BULLETIN DE LA S. M. F.

A. TRESSE

Théorie élémentaire des géométries non euclidiennes

Bulletin de la S. M. F., tome 81 (1953), p. 81-143
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1953__81__81_0>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES ;

PAR M. A. TRESSE.

PRÉFACE.

Les pages qui vont être publiées dans ce Bulletin ne sont pas, comme celles que l'on y trouve régulièrement, une œuvre originale de science pure; elles relèvent au contraire du domaine de la pédagogie et sont conçues comme devant être accessibles à l'enseignement secondaire.

Ayant été écrites dans un isolement dû surtout aux circonstances de l'époque actuelle, elles ne comportent guère de références, leur nature ne s'y prêtant d'ailleurs pas. Comme elles reposent principalement sur la théorie de l'inversion, nous renverrons donc à tous les exposés classiques de cette théorie, et par exemple, à l'exposé magistral qu'on en trouve dans la deuxième édition de la Géométrie élémentaire de M. Hadamard, exposé dont nous aurons à faire une application essentielle en y ajoutant toutefois la notion de « point anallagmatique à l'infini » (ou point ∞) que nous avons présentée dans deux articles des « Humanités Scientifiques » (éditions Hatier, année 1947).

Au nom que nous venons de citer nous ajouterons seulement celui d'Henri Poincaré; c'est le début de son Mémoire sur les fonctions fuchsiennes qui a fourni les premières inspirations du présent travail.

PREMIÈRE PARTIE.

Origine des Géométries non euclidiennes. Les déplacements dans le plan.

1. Origine des Géométries non euclidiennes. — Les principes de la Géométrie euclidienne classique du plan reposent sur la considération des *figures égales, directement ou inversement* (suivant qu'elles ont ou n'ont pas même orientation), celles-ci pouvant à leur tour être considérées comme se déduisant les unes des autres par une ou plusieurs symétries axiales dont les axes constituent l'ensemble des droites du plan; si alors, on transforme ces figures par une inversion arbitraire $\mathfrak{T}$, ces symétries se transforment en des inversions J toutes positives et propres, en général; les cercles d'inversion des $\mathcal{J}$, transformés des droites du plan, forment de leur côté *l'ensemble des cercles, propres ou impropres, passant par un même point* O, le pôle de l'inversion $\mathcal{T}$, et l'on obtient ainsi une Géométrie plus générale que la première, mais n'en différant pas essentiellement, cette première répondant à son tour au cas particulier où l'ensemble des cercles d'inversion étant celui des droites (ou cercles impropres), le point commun O est le point impropre ou *point anallagmatique* ∞.

Considérons ensuite la Géométrie d'une sphère Σ_0 et la Géométrie plane s'en déduisant dans une inversion $\mathcal{T}$ ayant son pôle S sur cette sphère. Σ_0 se transforme en un plan Π_0; les figures directement ou inversement égales tracées sur Σ_0 se déduisent les unes des autres dans les symétries planaires dont les bases sont les plans diamétraux de cette sphère; l'inversion T transforme l'ensemble de ces plans Π tous passant par le centre C de Σ_0 en celui des sphères Σ, propres ou impropres passant par deux points fixes S et l'inverse S' du centre C; les plans Π étant tous orthogonaux à Σ_0, leurs inverses, les sphères Σ sont toutes orthogonales au plan Π_0, les points fixes S, S' sont symétriques par rapport à ce plan Π_0. L'ensemble des symétries planaires par rapport aux plans Π a pour transformé l'ensemble des inversions Σ, toutes positives, dont les sphères Σ sont les sphères d'inversion et qui, limitées au plan Π de la figure plane, plan diamétral commun à ces sphères, restent en géométrie plane les inversions, propres ou impropres, toutes positives dont les cercles d'inversion ont par rapport au point O milieu de SS', une même puissance négative égale à $-\overline{OS}^2$ ou se réduisent à des droites issues de O.

Ainsi ces deux géométries planes ne diffèrent que par ce fait que la puissance commune d'un même point O par rapport à un ensemble de cercles formant un réseau est *nulle* pour la première, *négative* pour la seconde; ou mieux, le point O pouvant être impropre pour la première, les inversions $\mathcal{J}$ sont orthogonales à un cercle fixe qui est *singulier* (réduit à un point) pour la première et imaginaire pour la seconde.

Ce rapprochement conduit alors à concevoir *a priori* une troisième espèce de Géométrie plane faite de l'ensemble des inversions $\mathcal{J}$, toutes positives, dont les cercles d'inversion ont une même puissance positive par rapport à un point fixe O ou mieux, ce point O pouvant être, en particulier, le point anallagmatique à l'infini, sont orthogonales à un même cercle, propre ou impropre, mais essentiellement réel.

De là ce que nous appellerons trois espèces de Géométries, dites Géométries non euclidiennes; définies chacune par un cercle ω dit *cercle fondamental*, la Géométrie étant de I^re^ espèce si le cercle ω est réel (propre ou impropre), de II^e^ espèce s'il est imaginaire et de III^e^ espèce s'il est singulier, chacune d'elles étant formée par l'ensemble des inversions positives $\mathcal{J}$ qui sont orthogonales à ce cercle.

2. **Points opposés. Demi-plan en I^re^ espèce.** — Dans toutes ces Géométries, tous les points s'associent par couples de deux points A, A' dits opposés qui sont inverses par rapport au cercle fondamental ω et toute inversion $\mathcal{J}$ qui échange

entre eux deux points quelconques A et B échange en même temps leurs inverses A' et B'.

En III^e espèce, l'un des deux points opposés A, A' se confond toujours avec le point O propre ou impropre auquel se réduit le cercle fondamental et la notion est dépourvue d'intérêt.

En II^e espèce, où ω est imaginaire, deux points opposés A, A' sont toujours distincts, chacun d'eux pouvant occuper toute position dans le plan et variant en même temps que l'autre; aucun caractère simple ne permet de les différencier et toute l'étude concernera donc simultanément un ensemble de points et celui de leurs opposés, une figure et la figure opposée.

Mais en I^{re} espèce, où ω est réel, propre ou impropre, un point se confond avec son opposé lorsqu'il appartient au cercle fondamental ω; il en est distinct dans le cas contraire, et de plus on peut, en outre, les distinguer l'un de l'autre d'une manière simple par ce fait qu'ils n'appartiennent pas à la même région du plan limitée par le cercle ω; dans ces conditions, il est possible de limiter toute étude à celle d'un ensemble de points et d'une figure placés dans une seule de ces régions qui sera dite le *demi-plan* de la Géométrie de I^{re} espèce, et l'on convient toujours qu'il en est ainsi; ceci n'interdira pas l'intervention possible des points de la région écartée, mais elle ne se fera qu'à titre auxiliaire, celui de points opposés à ceux de la figure étudiée, mais n'appartient pas à celle-ci.

3. **Les fa-éléments.** — Ces principes posés et dans les trois espèces, toute figure, tout élément de cette figure, toute grandeur attachée à cette figure pourront prendre simultanément deux significations. La première est celle de la Géométrie euclidienne classique, car toutes nos études, et il est bon d'insister sur ce point, restent toujours rigoureusement des études de cette Géométrie euclidienne. La seconde viendra de l'interprétation de faits et de propriétés présentant des analogies remarquables avec d'autres faits et propriétés de la Géométrie euclidienne classique et que, pour cette raison, on sera conduit à énoncer dans les mêmes termes; mais pour éviter alors toute confusion, on fera précéder ces termes du préfixe *fa*, abréviation si l'on veut du mot « faux » : par exemple, nous verrons que certains cercles, propres ou impropres, possèdent des qualités analogues à celles des droites en Géométrie euclidienne; on les appellera alors « fa-droites », la même figure étant donc en même temps un cercle ou même une droite, d'une part et une fa-droite, d'autre part; de même, nous serons amené à attacher à un système de deux points une qualité qui, d'après son analogie avec une distance sera dite la « fa-distance » de ces deux points, ceux-ci ayant ainsi simultanément une distance, au sens euclidien proprement dit, et une fa-distance non euclidienne.

Dans certains cas simples, les deux interprétations se confondront et le préfixe fa sera inutile : ce sera, par exemple, le cas pour les angles, ainsi qu'on le prévoit d'après la conservation des angles dans l'inversion; et il n'y aura donc pas de fa-angles. De même, il n'y aura pas de fa-point, cette expression devant en principe être réservée, en I^{re} espèce seulement, aux points du demi-plan choisi, mais pouvant être abandonnée sans confusion possible; cependant, tout point appartenant au cercle fondamental ω sera dit *fa-impropre* comme étant situé sur la frontière du demi-plan de la figure et tout autre point de ce demi-plan sera dit *fa-propre*, de sorte que si ω n'est pas une droite, le point ∞ est à la fois fa-propre dans l'interprétation non euclidienne et impropre dans l'interprétation euclidienne tandis que inversement tout point de ω est à la fois fa-impropre et propre.

Enfin, dans certaines circonstances, lorsqu'un ensemble de points appartiendront tous à une Géométrie non euclidienne, il pourra arriver que le préfixe fa- soit supprimé sans que cela prête à confusion.

4. **Géométries équivalentes; formes-types.** — Un premier point à observer est que toute Géométrie, ainsi définie par son cercle fondamental ω, constitue un chapitre de l'étude de ce cercle. Or on sait que deux cercles quelconques, pourvu qu'ils soient de même espèce se correspondent dans au moins une inversion générale $\mathfrak{T}$; par conséquent, deux Géométries de même espèce peuvent toujours se déduire l'une de l'autre par inversion et peuvent être ainsi considérées comme des Géométries équivalentes; en d'autres termes, *à une inversion près, il n'existe qu'une seule Géométrie de chacune des trois espèces.*

Un cas particulier concerne en I^re^ espèce les deux demi-plans formés par les deux régions séparées par le cercle fondamental ω, lesquelles se correspondent précisément dans l'inversion $\mathfrak{T}$ dont ω est le cercle d'inversion et les deux Géométries de ces deux demi-plans se ramènent ainsi l'une à l'autre.

Mais, en II^e^ espèce, l'inversion, alors négative définie par ω, transforme tout le plan en lui-même et la Géométrie correspondante également, à moins qu'il ne s'agisse d'une figure dans laquelle on puisse distinguer deux parties opposées l'une de l'autre, et que l'étude ne concerne qu'une seule de ces deux parties.

On fera de très fréquentes applications de cette propriété en transformant la figure par une inversion générale $\mathfrak{T}$ que l'on pourra choisir arbitrairement et qui, en particulier, pourra être l'une des inversions positives $\mathcal{J}$ orthogonales à ω; en disposant convenablement de cette inversion $\mathfrak{T}$, la figure prend alors une forme simple dite *forme-type*.

C'est ainsi que, en I^re^ espèce, en plaçant sur ω le pôle de l'inversion transformatrice $\mathfrak{T}$, on sera ramené à une forme-type dans laquelle le cercle fondamental ω est une droite; d'une manière plus précise lorsqu'un point J de ω (point fa-impropre) joue un rôle remarquable, on pourra toujours supposer que ce point J est le point impropre ∞, car s'il ne l'est pas, il suffit de le choisir comme pôle de $\mathfrak{T}$ pour être ainsi ramené dans tous les cas à une *forme-type dans laquelle un point fa-impropre remarquable est le point* ∞ (à la fois fa-impropre et impropre) et ω une droite.

En II^e^ espèce, où ω est imaginaire, cette forme-type n'existe pas; mais dans les deux espèces, I^re^ et II^e^, lorsque la figure présente un point remarquable A, fa-propre en I^re^, on pourra toujours, si ce point n'est pas le point ∞, le choisir pour pôle de $\mathfrak{T}$ et être ainsi ramené dans tous les cas à une forme-type dans laquelle un point fa-propre remarquable est le point ∞ et le cercle fondamental ω un cercle propre centré en l'opposé A′ de ce point remarquable; on pourra aussi et c'est ce que nous ferons le plus souvent, choisir cet opposé A′ comme pôle de $\mathfrak{T}$ et revenir à une *forme-type dans laquelle le cercle fondamental* ω *est propre et son centre le point fa-propre remarquable* A.

En III^e espèce enfin, on pourra toujours être ramené au cas où le point O auquel se réduit le cercle fondamental ω est le point ∞ en transformant la figure, si c'est nécessaire, dans une inversion $\mathfrak{T}$ ayant pour pôle ce point O; toutes les inversions $\mathfrak{J}$ sont alors les symétries axiales du plan et l'on revient ainsi, comme on l'a vu au début de ces pages, à la Géométrie euclidienne, de sorte que *toute Géométrie de* III^e *espèce est équivalente à la Géométrie euclidienne.*

Pour cette raison, nous pourrons désormais laisser de côté l'étude de la Géométrie de III^e espèce, sauf pour en comparer les propriétés avec celles des deux autres Géométries; on pourrait en faire de même pour la Géométrie de II^e espèce, puisque, comme on l'a vu, celle-ci se ramène à la Géométrie de la sphère par une inversion de l'espace transformant le plan de la figure en une sphère; néanmoins, des analogies comme des oppositions existant entre les deux espèces; nous étudierons parallèlement et simultanément autant que possible les deux Géométries. Nous nous placerons donc tantôt alternativement en I^{re} ou en II^e (abréviation de I^{re} ou II^e espèce), tantôt simultanément en I^{re} et II^e.

5. Fa-droites. — En Géométrie euclidienne, les éléments fondamentaux sont les points et les droites, et une droite, axe d'une symétrie, est formée des points que cette symétrie laisse invariants. Par analogie, en I^{re} ou II^e où les inversions

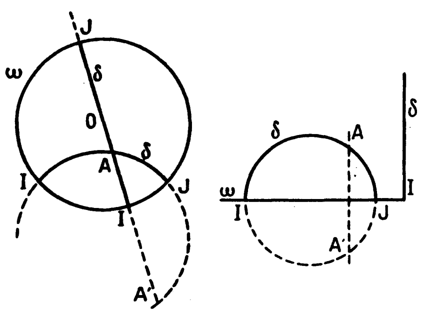

Fig. 1.

positives δ orthogonales au cercle fondamental ω jouent le rôle des symétries précédentes, et où chacune d'elles laisse invariants les points de son cercle d'inversion δ, chacun de ces cercles δ joue le rôle d'une droite et sera dit une *fa-droite*, les éléments de la Géométrie étant ainsi les points et les fa-droites.

En I^{re}, une fa-droite est figurée par un cercle δ, propre ou impropre, orthogonal au cercle fondamental ω en deux points I, J, et limité en ces points à l'arc appartenant au demi-plan de la figure, toute fa-droite δ ayant ainsi deux points fa-impropres I, J; si ω est propre, δ est impropre, placé sur un diamètre de ω, dans le cas particulier où I, J sont diamétralement opposés; si ω est impropre, δ est un demi-cercle basé sur ω ou, en particulier, lorsqu'un des points I, J est le point ∞, une demi-droite perpendiculaire en un point I à la droite ω.

En II^e, où ω est un cercle imaginaire, toujours propre, défini par son centre O, et son module négatif $-R^2$, ce point O, dont la puissance par rapport à tout cercle δ est $-R^2$, est le milieu d'une corde PP$'$ de ce cercle dont les extrémités sont aussi celles d'un diamètre du cercle δ_0 de centre O et de rayon R : toute fa-droite δ est donc un cercle coupant δ_0 en deux points diamétralement opposés ou, en particulier, un diamètre de δ_0, cercle que l'on peut définir par son centre C, à distance finie, ou à l'infini dans une direction déterminée; lorsque C se place en O, δ se confond avec δ_0, cercle qui est bien orthogonal à ω, comme étant son contraire et qui est donc une fa-droite particulière remarquable.

En II^e comme en I^{re}, les points A, A$'$ de chacun de ces cercles δ, propre ou impropre, sont deux à deux opposés placés sur un diamètre de ω ou symétriques par rapport à la droite ω, avec cette différence qu'en II^e, ils font tous deux partie de la figure, tandis qu'en I^{re} l'un d'eux A$'$ n'en fait pas partie.

