

BULLETIN DE LA S. M. F.

ISTVÁN FÁRY

Notion axiomatique de l'algèbre de cochaînes dans la théorie de J. Leray

Bulletin de la S. M. F., tome 82 (1954), p. 97-135

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1954__82__97_0

© Bulletin de la S. M. F., 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTION AXIOMATIQUE DE L'ALGÈBRE DE COCHAINES
DANS LA THÉORIE DE J. LERAY ;**

PAR ISTVÁN FÁRY.

De strigis vero quae non sunt, nulla questio fiat.
Decretum de Coloman le Bibliophile
(roi de Hongrie, 1095-1110).

I. — Introduction.

Au cours de ces dernières années J. Leray a développé une théorie de cohomologie des espaces localement compacts, orientée vers des *applications concrètes*, mais qui en même temps donne une nouvelle *fondation axiomatique* de la théorie de cohomologie ⁽¹⁾. M. Leray a exposé sa théorie dans une très grande généralité, et son travail est difficile à pénétrer. Or, il a pu résoudre des questions fort délicates, grâce à une importante simplification de la théorie de cohomologie. Elle consiste, entre autres, à remplacer des constructions particulières de l'algèbre de cochaines par la notion axiomatique de *couverture*. Il serait par conséquent désirable d'avoir un exposé élémentaire d'une partie de sa théorie, qui pourrait servir d'introduction à l'étude de la théorie de cohomologie.

Une aussi brève Note que la présente ne peut fournir un tel exposé. Nous voulons seulement attirer l'attention sur la notion de couverture d'un espace, en supposant au cours de l'exposé que le lecteur connaît bien la Topologie algébrique. Nous voulons montrer une voie naturelle menant à la définition de couverture, mettre en valeur par des exemples le contenu intuitif de cette notion, et indiquer brièvement son rôle dans la théorie de Leray.

Le paragraphe II situe provisoirement la théorie de couvertures par rapport aux autres théories, et motive ainsi la nature des deux paragraphes qui le suivent. Dans ces derniers nous rappelons très brièvement certaines propriétés de l'algèbre des formes différentielles extérieures définies sur une variété, et une construction d'Alexander d'algèbres de cochaines [*cf.* Alexander [1] ⁽²⁾]. Un si bref rappel suppose évidemment une connaissance plus approfondie de ces notions. Dans le paragraphe V nous donnons la définition axiomatique de couverture suivant

⁽¹⁾ Concernant cette terminologie voir le paragraphe en petits caractères à la fin du travail.

⁽²⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin du travail, qui est d'ailleurs fort incomplète.

Leray [8], [9], et quelques remarques à propos de cette notion. Suivent l'énoncé d'un cas particulier d'un théorème d'unicité de la théorie, un paragraphe consacré à l'aspect intuitif de la notion de couverture, et finalement des indications sur le développement de la théorie générale.

La plus grande partie de cette Note est consacrée à préparer et à commenter la définition de couverture. Nous répétons à trois reprises, à savoir dans les rappels des paragraphes III, IV, et dans les axiomes énoncés au paragraphe V, les propriétés de l'algèbre de cochaines, qui interviennent effectivement dans cette définition. En somme nous ne parlerons que d'une notion et d'un résultat de la théorie de Leray, qui ne dépassent pas encore la théorie classique, qui la simplifient seulement. Cela permettra de comparer commodément la méthode de Leray avec celles des autres théories.

Ceci dit, le lecteur doit être averti que nous donnerons un aperçu fort incomplet même sur la notion de couverture. Nous ne parlerons pas, par exemple, de l'intersection de deux couvertures, qui était un outil des plus importants dès l'origine de la théorie. (Elle figure déjà dans [5], et implicitement même dans les travaux antérieurs de M. Leray.) A plus forte raison nous n'aurons pas l'occasion de parler d'autres notions de cette théorie (filtration, anneau spectral, faisceaux, intersection d'un faisceau et d'un complexe, anneau spectral d'homologie d'un espace, anneau spectral d'une application continue, etc.). Néanmoins, pour simplifier le langage, nous dirons théorie de Leray, quand nous parlerons d'une partie de sa théorie de couvertures.

II. — Objet de l'axiomatique de couvertures.

1. La théorie classique de l'intégration étudiait les intégrales

$$(1) \quad \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int \omega_n$$

étendues à un domaine D de l'espace euclidien R^n , et plus généralement les intégrales de la forme

$$(2) \quad \int_V \omega_p \quad (0 \leq p \leq n),$$

où V est une sous-variété à p dimensions de R^n ou d'une variété différentiable X, et ω_p une forme différentielle extérieure de degré p ⁽³⁾ définie dans R^n ou dans X. Nous allons envisager deux théories modernes, qui généralisent deux aspects différents de cette théorie classique de l'intégration.

2. La première en est la Topologie algébrique, dont fait partie la théorie de Leray. Dans les théories usuelles de la Topologie algébrique actuelle les sous-variétés V de X, qui figurent dans (2), ont été remplacées par le module de

chaînes de X , et l'anneau de formes $(^3)$ ω_p par l'algèbre $(^4)$ de cochaînes de X . La valeur de l'intégrale (2) dépend linéairement et de la chaîne sur laquelle on intègre, et de la forme figurant sous le signe d'intégrale. Cette propriété de linéarité de l'intégrale est devenue dans ces théories la définition même du module de cochaînes : on construit d'habitude un groupe de chaînes dans l'espace envisagé, et l'on définit les cochaînes comme formes linéaires sur ce groupe. *Par contre, dans la théorie de Leray les cochaînes ne sont pas définies comme formes linéaires sur un groupe de chaînes.*

Formulons plus positivement cette constatation. Dans la théorie classique des formes différentielles, celles-ci sont définies indépendamment d'un groupe de chaînes, elles sont définies analytiquement. De même dans la théorie de Leray, l'algèbre de cochaînes est définie indépendamment d'un groupe de chaînes, elle est définie axiomatiquement. En termes plus précis : *la théorie de Leray envisage directement l'algèbre de cochaînes, en généralisant par la méthode axiomatique la notion de l'algèbre de formes différentielles extérieures.* En outre la théorie renonce complètement à la notion de groupe de chaînes.

Une tendance générale de la Topologie algébrique actuelle est d'ailleurs de réduire le rôle de l'homologie, et formuler les résultats en termes de classes de cohomologie. Mais usuellement on garde la théorie d'homologie pour deux raisons principales $(^5)$:

- 1° la cohomologie est d'habitude définie par dualité à partir de l'homologie ;
- 2° la théorie de l'intégration nécessite la considération des cycles.

Par conséquent, si une théorie définit directement la cohomologie et élimine dès le début le motif 1°, elle peut être complète et satisfaisante du point de vue purement théorique, si on laisse de côté pour le moment le motif 2°. Ainsi les axiomes de la cohomologie d'Eilenberg et Steenrod ([3], p. 13, 3c) ne font pas

$(^3)$ S'il n'y a pas de confusion à craindre nous disons forme différentielle ou encore forme, au lieu de forme différentielle extérieure.

$(^4)$ Dans ce qui suit A désigne ou bien l'anneau des entiers, ou bien un corps, dont les éléments seront désignés par des caractères grecs. A sera dit anneau de coefficients. Un A -module est un groupe additif, ou un espace vectoriel sur le corps donné. Une A -algèbre est ou bien un anneau, ou bien une algèbre sur un corps au sens de Bourbaki. C'est-à-dire que l'anneau K est une A -algèbre si une multiplication $\alpha x \in K$ ($\alpha \in A$, $x \in K$) est définie, et elle satisfait aux identités suivantes, où $\alpha, \beta \in A$, $x, y \in K$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y; \\ (2) \quad & (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x; \\ (3) \quad & \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x; \\ (4) \quad & 1x = x \quad (1 \in A); \\ (5) \quad & \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y). \end{aligned}$$

Si K possède une unité u , nous supposons qu'il n'est pas divisible par un entier, c'est-à-dire que $u = kv$, k entier, $v \in K$ entraîne $k = \pm 1$, et que $mu = 0$, m entier, entraîne $m = 0$. (Nous ne supposons pas qu'une algèbre possède une base).

$(^5)$ C'est une simplification commode seulement, bien entendu. Notons d'ailleurs que nous parlons uniquement de la théorie d'homologie et de cohomologie, et nous ne pouvons pas mentionner de questions se révélant de la théorie d'homotopie, d'obstruction, etc.

intervenir des notions d'homologie; de même nous avons déjà dit que la théorie de Leray définit la cohomologie indépendamment de l'homologie.

Or, il y a en réalité une troisième raison, qui fait qu'on ne renonce pas volontiers à la théorie d'homologie, pour la remplacer par une théorie portant uniquement sur la cohomologie, comme celle de M. Leray. C'est que dans les théories usuelles les chaînes, les cycles, et l'homologie des cycles des polyèdres sont les notions les plus intuitives.

En effet, on ne peut éliminer complètement l'homologie tant qu'on n'a pas construit une théorie, où la cohomologie soit aussi intuitive que la théorie de l'homologie des polyèdres en théorie classique. En outre, une telle théorie devrait préciser certains faits géométriques aussi naturellement que l'ancienne théorie. Or, c'est précisément cette solution que la théorie de Leray nous propose. *Grâce à la notion de support d'une cochaîne, la théorie de Leray opère d'une manière aussi intuitive dans un espace localement compact quelconque avec les cochaînes que le faisait l'ancienne théorie avec les chaînes d'un polyèdre.* En particulier, dans cette théorie il n'y a pas de passage de l'algèbre de cochaînes d'un polyèdre à celle d'un espace, qui n'admette pas de décomposition cellulaire, et il est parfaitement inutile de parler de polyèdres. L'étude de la décomposition cellulaire éventuelle de l'espace devient superflue dans cette théorie, et elle est remplacée par l'étude de supports. Cette méthode nous oblige à travailler très simplement, car les opérations portant sur les supports ne sont que de simples opérations ensemblistes : formation de réunion, intersection et inclusion.

3. Il sera peut-être utile de situer la théorie de Leray par rapport à la théorie de mesures et de l'intégration, qui généralise un autre aspect de la théorie classique des intégrales (1). La théorie moderne de mesures et de l'intégration a débuté avec l'intégrale de Lebesgue, ainsi qu'avec le théorème de M. Frédéric Riesz concernant les fonctionnelles linéaires sur l'espace des fonctions continues définies sur un segment de droite (*cf.*, par exemple, F. Riesz et B. Sz.-Nagy [12]). La théorie moderne porte sur les intégrales des fonctions définies dans un espace localement compact quelconque (*cf. loc. cit.*, p. 132, Intégrale de Daniel).

Dans cette théorie la forme différentielle $\omega_n = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$, qui figure sous le signe d'intégrale dans (1), est identifiée à la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$. On définit ensuite l'intégrale comme forme linéaire sur le module des fonctions définies dans l'espace; le théorème de Riesz devient ainsi une définition de mesure et d'intégrale. Cette théorie simplifie beaucoup la théorie classique, en élargissant en même temps son champ d'action. De ce point de vue elle est très satisfaisante.

Par contre, elle laisse complètement de côté les intégrales de la forme (2). La raison en est très simple : dans le cadre de cette théorie, on n'avait même pas une notion remplaçant celle de formes ω_p ($0 \leq p \leq n-1$) de la théorie classique, qui figurent dans (2) sous le signe d'intégrale. Or, la théorie de Leray contient précisément cette notion, qui manquait dans la théorie de mesure et de l'intégrale. En effet, cette théorie est une continuation directe et un perfectionnement de la théorie de formes différentielles extérieures, et en ce sens elle est une *théorie moderne de la dérivation*.

Certes, la théorie développée à partir de cette notion abstraite de la dérivation fait partie de la Topologie algébrique, en ce sens qu'elle envisage et perfectionne surtout la partie de la théorie des formes différentielles, que comprenait la Topologie algébrique. Néanmoins, cette notion pourra être utile, et même indispensable, dans l'avenir, pour réunir la Topologie algébrique et la Théorie des mesures et de l'intégration en une seule théorie mathématique. Dans son cours au Collège de France, M. Leray a donné des indications à ce sujet. Nous avons dû laisser de côté cet aspect de la théorie de couvertures; en particulier, nous n'aurons pas l'occasion de parler du rôle 2° de l'homologie, mentionné ci-dessus.

De toute façon, si l'on veut parler de la théorie de Leray, il faut préciser de quelle manière elle axiomatise et généralise la théorie des formes différentielles. Aussi commençons-nous cet exposé par quelques remarques concernant cette dernière.

III. — Sur la théorie des formes différentielles extérieures du point de vue de la théorie de Leray.

1. Soit X une variété indéfiniment différentiable à n dimensions; nous supposons provisoirement que X soit compacte. Nous allons énumérer quelques faits bien connus concernant la R -algèbre Ω des formes différentielles définies sur X (*cf.*, par exemple, Kähler [4]). Nous ne parlerons que des faits, qui interviennent dans l'axiomatique de la notion de couverture. Les relations se rapportant à un groupe d'axiomes du paragraphe V sont marquées par le symbole du groupe d'axiomes (A, S, U, P).

