 0$, lorsque

$$k > \frac{K(s)}{s^2},$$

cette propriété (P) étant fausse pour $k < \frac{K(s)}{s^2}$.

La fonction $K(s)$ est telle que :

$$\frac{5}{2} \leq \frac{s^2}{K(s)} \leq 4$$

(alors que, rappelons-le, la constante analogue $\frac{s^2}{H(s)}$ envisagée au chapitre II est, d'après le théorème de Minkowski au moins égale à 4).

Il existe une infinité de valeurs de s telles que

$$\frac{s^2}{K(s)} < \frac{17 + 7\sqrt{5}}{11} = 2,968 \dots$$

Le tableau ci-après rassemble, pour $2 \leq s \leq 10$, les valeurs de $\frac{s^2}{K(s)}$, avec une période du développement des nombres critiques correspondants (que l'on peut définir ceux pour lesquels il n'existe qu'un nombre fini de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $\left| q\left(q\xi - p - \frac{t}{s}\right) \right| < k$, avec $q > 0$ pour toutes les valeurs de k strictement inférieures à $\frac{K(s)}{s^2}$), sauf pour $s = 2$ où un exemple seulement de nombre critique, de développement non périodique, est donné (29).

(29) Dans chacun de ces cas particuliers, l'étude du sens dans lequel la limite inférieure $K(\xi; s, a, b)$ est approchée par les valeurs de $H_n^{a, k}$ qui s'accroissent vers elle pour les ξ critiques, permet d'établir que pour $s = 2, 3$ et 5 , la propriété (P) reste vraie pour $k = \frac{K(s)}{s^2}$, tandis qu'elle est fautive pour cette valeur de k pour $s = 4, 6, 7, 8, 9$ et 10 .

$s = 2 \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} \xi = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n \ \dots); \quad c_n = d_n = 1 \\ a_n \text{ pair indéfiniment croissant} \end{array} \right\}$	$\frac{2^2}{K(2)} =$	$= 4$
$s = 3 \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} a: \quad 1 \ 3 \ 1 \ 6 \\ c: \quad 0 \ 2 \ 0 \ 2 \end{array} \right\}$	$\frac{3^2}{K(3)} =$	$\sqrt{10} = 3,162 \dots$
$s = 4 \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} a: \quad 1 \ 4 \\ c: \quad 0 \ 3 \end{array} \right\}$	$\frac{4^2}{K(4)} =$	$\frac{16\sqrt{2}}{7} = 3,232 \dots$
$s = 5 \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} a: \quad 1 \ 1 \ 4 \\ c: \quad 4 \ 0 \ 4 \end{array} \right\}$	$\frac{5^2}{K(5)} =$	$\frac{5\sqrt{26}}{8} = 3,186 \dots$
$s = 6 \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} a: \quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 5 \\ c: \quad 5 \ 5 \ 0 \ 5 \ 1 \ 4 \end{array} \right\}$	$\frac{6^2}{K(6)} =$	$\frac{12\sqrt{29}}{23} = 3,258 \dots$
$s = 7 \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} a: \quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 10 \ 1 \ 3 \\ c: \quad 6 \ 6 \ 0 \ 6 \ 1 \ 5 \ 0 \ 5 \end{array} \right\}$	$\frac{7^2}{K(7)} =$	$\frac{28\sqrt{11130}}{979} = 3,017 \dots$
$s = 8 \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}: \quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \\ c: \quad 7 \ 7 \ 0 \ 7 \ 1 \ 6 \end{array} \right\}$	$\frac{8^2}{K(8)} =$	$\frac{96\sqrt{2}}{47} = 2,888 \dots$
$s = 9 \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} a: \quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 8 \\ c: \quad 8 \ 8 \ 0 \ 8 \ 1 \ 7 \end{array} \right\}$	$\frac{9^2}{K(9)} =$	$\frac{27\sqrt{38}}{53} = 3,140 \dots$
$s = 10 \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} a: \quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 4 \\ c: \quad 9 \ 9 \ 0 \ 9 \ 1 \ 8 \end{array} \right\}$	$\frac{10^2}{K(10)} =$	$\frac{10\sqrt{110}}{37} = 2,834 \dots$

Malgré les analogies de structure que présentent ces développements critiques entre eux (pour $s \geq 3$) et aussi avec le développement étudié au paragraphe 7, la détermination générale de $K(s)$ semble être un problème compliqué. Les propriétés arithmétiques de s y jouent probablement un rôle bien plus important qu'elles ne faisaient dans le chapitre précédent pour la valeur de $H(s)$. D'ailleurs, il ne me paraît pas vraisemblable que l'ensemble des valeurs de $\frac{s^2}{K(s)}$ ne possède qu'un petit nombre de valeurs d'accumulation lorsque s augmente indéfiniment, mais je ne puis jusqu'ici étayer cette affirmation de quelque preuve.