Les premières propriétés des fa-droites se constatent immédiatement et sont les

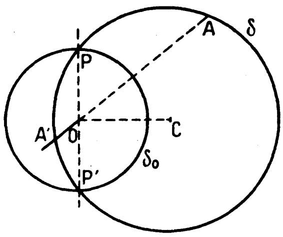

Fig. 2.

mêmes que celles des droites de la Géométrie euclidienne : *l'ensemble des fa-droites d'un plan forme une* ∞^2 (double-infinité), chacun d'elles dépendant de deux paramètres, ceux qui fixent, soit la position des deux points I, J sur ω, soit en I^{re} comme en II^e, la position dans le plan du centre C.

De même, *l'ensemble des fa-droites issues d'un même point* A *forme une* ∞^1, que l'on appelle *faisceau de fa-droites de sommet* A, car elles sont portées par les cercles qui passent par deux points, A et son opposé A$'$, et qui forment ainsi un faisceau; en I^{re}, cette propriété s'applique aussi bien à un point fa-impropre I de ω qu'à un point fa-propre A.

La recherche d'une fa-droite passant par deux points distincts A, B, fa-propres ou fa-impropres se ramène à celle d'un cercle δ passant par quatre points A, B et leurs opposés A$'$, B$'$, problème qui admet toujours au moins une solution, ces points appartenant à deux couples de points inverses par rapport à ω, et cette solution donnant bien un cercle δ orthogonal à ω; mais il y a plus d'une solution et il y en a une infinité si les deux couples sont formés des mêmes points. Cette exception ne peut se présenter en I^{re}, même si A et B sont fa-impropres, car ils appartiennent au demi-plan de la figure et sont distincts, de sorte que A$'$ est aussi distinct de B comme de B$'$; mais il n'en est plus de même en II^e où, A et B, restant distincts, B$'$ peut se confondre avec A et B avec A$'$, A et B étant alors des points opposés. C'est ce que donne aussi la Géométrie de la sphère, où par deux points passe un grand cercle et un seul si ces points ne sont pas diamétralement opposés. Le résultat, qui généralise en Ire, avec les points fa-impropres, celui de la Géométrie euclidienne, et qui en diffère sur un point en IIe, est le suivant : *par deux points distincts, fa-propres ou fa-impropres en* Ire, *passe une fa-droite et une seule, à moins qu'en* IIe *ces points ne soient opposés, auquel cas il en passe une* ∞^1.

Ce problème se relie à celui de l'intersection de deux fa-droites, laquelle se ramène à l'intersection de deux cercles orthogonaux à ω; en IIe, où le centre O de ω qui appartient à l'axe radical de ces deux cercles est intérieur à chacun d'eux, ceux-ci se coupent toujours en deux points A, A′ qui sont opposés; en Ire, trois cas sont possibles, ou bien les deux cercles se coupent en deux points A, A′ qui sont opposés et dont un seul fait partie de la figure, ou bien ils n'ont aucun point commun ou enfin ils sont tangents en un point I qui appartient à ω; les conclusions qui diffèrent partiellement de celles de la Géométrie euclidienne sont que *deux*

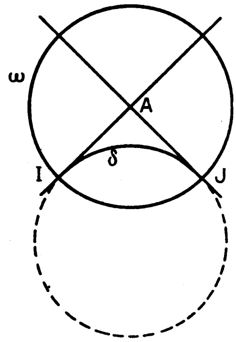

Fig. 3.

fa-droites distinctes se coupent toujours en IIe *en deux points opposés et en* Ire *n'ont qu'un seul point commun, fa-propre ou fa-impropre, ou n'en ont aucun;* suivant les trois cas, les deux fa-droites sont alors dites *sécantes*, ou *non-sécantes* ou lorsqu'elles ont en commun un point fa-impropre, *parallèles*, par analogie avec le parallélisme euclidien. De là des conséquences différentes de ce qui se passe en Géométrie euclidienne et qui se vérifient dans la forme-type où l'on place A au centre O de ω; *en* Ire *par un point* A *extérieur à une fa-droite* δ *passent deux parallèles à cette fa-droite*, chacune d'elles joignant A à l'un des points fa-impropres I, J de δ, *les sécantes issues de* A *à* δ *sont placées dans l'un des angles formés par ces parallèles et les non-sécantes dans l'autre angle*, un angle étant ici considéré comme formé de deux angles proprement dits opposés par le sommet.

6. Fa-symétrie axiale; axes de fa-symétrie de deux fa-droites ou de deux points. — Poursuivant les analogies entre fa-droites et droites euclidiennes, et observant que toute inversion δ orthogonale à ω peut être regardée comme une *fa-symétrie axiale* dont l'axe est porté par le cercle d'inversion δ, on est amené à chercher la transformée dans cette fa-symétrie axiale d'une fa-droite quelconque δ_1. Comme l'inversion δ, orthogonale au cercle fondamental ω, laisse celui-ci invariant, l'inverse du cercle δ_1, propre ou impropre, est un second cercle δ_2, également orthogonal à ω, et se confondant avec le premier δ_1 lorsque celui-ci est ponctuellement ou globalement invariant, donc lorsqu'il se confond avec δ ou lui est orthogonal; cela signifie, tout comme dans les symétries axiales euclidiennes, que *la transformée d'une fa-droite* δ_1 *dans une fa-symétrie d'axe* δ *est une seconde fa-droite* δ_2 *distincte en général de la première, mais confondue avec celle-ci lorsque* δ_1 *et l'axe* δ *sont confondus ou orthogonaux.*

Ajoutons, comme tout point fa-propre ou fa-impropre de l'axe δ se confond avec son fa-symétrique que, *en* II^e^ *la fa-symétrique* δ_2 *de* δ_1 *passe par les deux points opposés où celle-ci coupe l'axe de fa-symétrie, en* I^re^ *elle passe, s'il existe, par le point commun, fa-propre ou fa-impropre, à* δ_1 *et à l'axe* δ *et ces deux fa-droites sont sécantes, non sécantes, ou parallèles, en même temps que l'une d'elles et l'axe* δ.

Réciproquement, si l'on considère *a priori* deux fa-droites quelconques, mais distinctes δ_1, δ_2, on sait que les cercles qui les portent se correspondent dans deux inversions positives si δ_1 et δ_2 sont sécants, dans une seule s'ils sont non sécants ou tangents; le cercle d'inversion de chacune d'elles appartenant au faisceau qui comprend δ_1 et δ_2 est comme ceux-ci orthogonal au cercle fondamental ω et représente donc une fa-droite, axe de fa-symétrie de δ_1 et δ_2; tenant compte enfin de la position de ces cercles d'inversion, on en déduit *qu'en* I^re^ *deux fa-droites sécantes, en* II^e^ *deux fa-droites distinctes quelconques, ont deux axes de fa-symétrie qui sont rectangulaires et bissectent leurs angles, et en* I^re^ *deux fa-droites non sécantes ou parallèles en ont un seul qui est non sécant à chacune d'elles ou parallèle à chacune au même point.*

De même, le fa-symétrique d'un point quelconque étant un autre point, cherchons si deux points distincts quelconques A, B se correspondent dans une fa-symétrie axiale. Nous trouverons une solution simple de ce problème en ayant recours à une forme-type, celle obtenue en ramenant l'un, A, des deux points donnés au centre O du cercle fondamental ω : ceci suppose ce point fa-propre et écarte ainsi le cas singulier où les deux points A, B seraient tous deux fa-impropres.

Ce cas réservé, les conditions que doit remplir le cercle cherché δ sont alors qu'il soit orthogonal à ω et qu'il admette le couple O, B de points inverses, ceci signifiant aussi qu'il admet le couple formé par les opposés de O et B, soit le point ∞ et le point B' opposé de B (condition qui aurait pu être choisie dès le début en plaçant A non en O, mais en ∞, ce qui, en I^re^, se rapporte à la figure formée par la partie du plan qui est extérieure et non pas intérieure à ω); le cercle δ, admettant le nouveau couple inverse ∞, B', est donc bien défini comme étant centré en B' et orthogonal à ω.

En II^e^, cette construction s'applique aussi bien qu'en I^re^ et ne comporte aucune réserve en s'aidant du cercle réel ω', contraire au cercle fondamental ω. En I^re^, elle s'applique encore lorsque l'un, O, des deux points donnés restant fa-propre, l'autre B est fa-impropre, en donnant alors un point B' confondu avec B et pour cercle δ le cercle singulier réduit à ce point B, ce qui ne constitue plus une solution du problème.

Reste donc seulement le cas qui a été réservé, où en Ire, A et B sont tous deux fa-impropres. En rejetant alors en forme-type A en ∞, ω est une droite, B un point de cette droite, et δ qui admet le couple inverse A, B est un cercle réel arbitraire centré en B, et on a une ∞^1 de solutions.

De cette discussion on conclut que *deux points distincts* A, B *ont en général un axe* δ *de fa-symétrie et un seul; et il n'y a exception, que lorsque l'un au moins de ces deux points est en* Ire *fa-impropre, auquel cas ils n'ont pas d'axe de fa-symétrie si le second point est fa-propre et en ont une* ∞^1 *si ce second point est fa-impropre comme le premier.*

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, un tel axe δ est dit la *fa-médiatrice des deux points* A, B; en raison de son importance, précisons sa position. Anticipant à cet effet sur les notions d'orthogonalité qui vont suivre plus bas pour les appliquer ici dans une circonstance d'ailleurs immédiate, celle de deux lignes sécantes à angle droit, la fa-médiatrice de deux points A, B, tout comme celle de O et B en forme-type, apparaît comme étant perpendiculaire à la fa-droite AB joignant ces deux points, ceci lorsque cette fa-droite AB est unique ce qui a toujours lieu en Ire et se vérifiant aussi, lorsque A et B sont deux fa-impropres, à toutes leurs fa-médiatrices.

Un cas remarquable apparaît en IIe seulement, celui où A et B points opposés, par ces points passant alors une ∞^1 de fa-droites; en forme-type où A est le centre O de ω', B en ∞, B' en O, toutes ces fa-droites sont les rayons de ω', tandis que la fa-médiatrice δ, centrée en B', se confond avec ω', et est perpendiculaire à tous ces fa-rayons; en ce cas de A et B opposés, il n'y a donc toujours qu'une seule fa-médiatrice δ, et celle-ci est perpendiculaire à toutes les fa-droites joignant A et B. En conclusion, *toute fa-médiatrice de deux points est perpendiculaire à la fa-droite joignant ces deux points, ou à toutes ces fa-droites lorsqu'en* IIe *ces deux points sont opposés.*

Nous rencontrerons plus loin des réciproques de ces propositions et nous nous contenterons ici pour souligner leur importance d'en déduire en Ire, avec un cercle fondamental ω rectiligne, une nouvelle construction simple d'une fa-médiatrice : menant d'abord la fa-droite δ_0 joignant A et B, demi-cercle centré sur ω à son intersection avec la médiatrice de AB, la fa-médiatrice δ, perpendiculaire à δ_0 et à ω, est le cercle centré à l'intersection de ω et de la droite AB et passant par le point de contact d'une tangente menée de son centre à δ_0 ou à tout autre cercle mené par A et B; plus particulièment si les droites AB et ω sont parallèles, δ est la droite médiatrice de AB.

7. Angles et perpendiculaires. — Après les éléments, points et fa-droites, d'une Géométrie, les principes concernent les propriétés de position et de grandeur dépendant de ces éléments qui restent invariantes dans toute fa-symétrie axiale, par analogie avec celles que, en Géométrie euclidienne, toute symétrie axiale laisse invariantes, les angles et les distances par exemple. Or les angles se conservent aussi dans une fa-symétrie axiale qui est une inversion, un angle étant ici la figure formée par deux fa-droites ou mieux deux demi-fa-droites, côtés de l'angle, issues d'un point A, fa-propre en Ire, sommet de l'angle, et en IIe celle formée de deux angles dont les sommets A, A′ sont des points opposés et dont les côtés sont deux demi fa-droites limitées en ces points; ces angles ne se distinguent pas de ceux qui se rapportent à l'interprétation euclidienne de la figure; ils se confondent même avec ceux-ci dans la forme-type où le sommet A est placé au centre du cercle fondamental ω, les côtés de l'angle étant alors des droites; dans les deux interprétations, ils ont même signification : ce sont des grandeurs se mesurant avec une unité telle que le degré, le grade ou le radian avec lequel l'angle plat a pour mesure π, et il est inutile de parler de fa-angles. Les notions particulières d'angles opposés par le sommet, d'angles orientés de fa-droites ou de demi-fa-droites, de bissectrices, de perpendiculaires, sont donc aussi les mêmes dans les deux interprétations, et, en fait, la dernière a déjà été appliquée, à ce titre, dans le paragraphe précédent; on en déduit immédiatement l'extension suivante à toute Géométrie d'une proposition euclidienne classique : *par tout point* A, *fa-propre en* Ire, *d'une fa-droite* δ_0 *passe une perpendiculaire et une seule* δ *à cette fa-droite;* nous retrouvons ici une fa-droite δ qui reste globalement invariante dans la fa-symétrie d'axe δ_0.

Nous allons poursuivre l'étude importante de la perpendicularité en le faisant successivement, à titre d'exemple, par deux méthodes : la première, non euclidienne, consiste une fois les principes fondamentaux acquis, à suivre les mêmes raisonnements que ceux qui s'appliquent au problème correspondant de la Géométrie euclidienne, la seconde, euclidienne, procède comme on l'a fait jusqu'ici de la signification euclidienne de la figure et l'un de ses moyens est souvent le recours aux formes-type. Dans toutes ces pages et bien que le plus souvent ce sera la seconde méthode qui sera employée, parce que plus rapide, il sera recommandé à titre d'exercice et autant que possible, d'appliquer aussi la première, plus expressive.

8. **Perpendicularité en** Ire. — Le premier problème sur la perpendicularité consiste, étant donnés une fa-droite δ_0 et un point A extérieur à cette fa-droite, à mener par A une perpendiculaire δ à δ_0. Une telle fa-droite δ, devant être invariante dans la fa-symétrie d'axe δ_0; doit passer par le fa-symétrique A_1 de A par rapport à δ_0 et cette condition est suffisante, car si elle est remplie δ_0 est la fa-médiatrice de AA_1 et à ce titre est perpendiculaire à la fa-droite δ, unique ou non, joignant ces deux points. Le fait que, en IIe, le problème admet une infinité de solutions lorsque A et A_1 sont des points opposés, nous conduit à poursuivre l'étude en restant d'abord en Ire, auquel cas A et A_1 étant distincts, que A soit fa-propre ou fa-impropre, tant qu'il reste extérieur à δ_0, le résultat est que *en* Ire *par tout point* A, *fa-propre ou fa-impropre, extérieur à une fa-droite* δ_0 *passe une perpendiculaire et une seule* δ *à celle-ci.*

Cette perpendiculaire δ se relie aux deux parallèles δ_1, δ_2 menées de A à δ_0 (§ 5), car la fa-symétrie d'axe δ, qui laisse invariants A et δ_0, échange nécessairement δ_1 et δ_2 et δ est donc une bissectrice de l'angle formé par δ_1 et δ_2, celle qui bissecte l'angle contenant δ_0 et les fa-droites issues de A sécantes à δ_0, ce caractère s'appliquant même avec A fa-impropre, auquel cas le terme de bissectrice prend le sens qui lui a été donné d'axe de fa-symétrie, et par suite *la perpendiculaire à une fa-droite* δ_0 *menée par un point extérieur* A *est la bisssectrice de l'angle contenant* δ_0 *formé par les deux parallèles menées de ce point* A *à* δ_0; le demi-angle qui a pour côtés la perpendiculaire et l'une quelconque des

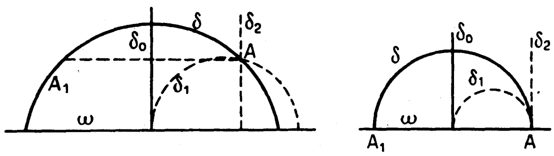

Fig. 4.

deux parallèles est appelé à un rôle important; il est dit *angle de parallélisme* du point A et de la fa-droite δ_0.

Ces caractères ont, par exemple, une figuration simple, soit dans la forme type où δ_0 et ω sont des droites rectangulaires, A étant fa-propre ou fa-impropre soit dans celle ou A étant fa-propre, se place au centre de ω.

De ces premières propriétés, on déduit que, *en* I^re^, *deux perpendiculaires à une même fa-droite* δ_0 *sont non sécantes*, car si elles étaient sécantes ou parallèles, par leur point commun passeraient deux perpendiculaires distinctes à δ_0.