Les formes de degré zéro sont simplement les fonctions partout définies dans X , qui y sont indéfiniment différentiables. Une forme ω_p de degré $p (> 0)$ attache à chaque p vecteur tangent de X un nombre réel; si l'on fixe le point $x \in X$, ω_p devient, selon sa définition même (*cf.* Kähler, p. 3-11) une forme linéaire sur l'espace vectoriel des p -vecteurs tangents issus de x . La restriction de ω_p au domaine U d'un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) peut être explicitement écrite :

$$(1) \quad \omega_p = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \dots dx_{i_p} \quad (dx_i dx_j = - dx_j dx_i)$$

où les fonctions $a_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_n)$ sont indéfiniment différentiables. L'ensemble de toutes les formes définies sur une variété compacte X constitue une R -algèbre Ω , R étant le corps des nombres réels. Les formes de degré $p (0 \leq p \leq n)$ peuvent être additionnées et multipliées par des nombres réels, et constituent ainsi un R -modulé Ω^p (si $p \geq n + 1$, $\Omega^p = 0$). Les éléments ω de Ω se mettent sous la forme

$$(2; A) \quad \omega = \sum_{p=0}^n \omega_p.$$

Le $p^{\text{ième}}$ terme de cette somme est appelé composant homogène de degré p de ω . Il est déterminé sans ambiguïté, c'est-à-dire que

$$(3; A) \quad \Omega = \sum_{p=0}^n \Omega^p$$

est une somme directe. Le produit d'une forme de degré p et d'une forme de degré q est une forme de degré $p + q$ (en particulier, si $p + q > n$, il est nul). En utilisant des conventions usuelles de l'Algèbre, ce fait peut être exprimé par l'inclusion

$$(4; A) \quad \Omega^p \Omega^q \subset \Omega^{p+q}.$$

Écrivons ensuite la dérivée extérieure de la restriction (1) de ω_p :

$$\sum_{i_1, \dots, i_p} (da_{i_1, \dots, i_p}) dx_{i_1} \dots dx_{i_p} = \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x_j} dx_j dx_{i_1} \dots dx_{i_p}.$$

Rappelons que cette expression est la restriction d'une forme $d\omega_p$ à U , en d'autres termes la dérivation ne dépend pas du système de coordonnées locales. L'application $\omega \rightarrow d\omega$ augmente d'une unité le degré d'un élément homogène, elle est linéaire, et son itérée est nulle. Ces propriétés de d sont exprimées par les formules

$$(5) \quad d: \Omega \rightarrow \Omega,$$

$$(6) \quad d^2 = 0,$$

$$(7; A) \quad d\Omega^p \subset \Omega^{p+1}.$$

Outre ces relations la différentielle d est liée à la multiplication : Si ω_p est une forme de degré p , et ω un élément quelconque de Ω (somme d'éléments de degré 0, ..., n), on a la formule suivante :

$$(8; A) \quad d(\omega_p \omega) = (d\omega_p)\omega + (-1)^p \omega_p d\omega.$$

Une fois ces propriétés de l'algèbre Ω connues, on peut parler de l'algèbre de cohomologie $H(\Omega)$ de l'algèbre de formes différentielles Ω . Cette algèbre s'obtient selon le procédé classique de la Topologie algébrique. On forme d'abord la sous-algèbre $Z(\Omega)$ de Ω que constituent les formes fermées, appelées aussi cocycles :

$$Z(\Omega) = \{ \omega : \omega \in \Omega, d\omega = 0 \}.$$

Les formules (5)-(8) prouvent ensuite que l'image de Ω , par d ,

$$B(\Omega) = d\Omega = \{ \omega : \omega \in \Omega, \omega = d\omega' \},$$

appelée algèbre de cobords, est un idéal de $Z(\Omega)$. Le quotient

$$(9) \quad H(\Omega) = Z(\Omega)/B(\Omega)$$

sera par conséquent une R -algèbre. Les éléments de $H(\Omega)$, appelés classes de cohomologie, sont des classes de cocycles.

Sur $H(\Omega)$ on retrouve la structure algébrique de Ω ; comme d est nul sur $Z(\Omega)$,

il le sera sur $H(\Omega)$, et il est superflu de l'inclure dans cette structure algébrique. Du point de vue de sa structure additive, en particulier, $H(\Omega)$ est une somme directe :

$$(10) \quad H(\Omega) = \sum_{p=0}^n H^p(\Omega) \quad (\text{somme directe de R-modules})$$

dont le $p^{\text{ième}}$ terme est le module de cohomologie de degré p de Ω . Un cas particulier du théorème d'unicité de Leray que nous allons formuler dans le paragraphe V dit, entre autres, que cette algèbre $H(\Omega)$ est l'algèbre de cohomologie à coefficients dans R de l'espace X (c'est une partie des importants résultats de M. de Rham).

2. Introduisons à présent la notion de support d'une forme. La théorie de Leray met en lumière toute la portée de cette notion, aussi insistons-nous sur celle-ci peut-être plus qu'il ne le faudrait.

Le support $S(\omega)$ de la forme $\omega \in \Omega$ est le plus petit ensemble fermé de X en dehors duquel ω est identiquement nulle.

En d'autres termes, x est dans le complémentaire de $S(\omega)$, s'il admet un voisinage U , dans lequel les coefficients de (1) sont identiquement nuls. Comme X est compact, les supports sont également compacts. Ce que nous devons retenir des propriétés de $S(\omega)$, c'est que *les opérations algébriques de Ω diminuent le support*. De façon précise on a les formules suivantes :

- (11; S) $S(\omega) = \emptyset$ équivaut $\omega = 0$;
- (12; S) $S(\alpha\omega' + \beta\omega'') \subset S(\omega') \cup S(\omega'')$ (α, β nombres réels);
- (13; S) si $\omega' \in \Omega^p$, $\omega'' \in \Omega^q$, et $p \neq q$, alors $S(\omega' + \omega'') = S(\omega') \cup S(\omega'')$;
- (14; S) $S(\omega' \omega'') \subset S(\omega') \cap S(\omega'')$;
- (15; S) $S(d\omega) \subset S(\omega)$,

dont la vérification est triviale.

On obtient une formulation concise des règles précédentes en constatant que les éléments de Ω , dont le support est contenu dans un sous-ensemble de X constituent un idéal de Ω , qui est transformé en lui-même par d ; il faut en outre formuler (11) et (13). On pourra également remarquer que l'application $\omega \rightarrow S(\omega)$ est une sorte d'homomorphisme de Ω dans le lattis de parties compactes de X . Mais nous n'insisterons pas davantage sur ces formulations, car ce sont les relations (11)-(15), qui figurent explicitement dans l'axiomatique de Leray.

3. Cela étant, constatons que l'algèbre Ω possède une unité : c'est la fonction identiquement 1 sur toute la variété; son support est bien entendu tout l'espace.

4. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici est valable pour ce qui concerne l'algèbre de toutes les formes définies dans une variété non compacte. Mais sur une telle variété on peut envisager l'algèbre que constituent toutes les formes ω , telles que $S(\omega)$ soit compact; nous l'appellerons l'algèbre de formes à supports

compacts. Notons que le quotient (9) peut être différent pour ces deux algèbres. En effet, si l'on envisage toutes les formes sur R^n (espace euclidien à n dimensions), alors le premier terme du second membre de (10) est R , et les autres sont nuls (c'est un lemme de Poincaré, énoncé ci-dessous sous une autre forme). Par contre, pour l'algèbre des formes à supports compacts sur R^n on trouve la formule (20) du n° 10 du paragraphe VI.

Dans ce qui suit nous envisageons exclusivement

(16) Ω : l'algèbre de formes à supports compacts sur X ;

si X est compact, c'est évidemment l'algèbre de toutes les formes. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici est valable concernant (16), à cela près que Ω n'a pas d'unité, si X n'est pas compact; en effet, dans ce cas la fonction identiquement 1 n'appartient pas à Ω . Néanmoins, on a la proposition suivante, dont la démonstration n'est d'ailleurs pas élémentaire :

(U) Étant donné une partie compacte C de X , il existe une fonction indéfiniment différentiable, partout définie dans X , = 1 en chaque point de C , et nulle en dehors d'une partie compacte de X . En d'autres termes : il existe un élément de Ω , dont la restriction à C est la fonction identiquement 1.

On peut même énoncer la proposition plus précise que voici :

(U; fin) Étant donné un compact C de X , et un voisinage arbitraire V de C , il existe un élément de Ω , qui est identiquement nul en dehors de V , et dont la restriction à C est la fonction identiquement 1.

Notons que les éléments $\nu \in \Omega$ qui satisfont (U) peuvent être caractérisés par les relations suivantes portant sur les supports : pour chaque $\omega \in \Omega$, on a

$$(17; A) \quad C \cap S(\nu\omega - \omega) = \emptyset.$$

De même : $\nu \in \Omega$ satisfait (U; fin), si pour chaque $\omega \in \Omega$, on a

$$(18; U; fin) \quad C \cap S(\nu\omega - \omega) = \emptyset \quad \text{et} \quad S(\nu) \subset V.$$

Ce sont les premiers exemples du fait que le comportement des formes au voisinage d'un sous-ensemble de X peut être commodément décrit par des conditions portant sur les supports.

5. Un autre exemple sera donné ci-dessous avec une formulation d'un lemme de Poincaré. Cette proposition donne des renseignements concernant le comportement local des formes définies sur une variété X . D'une façon volontairement vague, mais suggestive, nous le formulons d'abord ainsi : si la forme ω de degré ≥ 1 est fermée au point x , son support peut être éloigné de ce point, en lui ajoutant un cobord. Cela revient d'ailleurs à dire que, si une forme de degré ≥ 1 est un cocycle près d'un point, elle est un cobord près du même point. De façon précise :

LEMME DE POINCARÉ. — Soit x un point quelconque de X , et ω une forme de degré ≥ 1 . Si $x \notin S(d\omega)$, il existe une forme ω' , telle que $x \notin S(\omega - d\omega')$ soit valable.

Malgré sa simplicité cette proposition joue un très grand rôle dans la théorie de Leray.

6. Résumons les faits bien connus rappelés dans ce paragraphe. Étant donné une variété X nous avons envisagé l'algèbre Ω des formes différentielles extérieures, à supports compacts, définies sur X . Cette algèbre est munie de la dérivation extérieure d , et ses éléments ω sont munis de supports $S(\omega)$. Le support est une application $\omega \rightarrow S(\omega)$ de Ω dans la famille de parties compactes de X . Cette structure algébrico-géométrique

$$(19) \quad (\Omega, d, S)$$

a certaines propriétés que nous avons groupées de la façon suivante : (A) propriétés purement algébriques de (Ω, d) ; (S) propriétés géométriques de la fonction de support S ; (U) existence des éléments $\nu \in \Omega$, qui satisfont (18); en particulier, si X est compact, l'existence de l'unité de Ω ; (P) lemme de Poincaré, qui relie les propriétés algébriques et géométriques de (19).

7. Avant de quitter ce sujet disons quelques mots sur l'aspect intuitif de la notion de support. En se rappelant sa définition, on est tenté de croire qu'elle ne peut pas révéler d'importantes propriétés géométriques des formes. Ce sont les formes fermées qui nous intéressent surtout, et le support d'une telle forme peut être changé localement, sans quitter sa classe de cohomologie. Ceci est bien vrai (cf. lemme de Poincaré), mais ces changements locaux ne peuvent pas être composés, pour avoir un changement global arbitraire. Ayant constaté ce fait, on peut envisager la totalité des $S(\omega)$, où ω parcourt les formes d'une classe de cohomologie. Une telle étude, même dans le cas le plus simple, met en lumière la source géométrique de l'apport durable de la théorie de Leray avec la notion de support. Dans cet ordre d'idées attirons l'attention sur deux faits intimement liés.

Le premier consiste en un parallélisme entre la dérivation d , et l'opération

$$(20) \quad U \rightarrow F(U) \quad [U \text{ ouvert, } F(U) = \bar{U} \cap (X - U)]$$

de la Topologie générale, qui revient à remplacer un ouvert U par sa frontière $F(U)$. Soit x une régularisée de la fonction caractéristique de U , c'est-à-dire une fonction indéfiniment différentiable, qui est identique à cette dernière en dehors d'un petit voisinage de la frontière de U . La différentielle extérieure dx de cette fonction x indique avec une certaine approximation la frontière de U . De plus la totalité de ces formes dx indique mieux la frontière de U que l'ensemble $F(U)$, car elle détermine $F(U)$ et indique en outre que cet ensemble est considéré comme la frontière de U , et non pas celle de $X - \bar{U}$. Plus généralement on peut démontrer la proposition suivante :

Soit C_p un corps convexe borné du sous-espace R^p de l'espace euclidien R^n ($0 \leq p \leq n$). Supposons que C_p contient des points intérieurs dans R^p , et notons par ∂C_p sa frontière dans R^p . Il existe une suite ω_k ($k = 1, 2, \dots$) de

formes de degré $n - p$, telle que les supports $S(\omega_k)$ convergent vers C_p , en même temps que les supports $S(d\omega_k)$ convergent vers la frontière ∂C_p de C_p .

Le second fait que nous avons mentionné peut être exprimé, en des termes volontairement vagues, comme suit : Si le support d'un cocycle de Ω n'est pas trop grand, il ressemble à un cycle, dont la classe d'homologie ne dépend que de la classe de cohomologie du cocycle envisagé. En termes plus précis :

Soit ω une forme de degré p . Son support $S(\omega)$ contient un cycle c de dimension $n - p$, qui est homologue à ω au sens de la théorie de l'intégration. Étant donné un tel cycle c on peut former une suite de formes fermées $\omega_k, \omega_k \sim \omega, S(\omega_{k+1}) \subset S(\omega_k)$, telle que $\bigcap_{k \geq 1} S(\omega_k)$ soit le support du cycle c , c'est-à-dire la réunion des simplexes, qui figurent avec un coefficient $\neq 0$ dans l'expression réduite de c .

IV. — Sur l'algèbre de cochaines d'Alexander.

1. Pour indiquer le but de la construction d'Alexander citons quelques phrases de l'introduction de son travail [1] : « The p -dimensional connectivity numbers of an ordinary, smooth n -space may either be obtained *geometrically* by calculating the maximal number of p -cycles of the space that are independent modulo the bounding cycles or *analytically* by calculating the maximal number of exact, p -dimensional symbolic differential forms (integrands of multiples integrals) that are independent, in the large, modulo the derived forms. The geometrical method of approach has been extended to compact metric spaces by Vietoris and still more general spaces by Čech. We give a treatment below, based on a suitable combinatory adaptation of the second, or analytic, method of approach. One decided advantage is that we can define the *product* (as distinguished from the sum) of two elements of the same or different groups. The combined groups of all dimensionalities (or, more precisely, their direct sum) will thus become a *connectivity ring*, as distinguished from a set of isolated connectivity groups. »

Cette construction d'Alexander est à mi-chemin entre la notion classique de l'algèbre Ω , et la notion axiomatique de couverture, due à M. Leray. Nous la rappelons ici, complétée par la définition du support, en la présentant comme la première étape de la généralisation de la structure de formes différentielles définies sur une variété (cf. Leray [8], n° 21, p. 76; Leray [9], n° 38, p. 70; Borel [2], exposé II, p. 9).

2. Soit X un espace topologique localement compact, fixé une fois pour toutes, dans ce paragraphe. Posons

$$X^p = X \times \dots \times X \quad (\text{espace produit, } p + 1 \text{ facteurs}).$$

Ainsi $X^0 = X, X^1 = X \times X, X^2 = X \times X \times X, \dots$

Ces espaces étant considérés comme disjoints, formons la réunion

$$\Xi = \bigcup_{p \geq 0} X^p.$$

Un point ξ de Ξ est un $(p + 1)$ -uple de points de X , et l'on interprète facilement la topologie de Ξ en termes de systèmes de points de X .

Donnons-nous un anneau commutatif A , ayant un élément unité; ses éléments seront notés par des caractères grecs. A sera l'anneau de coefficients de cochaînes et de cohomologie.

Notons par Φ l'ensemble de fonctions définies sur Ξ , à valeurs dans A , qui sont identiquement nulles en dehors d'une partie compacte de Ξ . Φ^p désigne l'ensemble de fonctions identiquement nulles dans le complémentaire d'une partie compacte de X^p ($X^p \subset \Xi$).