Inversement, étant données deux fa-droites non sécantes δ, δ', cherchons si elles admettent une perpendiculaire commune δ_0 : celle-ci doit être l'axe d'une fa-symétrie laissant globalement invariantes δ et δ' donc échangeant les points

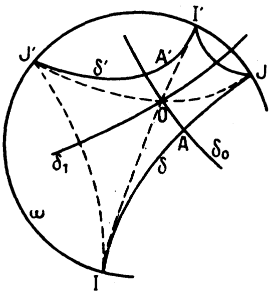

Fig. 5.

fa-impropres I, J de δ ainsi que ceux I', J' de δ', et, par suite, échangeant les fa-droites II' et JJ', ainsi que IJ' et JI', ces quatre fa-droites étant les parallèles communes à δ et δ'. Or, dans l'hypothèse de δ, δ' non sécantes, les deux couples I, J et I', J' de points sont en non-chevauchement sur le cercle fondamental ω et se succèdent dans l'ordre IJI'J' (en permutant s'il y a lieu les notations I', J'), les fa-droites II', JJ' sont donc sécantes en un point O, et δ_0, axe d'une fa-symétrie devant les échanger doit être une de leurs bissectrices; plus précisément, comme

I et J, ainsi que I', J' doivent s'échanger, δ_0 doit être la bissectrice intérieure des angles opposés par le sommet formés par les fa-droites II', JJ' et contenant δ et δ', l'autre bissectrice δ_1 échangeant I et J', J et I' et constituant l'axe de fa-symétrie déjà rencontré des deux fa-droites non sécantes δ, δ'. Les conditions ainsi remplies par δ_0 sont manifestement suffisantes; on constate en outre que la fa-symétrie d'axe δ_1 échange les points A, A' de la perpendiculaire commune δ_0 et la conclusion est que *en* I^re^ *deux fa-droites non sécantes* δ, δ' *admettent une perpendiculaire commune* δ_0 *et une seule, ainsi qu'un axe de fa-symétrie* δ_1 *et un seul, lequel est la fa-médiatrice des pieds sur* δ, δ' *de la perpendiculaire commune* δ_0.

On observe encore le rôle que jouent les quatre parallèles communes à δ et δ', d'après lequel, dans les mêmes hypothèses, *deux des parallèles communes à* δ, δ' *sont sécantes entre elles et la perpendiculaire commune* δ_0 *bissecte celui de leurs angles qui contient* δ *et* δ', *tandis que les deux autres parallèles communes sont non sécantes, et admettent pour perpendiculaire commune l'axe de fa-symétrie* δ_1 *des deux premières et pour axe de fa-symétrie leur perpendiculaire commune* δ_0.

Rapprochant enfin ces résultats de ceux qui concernent deux fa-droites δ, δ' sécantes ou parallèles, lesquelles ne peuvent avoir une perpendiculaire commune δ_0, auquel cas par leur point commun, fa-propre ou fa-impropre, passeraient deux perpendiculaires à une même fa-droite δ_0 et non une seule, on en conclut que *en* I^re^ *deux fa-droites distinctes* δ, δ' *ont toujours ou un point commun et un seul, fa-propre ou fa-impropre, ou une perpendiculaire commune et une seule, ces deux qualités s'excluant réciproquement.*

9. **Perpendicularité en II^e^.** — En II^e^, reprenant la recherche d'une perpendiculaire abaissée d'un point A sur une fa-droite δ_0, on a vu plus haut que le problème admet ou une seule solution ou une infinité formée de toutes les fa-droites issues de A; le second cas peut toujours se présenter, quelle que soit δ_0, avec un choix convenable de A; en effet, deux perpendiculaires menées à δ_0 par deux quelconques B, C de ses points se coupent toutours en deux points opposés P, P', et comme de chacun de ceux-ci on peut mener à δ_0 deux perpendiculaires distinctes, on peut en mener une infinité; il ne peut exister, d'autre part, un second couple Q, Q' possédant la même qualité, sans quoi en menant les fa-droites CP, CQ, qui joignent à P et Q un point C de δ_0 choisi arbitrairement en dehors de la fa-droite PQ, on obtiendrait deux perpendiculaires distinctes menées à δ_0 en un même point C.

Ces deux points P, P' sont, en outre, fa-symétriques par rapport à δ_0,. toute fa-droite issue de P restant invariante dans cette fa-symétrie et le fa-symétrique de P étant donc le second point P' commun à toutes ces fa-droites; puis, pour les mêmes raisons, P et P' sont les seuls points possédant ces deux qualités d'opposés et de fa-symétriques par rapport à δ_0; on les appelle *pôles de la fa-droite* δ_0. Ainsi, *en* II^e^, *toute fa-droite* δ_0 *admet deux pôles* P, P', *points opposés et fa-symétriques par rapport à cette fa-droite; et toute perpendiculaire à* δ_0 *passe par ces deux pôles; toute fa-droite passant par ces deux pôles est perpendiculaire* à δ_0.

De là on déduit ensuite, revenant au problème général, que *en* II^e, *par tout point* A, *distinct d'un pôle de* δ_0, *passe une perpendiculaire et une seule* à δ_0.

Puis le problème d'une perpendiculaire commune δ_0 à deux droites distinctes δ, δ' se résout immédiatement, la solution unique étant la droite joignant les pôles opposés P, P$'$ de δ à ceux QQ$'$ de δ'; il en résulte que *en* II^e *deux fa-droites distinctes ont toujours deux points opposés communs et une perpendiculaire commune;* les deux qualités qui s'excluaient en I^{re} sont, au contraire, simultanées en II^e.

Remarquons que l'on rencontre ici l'une des réciproques annoncées (§ 6) des propositions sur les fa-médiatrices d'après laquelle *en* II^e *toute fa-droite* δ *est la fa-médiatrice de deux points opposés*, ceux-ci étant les pôles P, P$'$ de cette fa-droite.

Notons cette autre réciproque, d'ailleurs banale, que *en* I^{re} *comme en* II^e, *toute fa-droite* δ *est d'une* ∞^2 *de manières la fa-médiatrice de deux points*, l'un de ceux-ci pouvant, en effet, être arbitrairement choisi.

10. **Perpendicularité en méthode euclidienne.** — Reprenons les questions précédentes sur la perpendicularité pour les traiter en restant en Géométrie euclidienne. Le premier problème, la recherche d'une perpendiculaire menée à une fa-droite δ_0 par un point quelconque A, est celle d'un cercle réel, passant par un point A, et orthogonal à deux cercles distincts, δ_0 et le cercle fondamental ω, donc d'un cercle appartenant à un faisceau, celui des cercles orthogonaux à δ_0 et ω, et passant par un point A, ce qui entraîne qu'il est réel ou singulier, problème qui en général a une solution et une seule.

En I^{re} où δ_0 et ω ont deux points communs, fa-impropre I, J, le faisceau admet ces deux points comme points limites, et comprend un cercle δ_0 et un seul passant par A, cercle qui est réel, sauf lorsque A est l'un des points I, J, auquel cas il est singulier : on retrouve bien la perpendiculaire unique menée de A à δ_0, que A appartienne à δ_0 ou lui soit extérieur et la seule réserve est que A ne soit pas un point fa-impropre de δ_0.

En II^e, où ω est imaginaire, le faisceau orthogonal à δ_0 et ω est celui des cercles passant par deux points fixes P, P$'$, inverses par rapport à δ_0 et à ω; il comprend un cercle réel et un seul δ passant par A si celui-ci est distinct de P et P$'$, et dans le cas contraire, tout cercle passant par P et P$'$ est solution du problème; on retrouve bien les résultats déjà établis et, en particulier, le rôle et les caractères des points P, P$'$, pôles de la fa-droite δ_0.

Le second problème, la recherche d'une perpendiculaire commune δ_0 à deux fa-droites distinctes δ, δ' est de même celle d'un cercle δ_0 réel et orthogonal à trois autres δ, δ' et ω; or, ceux-ci n'appartiennent pas à un même faisceau, car en I^{re}, δ, δ' ne peuvent couper orthogonalement ω aux mêmes points I, J sans se confondre, et en II^e, ω qui est imaginaire ne passe pas par les deux points opposés où se coupent δ, δ'; il existe donc un cercle δ_0 et un seul, orthogonal à δ, δ' et ω; en II^e, ce cercle est réel, ω étant imaginaire; en I^{re}, dans le cas général, auquel on peut toujours revenir, où ω est propre, le centre de δ_0 est à l'intersection des axes radicaux IJ, de ω et δ, I$'$J$'$ de ω' et δ', joignant les points fa–impropres de

δ ou de δ', et ce cercle δ_0 est réel sous condition que IJ, I'J', se coupent en un point extérieur à ω, donc que les couples IJ, I'J' soient ou en chevauchement sur ω, ou encore que δ, δ' n'aient aucun point commun. On retrouve donc encore, dans ce second problème, les résultats donnés par la première méthode.

Signalons enfin en reprenant une troisième fois ces mêmes problèmes qu'une variété de cette méthode euclidienne repose sur le recours aux formes-types. Dans la recherche d'une perpendiculaire menée par un point A à une fa-droite δ_0, on peut ramener A à être le centre de ω, tant que ce point A n'est pas fa-impropre; la perpendiculaire cherchée est alors une droite qui, orthogonale à δ_0, joint A au centre du cercle δ_0 ou, lorsque A est situé sur δ_0, est la droite perpendiculaire en A à la droite δ_0; la seule exception est celle où le centre du cercle δ_0 se confond avec A, ce qui n'arrive qu'en II^e lorsque δ_0 est le cercle ω_0 contraire à ω, toute droite menée par A étant alors une solution du problème; on retrouve en II^e les résultats établis, les pôles de ω_0, qui sont A et le point ∞, et par suite, ceux d'une fa-droite quelconque qu'une fa-symétrie permet de transformer en ω_0. En I^{re}, il reste à étudier le cas où A est fa-impropre, ce que l'on peut faire avec une autre forme-type s'appliquant également dans toute position de A, celle où l'un des points fa-impropres J de δ_0 étant rejeté au point ∞, δ_0 et ω sont deux droites rectangulaires; toute fa-droite perpendiculaire à δ_0 est alors un demi-cercle centré au point I commun à δ_0 et ω; il y en a un et un seul passant par A, sauf le cas où A se plaçant en I, ce cercle étant alors réduit au point I, toutes les circonstances du problème sont ainsi retrouvées.

Il en est de même avec la recherche d'une perpendiculaire commune à deux fa-droites δ, δ'. En I^{re}, une forme-type simple est celle qui vient d'être employée où δ et ω sont des droites perpendiculaires en I, δ' étant alors un demi-cercle basé sur ω, et la fa-droite cherchée δ_0, un demi-cercle centré en I et orthogonal à δ', lequel passe par le point de contact de la tangente menée de I à δ', et n'existe que si δ et δ' sont non sécantes.

En II^e, la forme-type simple est celle où l'un des points d'intersection de δ et δ' est placé au centre O de ω et de son contraire ω_0, δ' et δ'' étant alors des droites sécantes en ce point O, et δ_0 le cercle centré en O et orthogonal à ω, donc le cercle ω_0; on vérifie que ce cercle passe par les pôles P, P' de δ, Q, Q' de δ', lesquels sont les extrémités des diamètres de ω_0 perpendiculaires l'un à δ, l'autre à δ'.

11. Notion d'invariant; invariants de deux points. — Les propriétés de la perpendicularité font apparaître l'existence de grandeurs invariantes attachées à certaines figures, grandeurs qui gardent la même valeur lorsque la figure est transformée par une ou plusieurs fa-symétries successives : c'est ainsi que deux fa-droites sécantes ou mieux deux demi-fa-droites de même point origine ont un invariant, leur angle.

La figure simple réduite à un seul point, ou à une seule fa-droite ne peut avoir d'invariant, car deux points quelconques A, A_1 ou deux fa-droites δ, δ_1 pour lesquels cet invariant n'aurait pas la même valeur, ne pourraient pas se déduire l'un de l'autre par une ou plusieurs fa-symétries, ce qui serait en contradiction avec l'existence de leur fa-médiatrice ou de leur axe de fa-symétrie.

Mais avec la figure formée par deux points distincts A, B, on connaît un tel invariant : en II^e^ c'est l'angle θ, compris entre o et π, formé par les demi-fa-droites PAP′, PBP′, perpendiculaires en A et B à la fa-droite AB et limitées aux pôles P, P′ de celle-ci, angle qui est nul avec A et B confondus et qui reste défini, étant alors égal à π, lorsque A et B étant points opposés, la fa-droite AB est indéterminée ; en I^re^, c'est l'angle de parallélisme φ compris entre o et π de l'un A des deux points et de la perpendiculaire menée par l'autre point B à la fa-droite AB ; cet angle est bien défini à condition que B soit fa-propre, il ne change pas par fa-symétrie autour de la fa-médiatrice de AB, lorsqu'on permute A et B supposés tous deux fa-propres ; il reste défini étant alors nul, lorsque A, mais non B, est fa-impropre.

Cet angle, θ ou φ, a la même valeur, pour le couple de points A, B, et pour tous ceux qui s'en déduisent par une ou plusieurs fa-symétries ; réciproquement, considérons deux couples de points A, B et A_1, B_1 pour lesquels cet angle a la même valeur ; en supposant, si l'on est en I^re^, que les quatre points soient tous fa-propres, on peut d'abord, par fa-symétrie autour de la fa-médiatrice de AA_1, amener A_1 en A, ce qui amène B_1 en un point B_2, puis par fa-symétrie autour de la bissectrice des demi-fa-droites d'origine A, AB_1, AB_2, amener B_2 en un point B_3 de la demi-fa-droite AB_1, en laissant fixe A ; l'égalité des angles θ ou φ, s'appliquant aux couples AB et AB_3, portés par la même demi-fa-droite d'origine A, entraîne alors que B_3 coïncide avec B. Le raisonnement et son résultat subsistent en I^re^ lorsque l'un des couples comprend un point fa-impropre et un seul, B par exemple, auquel cas l'angle φ est nul, ce qui entraîne que l'autre couple a également un point fa-impropre et un seul que l'on peut désigner par B_1. D'où cette conclusion qui montre l'importance de cette notion d'invariant, d'après laquelle *la condition nécessaire et suffisante pour que deux couples de points* A, B *et* A_1, B_1 *comprenant chacun en* I^re^ *un seul point fa-impropre au plus, puissent se déduire l'un de l'autre par une ou plusieurs fa-symétries, est qu'ils aient le même invariant* θ *ou* φ.

Par exemple, considérons en I^re^, deux couples AI, BI portés par une même fa-droite δ et ayant en commun un point fa-impropre I de celle-ci ; dans la forme-type où le second point fa-impropre J est rejetée en ∞, δ étant une demi-droite perpendiculaire en I à la droite ω, ces couples ont le même invariant $\varphi = o$; ils se déduisent l'un de l'autre dans l'homothétie de centre I transformant A en A_1, laquelle se décompose en deux inversions positives de pôle I qui sont bien deux fa-symétries.

Une conséquence de cette proposition est qu'*un couple de points ne peut avoir un second invariant indépendant du précédent*, c'est-à-dire dont la valeur ne soit pas fonction du premier car, ainsi que nous l'avons dit plus haut à propos d'un seul point, s'il en existait un second, deux couples A, B et A_1, B_1 pour lesquels le premier invariant aurait la même valeur, et le second des valeurs différentes ne pourraient se déduire l'un de l'autre par une ou plusieurs fa-symétries, contrairement à la proposition précédente.

Par contre, on pourra toujours substituer à l'invariant θ ou φ toute fonction de celui-ci, continue ou discontinue, pourvu qu'elle soit bien définie pour toute valeur comprise entre o et π ponr θ, o et $\frac{\pi}{2}$ pour φ, et qu'elle ne passe pas deux fois par une même valeur, de sorte que θ ou φ en est une fonction inverse; d'une manière simple, et c'est ce que nous ferons souvent, on pourra prendre comme nouvel invariant une fonction continue de θ ou φ variant constamment dans le même sens pour θ croissant de o à π, φ de o à $\frac{\pi}{2}$, et par exemple, les fonctions circulaires $\cos\theta$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$; en particulier, en I^{re}, pour donner plus d'unité dans cette étude, nous substituerons à φ l'angle $\theta = \pi - 2\varphi$ qui, comme l'angle θ en II^e, est compris entre o et π et s'annule avec deux points confondus, et qui représente celui des angles des deux parallèles menées de A à la perpendiculaire en B à la fa-droite AB qui ne contient ni cette perpendiculaire ni cette fa-droite.