En particulier, Φ^0 désigne l'ensemble de fonctions définies sur Ξ , qui prennent des valeurs $\neq 0$ dans une partie compacte de $X^0 \subset \Xi$ seulement; en identifiant X à cette partie X^0 de Ξ , ces éléments de Φ peuvent être considérés comme fonctions définies sur X . Plus généralement un $\varphi \in \Phi^p$ peut être considéré comme une fonction à $p + 1$ variables

$$(1) \quad \varphi(x_0, \dots, x_p)$$

ayant ses valeurs dans A , dont les variables sont des points de X . Chaque fonction $\varphi \in \Phi$ peut être écrite dans la forme

$$(2; A) \quad \varphi = \sum_{p=0}^m \varphi_p,$$

où φ_p est une fonction à $p + 1$ variables, comme dans (1), que nous appellerons composant homogène de degré p de φ .

L'addition des fonctions et leur multiplication par un élément de A sont définies de la façon habituelle, mais la multiplication de deux fonctions sera une multiplication grassmannienne qu'on appelle dans ce cas « cup-produit » : Si $\varphi \in \Phi^p$ et $\psi \in \Phi^q$, on définit le produit $\varphi\psi \in \Phi^{p+q}$ par

$$(3) \quad (\varphi\psi)(x_0, \dots, x_{p+q}) = \varphi(x_0, \dots, x_p)\psi(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}).$$

Si φ et ψ sont quelconques, ayant pour composants homogènes φ_p, ψ_p respectivement, on définit le composant homogène $(\varphi\psi)_r$ de leur produit par

$$(4) \quad (\varphi\psi)_r = \sum_{p+q=r} \varphi_p \psi_q,$$

Φ muni de ces opérations est une A -algèbre, comme on le vérifie facilement.

3. Dans la construction précédente la topologie de X n'a joué aucun rôle, car Φ est déterminé à isomorphie près par la puissance de l'ensemble X . Nous allons tenir compte de la topologie de X , en définissant un idéal de Φ , qui en dépend entièrement, et en considérant ensuite le quotient de Φ par cet idéal. Définissons d'abord :

Le support $S(\varphi)$ de $\varphi \in \Phi$ est l'ensemble de points x de X , dont chaque voisinage contient un système de points x_0, \dots, x_p , tel que, si l'on considère le point $\xi = (x_0, \dots, x_p)$ de Ξ , on a $\varphi(\xi) \neq 0$.

Le support est une partie compacte de l'espace X , selon la définition de Φ ; sa définition est d'ailleurs analogue à la définition de $S(\omega)$, $\omega \in \Omega$. On vérifie facilement les relations (12), (13), (14) du n° 2 du paragraphe III concernant le support d'une somme et d'un produit. Par contre (11) du même paragraphe n'est pas valable. En effet, $S(\varphi)$ est vide, si le diagonal de chaque X^p ($X^p \subset \Xi$) admet un voisinage dans lequel φ est identiquement nulle. Or, cela n'entraîne pas encore que φ soit identiquement nulle. Pour que (11) du n° 2 du paragraphe III soit également valable il suffit de négliger les fonctions qui ne le remplissent pas. Avec plus de précision : les formules (12), (13), (14) du n° 2 du paragraphe III valables dans Φ montrent que l'ensemble Φ_0 des fonctions de Φ , dont le support est vide, constitue un idéal de Φ . Ces mêmes formules montrent que deux fonctions ont le même support, si elles sont congrues modulo cet idéal. Le quotient

$$(5) \quad K = \Phi / \Phi_0 \quad (K^p = \Phi^p / (\Phi^p \cap \Phi_0))$$

jouit des propriétés suivantes :

- 1° K a la même structure algébrique que Φ ;
- 2° si $k \in K$, et $\varphi \in k$, alors $S(\varphi)$ est une partie compacte bien déterminée de X , qui est indépendante du choix de φ dans k ; nous le noterons $S(k)$ et appellerons *support* de $k \in K$.

4. D'après la construction précédente K s'obtient en faisant une certaine identification dans Φ que nous allons expliciter à présent. Seuls les éléments de Φ^0 , c'est-à-dire les fonctions définies dans $X^0 = X$, ne sont pas affectées par cette identification. En général, les éléments de K sont des classes de fonctions de Φ . Une fonction $\varphi \in \Phi^p$ détermine une telle classe de fonctions; une autre fonction φ' appartient à cette classe, si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage V , tel que, si $p+1$ points appartiennent à V , alors φ et φ' prennent la même valeur dans ce système de points.

Cela étant, nous allons définir une *différentiation* ou opérateur de cobord d'abord dans Φ , puis dans K . Si $\varphi \in \Phi^p$, sa différentielle ou son cobord $d\varphi$ est un élément de Φ^{p+1} , défini par la formule suivante (6) :

$$(6) \quad (d\varphi)(x_0, \dots, x_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \varphi(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}).$$

En particulier, si $\varphi \in \Phi^0$, c'est-à-dire que φ est une fonction $\varphi(x)$ définie dans X , la formule précédente donne

$$(7) \quad (d\varphi)(x_0, x_1) = \varphi(x_1) - \varphi(x_0) \quad (\varphi \in \Phi^0).$$

(*) Dans cette formule le symbole marqué par le circonflexe doit être omis de la suite x_0, \dots, x_{p+1} .

On vérifie ensuite facilement les faits suivants : Φ^p, Φ^{p+1} étant des A -modules de fonctions, d est une application linéaire du premier dans le second. Par linéarité on peut étendre cette application en une application linéaire $d : \Phi \rightarrow \Phi$. Le carré de cette application est nul : pour chaque $\varphi \in \Phi$, $d(d\varphi) = 0$. L'idéal Φ_0 de Φ est appliqué en lui-même par $d : d\Phi_0 \subset \Phi_0$. Un calcul direct permet en outre de vérifier une formule analogue à celle de (8) du n° 1 du paragraphe III.

L'inclusion $d\Phi_0 \subset \Phi_0$ montre que l'application d passe au quotient (5), c'est-à-dire que (6) définit une application linéaire

$$(8) \quad d : K \rightarrow K$$

qui aura les mêmes propriétés formelles que la dérivation d de l'algèbre de formes différentielles. En effet, selon les remarques précédentes (8) aura les propriétés suivantes :

$$(9) \quad d^2 = 0;$$

$$(10; A) \quad dK^p \subset K^{p+1};$$

$$(11; A) \quad \text{si } a \in K^p, \quad b \in K, \quad \text{alors } d(ab) = (da)b + (-1)^p a(db).$$

Il est en outre évident que l'opération d diminue le support, c'est-à-dire que $S(dk) \subset S(k)$ ($k \in K$). Avec cette dernière propriété nous pouvons compléter la liste de propriétés de la fonction de support : l'algèbre K munie de d et de la fonction de support S satisfait les mêmes relations (11)-(15) du n° 2 du paragraphe III que l'algèbre Ω des formes différentielles.

Dans la construction d'Alexander c'est l'algèbre K , munie de la différentielle d , et de la fonction de support S , qui remplace l'algèbre des formes différentielles de la théorie classique. Rappelons que les éléments de K^0 sont des fonctions, comme ceux de Ω^0 . Mais la théorie classique ne considère que des fonctions indéfiniment différentiables, définies dans une variété X , tandis que la théorie d'Alexander définit, entre autres, une différentiation dans l'algèbre K^0 des fonctions arbitraires d'un espace topologique quelconque.

5. Notons que l'algèbre K a une unité u , si X est compact; c'est la fonction identiquement $= \varepsilon$, où ε est l'unité de l'anneau A . Dans le cas général on peut énoncer une proposition analogue à celle concernant l'algèbre Ω : Étant donné un compact C de X il existe une fonction de K^0 dont la restriction à C est identiquement $= \varepsilon$ ($\varepsilon \in A$).

6. Pour terminer ces considérations concernant K , indiquons que le lemme de Poincaré peut être généralisé à cette algèbre. Il ne faut rien changer dans l'énoncé du lemme, il suffit d'y remplacer Ω par K , ω par $k \in K$, ω' par $k' \in K$ et interpréter les notations selon les définitions données dans ce paragraphe.

La démonstration du lemme est facile (cf. Leray [9], p. 28 et 70; Borel [2], exposé II, p. 10). Choisissons une fonction φ dans k . Selon l'hypothèse du lemme on aura dans un voisinage de x :

$$(12) \quad \varphi(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \varphi(x, x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p).$$

Notons ensuite par φ' la fonction à p variables définie par

$$(13) \quad \varphi'(x_0, \dots, x_{p-1}) = \varphi(x, x_0, \dots, x_{p-1}).$$

Dans le voisinage de x , où (12) est valable, $d\varphi'$ est identique à φ , selon (12) et (13). Cela prouve le lemme.

7. Résumons la construction d'Alexander. Pour un espace topologique quelconque X , et pour un anneau de coefficients A , nous avons construit un système algébrico-topologique

$$(14) \quad (K, d, S)$$

constitué par les données suivantes :

1° une A -algèbre K définie dans (5); c'est un quotient d'une algèbre de fonctions;

2° une application linéaire d de K en elle-même, dont le carré est nul, définie dans (6), (8);

3° une application S de K dans la famille de parties compactes de X , qui fait correspondre à $k \in K$ son support $S(k) \subset X$.

Ces données ont les mêmes propriétés formelles que Ω , d , S définies dans le paragraphe précédent : la construction d'Alexander (14) est une structure analogue à la structure classique (19) du n° 6 du paragraphe III. Elle n'en est pas une véritable généralisation, car si l'on effectue cette construction dans le cas classique, où X est une variété, $A = \mathbb{R}$ le corps des nombres réels, le résultat ne sera pas, bien entendu, la structure classique (19) du paragraphe précédent.

8. Néanmoins, si X est une variété différentiable, et $k \in K^0$ est une fonction différentiable, la formule (7) montre que la différentielle d de K , et celle de Ω sont analogues. En effet, si l'on envisage k à présent comme élément de Ω^0 , sa différentielle extérieure sera donnée approximativement par la formule (7). En somme, les deux définitions de la dérivation considérées pour les éléments de K faisant partie de Ω , ne diffèrent que par la sorte de passage à la limite, du moins, s'il est permis d'appeler « passage à la limite » l'opération remplaçant $d\varphi$ par $d\varphi \pmod{\Phi_0}$.

Dans cet ordre d'idées nous voulons retourner plus généralement à la définition importante (6) de la dérivation dans K , car nous n'en avons pas donné de motivation. Habituellement on commente cette définition de la façon suivante. Étant donné un $(p+2)$ -uple de points de l'espace topologique X , on peut le considérer comme si c'était un simplexe s à $p+1$ dimensions. La somme formelle

$$ds = \sum_{t=0}^{p+1} (-1)^t (x_0, \dots, \hat{x}_t, \dots, x_{p+1})$$

est le bord de ce simplexe s , et notre formule (6) signifie $(d\varphi)(s) = \varphi(ds)$.

Or, pour certains éléments de K , plus précisément pour une sous-algèbre.

d'éléments de K que nous noterons ci-dessous par L , on peut donner une autre interprétation de la formule (6). Elle rattache cette formule à la dérivation ordinaire des fonctions, et à la structure multiplicative de K . Elle ne parle pas de chaînes, et se situe ainsi mieux dans une introduction à la théorie de Leray. Du point de vue intuitive cette interprétation me semblait être plus suggestive que la précédente. Nous allons voir d'ailleurs dans le paragraphe suivant que la sous-algèbre L de K permet d'obtenir l'algèbre de cohomologie de l'espace X .

Soit L la sous-algèbre de K , qui est engendrée dans sa structure multiplicative par K^0 et dK^0 , c'est-à-dire par les fonctions définies dans X , et par les classes mod Φ_0 des fonctions à deux variables, ayant la forme du second membre de (7) :

$$(15) \quad L = \{ K^0, dK^0 \} \quad (L \subset K; L^p = K^p \cap L).$$

En particulier, L contient tous les éléments de la forme

$$(16) \quad l = \sum_{i=1}^m v_{i0} dv_{i1} \dots dv_{ip} \quad (v_{ij} \in K^0)$$

de K . Or, selon (11), si v et w sont éléments de K^0 , on a

$$(dv)w = d(vw) - v dw \quad (v, w \in K^0).$$

Cette formule montre que le produit de deux éléments de la forme (16) peut être écrit sous la même forme. De là on déduit facilement que tous les éléments de L^p se mettent sous la forme (16), cette représentation n'étant d'ailleurs pas unique. Il est facile de vérifier ensuite que L a la même structure algébrique que K , c'est-à-dire que L a les propriétés algébriques exprimées par les formules marquées (A). La restriction de la fonction de support S à L a, bien entendu, les propriétés (11)-(15) du n° 2 du paragraphe III.

Nous avons déjà remarqué que la formule (7) pour la dérivation de fonctions définies dans X peut être introduite par analogie avec la dérivation ordinaire. Ce point accepté, nous disons que dans la sous-algèbre L de K la dérivation est déterminée par les conditions suivantes, qui peuvent également être motivées par l'analogie avec la dérivation classique dans Ω :

- 1° d est une application linéaire $L \rightarrow L$, dont le carré est nul;
- 2° sur $L^0 = K^0$ elle est définie par (7);
- 3° la formule (11) est valable.

En effet, chaque élément de L est de la forme (16). Or, pour un tel élément on calcule directement

$$dl = \sum_{i=1}^m dv_{i0} dv_{i1} \dots dv_{ip}$$

selon les conditions 1°-3°, et cela prouve que celles-ci déterminent d dans L .

9. Soit L l'algèbre (15) construit dans le cas, où $X = \mathbb{R}^n$ est l'espace euclidien. Disons quelques mots de l'interprétation intuitive des éléments de L , et de celle de sa différentielle. Reprenons les notations \mathbb{R}^p , C_p , ∂C_p utilisées dans le n° 7 du paragraphe III. Le sous-espace \mathbb{R}^p est donné par les équations

$$(17) \quad A_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, n - p),$$

où les A_i sont des fonctions linéaires des coordonnées, et $x = (x_1, \dots, x_n)$. Si nous supposons que C_p est un polyèdre convexe, il sera donné par un système d'équations, et d'inégalités

$$(18) \quad A_i(x) = 0, \quad B_j(x) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n - p; j = 1, \dots, k),$$

où A_i , B_j sont des fonctions linéaires. Notons par a_i , b_j respectivement les fonctions caractéristiques des demi-espaces $A_i(x) \geq 0$, $B_j(x) \geq 0$, et posons

$$b = b_1 \dots b_k.$$

Formons ensuite l'élément

$$(19) \quad c = b da_1 \dots da_{n-p}$$

de L^{n-p} . On constate facilement que le support de c est précisément le polyèdre convexe C_p , et que le support du cobord $dc = db da_1 \dots da_k$ est exactement la frontière ∂C_p du polyèdre (17). Nous avons ainsi obtenu une proposition analogue à l'une des propositions mentionnées au n° 7 du paragraphe III. Du point de vue intuitif, cette proposition est même plus satisfaisante que la précédente, car dans la théorie d'Alexander nous pouvons dériver des fonctions arbitraires, en particulier des fonctions caractéristiques.

Quand X est une variété on pourra même énoncer une proposition analogue à la seconde proposition du n° 7 du paragraphe III. Nous ne le faisons pas, car nous croyons qu'il est préférable d'acquérir une intuition sur l'algèbre de chaînes K directement plutôt que de lier cette intuition au module de chaînes de l'espace.

V. — Théorie de J. Leray; notion de couverture.

1. Alors que la construction d'Alexander, rappelée dans le paragraphe précédent, est seulement analogue à la structure classique (19) du n° 6 du paragraphe III, la notion de couverture est une véritable généralisation de celle-ci.

On arrive à cette généralisation de la façon suivante. On envisage une structure algébrique-topologique telle que (19) du n° 6 du paragraphe III, ou (14) du n° 7 du paragraphe IV. C'est un triple composé d'une algèbre, d'une application linéaire de cette algèbre en elle-même, dont le carré est nul, et d'une application de l'algèbre dans la famille de parties compactes d'un espace. C'est ce triple

(1) Notons que $c \in L^{n-p}$, et $\dim S(c) = p$. C'est une des raisons qui justifient de parler degré du d'un élément de K , et non pas de sa dimension, comme on fait habituellement.

algébrico-topologique, qui doit être défini implicitement par les axiomes. Les propriétés algébriques et géométriques de cette structure seront énumérées en quatre groupes; nous n'aurons qu'à rappeler les propriétés communes de l'algèbre des formes différentielles et de l'algèbre de cochaînes d'Alexander que nous avons vues dans les deux paragraphes précédents. Dans le premier groupe, noté (A), on envisage des propriétés purement algébriques de l'algèbre et de l'application linéaire. Dans le second groupe (S) on énumère les propriétés de l'application de l'algèbre dans la famille de parties compactes de l'espace. Dans le troisième et quatrième groupe (U), (P); les propriétés algébriques et géométriques sont liées; le premier de ces axiomes concerne l'unité de l'algèbre, le second axiome correspond au lemme de Poincaré.

La présente rédaction des axiomes ne suppose connues que les notions courantes de l'Algèbre et de la Topologie générale. C'est un avantage de cette rédaction. Néanmoins, elle ne peut pas être complètement satisfaisante, car elle utilise uniquement des notions usuelles, alors qu'il s'agit d'une notion nouvelle, ni algébrique, ni topologique. C'est pourquoi la rédaction des deux derniers axiomes est artificielle.

Nous reprendrons ces questions plus loin, en particulier nous donnerons la rédaction définitive des axiomes (U) et (P).

Définition de couvertures sur un espace. — Soit X un espace topologique localement compact, donné; désignons par A l'anneau des entiers, ou un corps. Soient donnés :

- 1° une A-algèbre (⁴) K;
- 2° une application linéaire $d : K \rightarrow K$ de K en elle-même, telle que $d^2 = 0$;
- 3° une loi, qui fait correspondre à chaque $k \in K$ une partie compacte S(k) de X. d sera dit différentielle de K, S sa fonction de support.

Nous disons que le système

$$(1) \quad (K, d, S)$$

constitue une A-couverture sur l'espace X, si les axiomes suivants sont vérifiés :

(A) **Axiomes algébriques :**

- (1) le A-module additif de K est une somme directe : $K = \sum_{p \geq 0} K^p$; $k \in K^p$ est dit de degré p;
- (2) la multiplication de K est liée à la décomposition directe de (1) par $K^p K^q \subset K^{p+q}$;
- (3) la différentielle d est liée à la décomposition de (1) par $dK^p \subset K^{p+1}$;
- (4) la multiplication, la différentielle d, et la décomposition de (1) sont liées par la condition suivante : si $a \in K^p$, $b \in K$, alors

$$d(ab) = (da)b + (-1)^p a(db).$$

(S) **Axiomes du support :**

(1) *S est lié à la structure additive de K par les relations*

$$\begin{aligned} S(a) = \emptyset & \text{ équivaut } a = 0; \\ \text{si } a \neq 0, & \quad S(aa) = S(a); \\ S(\alpha a + \beta b) & \subset S(a) \cup S(b) \quad (\alpha, \beta \in A); \\ \text{si } a \in K^p, & \quad b \in K^q, \text{ et } p \neq q, \text{ alors } S(a+b) = S(a) \cup S(b). \end{aligned}$$

(2) *S est lié à la multiplication de K : $S(ab) \subset S(a) \cap S(b)$;*

(3) *S est lié à la différentielle : $S(da) \subset S(a)$.*

(U) **Axiome de l'unité :**

Étant donné une partie compacte C de X il existe un élément ν de K, tel que $C \cap S(\nu k - k) = \emptyset$, et $C \cap S(k\nu - k) = \emptyset$ pour chaque $k \in K$.

(P) **Axiome de Poincaré; l'algèbre de cohomologie du point générique de X :**

Soit x un point donné quelconque de X; choisissons ν tel que l'axiome (U) soit satisfait avec $C = x$, et ν .

(1) *Si $a \in K^0$, $x \notin S(da)$, il existe $\alpha \in A$, tel que $x \notin S(a - \alpha\nu)$;*

(2) *si $a \in K^p$, $p \geq 1$, et $x \notin S(da)$, il existe $b \in K$, tel que $x \notin S(a - db)$.*

Pour simplifier les notations une couverture sera notée, en général, en mettant entre crochets son algèbre; ainsi (1) sera noté [K]. La notation pour l'algèbre de la couverture étant choisie, on désigne souvent par d , S la différentielle et le support respectivement. Cela n'entraîne pas de confusion, si l'on ne considère qu'un seul d , S sur un K donné, ce qui arrive fréquemment.

Nous donnerons à présent quelques exemples de couvertures, dont l'avant-dernier sera étudié plus tard.

1° En comparant le rappel du paragraphe III avec la présente définition nous voyons que le système (19) du n° 6 du paragraphe III est une R-couverture sur la variété X. Son anneau de coefficients est le corps R des nombres réels, son algèbre est celle des formes différentielles extérieures définies sur X, sa différentielle est la différentielle extérieure. Du point de vue axiomatique c'est un exemple seulement, historiquement c'est ce système, qui a suggéré les axiomes.

2° Le rappel du paragraphe précédent montre que la construction d'Alexander (14) du n° 7 du paragraphe IV donne une A-couverture sur l'espace X, où l'anneau de coefficients A est l'anneau Z des entiers, ou un corps, et l'espace X est arbitraire. Nous l'appellerons A-couverture d'Alexander de X.

3° La sous-algèbre L de l'algèbre de chaînes d'Alexander, définie dans (15) du n° 8 du paragraphe IV est également une couverture. En effet, les axiomes (A), (S), (U) sont vérifiés. Pour démontrer l'axiome de Poincaré on utilise le même raisonnement que dans le cas de l'algèbre de chaînes d'Alexander.

4° Donnons-nous un nombre fini de compacts F_1, \dots, F_m constituant un recouvrement ρ de l'espace compact X. Notons par N_ρ le nerf de ce recouvrement;

les simplexes s^p de N_p sont des $(p + 1)$ -uples d'éléments du recouvrement, dont l'intersection est non vide. Notons par $S(s^p)$ l'intersection des $F_i (F_i \in \rho)$, qui constituent les sommets de s^p . Nous allons envisager l'algèbre des cochaines simpliciales de N_p à valeurs dans l'anneau A . Définissons le support $S(\varphi)$ d'une telle cochaîne φ , comme la réunion des $S(s^p)$, où s^p est tel que $\varphi(s^p) \neq 0$. L'algèbre de cochaines simpliciales K de N_p , muni de l'opérateur de cobord et des supports ainsi définis et une A -couverture de l'espace X . Dans ce cas l'axiome de Poincaré signifie que l'algèbre de cohomologie d'un simplexe est triviale : le module de cohomologie de degré zéro est isomorphe à l'anneau de coefficients A , et les autres modules de cohomologie sont nuls.

5° Section d'une couverture par un sous-espace. Étant donné une couverture K d'un espace X , et un sous-espace fermé Y de X , on peut former une couverture sur Y à partir de K . Nous donnerons cette construction plus tard.

6° Soit X un espace compact. Nous pouvons former une couverture triviale sur X de la façon suivante. Soit $K^0 = A$, considérée comme A -algèbre; posons $K^p = 0$, pour $p \geq 1$. Définissons $da = 0$ pour chaque $a \in K$. Cette structure algébrique satisfait aux axiomes (A). Définissons finalement $S(0) = \emptyset$, et, si $a \in K^0$, $a \neq 0$, $S(a) = X$. Tous les axiomes de couvertures sont alors satisfaits.

2. Cela étant, nous allons préparer la définition de l'algèbre de cohomologie de l'espace à partir d'une couverture de celui-ci. Nous donnerons d'abord une définition purement algébrique, qui ne fait que répéter la construction utilisée dans le n° 1 du paragraphe III pour obtenir $H(\Omega)$. Dans un développement complet cette notion doit être définie avec les autres notions algébriques de la théorie.

DÉFINITION. — Soit K un A -module, et $d : K \rightarrow K$ un endomorphisme de K , dont le carré est nul ($d^2 = 0$). La structure algébrique (K, d) est appelée module à dérivation. On pose

$$(2) \quad H(K) = (Nd) / dK = Z(K) / B(K),$$

où $Nd = Z(K)$ est le noyau de d , et $dK = B(K)$ son image. $H(K)$ est dit module d'homologie de K . Si en outre K est une A -algèbre, dont Nd est une sous-algèbre, et si dK est un idéal de Nd , alors (K, d) est appelée A -algèbre à dérivation, et $H(K)$ dans (2) son algèbre de cohomologie.

Notons que la seconde partie de cette définition s'applique aux algèbres de couvertures. Les axiomes (A) montrent en effet que le noyau de d est une sous-algèbre de K , car $da = db = 0$ entraîne $d(\alpha a + \beta b) = d(\alpha a) + d(\beta b) = 0$ selon (A.4). En outre dK est un idéal de Nd , car selon (A.4) adb et $(db)a$ sont des cobords, si a est un cocycle (*). Nous avons ainsi prouvé les conditions nécessaires et suffisantes pour que la structure d'algèbre de K induise une telle structure sur $H(K)$.

(*) Si k est un élément de l'algèbre à dérivation K , nous disons que $\underline{d}k$ est le cobord de k . Si $\underline{d}k = 0$, k est appelé cocycle; les cocycles constituent $Z(K) = Nd$. Si k_1 est un cocycle, $k_2 = k_1 + da$,

3. Si X est une variété différentiable, la couverture de formes différentielles donne l'algèbre de cohomologie de l'espace, selon le théorème de de Rham. C'est-à-dire, si l'on envisage sur la même variété X la couverture d'Alexander $[K]$, avec $A = \mathbb{R}$ comme corps de coefficients, $H(K)$ sera isomorphe à $H(\Omega)$, selon le théorème cité. De même, si X est un espace topologique compact, et $[K]$ est la couverture d'Alexander, $H(K)$ est l'algèbre de cohomologie de l'espace X .

Des résultats connus de la Topologie algébrique montrent ainsi que pour certaines couvertures $[K]$ sur X , $H(K)$ donne l'algèbre de cohomologie de l'espace X . D'autre part, l'exemple 6° de couvertures montre que cela ne peut pas être le cas pour toutes les couvertures. Pour définir l'algèbre de cohomologie de l'espace nous devons ainsi envisager une certaine classe de couvertures. Cette classe sera constituée par les couvertures, qui satisfont l'axiome suivant :

(U; fin) **Axiome de l'unité de couvertures fines :**

Étant donné une partie compacte C de X , et un voisinage arbitraire V de C , il existe un élément v de K , tel que :

1° $S(v) \subset V$;

2° pour chaque $k \in K$, on a $C \cap S(vk - k) = \emptyset$, et $C \cap S(kv - k) = \emptyset$.

Si une couverture $[K]$ satisfait à cet axiome, nous disons qu'elle est *fine*. En remplaçant l'axiome (U) par (U; fin) dans la définition de couverture on peut définir cette notion directement.

Dans le n° 4 du paragraphe III nous avons rappelé que la couverture $[\Omega]$ est fine. La couverture d'Alexander est également fine : on choisit un ouvert V' , $C \subset V' \subset V$; la fonction caractéristique v de V' possède alors les propriétés 1° et 2° de l'axiome (U; fin). En outre, cette couverture montre qu'étant donné A et X , il existe des A -couvertures fines de X .

4. Cela étant, nous énonçons un cas particulier du théorème fondamental de Leray dans la forme provisoire que voici :

Théorème fondamental. — *Soit X une space topologique localement compact, et désignons par A un anneau de coefficients donné. Les A -couvertures fines définies sur X ont des algèbres de cohomologie isomorphes les unes aux autres.*

Rappelons que nous n'envisageons que l'anneau des entiers \mathbb{Z} et des corps comme anneaux de coefficients (⁹).

alors k_1 l'est également, et l'on dit qu'il est cohomologue à k_1 ; cette relation d'équivalence est notée $k_1 \sim k_2$. Les cocycles cohomologues entre eux constituent une classe de cohomologie, qui est un élément de $H(K)$. En faisant correspondre à chaque cocycle sa classe de cohomologie nous obtenons l'application naturelle $Z(K) \rightarrow H(K)$. D'après sa définition c'est un homomorphisme d'algèbres. Si $f: K_1 \rightarrow K_2$ est un homomorphisme d'algèbres à dérivation, et $f d_1 = d_2 f(d_i$ étant la différentielle de K_1), alors f définit un homomorphisme $f^*: H(K_1) \rightarrow H(K_2)$. Nous utiliserons plus tard le cas particulier, où K_1 est une sous-algèbre de K_2 , et f l'identité.

(⁹) Les algèbres de cohomologie par rapport à un anneau commutatif quelconque rentrent dans le cadre de cohomologie par rapport à un faisceau, dont nous ne parlons pas ici.

Le théorème fondamental inclut comme cas particulier les résultats mentionnés de M. de Rham. En effet, si X est une variété différentiable, alors $H(\Omega) \approx H(K)$, où Ω est l'algèbre de formes différentielles, et K est la R -couverture fine d'Alexander de X .