12. **Fa-distance de deux points; fa-distances égales ou inégales.** — Par analogie avec la distance euclidienne de deux points, ceci conduit à la notion de *fa-distance de deux points* que nous restreindrons d'abord, pour la préciser plus tard, à celle de l'égalité et de l'inégalité de deux fa-distances en disant que deux couples de points A, B et A_1, B_1 ont des *fa-distances égales*, ou encore que les segments de fa-droites AB et A_1B_1 ont des *fa-longueurs égales* et écrivant $[AB] = [A_1B_1]$, lorsqu'on peut déduire l'un de l'autre par une ou plusieurs fa-symétries, donc lorsqu'ils ont le même invariant θ; en particulier, on dira que deux points A, B ont une *fa-distance nulle* ou que la fa-longueur $[AB]$ est nulle et écrivant $[AB] = o$ lorsque A et B sont confondus et $\theta = o$; ces égalités sont *indépendantes de l'ordre* des points de chaque couple et peuvent s'écrire aussi bien $[AB] = [B_1A_1]$ où $[BA] = o$; elles sont telles que *deux fa-distances égales à une troisième sont égales entre elles.*

Plus généralement, en observant que si B décrit une demi-fa-droite en s'éloignant de son origine A, l'angle θ va en croissant de o à π (en I^{re} comme en II^e) on dira que deux couples A, B et A_1B_1 ont des *fa-distances inégales* ou que les fa-longueurs $[AB]$, $[A_1B_1]$ sont inégales, que la première est *plus grande* que la seconde, la seconde plus petite que la première et l'on écrira $[AB] > [A_1B_1]$ et $[A_1B_1] < [AB]$ lorsque l'on a, avec les valeurs correspondantes de θ, $\theta > \theta_1$; il en résulte que deux inégalités successives de même sens $[AB] > [A_1B_1]$, $[A_1B_1] > [A_2B_2]$ en entraînent une troisième $[AB] > [A_2B_2]$.

En particulier, avec $\theta = \pi$, *tous les couples de points opposés ont en* II^e *des fa-distances égales, et tout autre couple a une fa-distance plus petite; en* I^{re} *tous les couples de points comprenant un point fa-impropre et un seul ont des fa-distances égales et tout couple de deux points fa-propres a une fa-distance plus petite.*

13. **Endocycle.** — La notion de fa-distances égales conduit aussi, par analogie avec celle de distances euclidiennes égales, à l'étude du *lieu des points* B *dont les*

fa-distances à un même point fixe A *sont fa-égales entre elles.* En I^{re}, le problème n'a de sens que si A est fa-propre, car lorsqu'il est impropre, la fa-distance [AB] est égale quel que soit B à la valeur maximum de toutes les fa-distances, et le lieu serait alors tout le plan. Cette réserve faite, le lieu existe, quelle que soit la fa-distance commune choisie; sur chaque fa-droite issue de A, il a deux points C, C_1, placés de part et d'autre de A, ceux pour lesquels les fa-distances [AC], [AC_1] sont égales à la fa-distance choisie. On peut aussi en interprétant l'égalité $[AC] = [AC_1]$ appliquée à deux de ces points, l'un C fixe arbitrairement choisi, l'autre C_1 variable, définir ce lieu comme celui des fa-symétriques C_1 d'un point fixe C par rapport aux diverses fa-droites δ issues de A. Pour préciser sa forme et sa position, il est nécessaire de revenir à l'interprétation euclidienne de la figure, toute fa-droite δ étant portée par un cercle variable du faisceau ayant deux points fixes distincts A et son opposé A', C et C_1 étant inverses par rapport à ce cercle; on sait que ce lieu est le cercle bien déterminé passant par C et appartenant au faisceau orthogonal dont A et A' sont les points limites et qui se réduit à un point lorsque C se confond avec A en I^{re}, avec A ou A' en II^{e}, soit lorsque la fa-distance constante $[AC_1] = [AC]$ est nulle en I^{re}, nulle ou égale à celle de points opposés en II^{e}.

Un tel cercle γ sera appelé *fa-cercle* de *fa-centre* C et de *fa-rayon* [AC], ou encore *endocycle*, comme formant une courbe fermée; tous les points appartenant au lieu étudié sont donc en I^{re}, situés dans le demi-plan de figure; on le vérifie d'ailleurs, car ce cercle et le cercle fondamental ω appartiennent tous deux au faisceau de points limites A et A', ils ne se coupent donc pas, et le premier se place par rapport à ω dans la même région que A.

Ces propriétés peuvent aussi s'établir, en prenant une forme, simple dans la forme type où l'on place A au centre de ω; toute fa-droite δ est alors une droite issue de A, la fa-symétrie d'axe δ est une symétrie proprement dite; le lieu de C_1 est donc le cercle γ centré en A et passant par C; il est concentrique à ω et lui est intérieur en I^{re}; leurs points inverses communs sont A et son opposé le point ∞.

Tout endocycle γ possède un autre caractère; si un point M décrit une demi-fa-droite δ partant de A, la fa-distance [AM] va en croissant, étant égale au fa-rayon lorsque M se place sur γ, et par suite, *la fa-distanve* [AM] *d'un point quelconque* M *au fa-centre* A *d'un endocycle* γ *est inférieure au fa-rayon de* γ *lorsque* M *se place par rapport à* γ *dans la même région que le fa-centre* A *et supérieure dans le cas contraire.*

On observera que ces deux régions, dites *fa-intérieure* et *fa-extérieure* à γ, peuvent ne pas être les mêmes que les régions euclidiennes intérieure et extérieure; c'est le cas en II^{e} pour ceux des cercles qui, appartenant au faisceau dont les points limites sont A et son opposé A', contiennent A' et non A dans leur région intérieure; en I^{re}, cette circonstance ne se présente que dans le cas, que nous éviterons généralement, où le demi-plan de la figure est la région extérieure au cercle propre ω, A étant alors extérieur et A' intérieur, et lorsque, des deux cercles γ et ω, qui appartiennent tous deux au faisceau de points limites A, A', ω est intérieur à γ.

Ces simples notions de fa-distances égales ou inégales, de régions intérieures ou extérieures à un endocycle conduisent à une interprétation concrète de la fa-médiatrice δ de deux points A, B, supposés en Ire tous deux fa-propres; la fa-symétrie d'axe δ, échangeant ces deux points en laissant invariant tout point C de cet axe, entraîne d'abord l'égalité de fa-distances $[AC] = [BC]$; si l'on considère ensuite un autre point quelconque C extérieur à cet axe δ et situé, par exemple, du même côté que B, l'endocycle γ de fa-centre A et passant par C coupe δ en deux points par lesquels passe aussi l'endocycle γ_1 fa-symétrique de γ par rapport à δ, lequel a pour fa-centre B et un fa-rayon égal au fa-rayon $[AC]$ du premier; C est intérieur à cet endocycle γ_1, sa fa-distance $[BC]$ au fa-centre B est donc inférieure au fa-rayon $[AC]$ et des fa-distances de C aux points A et B, la première $[AC]$ est plus grande que l'autre $[BC]$. D'où la signification essentielle d'une fa-médiatrice d'après laquelle *la fa-médiatrice de deux points est le lieu des points dont les fa-distances à ceux-ci sont égales*, avec cette seconde qualité que *les points* C *situés à une fa-distance* $[BC]$ *de* B *plus petite que leur fa-distance* $[AC]$ *de* A *sont ceux de la région située du même côté que* B *par rapport à la fa-médiatrice.*

14. **Distribution des endocycles.** — L'endocycle donne une interprétation non euclidienne de certains cercles γ; en Ire, celle-ci ne peut s'appliquer à tout cercle

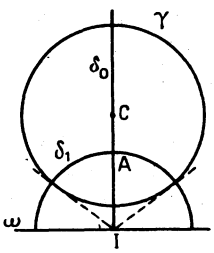

Fig. 6.

car elle exclut les cercles sécants ou tangents au cercle fondamental ω mais tout autre cercle appartient avec ω à un faisceau ayant deux points limites dont un et un seul A est situé dans le demi-plan limité par ω et constitue donc un endocycle de fa-centre A; donc en Ire tout cercle γ situé dans le demi-plan de la figure *sans être ni sécant, ni tangent au cercle fondamental est un endocycle.* Par exemple, lorsque ω est une droite, A est placé sur la perpendiculaire CI abaissée sur ω du centre C de γ et à son intersection avec un demi-cercle quelconque δ_1 basé sur ω et orthogonal à γ ayant, par exemple, pour centre I; on reconnaît dans ces deux lignes deux fa-droites δ_0, δ_1 jouant le rôle de fa-diamètres de γ et orthogonales à ce fa-cercle γ.

En IIe, où ω est imaginaire, quel que soit le cercle γ, propre ou impropre, le faisceau comprenant ω et γ a toujours deux points limites A, A′, lesquels sont opposés et γ est de deux manières différentes un endocycle, son fa-centre étant aussi bien A′ que A, En particulier, et contrairement à ce qui se passe en I[re], γ peut représenter une fa-droite δ, auquel cas ses deux fa-centres sont ses pôles P, P′ (§ 9) et son fa-rayon égal à la fa-distance constante, la même pour toutes les fa-droites du plan, répondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ceci permet de distinguer entre les deux fa-centres A, A′ de tout autre endocycle γ; le faisceau de points limites A, A′ comprend en effet γ et la fa-médiatrice δ de ces deux points, de sorte que γ se place par rapport à δ dans la même région que l'un d'eux, A par exemple, et que son fa-rayon, associé à ce fa-centre A, répond à $\theta < \frac{\pi}{2}$, tandis que son second fa-rayon, associé à A′, répond à $\theta > \frac{\pi}{2}$.

Ainsi *en* II[e] *tout cercle réel* γ *du plan, propre ou impropre, est de deux manières différentes un endocycle, et admet deux fa-centres distincts* A, A′ *qui sont des points opposés; ses deux fa-rayons associés respectivement à ces*

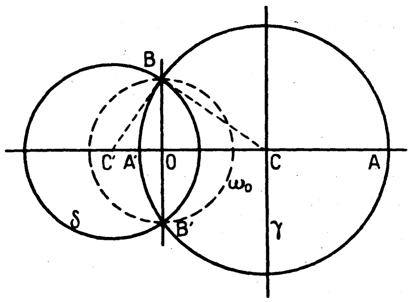

Fig. 7.

deux fa-centres sont égaux lorsque γ *est une fa-droite, les fa-centres étant alors les pôles de celle-ci et le fa-rayon commun ayant une valeur constante répondant à* $\theta = \frac{\pi}{2}$; *pour tout autre endocycle* γ, *l'un des fa-rayons est inférieur et l'autre supérieur à cette valeur constante.*

Le plus souvent, on retiendra le fa-centre A associé au fa-rayon le plus petit, répondant à $\theta < \frac{\pi}{2}$.

Supposons, par exemple, que γ soit une droite, un de ses points étant ainsi placé au point ∞, ω étant représenté par son centre O et son cercle contraire ω_0; on construit A, A′ à l'intersection de deux cercles particuliers orthogonaux à ω et γ, l'un qui est la perpendiculaire OC menée de O à γ, l'autre centré en C et passant par les extrémités B, B′ du diamètre de ω_0 parallèle à γ; l'un des deux points, A′ est intérieur à ω_0 et l'autre A extérieur; la fa-droite δ, fa-médiatrice de AA′, est le cercle qui, orthogonal à ω et aux cercles précédents, coupe orthogonalement en B et B′ le cercle centré en C; son centre C′ s'obtient en menant la droite BC′ perpendiculaire à BC; A et γ sont placés dans la même région par rapport à cette fa-médiatrice δ; A est le fa-centre de γ associé au fa-rayon le plus petit.

Dans une autre forme-type plus simple, l'un des deux fa-centres A est placé au centre de ω, A' étant le point ∞ ; γ est un cercle quelconque de même centre A, la fa-médiatrice δ est le cercle ω_0 contraire à ω; le fa-centre A est associé au plus

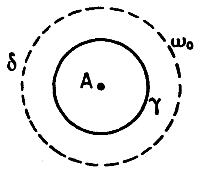

Fig. 8.

petit fa-rayon ou au plus grand suivant que γ, concentrique à ω_0, lui est intérieur ou extérieur.

Terminons en signalant seulement, parmi les propriétés de l'endocycle, lesquelles sont les analogues de celles du cercle euclidien, la suivante qui résulte de la définition même de l'endocycle, d'après laquelle *tout fa-diamètre est un axe de fa-symétrie de l'endocycle et le coupe orthogonalement en ses deux extrémités.*

15. **Fa-distance d'un point et d'une fa-droite.** — Les propriétés de l'endocycle s'appliquent dans l'étude comparée des fa-distances [AM] d'un point fixe A aux divers points M d'une fa-droite δ; une telle fa-distance est le fa-rayon d'un endocycle γ de fa-centre A sécant ou tangent à δ. En s'aidant, par exemple de la forme-type où l'on place A au centre O de ω, γ étant alors un cercle centré en ce point fixe et de rayon variable, on constate de suite, en I^re^, où A est extérieur au cercle portant δ, que le fa-rayon variable de γ a un minimum qui répond à M placé au pied B de la perpendiculaire abaissée de A sur δ, que tout autre endocycle γ coupe δ en deux points M, M_1 fa-symétriques par rapport à cette perpendiculaire

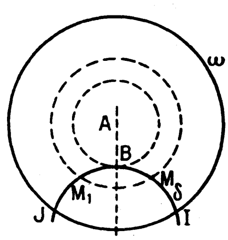

Fig. 9.

et répondant donc aux deux égalités $[AM] = [AM_1]$, $[BM] = [BM_1]$, puis que lorsque M décrit δ, les deux fa-distances [AM] et [BM] dont la première est le fa-rayon variable de γ vont simultanément en croissant; enfin que lorsque M tend vers l'un des points fa-impropres I, J de δ, ces deux fa-distances tendent toutes deux vers le maximum extrême répondant à $\theta = \pi$ de toute fa-distance. On retrouve les mêmes propriétés qu'en Géométrie euclidienne, d'après lesquelles *en* Ire, *la fa-distance* [AM] *d'un point* M *variable d'une fa-droite* δ *à un point fixe* A *extérieur à celle-ci passe par un minimum lorsque* M *se place au pied* B *de la perpendiculaire abaissée de* M *sur* δ, *elle a des valeurs égales pour deux points* M, M_1 *fa-équidistants de ce pied* B, *va en croissant en même temps que la fa-distance* [BM] *de* M *à* B, *et tend en même temps que celle-ci vers le maximum extrême répondant à* $\theta = \pi$ *de toute fa-distance.*

En IIe, ces propriétés se modifient du fait que δ est un cercle qui n'est plus limité en deux points I, J et que A est intérieur à ce cercle et non plus extérieur. Un cas particulier simple se distingue, celui où dans la forme-type δ est précisément le cercle centré en A et orthogonal à ω, donc le cercle réel ω_0 contraire à ω, l'un de ses pôles étant A : on sait qu'alors la fa-distance [AM] est constante et répond à $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ce cas écarté, un endocycle γ de fa-centre A (cercle centré en A dans la forme-type) ne coupe δ que si son fa-rayon est compris entre un minimum et un maximum qui sont respectivement les fa-rayons de deux endocycles tangents à δ aux points opposés B, B′, pieds de la perpendiculaire unique abaissée de A sur δ, le minimum [AB] répondant à $\theta < \frac{\pi}{2}$ et le maximum [AB′] à $\theta > \frac{\pi}{2}$; les autres qualités, relatives aux variations de même sens du fa-rayon [AM] et de la fa-distance [BM] sont les mêmes qu'en Ire, la conclusion en est que *en* IIe *la fa-distance* [AM] *d'un point variable* M *d'une fa-droite* δ *à un point fixe* A *qui n'est ni un point ni un pôle de cette fa-droite* δ *passe par un minimum lorsque* M *se place en l'un des pieds* B *de la perpendiculaire abaissée de* M *sur* δ *et par un maximum lorsqu'il se place en l'autre pied* B′; *elle a des valeurs égales pour deux points* M, M_1 *fa-équidistants de* B *comme de* B′, *et va en croissant en même temps que la fa-distance* [BM] *de* M *au premier* B.