Plus généralement : soient $[K_1], [K_2]$ A -couverture fines de l'espace X . L'énoncé précédent du théorème fondamental affirme $H(K_1) \approx H(K_2)$, mais il ne précise pas un isomorphisme entre ces deux algèbres. Dans le paragraphe VII nous indiquerons les propriétés structurales des couvertures, qui déterminent l'isomorphisme du théorème fondamental. Toutefois, dès à présent nous posons la définition suivante :

Définition fondamentale. — Soit X un espace localement compact, et $[K]$ une A -couverture fine de X . On pose

$$(3) \quad H(X, A) = H(K).$$

Cette algèbre est appelée algèbre de cohomologie de l'espace X à coefficients dans A .

Faisons à présent quelques remarques à propos de la structure algébrique de $H(X, A)$ ⁽⁹⁾. La décomposition de l'axiome (A. 1) de K donne une décomposition directe

$$(4) \quad H(X, A) = \sum_{p \geq 0} H^p(X, A),$$

qui définit les modules de cohomologie $H^p(X, A)$; un élément de ce dernier module est dit de degré p . La multiplication de K définit une multiplication dans $H(X, A)$, qui suit les règles de commutation que voici : si $h \in H^p(X, A), k \in H^q(X, A)$, alors $hk = (-1)^{pq}kh$. M. Leray a démontré en outre que chaque élément de $H(X, A)$ est nilpotent : étant donné $h \in H(X, A)$, il existe un entier $m = m(h)$, tel que $h^m = 0$.

VI. — Section d'une couverture par un sous-espace ; aspect intuitif de la notion de couverture.

1. Si $[K]$ est une couverture sur X , et U est un sous-ensemble quelconque de ce dernier, nous noterons par K_U l'ensemble des éléments de K , dont le support est dans le sous-ensemble U de X :

$$(1) \quad K_U = \{ k : k \in K, S(k) \subset U \}.$$

Selon les axiomes de la fonction de support, K_U est un idéal de K , et $dK_U \subset K_U$. En particulier, la restriction $d|K_U$ de d à K_U définit une dérivation sur K_U : $(K_U, d|K_U)$ est une algèbre à dérivation ⁽¹⁰⁾.

⁽⁹⁾ Si f désigne une application $f : X \rightarrow Y$, et X' est une partie quelconque de X , $f|X'$ est la restriction de f à l'ensemble X' ; $f|X'$ n'est définie que sur X' , et sur cet ensemble elle coïncide avec f .

Envisageons à présent la structure $(\mathbf{K}, d | \mathbf{K}_U, S | \mathbf{K}_U)$. Les axiomes (A) sont satisfaits; en particulier (A. 1) est une conséquence de la dernière condition de (S. 1). Les axiomes (S) sont bien entendu vérifiés. Reste l'axiome de l'unité, et celui de Poincaré, qui ne sont pas, en général, vrais dans ce système.

Or, si l'on suppose que $[\mathbf{K}]$ est une *couverture fine*, et que U est un *ouvert* de X , on montre facilement que ces deux derniers axiomes sont également valables dans ce système. Par conséquent, si U est ouvert, et $[\mathbf{K}]$ est une *couverture fine*, \mathbf{K}_U est une *couverture fine sur* U , ce qui implique d'après le théorème fondamental :

$$(2) \quad H(\mathbf{K}_U) = H(U, A).$$

2. Donnons-nous ensuite une partie fermée Y de X , et notons par U le complémentaire de Y dans X . Définissons l'algèbre $Y\mathbf{K}$ par

$$(3) \quad Y\mathbf{K} = \mathbf{K}/\mathbf{K}_U \quad (U = X - Y).$$

Notons en outre par Y l'application de \mathbf{K} sur son quotient (3) :

$$(4) \quad Y: \mathbf{K} \rightarrow Y\mathbf{K}, \quad k \rightarrow Yk \quad (k \in \mathbf{K}),$$

qui fait correspondre à chaque $k \in \mathbf{K}$ sa classe mod \mathbf{K}_U . $Y\mathbf{K}$ est appelé *section* de \mathbf{K} par le sous-espace Y ; de même Yk est dit *section* de k .

Cette notation est justifiée par le fait suivant : Si k_1, k_2 sont congrues mod \mathbf{K}_U , alors leur différence a son support dans U , et l'on a

$$(5) \quad S(k_1) \cap Y = S(k_2) \cap Y \quad (k_1 - k_2 \in \mathbf{K}_U).$$

Cette relation permet de définir une *fonction de support sur* $Y\mathbf{K}$ à valeurs dans Y . En effet,

$$(6) \quad S(Yk) = S(k) \cap Y$$

attache à chaque élément Yk de $Y\mathbf{K}$ une partie compacte de Y , qui est indépendant, selon (5), du choix de k dans Yk . On vérifie facilement que la fonction du support (6) satisfait tous les axiomes (S) de la définition de couvertures. (Notons que la décomposition directe de \mathbf{K} induit une décomposition sur $Y\mathbf{K}$, ainsi que d induit une dérivation sur $Y\mathbf{K}$.)

Écrivons explicitement les *règles de calculs concernant les sections* :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y(\alpha a + \beta b) = \alpha Y a + \beta Y b, \\ Y(ab) = (Y a)(Y b) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{A}), \\ Y(da) = d(Y a). \end{array} \right.$$

Notons en particulier que, si le support de da ne rencontre pas Y , $Y a$ est un cocycle de $Y\mathbf{K}$. De plus, si Z est une partie fermée de Y , on a la *relation de transitivité* que voici :

$$(8) \quad Z(Y a) = Z a \quad (Z \subset Y \subset X)$$

pour chaque $a \in \mathbf{K}$.

3. Cela étant, notons le fait suivant. Dans la définition (3) de YK , ainsi que dans la démonstration des relations (7) nous n'avons pas utilisé l'hypothèse, selon laquelle $[K]$ satisfait (U) et (P). Nous retenons ainsi la proposition suivante : *Si un système (K, d, S) , composé des données fondamentales de la notion de couverture satisfait aux axiomes (A), (S), on peut définir sa section par une partie fermée de X ; la section sera également un tel système, qui satisfait aux mêmes axiomes.*

4. Nous pouvons à présent contrôler les axiomes (U) et (P), et constater que YK muni de la différentielle et de la fonction de support (6) est une couverture sur Y . De plus, si $[K]$ est fine sur X , $[YK]$ sera fine sur Y , et l'on a

$$(9) \quad H(YK) = H(Y, A).$$

Nous avons ainsi obtenu la couverture mentionnée dans l'exemple 5° du n° 1 du paragraphe V : Étant donné un espace Y , nous pouvons construire une couverture sur celui-ci, en le plongeant dans un autre espace X , et en prenant la section de Y par une couverture fine quelconque de X . En particulier les espaces séparables métriques de dimension $\leq n$ peuvent être plongés dans un espace euclidien $R^m (m \geq 2n + 1)$, il y aura ainsi intérêt à étudier les couvertures fines de ce dernier (cf. Leray, [9], p. 73-74).

5. Cela étant, rappelons que la section peut être définie pour un système (K, d, S) indépendamment de la validité des axiomes (U), (P). Ce fait va nous permettre à présent d'énoncer ces axiomes sous une forme plus satisfaisante que celle donnée dans le paragraphe précédent. Il est en effet facile de vérifier que les axiomes (U), (P) peuvent être énoncés dans la forme suivante :

(U) **Axiome de l'unité :**

Si C est une partie compacte de X , la section CK a une unité.

(U; fin) **Axiome de l'unité de couvertures fines :**

Étant donné une partie compacte C de X , et un voisinage arbitraire V de C , il existe un $v \in K$, tel que : 1° $S(v) \subset V$; 2° Cv est l'unité de CK .

(P) **Axiome de Poincaré; l'algèbre de cohomologie du point générique X :**

Pour chaque point x de X , on a $H(xK) \approx A$, où A est considéré comme A -algèbre.

Nous reparlerons de ces axiomes plus loin, parce qu'ils jouent un rôle important dans la théorie. Notons à présent que ces formulations justifient les noms donnés à ces axiomes.

6. Nous avons déjà mentionné que la couverture d'Alexander est fine. Or, cette couverture satisfait en réalité un axiome plus exigeant que (U; fin). Soit d'abord X

compact, $[K]$ la couverture fine d'Alexander de X , et u l'unité de K . Étant donné deux ouverts V, W dont la réunion est partout dense dans X , l'unité u admet une partition

$$(10) \quad u = \nu + \omega, \quad S(\nu) \subset \bar{V}, \quad S(\omega) \subset \bar{W} \quad (V, W \text{ ouverts}; \bar{V} \cup \bar{W} = X)$$

subordonnée au recouvrement fermé \bar{V}, \bar{W} de X . Si X n'est pas compact, les sections de K par les compacts de X jouissent de cette propriété.

Outre la couverture fine d'Alexander toutes ses sections jouissent de cette propriété. Dans certaines constructions ultérieures il sera commode de nous servir des couvertures, dont les sections par les compacts ont la propriété (10).

7. Après avoir défini la notion de section d'une couverture par un sous-espace fermé nous pouvons pleinement apprécier les avantages de la notion axiomatique de l'algèbre de cochaines. En effet, cette construction permet déjà de simplifier beaucoup de raisonnements de la théorie classique. Nous en donnerons une application indiquant brièvement une démonstration de la suite exacte bien connue de M. Hurewicz. L'opération de section permet en outre de former une image intuitive de l'algèbre de cochaines (couvertures) des espaces donnés comme parties fermées d'un espace euclidien. Pour illustrer ce point nous allons calculer l'algèbre de cohomologie d'un solénoïde.

8. Soit $[K]$ une couverture fine sur l'espace X, Y une partie fermée de ce dernier, et $U = X - Y$. Envisageons le triangle

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} H(K) & \xrightarrow{Y} & (K/K_U) \\ & \searrow i_K & \swarrow d \\ & & H(K_U) \end{array} \right.$$

formé de trois algèbres, et des applications Y, d, i définies comme suit : Y désigne l'homomorphisme des algèbres de cohomologie, qu'induit l'homomorphisme de (4). Il est permis d'utiliser le même symbole pour ces deux homomorphismes, car leurs domaines de définition sont différents. Pour définir d envisageons un cocycle de $dc \text{ mod } dK_U$ ne dépend que de la classe \bar{c} de c , et qu'elle en dépend linéairement $\bar{c} \in K/K_U$. Si $c \in \bar{c}$, alors $dc \in K_U$; en outre, on constate facilement que la classe ment. Cela définit l'application linéaire d de (11). L'homomorphisme i est enfin défini par l'inclusion (application identique) $K_U \subset K$. Notons encore que Y et i sont des homomorphismes d'algèbres, mais d est une application linéaire seulement. En ce qui concerne la multiplication elle a des propriétés bien déterminées. En outre d augmente le degré d'une unité,

$$(12) \quad d: H^p(K/K_U) \rightarrow H^{p+1}(K_U).$$

Constatons ensuite que les algèbres figurant dans le triangle (11) sont selon (2) et (9) des algèbres de cohomologie des sous-espaces de X :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} H(X, A) & \xrightarrow{Y} & H(Y, A) \\ & \searrow i_K & \swarrow d \\ & & H(X - Y, A) \end{array} \right.$$

Nous voulons montrer que ce triangle est exact : l'image de chaque homomorphisme est le noyau de l'homomorphisme suivant (cf. Leray [9], p. 76, lemme 41. 1, p. 89, théorème 49. 1; Borel [2], exposé IV, p. 2, exposé VIII, p. 9). Il est bien connu que ce théorème et sa démonstration peuvent être formulés en termes purement algébriques, et sous cette forme plus générale ce résultat a d'autres applications importantes. Nous croyons néanmoins utile d'explicitier la démonstration en ce cas particulier, car les représentations (2), (9) des algèbres de cohomologie figurant dans (13) permettent de saisir le contenu intuitif du théorème de Hurewicz (cf. en outre le n° 16).

Prouvons d'abord : (noyau de Y) \subset (image de i). Soit donné $h \in H(K)$, et supposons que $Yh = 0$. Cette hypothèse signifie que, si $c \in h$, $Y(c - da) = 0$, pour un $a \in K$ convenablement choisi. En d'autres termes le support du cocycle $c - da$ de la classe h ne rencontre pas Y , c'est-à-dire que $c - da \in K_U$. Par conséquent la classe de $c - da$ de K_U sera transformée en h , ce qui prouve l'inclusion énoncée. La section d'un cocycle de K par Y , dont le support est dans U étant évidemment nulle, nous obtenons l'inclusion dans l'autre sens, ainsi : (image de i) = (noyau de Y).

Prouvons ensuite (noyau de d) \subset (image de Y). Soit donné $h \in H(K/K_U)$, et supposons $dh = 0$. Il existe un $a \in K$, tel que Ya soit un cocycle, dont la classe soit h . $da \in K_U$ ayant la classe nulle dans $H(K_U)$, il existe un $b \in K_U$, c'est-à-dire un $b \in K$, dont le support est dans U , tel que $db = da$. L'élément $c = a - b$ de K sera ainsi un cocycle. De plus, le support de b étant dans U , on aura $Yc = Ya - Yb = Ya$, c'est-à-dire que l'homomorphisme Y du triangle (11) transforme la classe de c en h , ce qui prouve l'inclusion énoncée. D'autre part, si $h \in H(K/K_U)$ vient par l'homomorphisme Y , c'est-à-dire qu'elle est la classe de la section d'un cocycle c de K , alors $dc = 0$ signifie précisément que $dh = 0$. Cela termine la preuve de l'inclusion opposée à la précédente. Nous avons ainsi prouvé : (image de Y) = (noyau de d).

Démontrons finalement : (noyau de i) \subset (image de d). Donnons-nous un $h \in H(K_U)$, tel que $ih = 0$. Cela signifie qu'il existe un cocycle c de K dont le support est dans U , et qui est le cobord d'un $a \in K$. La relation $S(c) \cap Y = \emptyset$ entraîne que Ya est un cocycle. Par conséquent h de $H(K_U)$ est l'image par d de la classe de Ya dans $H(K/K_U)$. La réciproque de cette proposition étant tout à fait évidente, nous avons obtenu : (image de d) = (noyau de i).

La notation (11), (13), due à M. Henri Cartan, portant sur les algèbres de cohomologie met en valeur le fait que i et Y sont des homomorphismes d'algèbres; elle permet en outre d'explicitier les propriétés multiplicatives de l'application linéaire d . Au lieu du triangle (13) on écrit habituellement une suite (14) $\dots \rightarrow H^p(X - Y, A) \rightarrow H^p(X, A) \rightarrow H^p(Y, A) \rightarrow H^{p+1}(X - Y, A) \rightarrow \dots$ ($p \geq 0$), ce qui permet d'envisager séparément les modules de cohomologie, et expliciter les propriétés de degré des homomorphismes de modules.

9. Soit X un espace localement compact, connexe, et non compact. Compactifions-le, en lui adjoignant « un point à l'infini y », et notons par Y l'espace compact $X \cup y$; nous identifions X au complémentaire de y dans Y . Comme

première application du triangle exact de Hurewicz on peut prouver facilement

$$(15) \quad H^0(X, A) = 0, \quad H^0(Y, A) = A;$$

$$(16) \quad \text{si } p \geq 1, \quad \text{alors } H^p(Y, A) = H^p(X, A).$$

10. Nous allons utiliser le triangle exact de Hurewicz pour déterminer selon la méthode d'Eilenberg et Steenrod l'algèbre de cohomologie des espaces euclidiens (cf. [3], p. 37-46, théorème 16.6, p. 46).

Introduisons les notations suivantes. R^n désigne l'espace euclidien à n dimensions ($n \geq 0$); R^0 est un point. $x = (x_1, \dots, x_n)$ est le point générique de R^n , les x_i sont ses coordonnées cartésiennes; $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $S^n : \|x\| = 1$, où $x \in R^{n+1}$; S^0 est un couple de points. $R_+^n : x_n \geq 0$, $R_-^n : x_n \leq 0$. R^{n-1} sera identifié au sous-espace $x_n = 0$ de R^n . Nous fixons l'anneau de coefficients A , et dans les formules ci-dessous nous noterons par $H(X)$ l'algèbre de cohomologie $H(X, A)$.

Si l'on compactifie R_+^n par un point à l'infini, on obtient une boule fermée, qui est contractile en un point. On peut démontrer qu'un tel espace (compact) a l'algèbre de cohomologie d'un point (cf. Leray [9], p. 118-124). Vu (15), (16), on obtient ainsi :

$$(17) \quad H(R_+^n) = H(R_+^n) = 0 \quad (n \geq 1),$$

c'est-à-dire que tous les modules de cohomologie de ces espaces sont nuls.

Écrivons ensuite le triangle exact des triples d'espaces $R^n, R_+^n, R^n - R_+^n$, et celui de $R_+^n, R^{n-1}, R_+^n - R^{n-1}$. Or, le demi-espace ouvert $U : x_n < 0$ figure dans chacun de ces triples d'espaces, car $U = R^n - R_+^n = R_+^n - R^{n-1}$. Nous pouvons ainsi disposer les deux triangles de la façon suivante :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} H(R^n) & \longrightarrow & H(R_+^n) \\ & \begin{array}{c} \nearrow i_+ \\ \searrow d_- \end{array} & \downarrow \\ & & H(U) \\ & & \begin{array}{c} \nearrow d_- \\ \searrow i_+ \end{array} \\ H(R_+^n) & \longrightarrow & H(R^{n-1}) \end{array} \right. \quad (U = R^n - R_+^n = R_+^n - R^{n-1}; n \geq 1).$$

Or, selon (17) deux de ces algèbres sont nulles, ainsi d_- , et i_+ sont des isomorphismes, dont le premier augmente le degré d'une unité.

$$(19) \quad i_+ d_- : H^p(R^{n-1}) \rightarrow H^{p+1}(R^n) \quad (n \geq 1; p \geq 0)$$

est par conséquent un isomorphisme du premier module sur le second. Or, R^0 étant un point, $H^0(R^0) = A$, et, si $p \geq 1$, $H^p(R^0) = 0$, selon l'axiome de Poincaré. Par induction nous obtenons ainsi le résultat suivant :

$$(20) \quad H^p(R^n, A) = \begin{cases} A, & \text{si } p = n, \\ 0 & \text{si } p \neq n. \end{cases}$$

La multiplication dans $H(R^n, A)$ est d'ailleurs nulle, en raison de ses propriétés de degré.

11. La connaissance de l'algèbre de cohomologie de R^n , ou de S^n , qui sont d'ailleurs liées par les relations (15), (16), ne suffit pas dans toutes les appli-

cations. Souvent il faut connaître des cocycles, dont les classes engendrent ces algèbres. Envisageons une A-couverture [K] de S^n (sphère dans R^{n+1}), dont l'unité admette une partition de la forme (10). Nous allons construire un cocycle de cette couverture, dont la classe engendre $H^n(S^n, A)$. Une construction analogue peut être effectuée d'ailleurs pour n'importe quelle couverture fine de S^n .

Pour chaque i ($1 \leq i \leq n+1$) envisageons la partition $u = v_i + w_i$ de l'unité de K , telle que $S(v_i)$ soit dans $x_i \geq 0$, et $S(w_i)$ dans $x_i \leq 0$ [cf. (10)]. Dans ces conditions

$$(21) \quad c = v_1 dv_2 \dots dv_{n+1} \quad (n \geq 2)$$

est un cocycle de K^n , dont la classe de cohomologie engendre $H^n(S^n, A)$.

On démontre cette proposition par induction; notons que le support de c est le point $(1, 0, \dots, 0)$.

12. Soit R^1 la droite numérique, et R le corps des nombres réels. Nous allons indiquer une autre méthode pour déterminer $H^1(R^1, R)$, qui relie cette question à des résultats bien connus de la théorie des mesures et de l'intégration.

Cette fois-ci notons par [K] la couverture fine d'Alexander de la droite R^1 . Soit $k \in K^1$ un cocycle donné. Choisissons une fonction à deux variables φ dans k . Comme le cobord de φ est nul, et son support est compact, on peut trouver un $\varepsilon > 0$, tel que, si x_0, x_1, x est un triple de points de R^1 , dont le diamètre est $< \varepsilon$, on ait l'équation

$$(22) \quad \varphi(x_0, x_1) = \varphi(x_0, x) + \varphi(x, x_1).$$

Définissons la fonction d'intervalle $k^*(I)$, où $I = (x_0, x_1)$ est un intervalle de R^1 , en posant $k^*(I) = \varphi(x_0, x_1)$ pour les intervalles de longueur $< \varepsilon$. L'équation (22) montre alors que cette fonction est additive dans son domaine de définition, et l'on peut par conséquent prolonger k^* et définir une mesure sur la droite R^1 . On constate facilement que cette mesure ne dépend pas du choix de φ dans sa classe k , et l'on trouve la proposition suivante :

Le R -module des mesures à supports compacts de la droite est isomorphe au module $Z(K^1)$ des 1-cocycles de la R -couverture fine d'Alexander de la droite.

En particulier, la décomposition d'une mesure en partie régulière et singulière peut être topologiquement interprétée, et cela donne une nouvelle méthode pour déterminer $H^1(R^1, R)$. On peut étudier $H^n(R^n, R)$ d'une façon analogue.

13. Pour terminer ce paragraphe nous allons parler de l'aspect intuitif de la notion de couverture.

Rappelons d'abord la construction du n° 9 du paragraphe IV [cf. (18), (19)]. Étant donné un polyèdre convexe, compact d'un sous-espace de R^n , nous avons construit un $c \in K$, tel que $S(c)$ soit le polyèdre donné, et $S(dc)$ sa frontière. Nous avons effectué cette construction dans le cas, où [K] est la couverture fine d'Alexander de R^n , mais on peut faire une construction analogue, si la couverture [K] de R^n a la propriété discutée dans le n° 6 du paragraphe VI [cf. 10)]. Dans ce qui suit nous désignons par [K] une telle couverture fine de R^n . Si, par

exemple, $n = 3$, et D un domaine plan convexe, on peut construire un élément $c \in K$, tel que $S(c) = D$, et que $S(dc)$ est la courbe frontière de D . En outre, si F désigne une droite coupant D dans un point intérieur on peut construire c de façon que Fc soit un cocycle de la droite, dont la classe de cohomologie est donnée d'avance. On peut faire une construction analogue dans le cas, où D est un domaine plan multiplement connexe, ou encore un domaine sur une surface donnée.

Si l'espace X est donné comme partie fermée d'un espace euclidien, on peut intuitivement interpréter les cocycles de X , plus précisément ceux de XK . En effet, si $S(dc)$ ne rencontre pas X , Xc est un cocycle de XK [cf. § VI, n° 2, (7)]. Dans certains cas on peut ainsi intuitivement construire des cocycles de l'espace X , sans supposer nécessairement que cet espace soit un polyèdre. On peut même faire un dessin sur un tel cocycle de X , qui n'est pas plus conventionnel que les dessins géométriques en général. Par exemple, un domaine multiplement connexe, dans l'espace ordinaire dont la frontière ne rencontre pas X peut représenter un cocycle de X , étant entendu que deux domaines, qui ne diffèrent que dans une partie ne rencontrent pas X , peuvent représenter le même cocycle de X . Nous allons indiquer plus concrètement une telle construction dans le cas du solénoïde p -adique de l'espace ordinaire R^3 .

14. Soit S^1 le groupe multiplicatif des nombres complexes z , $|z| = 1$. Envisageons le système d'application :

$$(23) \quad S^1 \xleftarrow{\varphi} S^1 \xleftarrow{\varphi} S^1 \xleftarrow{\varphi} \dots,$$

où $\varphi(z) = z^p$, p étant un entier fixé une fois pour toutes. La limite X de ce système est appelée solénoïde p -adique. On détermine facilement $H^1(X, A)$ en remarquant qu'il est la limite de

$$(24) \quad A \xrightarrow{\varphi^*} A \xrightarrow{\varphi^*} A \xrightarrow{\varphi^*} \dots,$$

où $\varphi^*(\alpha) = p\alpha$ ($\alpha \in A$). (Nous parlerons plus tard sur l'homomorphisme des algèbres de cohomologie, induit par une application continue.) Nous esquisserons une autre méthode de détermination de $H^1(X, A)$, qui nous donnera l'occasion de préciser ce que nous avons dit dans le n° 13 sur l'interprétation intuitive des cocycles d'un espace.

15. La limite de (23) peut être plongée homéomorphiquement dans l'espace R^3 (pour la description précise de cette construction, cf. Eilenberg et Steenrod [3], p. 230-231). Un disque plan de R^3 , qui tourne autour d'une droite de son plan, qui ne le rencontre pas, décrit un tore plein; le centre du disque décrit un cercle, dit méridien du tore. On peut démontrer qu'il existe une suite décroissante de fermés T_1, T_2, \dots de R^3 , telle que :

- 1° T_j ($j \geq 1$) est homéomorphe à un tore plein;
- 2° T_{j+1} est dans l'intérieur de T_j ($j \geq 1$);

3° le méridien de T_{j+1} est homotope dans T_j au méridien de ce dernier pris p fois;

4° il existe une droite E , appelée axe des tores, telle que, si le plan P passe par E , alors $T_j \cap P$ est la réunion de $2p^{j-1}$ disques ($j \geq 1$);

5° $\left(\bigcap_{j \geq 1} T_j\right) \cap P$ est un ensemble de Cantore (espace universel totalement discontinu).

Ces conditions étant satisfaites,

$$(25) \quad X = \bigcap_{j \geq 1} T_j$$

est homéomorphe à la limite de (23).

Cela étant, nous allons esquisser la démonstration de la proposition suivante :

Soit $[K]$ une A -couverture fine de R^3 , comme ci-dessus. On peut trouver une suite d'éléments a_1, a_2, \dots de K , telle que :

- 1° $S(a_j)$ soit un disque plan de R^3 ;
- 2° Xa_j soit un cocycle;
- 3° $Xa_j \sim p(Xa_{j+1})$;
- 4° toutes les relations en termes de \sim soient conséquences de celles de 3°;
- 5° les classes de cohomologie des cocycles Xa_j engendrent $H^1(X, A)$.

En particulier, si $A = Z$ est l'anneau des entiers, $H^1(X, A)$ est isomorphe au groupe additif des nombres rationnels de la forme k/p^l (k, l entiers).

Notons par P le plan, qui figure dans la propriété 4° de la construction de X . Choisissons en chaque intersection $T_j \cap P$ un des composants connexes D'_j , qui est un disque plan, et désignons par D_j un disque dans le plan de D'_j , tel que l'intérieur de D_j contient D'_j , et que $T_j \cap D_j = D'_j$. Si nous construisons l'élément $a_j \in K$ selon le n° 9 du paragraphe IV [cf. (18), (19)], tel que $S(a_j) = D_j$, et que $S(da_j)$ soit le cercle frontière de D_j , alors $T_j a_j$ sera un cocycle, dont la classe de cohomologie engendre $H^1(T_j, A)$. Dans la démonstration de cette affirmation on peut utiliser le fait que T_j est rétractile sur son méridien, et que les 1-cocycles de ce dernier sont cohomologues aux multiples du cocycle donné dans (21) pour $n = 1$. Ces mêmes faits peuvent servir pour démontrer

$$(26) \quad T_{j+1} a_j \sim p(T_{j+1} a_{j+1}).$$

En prenant la section de la relation précédente par X [cf. (8)] nous obtenons les trois premières affirmations de la proposition.

Pour démontrer 4° donnons-nous un cocycle quelconque $Xc \in XK$. $S(dc)$ étant dans le complémentaire de X il existe un T_j , tel que $S(dc) \cap T_j = \emptyset$, ce qui signifie que $T_j c$ est un cocycle. Il s'ensuit que $T_j c \sim \alpha T_j a_j$ pour un $\alpha \in A$ convenablement choisi, car la classe de ce dernier cocycle engendre le module de cohomologie. En prenant la section de cette relation par X , nous obtenons les affirmations 4° et 5°.

16. Envisageons ensuite le triangle exact de Hurewicz attaché aux espaces \mathbb{R}^3 , X , $\mathbb{R}^3 - X$:

$$\begin{array}{ccc} H(\mathbb{R}^3, A) & \longrightarrow & H(X, A) \\ & \swarrow & \nwarrow \\ & H(\mathbb{R}^3 - X, A) & \end{array}$$

Selon (20) les homomorphismes de cobord :

$$(27) \quad d : H^0(X, A) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^3 - X, A),$$

$$(28) \quad d : H^1(X, A) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^3 - X, A)$$

sont des isomorphismes que nous allons interpréter à présent en termes de cocycles de \mathbb{XK} et \mathbb{K}_U [cf. (1), (2), (3); $U = \mathbb{R}^3 - X$].