Quelques remarques se présentent : c'est d'abord que, la fa-distance maximum [AB′] n'a pas le même caractère que le maximum extrême en Ire, n'étant pas le même quels que soient A et δ; les deux pieds B, B′ se distinguent ensuite par les grandeurs des deux fa-distances [AB], [AB′], la première répondant à $\theta < \frac{\pi}{2}$ et la seconde à $\theta > \frac{\pi}{2}$. D'autre part, si l'on permute A et son opposé A′ sans changer δ, la perpendiculaire abaissée sur δ ne change pas, mais ses pieds B, B′ s'échangent, B répondant au maximum et B′ au minimum de la fa-distance à A′, tandis que les minima des fa-distances à A et A′ sont égaux, [AB] = [A′B′], de même que les maxima [AB′] = [A′B]; de plus [AM] et [A′M] variant en sens contraires, il existe deux positions intermédiaires C et C′ du point M pour chacune desquelles ces fa-distances sont égales [AC] = [A′C] et [AC′] = [A′C′], ces fa-distances répondant toutes à $\theta = \frac{\pi}{2}$, de même que les fa-distances à B et B′, [BC′], [B′C], [BC], [B′C′]; on en retiendra que, *en* IIe, *parmi les obliques menées à une fa-droite* δ *par un point* A *distinct des pôles de cette fa-droite, il en est deux placées sur la perpendiculaire en* A *à la perpendiculaire menée à* δ, *dont les* *fa-longueurs* [AC], [AC′] *ainsi que les fa-distances de leurs pieds* C, C′ *à ceux* B, B′ *de la perpendiculaire répondent toutes à* $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ces diverses propositions conduisent à la notion de *fa-distance d'un point* A (*fa-propre en* I^{re}) *à une fa-droite* δ, définie en I^{re} et en II^{e} comme la fa-distance minimum de A aux différents points de δ; cette notion n'a jusqu'ici qu'un sens relatif de comparaison entre fa-distances, mais elle se traduit aussi par l'existence d'un *invariant d'un point* A *et d'une fa-droite* δ qui est le même que celui de A et du pied B de la perpendiculaire et se représente de même par une valeur de l'angle θ ou encore, en I^{re}, de l'angle φ qui est précisément l'angle de parallélisme de A et δ; et de même que pour les couples de points, l'égalité de leurs invariants exprime la condition nécessaire et suffisante pour que deux figures formées chacune d'un point A et d'une fa-droite δ puissent se déduire l'une de l'autre par une ou plusieurs fa-symétries successives.

Diverses conséquences résultent de cette notion : la première, simple et immédiate, traduit la position du point B sur δ et donne une nouvelle interprétation de l'endocycle d'après laquelle l'*enveloppe des fa-droites* δ *dont les fa-distances à un même point fixe* A (*fa-propre en* I^{re}) *sont fa-égales entre elles est un endocycle de fa-centre* A.

16. **Exocycle en** II^{e}. — Ce résultat conduit au problème inverse, la recherche du *lieu des points dont les fa-distances à une fa-droite fixe* δ *sont fa-égales entre elles;* le problème est analogue à celui de l'endocycle; mais ici comme toute perpendiculaire à δ porte deux points du lieu, situés de part et d'autre de δ et fa-symétriques par rapport à celle-ci, le lieu se décompose en deux parties distinctes et il suffit d'en chercher une seule qui sera dite un *exocycle*, δ étant sa *base* et la fa-distance constante de δ à chacun de ses points son *fa-rayon*. Le problème se traite de la même manière que celui de l'endocycle; si l'on considère deux points quelconques C, C_1 de cet exocycle, ils sont placés sur les perpendiculaires à δ en deux points B, B_1 et sont comme B et B_1 fa-symétriques par rapport à la fa-médiatrice de BB_1, laquelle est aussi perpendiculaire à δ; en laissant fixe C et faisant varier C_1, on est ainsi ramené à la recherche du lieu décrit par les fa-symétriques C_1 d'un point fixe C par rapport aux diverses fa-droites δ_1 perpendiculaires à δ.

La solution est immédiate en II^{e} où ces perpendiculaires δ_1 sont les fa-droites passant par deux points fixes opposés P, P′, les pôles de δ, le lieu étant donc l'endocycle γ de fa-centres P, P′ et passant par C et l'exocycle ne se distingue pas, si ce n'est dans son interprétation, de l'endocycle.

Par suite, inversement, tout cycle γ du plan propre ou impropre, déjà interprété comme un endocycle avec ses deux fa-centres P, P′ dont l'un P associé à un fa-rayon répondant à $\theta \leqq \frac{\pi}{2}$ est donc aussi un exocycle; sa base δ est la fa-médiatrices des fa-centres P, P′; le premier P, avec $\theta \leqq \frac{\pi}{2}$ est situé par rapport à la base du même côté que γ et le fa-rayon de γ considéré comme exocycle répond à l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ complément du précédent.

Dans le cas particulier où γ est une fa-droite, ce qui répond à $\theta = \frac{\pi}{2}$, les deux fa-centres P, P′ ne se distinguent plus par les valeurs de θ, le fa-rayon de γ, considéré comme exocycle, est nul, et l'exocycle se confond avec sa base δ.

Si avec une base déterminée δ on considère les deux exocycles γ, γ' situés de part et d'autre de cette base pour lesquels les fa-distances de leurs points à cette base sont égales et dont les fa-rayons, rapportés à cette base, sont donc égaux, ces deux exocycles sont à la fois fa-symétriques par rapport à la base δ et fa-opposés; considérés comme endocycles, ils ont les mêmes fa-centres P, P′ et des fa-rayons égaux deux à deux, mais les fa-rayons répondant à $\theta < \frac{\pi}{2}$ sont associés à des fa-centres opposés.

On retiendra surtout que *en* II^e^ *tout cercle* γ *est simultanément un endocycle et un exocycle.*

Au reste ces considérations conduisent à rapprocher en II^e^ les fa-distances d'un point A à une fa-droite δ et aux pôles P, P′ de celle-ci : ces pôles sont placés sur la perpendiculaires menée de A à δ; en désignant par P celui qui se trouve du même côté que A par rapport à δ, les divers points de la perpendiculaire se succèdent dans l'ordre B, A, P, B′, A′, P′ et les fa-distances [AB], [AP] de A à δ et à P répondent à des valeurs de θ inférieures à $\frac{\pi}{2}$ et complémentaires, θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$; ces fa-distances peuvent aussi être dites *complémentaires*, de sorte que *la fa-distance d'un point* A *à une fa-droite* δ *est complémentaire de sa fa-distance au pôle* P *de* δ *situé par rapport à celle-ci du même côté que* A. Si l'on fait varier A de façon que la première reste constante, il en est de même de la seconde et l'on retrouve qu'un exocycle de base δ est aussi un endocycle de fa-centre P. Plus généralement, tout problème concernant la fa-distance d'un point à une fa-droite peut se ramener à un autre sur la fa-distance de deux points : par exemple, le *lieu des points fa-équidistants de deux fa-droites* δ, δ_1 est aussi celui des points fa-équidistants soit de deux pôles P, P_1 de ces fa-droites comme de leurs opposés P′, P'_1, soit de deux autres pôles P′, P_1 comme de P et P'_1; on obtient ainsi comme en Géométrie euclidienne, un *lieu formé* de deux fa-droites, les *bissectrices* de δ et δ_1.

17. Exocyle en I^re^. — En I^re^, les caractères de l'exocycle ont, au contraire, une forme nouvelle. Les fa-droites δ_1 perpendiculaires à la base δ ne passent plus par deux points fixes et sont, au contraire, deux à deux non sécantes; elles forment dans l'interprétation euclidienne de la figure le faisceau de cercles orthogonaux aux deux cercles réels et sécants ω et δ, faisceau ayant donc deux points limites I, J, les points fa-impropres de δ; le lieu décrit par C_1, fa-symétrique de C par rapport à ces fa-droites δ_1 est alors le cercle passant par C du faisceau orthogonal, donc le cercle, propre ou impropre, passant par les trois points distincts C, I, J ou mieux l'arc limité en I et J de ce cercle, lequel est bien défini, puisque C, point fa-propre, est distinct de I et J.

De là, le terme d'*exocycle*, ligne ouverte d'extrémités I, J et non ligne fermée comme l'endocycle. La réciproque est immédiate et *tout arc de cercle* γ, *limité* *à deux points* I, J *du cercle fondamental* ω *est un exocycle dont la base* δ *est la fa-droite joignant ces deux points.*

Ces résultats se représentent d'une manière simple en même temps qu'ils se retrouvent et se précisent dans la forme-type où J étant rejeté au point ∞, ω est une droite, δ la demi-droite qui lui est perpendiculaire en son origine I; la perpendiculaire abaissée de C sur δ est le demi-cercle I_1CJ_1 passant par C, de centre I et de base I_1IJ_1 placée sur ω; la fa-droite parallèle en J à δ et passant par C est la parallèle menée par C à δ; l'angle de parallélisme φ de C et δ formé par ces deux lignes est égal à l'angle aigu CII_1 de leurs perpendiculaires; et si C se déplace d'un même côté de δ de façon que sa fa-distance à δ reste constante, cet angle CII_1 reste invariable et C décrit la demi-droite γ issue de I, qui fait avec δ l'angle complémentaire $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi$. On retrouve bien, en précisant sa position,

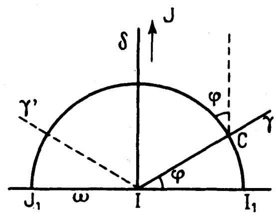

Fig. 10.

un arc de cercle, limité aux points fa-impropres I et J de δ : *un exocycle* γ *fait avec sa base* δ, *aux points fa-impropres* I, J *de celle-ci, des angles égaux à* $\frac{\theta}{2}$, θ *étant l'angle associé au fa-rayon de cet exocycle.*

En particulier, dans la forme générale comme dans la forme-type, si le point C appartient à la base δ, ou encore si le fa-rayon de l'exocycle est nul, l'exocycle se confond avec la fa-droite δ; par suite, alors contrairement à ce qui a lieu en II^e^, *une fa-droite n'est pas en* I^re^ *un endocycle, mais est un exocycle particulier de fa-rayon nul.*

Ceci établi, l'étude de l'exocycle et de ses applications se poursuit comme celles de l'endocycle sans qu'il soit besoin d'en répéter tous les termes. C'est d'abord que, aussi bien en II^e^ qu'en I^re^, la partie du plan qui, limitée à la base δ d'un exocycle γ, contient celui-ci est divisée par l'exocycle en deux régions, l'une *intérieure*, limitée par δ et γ, l'autre *extérieure*, limitée par γ et ω, la première contenant les points du plan dont la fa-distance à la base δ est inférieure au fa-rayon de l'exocycle, la seconde ceux pour lesquels elle est supérieure.

On en déduit, de même qu'on l'a fait à propos de la fa-médiatrice de deux points et en se plaçant successivement lorsque δ et δ_1 sont sécantes dans chacun des angles formés par ces fa-droites que *le lieu des points dont les fa-distances à deux fa-droites* δ, δ_1 *sont égales est leurs deux axes de fa-symétrie si elles sont sécantes, leur axe de symétrie si elles sont non sécantes ou parallèles et* *que les points dont la fa-distance à δ est plus petite que leur fa-distance à δ_1 sont ceux de la région limitée par cet ou ces axes de symétrie qui contient δ.*

De même encore, en observant que toute perpendiculaire à la base δ est l'axe d'une fa-symétrie qui, échangeant les points fa-impropres I, J de cette base, la laisse invariante ainsi que l'exocycle γ, *tout fa-rayon est un axe de fa-symétrie de l'exocycle et le coupe orthogonalement.*

18. **Fa-distance de deux fa-droites non sécantes.** — Une autre application plus importante, analogue à celle du § 15, concerne les fa-distances à une fa-droite fixe δ_0 d'un point M variable sur une autre fa-droite δ; l'étude ayant pour but de conduire à la notion d'invariant des deux fa-droites, alors que l'on en connaît déjà un, leur angle, lorsque celles-ci sont sécantes ou parallèles, nous ne traiterons pas la question, qui est facile et dont les résultats sont simples, dans ces deux cas, et nous nous placerons donc seulement en I^re^, avec deux fa-droites non sécantes δ_0, δ.

L'étude peut s'aider de la forme-type dans laquelle ω est une droite, δ_0 une demi-droite $I_0\delta_0$ perpendiculaire en I_0 à ω, un demi-cercle d'extrémités I, J

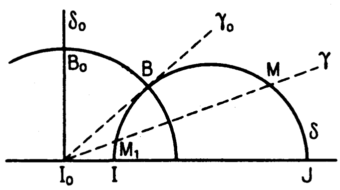

Fig. 11.

placées sur ω d'un même côté de I_0; elle consiste à suivre la variation d'un exocycle γ de base δ_0 passant par un point M mobile sur δ, représenté dans la forme-type par la demi-droite joignant I_0 à M; l'un de ces exocycles, γ_0, est tangent à δ au pied B de la perpendiculaire commune B_0B aux deux fa-droites non sécantes δ_0, δ, et tout autre γ coupe δ en deux points M, M_1, placés de part et d'autre de B; la perpendiculaire commune B_0B est un axe de fa-symétrie commun à δ_0, δ, γ_0, γ et au couple de points M, M_1; on en déduit les propriétés suivantes, analogues à celles des fa-distances d'un point A à un point variable M d'une fa-droite : *en* I^re^, *la fa-distance à une fa-droite* δ_0 *d'un point* M *mobile sur une autre fa-droite* δ *non sécante à la première* δ_0 *passe par un minimum lorsque* M *se place au pied* B *sur* δ *de la perpendiculaire commune à ces deux fa-droites; elle a des valeurs égales pour deux points* M, M_1 *fa-équidistants de ce pied* B, *va en croissant en même temps que la fa-distance* [BM] *de* M *à* B *et tend en même temps que celle-ci vers le maximum extrême de toute fa-distance.*

Ces propriétés en entraînent une autre, la fa-distance de M à δ_0 étant à son tour la plus petite des fa-distances [MM_0] de M à tout point M_0 de δ_0; de là, la notion de *fa-distance de deux fa-droites non sécantes* δ, δ_0, définie comme la fa-distance minimum de l'une aux différents points de l'autre, aussi bien que la fa-distance minimum des différents points de l'une aux différents points de l'autre ; en raison de ce second caractère, elle ne change pas si l'on intervertit les deux droites, étant d'ailleurs égale à la fa-distance $[B_0B]$ des pieds de la perpendiculaire commune. De plus, elle est un *invariant des deux droites*, et en possède les qualités, de même que l'invariant $[B_0B]$ des deux points B_0, B, concernant les transformations par fa-symétrie.

Enfin et de même que pour l'endocycle, on en déduit une nouvelle interprétation de l'exocycle d'après laquelle *en* I^{re} *l'enveloppe des fa-droites* δ *dont les fa-distances à une fa-droite fixe* δ_0 *sont fa-égales entre elles est un exocycle de base* δ_0.

19. **Horicycle.** — Après l'endocycle et l'exocycle, considérés comme lieux des fa-symétriques d'un point fixe C par rapport aux fa-droites représentées par des cercles formant un faisceau ayant ou deux points fixes opposés A, A′ ou deux points limites fa-impropres I, J, il y a lieu, toujours en I^{re}, d'étudier le cas limite d'un faisceau de 3^e espèce formé des cercles tangents entre eux en un même point fa-impropre I où ils coupent orthogonalement ω, cercles qui représentent les fa-droites δ parallèles entre elles au même point fa-impropre I ; le lieu correspondant est alors le cercle γ passant par C et qui, appartenant au faisceau orthogonal, est tangent en I à ω ; dans la forme-type où I est placé au point ∞, ω étant une droite, toutes les fa-droites δ sont les demi-droites δ_2 parallèles et de même sens perpendiculaires à ω en leurs origines δ_1, la fa-symétrie par rapport à chacune d'elles est une symétrie proprement dite, et le fa-symétrique de C décrit la parallèle à ω issue de ce point C, droite qui est bien un cercle γ, impropre, tangent à ω au point ∞ ; on constate de plus dans la forme générale comme dans la forme-type, que ce lieu γ ne change pas lorsque, sans changer I, on remplace C par l'un quelconque des points de ce même cercle. Ce lieu est appelé *horicycle* il répond ainsi à la définition et à la qualité non euclidienne suivantes : *l'horicycle est le lieu des fa-symétriques d'un même point fa-propre* C *par rapport aux fa-droites* δ *parallèles entre elles en un même point fa-impropre* I, *et ce lieu qui passe par* C *est indépendant du choix de ce point* C *sur ce même lieu ;* le point fa-impropre I est dit *fa-centre* de l'horicycle.