X étant compact et connexe $H^0(X, A) = A$ est constitué par les multiples αu de l'unité u de \mathbb{XK} , où α parcourt A . Or, selon (10) l'unité de \mathbb{XK} peut être mise sous la forme $u = t_j + t'_j$, où $S(t_j) = T_j$ est l'un des tores pleins, qui figurent dans le second membre de l'intersection (25). $c_j = dt_j$ est un cocycle ayant pour support la surface du tore T_j ; la classe de cohomologie de c_j dans $U = \mathbb{R}^3 - X$ est le générateur du second module (27). En outre $c_j \sim c_k$ dans U . En effet, $d(t_j - t_k) = c_j - c_k$, et $S(t_j - t_k) \subset U$. En des termes volontairement vagues on pourra dire que les 1-cocycles de U sont des « surfaces », et la cohomologie entre elles est établie par les « domaines » situés entre les « surfaces ».

Envisageons ensuite l'isomorphisme (28). Étant donné $h \in H^1(X, A)$, cette classe contient un cocycle $\alpha(Xa_j)$ ($\alpha \in A$). Or, a_j a pour support un disque D_j , et da_j le cercle frontière C_j de D_j . da_j sera le 2-cocycle de $\mathbb{R}^3 - X$, dont la classe est l'image de h par l'isomorphisme (28). Que (28) soit un isomorphisme peut être exprimé en des termes intuitifs comme suit : tous les 2-cocycles de $\mathbb{R}^3 - X$ sont cohomologues aux combinaisons linéaires de ces « cercles ». Ce sont précisément les cercles « enlacés » avec X ; cette image intuitive est ainsi précisée par la suite exacte.

VII. — Sur l'isomorphisme du théorème fondamental.

1. Dans le présent paragraphe nous nous sommes un peu écarté de l'exposé de M. Leray.

Pour démontrer le théorème fondamental, c'est-à-dire pour justifier la définition fondamentale du n° 4 du paragraphe V, M. Leray définit d'abord le produit tensoriel $K_1 \otimes K_2$ de deux algèbres à dérivation K_1, K_2 , qui satisfont aux axiomes (A) de la définition de couvertures. C'est le produit tensoriel au sens de Whitney des modules des algèbres, qui peut être muni d'une structure d'algèbre et d'une différentielle, de façon qu'il satisfasse également aux axiomes (A). Il montre ensuite que, si K_i est l'algèbre d'une couverture $[K_i]$ sur un espace X , alors $K_1 \otimes K_2$ admet un quotient $K_1 \circ K_2$ qui est l'algèbre d'une couverture $[K]$ sur le même espace X . Pour prouver le théorème fondamental il suffit ensuite de

prouver que, si $[K_i]$ est fine, l'homomorphisme $K_i \rightarrow K_1 \circ K_2$ induit un isomorphisme sur les algèbres de cohomologie.

Malgré son importance nous ne voulons pas détailler cette construction de M. Leray, car cela demanderait un développement plus technique.

2. Nous disons que $[L]$ est une sous-couverture de $[K]$, si l'algèbre L est une sous-algèbre de K , la différentielle et le support de $[L]$ étant les restrictions à L de la différentielle et du support de $[K]$. Nous avons utilisé déjà cette notion dans le n° 8 du paragraphe IV [cf. (15)]. Il est par conséquent naturel de poser la définition suivante :

DÉFINITION. — Soient $[K] = (K, d, S)$, et $[K'] = (K', d', S')$ deux A -couvertures sur le même espace X . $[K']$ est dit extension de $[K]$, si elle est munie d'un isomorphisme

$$(1) \quad i : K \rightarrow K'$$

de K dans K' , qui conserve les degrés, commute avec les différentielles et les supports : $iK^p \subset K'^p$, $id = d'i$, $S'i = S$.

La définition précédente permet de préciser l'isomorphisme du théorème fondamental du n° 4 du paragraphe V. Les résultats peuvent être énoncés dans la série de propositions que voici :

1° Si $[K]$ est une A -couverture sur X , il existe une extension de $[K]$, qui est fine sur X .

2° Chaque extension d'une couverture fine est elle-même fine.

3° **Proposition fondamentale :** Soit $[K]$ une couverture fine sur X , et $[K']$ une extension de $[K]$. L'isomorphisme de l'extension (1) induit un isomorphisme $i^* : H(K) \rightarrow H(K')$ de $H(K)$ sur $H(K')$.

4° Étant données deux A -couvertures $[K_1]$, $[K_2]$ sur un même espace X , il existe une A -couverture $[K]$, qui est extension à la fois de $[K_1]$ et de $[K_2]$.

5° **Isomorphisme du théorème fondamental :** soient $[K_1]$, $[K_2]$ deux A -couvertures fines données sur l'espace X . Un isomorphisme naturel

$$(2) \quad i_{21} : H(K_1) \rightarrow H(K_2)$$

de $H(K_1)$ sur $H(K_2)$ est établi de la façon suivante. On choisit arbitrairement une couverture $[K]$, qui est extension à la fois de $[K_1]$ et de $[K_2]$. Selon la proposition 3°, $H(K_1) \rightarrow H(K) \leftarrow H(K_2)$ sont des isomorphismes. Par définition i_{21} est leur composé. Cet isomorphisme est indépendant du choix de l'extension $[K]$.

3. La proposition 5° permet de nommer une classe de cohomologie $h \in H(X, A)$, en construisant un cocycle $c \in K$ d'une couverture fine de X , qui peut être arbitrairement choisi pour faciliter la construction. En outre, des constructions particulières de couvertures peuvent être utiles, quand X porte une structure particulière (par exemple : groupe topologique, variété algébrique, etc.). La notion axiomatique

tique de couverture donne une plus grande liberté à ces constructions que les anciennes notions d'algèbres de cochaines.

4. Nous voulons encore commenter le fait que dans la définition de couverture nous avons supposé que les supports sont compacts, et que par conséquent le théorème fondamental concerne seulement ce qu'on peut appeler *cohomologie à supports compacts*.

Selon les formules (15), (16) du n° 9 du paragraphe VI l'algèbre de cohomologie d'un espace connexe, non compact est à degré zéro près celle de sa compactification par un point à l'infini. On est tenté de dire par conséquent que la cohomologie à supports compacts concerne uniquement les espaces compacts. Or, cela n'est pas vrai. Il est désirable d'avoir, bien entendu, des théorèmes d'unicités concernant d'autres algèbres de cohomologie : ce que nous voulons affirmer c'est qu'aucune théorie de cohomologie ne peut se passer, sous une forme ou sous une autre, de la notion de cohomologie à supports compacts. En ce sens le théorème fondamental ici énoncé a une certaine priorité sur les autres résultats analogues.

5. Pour mettre en lumière ce point envisageons une théorie de cohomologie

$$(3) \quad \{ \bar{H}^q(X, \text{mod } Y), f^*, \delta \}$$

sur une classe \mathcal{A} d'admissibles couples d'espaces (X, Y) , au sens du livre [3] de MM. Eilenberg et Steenrod (*cf.* surtout p. 5, 13 et 15); pour éviter la confusion avec nos précédentes notations nous avons désigné par $\bar{H}^q(X, \text{mod } Y)$ les modules notés $H^q(X, Y)$ dans le livre cité. Supposons que l'anneau de coefficients A de la théorie (3) est l'anneau Z des entiers, ou un corps.

Si l'espace X est de la forme $P - Q$, où P est un polyèdre fini, et Q un sous-polyèdre fermé de P , alors la cohomologie à supports compacts de X doit figurer dans la théorie (3).

Selon l'axiome d'exactitude de la théorie (*loc. cit.*, p. 14, axiome 4c) le triangle

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} \bar{H}(P) & \longrightarrow & \bar{H}(Q) \\ & \nwarrow & \swarrow \\ & \bar{H}(P, \text{mod } Q) & \end{array}$$

est exact, où \bar{H} désigne la somme directe des modules \bar{H}^q . Le théorème d'unicité d'Eilenberg et Steenrod d'une part (*cf. loc. cit.*, p. 100, théorème 10.1), et les résultats de Leray d'autre part [*cf.*, par exemple, § VI, n° 10, (20)] montrent que $\bar{H}(P) = H(P, A)$, $\bar{H}(Q) = H(Q, A)$, où A est l'anneau de coefficient de la théorie (3) au sens d'Eilenberg et Steenrod. On peut en outre identifier les homomorphismes du triangle (4) avec ceux de (13) du n° 8 du paragraphe VI ($X = P$, $Y = Q$). On obtient par conséquent la relation suivante :

$$(5) \quad \bar{H}(P, \text{mod } Q) = H(P - Q, A),$$

ce qui montre effectivement que la cohomologie à supports compacts de $X = P - Q$ figure dans la théorie (3), comme nous l'avons affirmé.

Notons à ce propos que dans la théorie de cohomologie à supports compacts on a le triangle exact (4), car c'est précisément le triangle (13) du n° 8 du paragraphe VI, mais il est inutile de se servir de la notation $H(X, \text{mod } Y)$, puisque (5) est valable. Personnellement je pense que c'est un avantage de la théorie de cohomologie à supports compacts que toutes les algèbres figurant dans le triangle exact de Hurewicz s'interprètent comme des algèbres de cohomologie des sous-espaces d'un espace.

6. On peut comparer plus généralement les algèbres de cohomologie de la théorie de Leray avec celles de l'exposé [13] de M. Spanier.

Si X est localement compact, connexe, et non compact, et Y désigne la compactification de X par un point à l'infini, on a

$$(6) \quad H(Y, A) = \bar{H}(Y, A), \quad H(X, A) = \bar{H}(Y, \text{mod } \gamma; A) \quad (Y = X \cup \gamma),$$

où γ est le point à l'infini, et \bar{H} désigne cette fois les algèbres définies dans le travail cité de M. Spanier.

VIII. — Sur le développement de la théorie; rôle de la notion de couverture; généralisations de cette notion.

1. M. Leray a développé sa théorie d'une façon axiomatique dans [8], [9], [10], et en particulier il a introduit certaines notions plus générales que celle de couverture. Indiquons brièvement la ligne de ce développement, qui aboutit à la notion de couverture, et disons quelques mots sur les rôles de ces notions dans la théorie.

2. Comme la théorie envisage des notions algébrico-topologiques on doit commencer par certaines notions purement algébriques (Leray [8], p. 63-68; [9], p. 10-41). Un groupe à dérivation (K, d) est dit anneau à dérivation (K, d, η) , si, outre sa structure de groupe, K possède une multiplication, et il est muni d'un automorphisme $\eta: K \rightarrow K$, tel que $d\eta + \eta d = 0$, et $d(ab) = (da)b + (\eta a)db$ ([8]), p. 63; [9], p. 14; Borel [2], exposé I, p. 2). Dans le cas de couverture $\eta(k) = (-1)^p k$, où $k \in K^p$. Un groupe à dérivation peut toujours être muni d'une multiplication nulle, et devient ainsi un anneau à dérivation. Par conséquent, si l'on introduit cette dernière notion, il est superflu de parler de la première; M. Leray se place à ce point de vue. En outre, ayant la notion de produit tensoriel à sa disposition, qui joue même un grand rôle dans la théorie, il peut se contenter d'envisager des anneaux; dans le présent exposé nous avons dû envisager des algèbres, puisque nous n'avons pas parlé du produit tensoriel. La plus grande partie de ce chapitre de la théorie concerne ensuite la notion du produit tensoriel $K_1 \otimes K_2$ de deux anneaux à dérivation ([8], p. 67; [9], p. 24-41; Borel [2], exposé II). Nous ne parlons pas de cette notion, et d'autres notions purement algébriques (anneau filtré, anneau spectral d'homologie d'un anneau différentiel filtré, etc.), qui interviennent dans cette partie de la théorie, et qui sont utilisées

plus tard, dans les démonstrations des théorèmes d'unicité de la théorie. Notons seulement qu'un anneau à dérivation est dit canonique, s'il satisfait les axiomes (A) avec l'anneau des entiers \mathbb{Z} comme anneau de coefficients, et s'il n'a pas de torsion : si $mk = 0$, où m est un entier, $k \in \mathbb{K}$, alors ou bien $m = 0$, ou bien $k = 0$ ([8], p. 67; [9], p. 24; Borel [2], exposé I, p. 2).

3. Les notions algébriques introduites interviennent dans la définition de *complexe*. C'est déjà une structure algébrico-topologique. Elle est définie par certains axiomes purement algébriques, et par la donnée d'une fonction de support, qui doit satisfaire certaines des conditions (S) intervenant dans la définition de couverture. Dans la définition du paragraphe V nous avons envisagé une fonction de support S , qui fait correspondre à chaque $k \in \mathbb{K}$ une partie *compacte* $S(k)$ de l'espace X . M. Leray envisage plus généralement des fonctions de support, telles que $S(k)$ est une partie fermée quelconque de l'espace. D'une façon précise : un complexe (\mathbb{K}, d, η, S) défini sur l'espace X est un anneau à dérivation (\mathbb{K}, d, η) , muni d'une application S de \mathbb{K} dans la famille de parties fermées de l'espace X , cette application devant satisfaire les axiomes (S) modifiés comme suit : La première condition de (S.1) est affaiblie, car on exige seulement $S(0) = 0$; on supprime évidemment la seconde et la dernière condition de ce groupe; on ajoute par contre la condition $S(\eta(k)) = S(k)$, qui est une conséquence des autres conditions dans le cas d'une couverture ([8], p. 71; [9], p. 47; Borel [2], exposé II).

Cette notion de complexe est précisée par celle de *complexe canonique*. Dans sa définition on restreint la structure algébrique de l'anneau \mathbb{K} du complexe, en exigeant qu'il soit *canonique*. C'est ainsi une structure algébrico-topologique, comme (1) dans le n° 1 du paragraphe V, à cela près que $S(k)$ peut être une partie fermée quelconque de X satisfaisant les axiomes (A) et (S); ([8], p. 72; [9], p. 49).

Cela étant on peut définir la notion de *section d'un complexe défini sur X par un fermé de ce dernier* ([8], p. 71; [9], p. 47-48; cette notion est définie comme cas particulier de l'image inverse d'un complexe, dont nous parlerons plus loin; Borel [2], exposé II, p. 3-4). Vu les applications ultérieures il est nécessaire d'introduire et d'étudier cette notion dans cette généralité.

Grâce à la notion de complexe, et celle de section, la définition de couverture est ensuite très concise ([8], p. 75; [9], p. 67; Borel [2], exposé II, p. 7) :

Nous nommerons couverture d'un espace localement compact X tout complexe \mathbb{K} défini sur X , ayant les propriétés suivantes :

- 1° \mathbb{K} est un complexe canonique;
- 2° \mathbb{K} possède une unité u homogène, de degré nul, de support $S(u) = X$;
- 3° $H(x\mathbb{K})$ a pour seuls éléments les multiples entiers de son unité quel que soit $x \in X$.

La notion de couverture fine est enfin introduite par un axiome qui exige l'existence des partitions de l'unité subordonnées à un recouvrement ouvert fini de l'espace ([8], p. 72; [9], p. 53; Borel [2], exposé II, p. 6).