Inversement et immédiatement, *tout cercle* γ *tangent au cercle fondamental* ω *est un horicycle* dont le fa-centre est son point de contact avec ω, à condition que ce cercle γ soit placé dans le demi-plan de figure limité par ω.

On peut alors interpréter un cercle quelconque et *en* I^{re} *tout cercle appartenant en totalité ou en partie au plan de la figure, est un endocycle s'il ne coupe pas le cercle fondamental* ω, *un exocycle s'il le coupe en deux points, un horicycle s'il lui est tangent.* Rappelons que, en particulier si le cercle est orthogonal à ω, il est à la fois une fa-droite et un exocycle.

Mais alors que les endocycles comme les exocycles se distinguent par la valeur de leurs fa-rayons, ce caractère ne peut s'appliquer à l'horicycle, car on sait que les fa-distances d'un point fa-impropre I aux différents points du plan sont toutes égales entre elles (§ 12), que ces points soient ou ne soient pas situés sur un même horicycle de fa-centre I. D'une manière plus précise, si l'on considère deux horicycles γ, γ_1 de fa-centres distincts I, I_1, on voit que les cercles γ, γ_1, tangents à ω, l'un en I, l'autre en I_1 et situés d'un même côté par rapport à ω, se correspondent dans une inversion positive orthogonale à ω; le fait s'établit immédiatement en recourant à la forme-type utilisée plus haut où, I étant placé au point ∞, ω et γ sont des droites parallèles, γ_1 un cercle tangent à ω en un point I_1 et situé du même côté que γ par rapport à ω, γ et γ_1 se correspondant alors dans une inversion positive de pôle I_1, donc dans une fa-symétrie dont l'axe est le cercle d'inversion de celle-ci. Dans le cas particulier de deux horicycles ayant même fa-centre I, il suffit pour revenir au cas précédent, de transformer l'un d'eux par une fa-symétrie arbitraire, de sorte que *deux horicycles quelconques sont égaux et admettent un axe de fa-symétrie si leurs fa-centres sont distincts, et se déduisent l'un de l'autre par le produit de deux fa-symétries dans le cas contraire.*

Cette circonstance explique aussi pourquoi la première définition de l'endocycle ou de l'exocycle par un fa-rayon constant ne peut s'étendre à l'horicycle; elle montre aussi que les deux régions séparées par l'horicycle ne se distinguent plus par des inégalités entre fa-distances au centre.

Seule subsiste la dernière qualité, qualité de position plutôt que de grandeur, qui se vérifie immédiatement lorsque en forme-type ω et γ sont des droites parallèles, et d'après laquelle *tout fa-rayon d'un horicycle en est un axe de fa-symétrie et le coupe orthogonalement.*

Le cas particulier rencontré dans ce qui précède de deux *horicycles concentriques* possède, d'autre part, des qualités remarquables que l'on constate de suite, dans la forme-type où le centre commun J étant rejeté en ∞, ces horicycles γ, γ_1 et le cercle fondamental ω sont trois droites parallèles; ils ont d'abord, *en position les mêmes fa-rayons* portés par des droites IB_1B perpendiculaires à ω, alors que deux horicycles non concentriques n'en ont en commun qu'un seul, la fa-droite joignant leurs centres; puis deux quelconques de ces fa-rayons IB_1B, et $I'B'_1B'$ et leurs extrémités B_1, B et B'_1, B' se correspondent par fa-symétrie autour d'une fa-droite représentée en forme-type par la fa-médiatrice des parallèles IB_1B, $I'B'_1B'$, la fa-symétrie se confondant ici avec une symétrie euclidienne; on en déduit, en forme générale comme en forme-type que les fa-distances $[B_1B]$, $[B'_1B']$ sont égales, et par suite, que *la fa-longueur* $[B_1 B]$ *interceptée par deux horicycles concentriques sur chaque fa-rayon commun reste constante.*

On retrouve ici une propriété connue des cercles euclidiens et que l'on vérifie aussi de suite avec des endocycles et des exocycles; elle entraîne que *deux horicycles concentriques ont un invariant* qui est cette fa-longueur constante, alors qu'un seul horicycle n'en a pas.

20. Détermination d'un fa-cercle. — Les trois fa-cercles jouent en Géométrie non euclidienne le rôle des cercles de la Géométrie euclidienne; et d'abord chacun d'eux étant figuré par un cercle quelconque, propre ou impropre, est défini par trois de ses points, fa-propres ou fa-impropres, mais distincts. Il est utile de reprendre ce premier fait dans son sens non euclidien; supposant d'abord les trois points A, B, C tous fa-propres, on observe que si le fa-cercle est un endocycle ou un horicycle, son fa-centre O ou I en I^{re}, ses fa-centres O, O′ en II^{e} sont situés sur la fa-médiatrice de deux quelconques de ces trois points A, B, C, et s'il est un exocycle, ou considéré comme tel en II^{e}, il admet cette fa-médiatrice comme axe de fa-symétrie, et celle-ci est perpendiculaire à sa base δ; dans tous les cas, on est donc conduit à mener les fa-médiatrices de deux des couples, A, B et A, C formés par les trois points; si elles sont sécantes, ce qui est toujours le cas en II^{e}, l'endocycle qui, passant par A, a pour fa-centre le ou leurs points d'intersection est la solution unique du problème; en I^{re}, si elles sont non sécantes, elles ont une perpendiculaire commune δ et l'exocycle passant par A qui a pour base δ est la solution, ce résultat s'appliquant également en II^{e}, mais en donnant la même solution que dans le cas précédent, ce qui résulte de ce que un même fa-cercle est alors aussi bien un exocycle qu'un endocycle; enfin en I^{re}, si les fa-médiatrices de AB et AC sont parallèles en un point fa-impropre I, la solution, toujours unique, est l'horicycle passant par A de fa-centre I.

Remarquant que cette solution ne change pas si l'on remplace l'une des deux fa-médiatrices par la troisième, celle de BC, on en déduit que *les trois fa-médiatrices de trois points* A, B, C *distincts et fa-propres en* I^{re} *pris deux à deux concourent en* II^{e} *en deux points opposés*, O, O′, *fa-centres du fa-cercle unique passant par ces trois points*, *et en* I^{re} *sont ou concourantes en un point fa-propre* O, *ou perpendiculaires à une même fa-droite* δ_0, *ou parallèles en un même point fa-impropre* I, *le fa-cercle unique passant par* A, B, C *étant suivant les cas un endocycle de fa-centre* O, *ou un exocycle de base* δ_0, *ou un horicycle de fa-centre* I.

On observera que *en* I^{re} *un exocycle est aussi défini soit par ses deux points fa-impropres* I, J *et l'un de ses points fa-propres* A, *soit par un point fa-impropre* I *et deux points fa-propres distincts* A, B, sa base δ_0 joignant les points fa-impropres I, J et J étant dans le second cas le fa-symétrique de I par rapport à la fa-médiatrice de AB; de même, *un horicycle est défini par son point fa-impropre* I *et l'un de ses points fa-propres* A.

Mais on peut aussi chercher à définir un horicycle par deux de ses points fa-propres et distincts A, B; la fa-médiatrice de ceux-ci coupe ω en deux points I, J qui peuvent chacun être le fa-centre de l'horicycle; on retrouve la solution du problème classique d'un cercle tangent à un autre ω et passant par deux points A, B situés dans la même région par rapport à ω. Dans la forme-type où J étant le point ∞, ω et la fa-médiatrice IJ, sont deux droites rectangulaires en I, A et B étant symétriques par rapport à la seconde, l'un des horicycles γ est la droite AB, parallèle à ω, et l'autre γ_1 le cercle tangent en I à ω et passant par A et B.

L'angle en A ou B de ces deux horicycles γ, γ_1 est un nouvel invariant, dépendant de ceux déjà connus, des deux points A, B ; on le vérifie en menant par A les deux fa-droites parallèles à la fa-médiatrice IJ, l'une δ passant par J qui est la droite parallèle à IJ menée par A, l'autre δ_1 passant par I, qui est le cercle orthogonal en A et I au cercle γ_1 ; les deux horicycles γ, γ_1 sont donc respectivement perpendiculaires en A aux deux fa-droites δ, δ_1 ; ils forment le même angle que celles-ci et admettent les mêmes bissectrices dont l'une est le cercle centré en I passant par A et B.

On retiendra principalement que *par deux points fa-propres et distincts* A, B *passent en* I^{re} *deux horicycles et ceux-ci sont respectivement orthogonaux en chacun de ces points aux parallèles menées par ce point à la fa-médiatrice des deux points* A *et* B.

Les conséquences de ces propositions concernant l'intersection de deux fa-cercles sont analogues à celles de la Géométrie classique ; la première est que *deux fa-cercles distincts ne peuvent se couper en plus de deux points;* mais dans la discussion, il y a lieu de distinguer en I^{re} entre deux fa-cercles ayant un axe commun de fa-symétrie, axe passant par leurs fa-centres ou perpendiculaire à leurs bases, et deux exocycles à bases sécantes ou parallèles qui n'en ont pas et l'on constate alors, directement ou sur forme-type que, *en* I^{re} *deux exocycles à bases sécantes se coupent en un point et un seul et deux exocycles à bases*

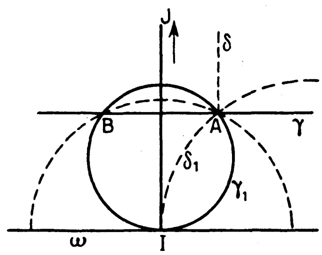

Fig. 12.

parallèles en un point au plus ; dans tout autre cas, en I^{re} *et en* II^{e}, *deux fa-cercles n'ayant pas même fa-centre ou même base ont un axe commun de fa-symétrie et ou bien se coupent en deux points fa-symétriques par rapport à cet axe, ou bien sont tangents en un point de cet axe, ou bien n'ont aucun point commun.*

21. **Fa-déplacements.** — De même que les cercles en Géométrie classique, les fa-cercles interviennent dans de nombreux problèmes ; c'est ainsi qu'ils vont permettre, par analogie avec les fa-déplacements euclidiens, de préciser la notion de *fa-déplacement* en la faisant reposer seulement sur celle utilisée jusqu'ici de fa-distances égales ou inégales et en appelant fa-déplacement toute *transformation ponctuelle du plan qui à chaque point* M, *fa-propre en* I^{re}, *en fait correspondre un et un seul* M_1 *de façon que, quels que soient les deux points* A *et* B *et leurs transformés* A_1, B_1 *les fa-distances* $[AB]$ *et* $[A_1B_1]$ *soient toujours égales.*

Un cas particulier banal, dit *fa-déplacement nul* ou *transformation identique* est celui où chaque point M se confond avec son transformé M_1.

Un autre, plus important, est comme on sait une fa-symétrie axiale ou, plus généralement le *produit de plusieurs fa-symétries axiales effectuées successivement dans un ordre déterminé.*

En II^{e}, l'égalité $[AA'] = [A_1A'_1]$ montre que les transformés A_1, A'_1 de deux points opposés A, A′ sont aussi des points opposés; pour la même raison en I^{re} le transformé d'un point fa-impropre ne pourrait être qu'un point fa-impropre ; mais il est préférable de ne pas étendre tout de suite cette notion de fa-déplacement aux points fa-impropres et de ne le faire que pour un produit de fa-symétries.

Tout fa-déplacement est une *transformation continue*, possédant la qualité de continuité, car l'égalité $[AB] = [A_1 B_1]$ montre que si B reste intérieur à un endocycle de fa-centre A_1, son transformé B_1 reste aussi intérieur à l'endocycle correspondant de fa-centre A_0, le fa-rayon commun de ces deux endocycles pouvant, d'autre part, être aussi petit qu'on le veut.

On prévoit que les fa-déplacements forment un *groupe de transformations*, car le produit de plusieurs fa-déplacements successifs et, par exemple, celui d'une fa-symétrie axiale et d'un fa-déplacement dans un ordre quelconque est aussi un fa-déplacement.

Cherchons si un fa-déplacement peut être déterminé par un nombre limité de points A, B, C, ... et de leurs transformés A_1, B_1, C_1, ... Choisissant d'abord arbitrairement un premier point A, fa-propre en Ire, s'il se confond avec son transformé A_1, le problème sera celui de la recherche d'un fa-déplacement laissant fixe un point particulier A ; dans le cas général contraire, A et A_1 étant distincts, la fa-symétrie ayant pour axe leur fa-médiatrice, échange ces deux points et le fa-déplacement cherché se décompose en un fa-déplacement laissant fixe soit A, soit A_1, suivi dans le premier cas ou précédé dans le second par cette fa-symétrie, ce qui ramène la recherche au cas particulier précédent.

Cela fait, choisissons de même arbitrairement un second point B fa-propre en Ire, distinct du point fixe que nous supposerons être A et en IIe distinct aussi de son opposé également fixe A' ; en général B ne se confond pas avec son transformé B_1, mais d'après la condition $[AB] = [AB_1]$, la fa-médiatrice de BB_1 passe par A et la fa-symétrie ayant pour axe cette fa-médiatrice laisse A invariant, ce qui permet comme précédemment, en décomposant le fa-déplacement cherché en un produit de deux facteurs dont l'un est cette fa-symétrie, de ramener à nouveau la recherche à celle d'un fa-déplacement laissant fixes deux points A, B, distincts, fa-propres en Ire et non opposés en IIe.

Poursuivant alors le même procédé en choisissant arbitrairement un troisième point fa-propre C distinct de A et B et de leurs opposés, son transformé C_1, répondant aux conditions $[AC] = [AC_1]$, $[BC] = [BC_1]$, est commun aux deux endocycles passant par C de fa-centres A et B ; deux cas sont alors possibles : dans le premier, C_1 se confond avec C, ce qui a toujours lieu lorsque C est situé sur la fa-droite AB ; dans le second, C_1 est le fa-symétrique de C par rapport à cette fa-droite, auquel cas en décomposant à nouveau le fa-déplacement cherché à l'aide de la fa-symétrie d'axe AB, on est ramené au même problème que dans le premier cas, celui d'un fa-déplacement laissant fixes trois points distincts A, B, C, fa-propres et non opposés, et supposés, en outre, comme le permet le choix arbitraire de C, non situés sur une même fa-droite.

Dans ce fa-déplacement, si M est un point quelconque, fa-propre en Ire, la condition $[AM] = [AM_1]$ et ses analogues montrent que son transformé M_1 est commun aux trois endocycles passant par M de fa-centres A, B, C ; mais comme ceux-ci ne sont pas fa-alignés, les endocycles n'ont pas d'autre point commun que M; M_1 et M sont confondus et le fa-déplacement se réduit à la transformation identique.

Les conclusions se pressent nombreuses : comme on a séparé successivement dans les opérations précédentes des fa-symétries en nombre au plus égal à trois, la première est que *tout fa-déplacement et, en particulier, tout produit de fa-symétries axiales en nombre et en ordre quelconques se réduit à un produit de trois fa-symétries au plus ou à la transformation identique.*

Cette qualité permet d'étendre en I^{re} la notion de fa-déplacement aux points fa-impropres, ces points se transformant entre eux dans un fa-déplacement de la même manière que dans le produit de fa-symétries auquel il se réduit.