4. En comparant la définition précédente de couverture avec celle du n° 1 du paragraphe V on notera les différences suivantes. Si X est compact, la définition du n° 1 du paragraphe V est plus générale que la précédente : pour qu'une couverture selon la première définition la soit selon la seconde, il faut et il suffit que $A = Z$ soit l'anneau des entiers. Dans le cas général nous ne pouvons pas comparer ces deux notions en des termes utilisés jusqu'ici. Notons seulement que la notion définie dans le n° 1 du paragraphe V figure également dans la théorie de Leray, et que la différence entre les deux notions n'est que d'ordre technique. La notion que nous avons appelée couverture est dans la terminologie de M. Leray ou bien un complexe canonique, à supports compacts, satisfaisant aux axiomes (U) et (P), ou bien intersection d'une couverture et d'un faisceau constant, propre, localement isomorphe à A].

5. Pour indiquer l'utilité des notions introduites disons quelques mots sur le rôle de l'axiome de Poincaré. La théorie donne un important développement aux questions concernant cet axiome. Les problèmes abordés dans la Note [5] de M. Leray peuvent être formulés aujourd'hui en se référant à cet axiome.

Nous commencerons par étudier la construction de la théorie, qui donne l'homomorphisme

$$(1) \quad f^*: H(Y, A) \rightarrow H(X, A)$$

induit par une application continue

$$(2) \quad f: X \rightarrow Y$$

d'un espace localement compact X dans un autre. De là nous allons arriver d'une façon naturelle aux questions concernant l'axiome de Poincaré.

6. Pour éviter des complications d'ordre technique, nous supposons dans ce qui suit que X et Y sont compacts. Soient

$$(3) \quad [K] = (K, d, S) \quad (\text{couverture fine sur X});$$

$$(4) \quad [L] = (L, d, S) \quad (\text{couverture fine sur Y}).$$

Montrons que la donnée de l'application (2) permet de construire une couverture sur X à partir de la couverture [L] donnée sur Y.

Cette couverture aura la même algèbre, et la même différentielle que [L]. Pour définir sa fonction de support S' , on pose

$$(5) \quad S'(l) = f^{-1}S(l) \quad (l \in L).$$

Il est facile de vérifier que S' est en effet une fonction de support définie sur L à valeurs dans la famille de parties compactes de X. Envisageons la structure

$$(6) \quad f^{-1}[L] = (L, d, f^{-1}S)$$

du point de vue des axiomes de couvertures. Il est superflu de vérifier les axiomes (A), car la structure algébrique de (6) est identique à l'algèbre de la cou-

verture (4). En outre, nous avons déjà remarqué que la vérification des axiomes (S) est triviale. Bien entendu, (U) est vérifié, mais (U; fin) n'est pas valable en général, quoique [L] est supposée fine. Reste à envisager l'axiome de Poincaré. Or, si $x \in X$ est quelconque, $x \in f^{-1}S(l)$ équivaut $f(x) \in S(l)$, c'est-à-dire que la section $x(f^{-1}[L])$ est isomorphe à la section $f(x)[L]$, et cela prouve la validité de l'axiome (P).

Comme [L] est supposée fine sur Y, on a $H(L) = H(Y, A)$ selon le théorème fondamental. D'autre part, selon la proposition 1° du n° 2 du paragraphe VII il existe une extension [L'] de $f^{-1}[L]$, qui sera fine sur X. Notons par $i: L \rightarrow L'$ l'isomorphisme de l'extension (cf. la définition du § VII, n° 2). Cet homomorphisme induit un homomorphisme

$$(7) \quad i^*: H(L) \rightarrow H(L').$$

Or, les algèbres de cohomologie de (7) sont celles des espaces Y, X respectivement, et l'on définit (1) en posant $f^* = i^*$. Les propositions du n° 2 du paragraphe VII montrent que cet homomorphisme (7) est déterminé par l'application (2), car il ne dépend pas du choix des couvertures [L], [L'].

En particulier, si l'on choisit pour [L] la couverture fine d'Alexander de Y, et pour [L'] celle de X, on voit que cette définition de f^* est la même que celle donnée dans le travail [13] de M. Spanier.

On peut se former une image intuitive de f^* en choisissant pour [L] la couverture fine (15) du n° 8 du paragraphe IV; rappelons que c'est la sous-couverture fine de celle d'Alexander engendrée par les fonctions définies sur Y, et par les différentielles de ces fonctions [cf. (7) du § IV n° 4]. Ainsi $f^{-1}[L]$ sera engendrée par les fonctions constantes sur les « fibres »

$$(8) \quad F_y = f^{-1}(y) \quad (y \in Y; F_y \subset X),$$

et par les différentielles de ces fonctions. En particulier, les supports des éléments de $f^{-1}[L]$ sont des réunions des F_y , c'est-à-dire des ensembles saturés par la relation d'équivalence que définit f dans X. Comme extension [L'] de $f^{-1}[L]$ on peut prendre ensuite la couverture définie dans (15) du n° 8 du paragraphe IV de X, engendrée par les fonctions et par leurs différentielles. L'homomorphisme f^* de (1) montre comment $f^{-1}[L]$ est située homologiquement dans [L'].

7. L'homomorphisme (1) que nous venons de construire est bien connu dans les théories usuelles, et y joue un rôle important. Or, la théorie de Leray permet d'effectuer une construction tout à fait analogue, qui ne figure pas dans les autres théories, et ne peut pas y figurer d'une façon naturelle, car elle utilise essentiellement la notion axiomatique de l'algèbre de cochaînes, c'est-à-dire celle de couverture et de complexe canonique (cf. § VIII, n° 3). Certes, une fois cette construction découverte (Leray [5], [6]), on a pu la transporter partiellement dans les autres théories, mais, pour autant que je sache, la raison profonde de la construction n'est claire en aucune autre théorie.

Cette construction est une sorte de réciproque de la précédente. Tout à l'heure nous avons envisagé une couverture sur Y, et la donnée de l'application $f: X \rightarrow Y$

nous a permis d'en construire une sur X . Nous nous donnons à présent une couverture sur X , et construisons une structure analogue sur Y . Le résultat de la construction ne sera pas une couverture sur Y , il sera seulement un *complexe canonique* sur Y , notion, dont nous avons déjà parlé ci-dessus. Rappelons que c'est une théorie de cohomologie, et il ne s'agit pas de l'homomorphisme induit par f sur les modules d'homologie.

Pour effectuer la construction en question envisageons la couverture $[K]$ de (3) sur X . Posons

$$(9) \quad S'(k) = f(S(k)) \quad (k \in K)$$

pour chaque $k \in K$. Notons par fS l'application (9) de K dans la famille de parties compactes de Y , et envisageons la structure

$$(10) \quad f[K] = (K, d, fS)$$

constituée par une algèbre à dérivation, et d'une fonction de support appliquant l'algèbre dans la famille de compacts de Y .

On constate facilement que $f[K]$ satisfait les axiomes (A), (S) de la définition de couvertures. De plus, si $Y = f(X)$, il satisfait également (U; fin). Bref, (10) est un complexe canonique fin (cf. § VIII, n° 3).

L'axiome de Poincaré ne sera pas vérifié en général, c'est-à-dire (10) n'est pas une couverture. Nous voulons à présent étudier les propriétés de ce complexe canonique, qui remplacent celle exigée dans l'axiome de Poincaré.

Donnons-nous un point $y \in Y$, et envisageons l'idéal de K que constituent les éléments, dont les supports au sens de (9) ne rencontrent pas le point y . Posons $V = X - F_y$ [cf. (8)]. On constate facilement que l'idéal en question de K est précisément K_V . En effet, le S' support de k ne rencontre pas le point y , si $S(k) \cap F_y = \emptyset$ et dans ce cas seulement. Comme K/K_V est une couverture fine de la « fibre » F_y , on aura $H(K/K_V) = H(F_y, A)$, selon le théorème fondamental.

La propriété formulée dans l'axiome de Poincaré sera ainsi remplacée par la propriété suivante du complexe canonique $f[K]$. Pour chaque $y \in Y$:

$$(11) \quad H(y(f[K])) = H(F_y, A) \quad [Y = f(X)].$$

Même que $f[K]$ ne satisfait pas l'axiome de Poincaré les $H(y(f[K]))$ expriment une propriété homologique importante de l'application f ; en chaque point c'est l'algèbre de cohomologie de l'image inverse de ce point par l'application f .

Or, dans le cas d'une couverture cette même algèbre est l'anneau de coefficients A . Cela nous amène à dire : En étudiant $f[K]$ nous avons à faire à un anneau de coefficients variable d'un point à l'autre.

Pour rendre précis ce langage, M. Leray a introduit dans sa Note [5] une nouvelle notion, celle de *faisceau* sur un espace. *Grosso modo* c'est l'anneau de coefficients variable que nous venons de mentionner. Grâce à cette notion il a pu aborder des questions délicates concernant les propriétés homologiques des applications continues. En particulier, il s'agissait de savoir dans quelle mesure peut-on déterminer $H(X, A)$ en connaissant les autres données figurant dans cette construction.

Nous terminons notre exposé avec cette question, qui était historiquement le point de départ de la théorie. Tout ce que nous avons dit jusqu'à maintenant ne se rapportait qu'aux simplifications et au nouveau point de vue que cette théorie apporte aux fondements mêmes de la théorie de cohomologie. Elle édifie après un nouveau chapitre sur les anneaux spectraux d'homologie des espaces, et sur les anneaux spectraux des applications continues. Le lecteur pourra consulter à ce sujet Leray [8], Borel [2], et finalement l'exposé détaillé [9] de M. Leray.

Une question de terminologie.

Quand les notions de chaîne, cycle, bord, etc. apparaissent pour la première fois en toute généralité dans les travaux de Poincaré, une chaîne élémentaire est définie par un nombre fini d'équations et d'inégalités, comme un « morceau de variété », plus une orientation de celui-ci. Les combinaisons linéaires formelles de ces morceaux de variétés orientés constituent ensuite le groupe de chaînes. On peut orienter ou bien (a) le morceau de variété même, ou bien (b) le sous-espace complètement orthogonal à ce morceau de variété. (Cf. Poincaré [11], et Leray [7]. En réalité Poincaré n'a pas encore envisagé des groupes de chaînes, il a défini des invariants numériques seulement.)

Les morceaux de variétés qu'a considérés Poincaré peuvent être représentés paramétriquement, et une orientation de l'espace des paramètres se transmet à ceux-là, en leur donnant une orientation (a). Au premier abord il est ainsi plus naturel de choisir l'orientation (a), comme l'a fait Poincaré, qui n'a même pas envisagé l'autre possibilité.

Nous savons aujourd'hui qu'en choisissant l'orientation (b) on obtient la cothéorie (cf. Leray [7]). Elle se distingue de la théorie de Poincaré par ses propriétés formelles. Néanmoins, à ce stade primitif on peut attacher les mêmes images intuitives aux notions de ces deux théories (cf. Leray [7]). Nous savons en outre que dans la cothéorie on peut commodément définir les invariants d'un espace topologique quelconque.

Nous avons essayé de montrer dans cet exposé que la théorie de Leray permet de sauvegarder les images intuitives de la théorie d'homologie dans le cadre d'une théorie de cohomologie. Par exemple, dans le n° 13 du paragraphe VI nous avons considéré un domaine plan de \mathbb{R}^3 , qui rencontre le sous-espace X de ce dernier, mais dont la frontière ne rencontre pas X . Certaines conventions nous ont permis de dire que c'est une 1-cochaîne de \mathbb{R}^3 , et que sa section par X est un 1-cocycle de ce dernier. D'autres conventions bien connues permettent de dire que le même domaine plan est une 2-chaîne de \mathbb{R}^3 , mais on ne peut pas le considérer comme chaîne de l'espace X .

En résumé, la théorie de Leray a les propriétés formelles des théories de cohomologie, et en même temps elle donne une nouvelle interprétation des images intuitives habituelles des anciennes théories d'homologie. Il est ainsi tout à fait naturel de poser nettement la question suivante : Dans la théorie de couvertures quelle est la terminologie préférable : celle de l'homologie ou celle de la cohomologie ? Autrement dit, les éléments d'une couverture doivent-ils être appelés chaînes, cycles, etc. ou bien cochaînes, cocycles, etc. ?

Si l'on veut souligner le fait que cette théorie a les propriétés formelles des autres théories de cohomologie, il est préférable d'utiliser la « coterminologie ». Cela est même indispensable, si l'on parle des anciennes théories. Pour cette raison, bon gré, mal gré nous avons dû utiliser cette terminologie.

Par contre, si l'on ne parle que de la théorie de Leray, il peut être préférable d'utiliser la terminologie de l'homologie. Dans ses travaux cités M. Leray écrit : « N'ayant pas à parler d'homologie mais exclusivement de cohomologie je dirai homologie quand l'usage est de dire cohomologie ».

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. W. ALEXANDER, *On the connectivity ring of an abstract space* (*Ann. Math.* t. 37, 1936, p. 698-708).
- [2] A. BOREL, *Cohomologie des espaces localement compacts, d'après J. Leray* [*École polytechnique Fédérale, Séminaire de Topologie algébrique*, Printemps 1951 (polycopié)].
- [3] S. EILENBERG et N. STEENROD, *Foundation of Algebraic Topology*, Princeton University Press., 1952.
- [4] E. KÄHLER, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen* (*Chelsea Publ. Comp.*, 1949).
- [5] J. LERAY, *L'anneau d'homologie d'une représentation* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 222, 1946, p. 1366-1368).
- [6] J. LERAY, *Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation* (*Ibid.*, p. 1419-1422).
- [7] J. LERAY, *Une définition géométrique de l'anneau de cohomologie d'une multiplicité* (*Comm. Math. Helv.*, t. 20, 1947, p. 177-180).
- [8] J. LERAY, *L'homologie filtrée*, *Colloque de Topologie algébrique*, Paris, 1947, édition du C. N. R. S., p. 61-82.
- [9] J. LERAY, *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact, et d'une application continue* (*J. Math. pures et appl.*, t. 29, 1950, p. 1-139).
- [10] J. LERAY, *L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe* (*Ibid.*, p. 169-213).
- [11] H. POINCARÉ, *Sur l'analysis situs*, [*J. Éc. Polytech.*, (2), t. 1, 1895, p. 1-121; *Œuvres complètes*, p. 189-288].
- [12] F. RIESZ et B. SZ-NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle* (*Académie des Sciences de Hongrie*, 1952).
- [13] E. SPANIER, *Cohomology theory for general spaces* (*Ann. Math.*, t. 49, 1948, p. 407-427).