Puis, comme l'opération inverse d'un tel produit en est un autre, formé des mêmes fa-symétries se succédant dans l'ordre contraire, il en résulte que l'opération inverse d'un fa-déplacement est aussi un fa-déplacement et que, ainsi qu'on l'avait prévu au début, *l'ensemble des fa-déplacements forme un groupe.*

22. Une autre conséquence est que, tout comme un produit de fa-symétries, *tout fa-déplacement transforme toute fa-droite en une fa-droite.* Ceci permet de lever partiellement la restriction imposée plus haut à des points fixes A, B, de certains fa-déplacements d'être fa-propres en I^{re}; considérons, en effet, un fa-déplacement laissant fixe en I^{re} un point fa-propre A et un point fa-impropre I; il laisse invariant la demi-fa-droite bien déterminée limitée en A et I, et transforme tout point fa-propre B de celle-ci en un autre B_1 qui, placé sur la même demi-fa-droite et répondant à $[AB_1] = [AB]$ se confond avec B, et l'on est ainsi dans le cas de deux points fixes A, B tous deux fa-propres. Mais il n'en serait plus de même avec un fa-déplacement laissant fixes deux points fa-impropres distincts I, J, car si ce fa-déplacement laisse bien invariante la fa-droite IJ, on peut toujours choisir sur cette fa-droite des points fa-propres distincts A, B, A_1, B_1 répondant à $[AB] = [A_1B_1]$ et définir ainsi un fa-déplacement qui, transformant A et B en A_1 et B_1, laisse la fa-droite IJ invariante globalement, mais non ponctuellement comme dans les cas précédents.

En revanche, considérons un fa-déplacement, un produit de fa-symétries laissant invariants trois points fa-impropres distincts I, J, K; il laisse invariantes, au moins globalement, la fa-droite IJ, puis la perpendiculaire unique abaissée de K sur celle-ci; le point fa-propre A, pied de cette perpendiculaire est donc invariant; il en est de même de tous les points des deux fa-droites distinctes IAJ, AK issues de ce point A et le fa-déplacement se réduit donc à la transformation identique.

De là, en se reportant aux réductions successives effectuées plus haut, les conclusions suivantes :

Tout fa-déplacement laissant invariants trois points A, B, C, *non fa-alignés, distincts de leurs opposés en* II^e, *fa-propres ou fa-impropres en* I^{re}, *se réduit à la transformation identique;*

Tout fa-déplacement laissant invariants deux points distincts A, B, *non opposés en* II^e *dont l'un au moins est fa-propre en* I^{re}, *se réduit à la fa-symétrie* *ayant pour axe la fa-droite joignant ces deux points ou à la transformation identique;*

Tout fa-déplacement laissant invariant un point A, *fa-propre en* Ire, *se réduit à un produit de deux fa-symétries ou à une seule, dont les axes passent par ce point, ou à la transformation identique.*

23. **Fa-déplacements directs; fa-rotations.** — Il n'y aura plus lieu désormais de distinguer fa-déplacement et produit de fa-symétries ; en revanche, si l'on observe qu'une fa-symétrie renverse l'orientation d'une figure et qu'un produit de deux fa-symétries la conserve, une distinction essentielle doit se faire entre un *fa-déplacement direct*, qui conserve l'orientation et un *fa-déplacement indirect* qui la renverse, le premier étant le produit d'un nombre pair de fa-symétriess, le second celui d'un nombre impair; en particulier, la transformation identique est un fa-déplacement direct, et une fa-symétrie axiale un déplacement indirect.

On a rencontré plus haut un exemple de ces caractères à propos des fa-déplacements laissant invariants deux points A, B, satisfaisant aux réserves énoncées ; si l'on considère un troisième point quelconque C, non situé sur la fa-droite AB, et le transformé C_1, il y a lieu de distinguer deux cas suivant que le triangle ABC et son transformé ABC_1 ont la même orientation ou des orientations différentes; dans le premier cas, C et C_1 se confondent, et le fa-déplacement est nul; dans le second, C et C_1 se correspondent dans la fa-symétrie ayant pour axe la fa-droite AB et le fa-déplacement se réduit à cette fa-symétrie axiale.

Étudiant d'abord les fa-déplacements directs, les propositions générales des paragraphes précédents se réduisent aux suivantes :

Tout fa-déplacement direct se réduit au produit de deux fa-symétries axiales ou à la transformation identique;

Tout fa-déplacement direct laissant invariant deux points distincts A, B, *non opposés en* IIe, *et dont l'un au moins est fa-propre en* Ire, *se réduit à la transformation identique;*

L'ensemble des fa-déplacements directs forme un groupe.

Ajoutons encore, d'après les constructions des deux paragraphes précédents, que *tout fa-déplacement direct est bien défini par deux points quelconques* A, B, *fa-propres en* Ire, *et leurs transformés* A_1, B_1, *également fa-propres et répondant à la seule condition que les fa-distances* $[AB]$ *et* $[A_1B_1]$ *soient égales; et qu'il l'est aussi en* Ire *par trois points fa-impropres quelconques* I, J, K, *et leurs transformés* I_1, J_1, K_1, *également fa-impropres et quelconques.*

On distingue ensuite suivant l'espèce du faisceau comprenant les axes δ_1, δ_2 des deux fa-symétries, trois espèces correspondantes de fa-déplacements directs non nuls : dans la première, la seule qui se présente en IIe, les axes δ_1, δ_2 sont sécants, leur point d'intersection C en Ire, ou leurs points d'intersection opposés C, C′ en IIe, restent donc invariants et sont les seuls points invariants; par analogie avec la rotation euclidienne, ce fa-déplacement est appelé *fa-rotation de 2e espèce* ou *fa-rotation fermée*, C est le *centre de fa-rotation* en I^{re}, C et C$'$ en sont les *centres* en II^{e}.

En I^{re}, il y a deux autres espèces : dans l'une, les axes δ_1, δ_2 sont non-sécants, ils ont une perpendiculaire commune δ qui reste invariante dans les deux fa-symétries et dans leur produit; les points fa-impropres I, J de δ s'échangent dans chacune de ces fa-symétries et restent donc invariants dans l'opération et ce sont les seuls points invariants, puisque le fa-déplacement n'est pas nul ; celui-ci est appelé *fa-rotation de* 1re *espèce* (ou *fa-rotation ouverte*), I et J en sont les *centres fa-impropres* et la fa-droite δ qui joint ces points en est la *base*.

Dans un dernier cas δ_1, δ_2 sont des fa-droites parallèles en un point fa-impropre I; ce point reste invariant dans l'opération ; on sait qu'il n'y en a pas d'autre, fa-propre ; il ne peut y en avoir non plus un autre J, fa-impropre, car dans le cas contraire, ou bien chacune des fa-symétries d'axes δ_1, δ_2, laisserait invariant ce point J, ainsi que I et la fa-droite IJ, ou bien chacune échangerait J avec un second point fa-impropre K, et laisserait invariante la fa-droite JK, et dans tous les cas, les axes, tous deux perpendiculaires à une même fa-droite IJ ou JK, ne pourraient être parallèles : le fa-déplacement est alors une *fa-rotation de* 3^{e} *espèce* ou *fa-translation;* I en est le *centre fa-impropre* unique.

A chacune de ces trois espèces correspond une forme-type simple; si la fa-rotation est de 2^{e} espèce, on peut placer le centre C au centre du cercle fondamental, réel ou imaginaire ω; δ_1, δ_2 sont alors des droites issues de C, les fa-symétries sont des symétries proprement dites ayant ces droites pour axes, et le fa-déplacement est alors une *rotation proprement dite de centre* C.

Si la fa-rotation est de 1re espèce, on peut placer l'un des centres J au point ∞ ; le cercle fondamental ω est une droite, la fa-droite IJ une demi-droite perpendiculaire en I à ω; δ_1, δ_2 sont des demi-cercles centrés en I et basés sur ω ; les deux fa-symétries sont des inversions positives ayant ces cercles pour cercles d'inversion et le fa-déplacement est alors une *homothétie de centre* I et de rapport positif.

Si la fa-rotation est de III^{e} espèce, en plaçant de même son centre I au point ∞, δ_1, δ_2 sont deux demi-droites perpendiculaires à la droite ω; les deux fa-symétries sont des symétries ayant pour axes ces deux demi-droites parallèles, et le fa-déplacement est alors une *translation parallèle à la droite* ω.

Les diverses propriétés des trois fa-rotations apparaissent simplement sur ces diverses formes-types et pourraient s'énoncer de suite. Mais il est intéressant de les retrouver en Géométrie non euclidienne et sous une forme générale.

24. Considérons d'abord les transformés d'un point quelconque A fa-propre en I^{re} dans la fa-rotation ainsi que dans chacune des deux fa-symétries d'axes δ_1 et δ_2 qui la composent. La signification des divers fa-cercles montre que si la fa-rotation est de 2^{e} espèce, ce point A et ses trois transformés sont situés sur un même endocycle γ ayant le ou les mêmes fa-centres C, C$'$ que la fa-rotation; de même, en I^{re} suivant que la fa-rotation est de 1re ou de 3^{e} espèce, tous ces points sont situés sur un même exocycle ou horicycle γ dont les points fa-impropres I, J ou le point fa-impropre unique I sont les fa-centres ou le fa-centre impropres de la fa-rotation.

Rappelons que si l'on fait varier A, tous ces fa-cercles γ appartiennent à un même faisceau, celui des fa-cercles orthogonaux aux deux axes δ_1, δ_2 et que dans deux cas, celui où l'on est en II^e et celui où en I^{re} δ_1 et δ_2 sont non sécants et la fa-rotation de 1re espèce, ce faisceau comprend en particulier une fa-droite γ_0, la perpendiculaire commune à δ_1 et δ_2.

En résumé, *toute fa-rotation laisse globalement invariants les fa-cercles γ d'un même faisceau, celui des endocycles ayant mêmes centres que la fa-rotation ou des exocycles ou horicycles dont les points fa-impropres sont les centres ou le centre fa-impropre de la fa-rotation.*

Une seconde propriété résulte immédiatement de ce que dans une fa-symétrie d'axe δ_1 la fa-symétrique d'une fa-droite δ est une fa-droite appartenant au faisceau qui comprend δ_1 et δ, ce qui entraîne que *dans une fa-rotation produit de deux fa-symétries d'axes δ_1, δ_2 la transformée d'une fa-droite δ appartenant avec ces axes à un même faisceau est une fa-droite de ce même faisceau.*

Étudions ensuite les diverses manières de représenter par un produit de deux fa-symétries une fa-rotation définie initialement comme produit de deux fa-symétries d'axes donnés δ_1, δ_2. Considérant à cet effet un point arbitraire A, fa-propre en I^{re} et son transformé A_1, lesquels sont situés sur un même fa-cercle γ orthogonal à δ_1 et δ_2, on a vu (§ 21) que la fa-rotation inverse qui transforme A_1 en A se décompose en une première fa-symétrie dont l'axe δ' est la fa-médiatrice de AA_1 suivie d'une seconde dont l'axe δ passe par A; comme la première laisse invariant le fa-cercle γ et qu'il en est de même pour la fa-rotation, il en est aussi de même pour la seconde fa-symétrie dont l'axe δ est alors orthogonal en A à γ et, par suite, appartient comme l'autre axe δ' au même faisceau comprenant les premiers axes donnés δ_1, δ_2.

Revenant à la fa-symétrie proposée avec laquelle les fa-symétries se succèdent dans l'ordre δ, δ' et rappelant que le choix du point A est arbitraire et que la réduction précédente peut aussi se faire dans l'ordre contraire, on en déduit que *toute fa-rotation peut se réduire d'une ∞^1 de manières à un produit de deux fa-symétries dont les axes appartiennent tous à un même faisceau, l'axe de l'une pouvant être choisi arbitrairement dans ce faisceau, l'axe de l'autre étant alors déterminé.*

25. **Invariant d'une fa-rotation.** — Comparons deux de ces réductions, la première répondant aux axes δ, δ' et aux points A, A_1 précédemment définis, la seconde répondant de même à deux axes δ_0, δ'_0 et à deux points B, B_1, ces derniers pouvant, en outre, être choisis sur le même fa-cercle invariant γ que A et A_1. Comme la fa-rotation est un fa-déplacement direct qui transforme A et B en A_1 et B_1, les fa-distances $[AB]$, $[A_1B_1]$ sont égales et, de plus, de même sens : cette seconde qualité qui n'a pas besoin d'être précisée lorsque γ est un exocycle se parcourant d'un point fa-impropre I à l'autre J, signifie, lorsque γ est un horicycle que ceux des arcs de γ qui ne comprennent pas le point fa-impropre I et sont limités l'un à A et B, l'autre à A_1 et B_1 sont de même sens, et enfin, lorsque γ est

un endocycle, qu'il en est de même pour ceux de ces arcs qui sont au plus égaux au demi-fa-cercle, donc ne traversent pas le fa-diamètre mené par l'une de leurs extrémités.

Cela posé et en s'inspirant de ce qui se passe avec des points d'une même droite, où l'égalité en grandeur et sens $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ entraîne $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$, on observe en renversant le sens de l'une des fa-distances que l'hypothèse signifie que les quatre points étant toujours sur un même fa-cercle γ, les fa-distances $[AB]$ et $[B_1A_1]$ sont égales mais de sens contraires, et par suite, que les deux couples de points A, B_1 et B, A_1 ont en général une fa-médiatrice commune placée sur un fa-diamètre de γ et, dans tous les cas, l'un de ces couples pouvant avoir ses deux points confondus, ont avec γ un axe commun de fa-symétrie; il en résulte dans cette même fa-symétrie que $[AA_1]$ et $[B_1B]$ qui se rapportent respectivement à deux réductions de la fa-rotation à deux fa-symétries sont aussi égales et de sens contraires, et enfin que $[AA_1]$ et $[BB_1]$ sont égales et de même sens, donc que *dans une fa-rotation les points d'un même fa-cercle invariant γ ont tous des déplacements égaux et de même sens.*

Que l'on compare ainsi un point A et son transformé A_1, ou les axes δ, δ' on a ainsi diverses manières d'attacher un invariant à une fa-rotation. Si celle-ci est de 2[e] espèce, en considérant les demi-fa-droites CA, CA_1 issues du fa-centre C, unique ou non, de la fa-rotation, *l'angle orienté* (CA, CA_1) *formé par une demi-fa-droite variable* CA *issue du fa-centre* C *et sa transformée* CA_1 *est constant;*

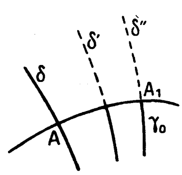

Fig. 13.

il est dit *angle de fa-rotation*; d'autre part, l'axe δ étant placé sur CA et δ' sur la bissectrice de l'angle précédent, mais δ et δ' étaient alors des fa-droites et non des demi-fa-droites et leur angle (δ, δ') ayant toujours un côté origine δ et un côté extrémité δ', *l'angle orienté* (δ, δ') *formé par les axes de deux fa-symétries dont le produit est la fa-rotation est indépendant du choix de ces axes et égal au demi-angle de fa-rotation.*

Si la fa-rotation est de 1[re] espèce, on peut choisir comme fa-cercle γ la fa-droite γ_0 perpendiculaire commune à tous les axes de fa-symétrie δ; la fa-distance $[AA_1]$ est alors celle de ceux de ces axes δ, δ'' qui sont perpendiculaires en A et A_1 à γ_0; d'autre part, la fa-rotation qui transforme A en A_1 transforme aussi δ en δ'', et comme elle se décompose en un produit de deux fa-symétries dont les axes sont δ pour la première et la fa-médiatrice δ' de AA_1 pour la seconde, δ'' est la transformée de δ dans cette seconde fa-symétrie ou encore δ' est l'axe de fa-symétrie des deux fa-droites non sécantes δ', δ''; par conséquent, *dans une fa-rotation de* 1[re] *espèce, la fa-distance d'une fa-droite variable* δ' *du faisceau comprenant les axes* *initiaux* δ_1, δ_2 *et de sa transformée* δ'' *et celle des axes* δ, δ' *de deux fa-symétries dont le produit est cette fa-rotation sont toutes deux constantes en grandeur et sens;* on verra plus loin à propos de la mesure des fa-distances que la seconde est moitié de la première.

Si la fa-rotation est de 3^e^ espèce il n'y a pas de choix remarquable à faire parmi les fa-cercles γ, tous horicycles de même fa-centre fa-impropre I; deux fa-droites quelconques δ, toutes deux parallèles en I, n'ont plus, d'autre part, d'invariant les distinguant de deux autres, les qualités d'invariance se rapporteront donc à l'un quelconque des horicycles γ, *la fa-distance* $[AA_1]$ *d'un point* A *et de son transformé* A_1 *lorsque le premier varie sur un horicycle* γ *de même fa-centre fa-impropre que la fa-rotation reste constante et il en est de même de la fa-distance* $[AA_2]$ *des deux points* A, A_2 *où* γ *est coupé par les axes* δ, δ' *de deux fa-symétries dont le produit est la fa-rotation.*

26. **Fa-symétrie centrale.** — Parmi les fa-rotations, il y a lieu de distinguer celles qui comme une fa-symétrie axiale sont des *transformations réciproques* se confondant avec leurs inverses et, par conséquent, ne changeant pas si l'on

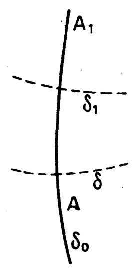

Fig. 14.

permute les deux fa-symétries qui les composent et leurs axes δ, δ_1 : le problème est le même que pour un produit de deux inversions de sorte que *toute fa-rotation réciproque est une fa-rotation de 2^e^ espèce produit de deux fa-symétries d'axes rectangulaires et d'angle de rotation égal à deux droits.*

Il est intéressant de retrouver cette proposition en application des propriétés générales qui viennent d'être établies; la réciprocité signifie, en effet, que en échangeant A et A_1, les fa-distances $[AA_1]$, $[A_1A]$, déjà égales et de sens contraires sont aussi de même sens, ce qui est impossible en I^re^ si γ est un exocycle ou un horicycle et ne se réalise que si ces fa-distances ont leur valeur maximum obtenue avec A et A_1 extrémités d'un fa-diamètre de l'endocycle γ d'où un angle de rotation (CA, CA_1) égal à deux droits.

Dans cette transformation, les points homologues A, A_1 sont alignés avec le ou les fa-centres C, C' qui restent invariants et répondent à $[CA] = [CA_1]$; l'opération est dite *fa-symétrie centrale*, A et A_1 sont *fa-symétriques* par rapport à C (ou C et C').

Cette question se relie à celle des fa-droites invariantes dans une fa-rotation.

Si δ_0 est une telle fa-droite, l'un de ses points A, choisi arbitrairement, a son transformé A_1 sur cette même fa-droite δ_0; des deux fa-symétries en lesquelles on peut décomposer la fa-rotation, la seconde, ayant pour axe la fa-médiatrice δ_1 de AA_1 est perpendiculaire à δ_0 et la laisse invariante; il en résulte que la première laisse aussi δ_0 invariante et comme son axe passe par A, cet axe est ou bien la fa-droite δ_0 elle-même ou bien sa perpendiculaire δ en A; dans le premier cas la fa-rotation est une fa-symétrie centrale de centre placé sur δ_0, dans le second, elle est une fa-rotation de Ire espèce, produit de deux fa-symétries d'axes tous deux perpendiculaires à δ_0. On distingue ces deux cas en observant que chaque fa-symétrie d'axe δ ou δ_1 laisse δ_0 globalement invariante en renversant son sens, deux points homologues variant sur δ_0 en la parcourant en sens contraires, tandis qu'avec le produit de ces deux fa-symétries les points homologues parcourent δ_0 dans le même sens; δ_0 est dite *indirectement invariante* dans le premier cas et *directement invariante* dans le second.

On rencontre ici une notion nouvelle, d'*invariance indirecte ou directe*, voisine de celle de fa-déplacement indirect ou direct, mais qui s'en distingue par son caractère, la première concernant seulement les points d'une fa-droite et se définissant, par exemple, par la position de deux points de celle-ci et de leurs transformés, tandis que la seconde concerne tous les points du plan et se définit par la position de trois points non fa-alignés et de leurs transformés; la distinction se retrouve aussi dans les propriétés, une inversion négative, par exemple, constituant une transformation indirecte du plan alors qu'elle laisse directement invariant tout cercle qui lui est orthogonal.

Les conclusions sont les suivantes : *en* IIe *toute fa-rotation et en* Ire *toute fa-rotation de* 1re *espèce admet une fa-droite directement invariante et une seule, la fa-médiatrice de ses fa-centres* C, C′ *en* IIe, *la fa-droite* IJ *joignant ses fa-centres fa-impropres en* Ire, *et toute fa-rotation de* 2e *ou* 3e *espèce en* Ire *n'en admet aucune.*

En Ire *et en* IIe *une fa-rotation n'admet de fa-droite indirectement invariante que si elle est une fa-symétrie centrale et en admet alors une* ∞^1, *toutes les fa-droites issues de son ou de ses fa-centres.*

27. **Fa-déplacements indirects.** — Passant à l'étude des fa-déplacements indirects et leur appliquant la proposition générale du § 22, celle-ci signifie que *tout fa-déplacement indirect laissant invariant un point* A, *fa-propre en* Ire, *se réduit à une fa-symétrie dont l'axe passe par ce point.*

De même, d'après la proposition du § 21, *tout fa-déplacement indirect qui ne se réduit pas à une fa-symétrie axiale est le produit de trois fa-symétries dont les axes sont indépendants et dont le premier ou le troisième peut être choisi arbitrairement;* si, en effet, les trois axes successifs δ, δ_1, δ_2 étaient dépendants, donc appartenant à un même faisceau, on pourrait transformer le produit des deux dernières fa-symétries en un autre dans lequel l'axe de la première qui peut-être une fa-droite quelconque du faisceau comprenant δ_1 et δ_2 serait δ et le fa-déplacement se réduirait alors à la dernière fa-symétrie; on a vu, d'autre part, que la réduction à trois fa-symétries peut se faire en faisant passer soit le premier axe δ, soit le dernier δ_3, par deux points fa-propres arbitraires A, B, donc que cet axe peut bien être choisi arbitrairement; ce dernier fait se justifie aussi en observant que si $\mathcal{D}$ est une fa-symétrie d'axe arbitraire δ, le produit $\mathcal{D}\mathcal{H}$ de cette fa-symétrie et d'un fa-déplacement indirect $\mathcal{H}$ est un fa-déplacement direct réductible au produit $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ de deux fa-symétries, distinctes ou confondues d'axes δ_1, δ_2, ce qui entraîne que $\mathcal{H}$ se réduit bien au produit $\mathcal{D}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ de trois fa-symétries dont l'axe δ de la première $\mathcal{D}$ est arbitrairement choisi, ce caractère n'excluant pas le cas où $\mathcal{H}$ se réduit à une seule fa-symétrie, les trois axes δ, δ_1, δ_2 n'étant pas alors indépendants.

Comparant ces propositions générales à celles qui concernent les fa-déplacements directs, on notera que, contrairement à ces derniers, *l'ensemble des fa-déplacements indirects ne forme pas un groupe*, car le produit de deux quelconques d'entre eux est un fa-déplacement direct qui n'appartient pas à cet ensemble; mais la réduction précédente où $\mathcal{D}$ est arbitraire montre que *cet ensemble se déduit du groupe des fa-déplacements directs en faisant suivre ou précéder chacun de ceux-ci d'une même fa-symétrie axiale arbitrairement choisie.*

Poursuivant la réduction $\mathcal{H} = \mathcal{D}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ d'un fa-déplacement indirect $\mathcal{H}$ à trois

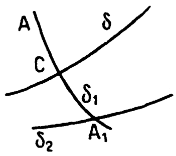

Fig. 15.

fa-symétries axiales, les arbitraires dont on dispose permettent de lui donner diverses formes simples présentant principalement des axes rectangulaires. Considérant d'abord un point fa-propre arbitraire A et son transformé A_1, la première fa-symétrie $\mathcal{D}$, que l'on peut choisir arbitrairement, peut transformer A en A_1, son axe δ étant la fa-médiatrice de AA_1 ou, dans le cas particulier de A et A_1 confondus, une fa-droite quelconque issue de A; le produit $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ des deux autres fa-symétries est alors un fa-déplacement direct laissant A_1 invariant, donc une fa-rotation fermée de centre A_1 dans laquelle on peut disposer de l'axe δ_1 de $\mathcal{D}_1$, parmi les fa-droites issues de A_1, de façon qu'il soit la perpendiculaire, unique ou non, menée par A_1 à l'axe de $\mathcal{D}$, cet axe δ_1 passant ainsi par A et A_1, et l'axe δ_2 de la troisième fa-symétrie $\mathcal{D}_2$ étant alors une fa-droite déterminée issue de A_1. Dans ces conditions, δ et δ_1 étant rectangulaires, le produit $\mathcal{D}\mathcal{D}_1$ des deux premières fa-symétries axiales est la fa-symétrie centrale qui échange A et A_1, et comme toutes ces réductions peuvent aussi se faire dans l'ordre inverse, $\mathcal{D}_2$ jouant alors le rôle tenu dans ce qui précède par $\mathcal{D}$, une première conclusion est que *tout fa-déplacement indirect peut d'une infinité de manières se réduire au produit dans un ordre quelconque de deux fa-symétries l'une centrale, l'autre axiale, l'axe de la seconde pouvant passer par un point fa-propre arbitrairement choisi.*

On peut donner une autre forme à cette réduction; poursuivant nos premières opérations dans lesquelles le produit $\mathcal{D}\mathcal{D}_1$ est une fa-symétrie centrale dont le centre C est le fa-milieu de AA_1, on peut à nouveau disposer des axes δ et δ_1 de façon que δ soit la perpendiculaire, toujours unique ou non, menée par le centre C au troisième axe δ_2 et, par suite, soit perpendiculaire commune aux deux autres axes δ_1, δ_2; séparant alors la première fa-symétrie $\mathcal{D}$ du produit $\mathcal{R} = \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ des deux autres, ce produit correspond à deux axes δ_1, δ_2 qui, tous deux perpendiculaires à δ sont non-sécants en I^re^, sécants en II^e^ et parallèles en III^e^, toute cette étude s'appliquant, en effet, en III^e^ et en Géométrie euclidienne sans qu'il soit besoin de l'étudier particulièrement; cette opération $\mathcal{R}$ est une fa-rotation de même espèce que la Géométrie dans laquelle on opère, et comme, d'autre part, δ étant orthogonale à δ_1 et à δ_2, on peut permuter successivement $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et réduire $\mathcal{H}$ aux diverses formes

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}\mathcal{R} = \mathcal{D}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\mathcal{D} = \mathcal{R}\mathcal{D},$$

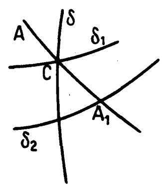

Fig. 16.

les deux opérations partielles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{R}$ sont permutables et la seconde conclusion est que *tout fa-déplacement indirect se réduit au produit d'une fa-symétrie axiale et d'une fa-rotation permutables entre elles, la fa-rotation étant de même espèce que la Géométrie.*

28. Axe et invariant d'un fa-déplacement indirect. — Cette réduction fait apparaître un caractère remarquable de la fa-droite δ; elle est directement invariante dans la fa-symétrie $\mathcal{D}$, indirectement dans chacune des deux autres $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, donc aussi directement dans le fa-déplacement $\mathcal{H}$.

Cherchant s'il peut exister d'autres fa-droites possédant cette dernière qualité, considérons *a priori* une telle seconde fa-droite δ'. Nous plaçant d'abord en I^re^ trois cas sont possibles; si δ et δ' sont sécantes, leur point commun S est fa-propre et invariant, $\mathcal{H}$ se réduit à une fa-symétrie d'axe passant par S et ne peut admettre deux fa-droites distinctes directement invariantes, d'où contradiction; si δ et δ' sont non-sécantes, elles ont une perpendiculaire commune unique qui est donc aussi invariante ainsi que ses pieds S_1 et S'_1 sur δ et δ' et l'on rencontre la même contradiction; si enfin δ et δ' sont parallèles en un point fa-impropre I, ce point qui est leur seul point commun est aussi invariant, il en est de même des seconds points fa-impropres J et J' de δ et δ', et $\mathcal{H}$ qui laisse invariant trois points fa-impropres distincts se réduit à la transformation identique ce qui est encore impossible pour un fa-déplacement indirect.

Nous plaçant de même en II^e, les deux fa-droites distinctes δ, δ' se coupent toujours en deux points opposés S, S$'$ et deux cas se présentent : dans le premier, chacun de ces points est invariant, $\mathcal{H}$ se réduit encore à une fa-symétrie axiale et l'on rencontre la même contradiction; dans le second, $\mathcal{H}$ échange ces deux points S, S$'$ et, ne pouvant se réduire à la fa-symétrie ayant pour axe leur fa-médiatrice δ_2, il est le produit de cette fa-symétrie par un fa-déplacement direct qui laisse d'abord invariants S et S$'$ et qui, de plus, laisse indirectement invariantes chacune des deux fa-droites δ, δ' que la fa-symétrie précédente laisse déjà indirectement invariantes; ce fa-déplacement direct est donc la fa-symétrie centrale de centres S et S$'$. Ici il n'y a plus contradiction, et en décomposant cette dernière fa-symétrie ou deux fa-symétries axiales dont les axes sont deux fa-droites rectangulaires quelconques issues des points opposés S, S$'$, pôles de leur fa-médiatrice, $\mathcal{H}$ est le *produit de trois fa-symétries axiales d'axes deux à deux rectangulaires.*

Ce fa-déplacement a des caractères simples : chacun des trois axes a pour pôles les points d'intersection des deux autres; comme ils sont deux à deux rectangulaires, on peut intervertir dans un ordre quelconque les trois fa-symétries et le fa-déplacement est une *opération réciproque;* l'opération laisse directement invariante non seulement toute fa-droite issue des points S, S$'$, pôles de δ_2, mais aussi toute fa-droite issue de chacun des autres couples B, B$'$ et C, C$'$ de point d'intersection des trois axes; en joignant alors respectivement ces trois couples à deux autres points opposés quelconques D, D$'$ on obtient trois fa-droites, dont deux au moins sont distinctes, qui sont toutes directement invariantes et, l'opération n'étant pas la transformation identique, elle transforme tout point D en son opposé; enfin comme ces points opposés se déplacent en même sens sur toute fa-droite *l'opération laisse directement invariante toute fa-droite du plan.*

Or on connaît un fa-déplacement indirect possédant cette qualité; c'est en II^e l'inversion fondamentale ω qui est bien un fa-déplacement comme transformant chaque couple de points opposés en ce même couple; d'où ce résultat important que nous allons commenter d'après lequel *le seul fa-déplacement indirect laissant invariante plus d'une fa-droite existe en* II^e *où il se confond avec l'inversion fondamentale.*

En résumé, *tout fa-déplacement indirect, qu'il soit réductible ou non à une fa-symétrie axiale, laisse directement invariante une fa-droite et une seule,* qui sera dite *l'axe du fa-déplacement, à moins que, se confondant en* II^e *avec l'inversion fondamentale, il ne laisse aussi invariante toute fa-droite du plan.*

Ceci permet de compléter les conclusions du paragraphe précédent où la réduction $\mathcal{H} = \mathcal{D}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{D}$ dans laquelle l'axe δ de la fa-symétrie $\mathcal{D}$, directement invariant dans ce fa-déplacement $\mathcal{H}$ est donc unique en général de sorte que *la réduction d'un fa-déplacement indirect distinct de l'inversion fondamentale au produit d'une fa-symétrie axiale et d'une fa-rotation permutables entre elles n'est possible que d'une seule manière et l'est d'une infinité de manières pour l'inversion fondamentale.*

Il en résulte que, de même que pour la fa-rotation $\mathcal{R}$, *tout fa-déplacement* *indirect a un invariant, celui de la fa-rotation précédente :* ce sera en I^{re} la fa-distance des axes variables δ_1, δ_2 des deux fa-symétries $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ en lesquelles peut se décomposer la fa-rotation de 1^{re} espèce $\mathcal{R}$; en II^e ce sera l'angle de ces deux axes, $\mathcal{R}$ étant de deuxième espèce; si $\mathcal{H}$ se réduit à une seule fa-symétrie axiale, cet invariant est nul en I^{re} et en II^e; et si en II^e $\mathcal{H}$ est l'inversion fondamentale, il est égal à un droit, $\mathcal{R}$ étant alors une fa-symétrie centrale.

Quant à l'autre réduction de $\mathcal{H}$ à deux fa-symétries, l'une centrale, l'autre axiale laissant toutes deux indirectement invariante la perpendiculaire abaissée d'un fa-centre de la première sur l'axe de la seconde, leur produit la laissant ainsi directement invariante, on voit de même que *la réduction d'un fa-déplacement indirect distinct de l'inversion fondamentale au produit de deux fa-symétries l'une centrale et l'autre axiale est possible d'une* ∞^1 *de manières, le lieu du fa-centre* C *de la première étant l'axe du fa-déplacement et la fa-distance de ce fa-centre* C *à l'axe de la seconde étant son invariant; la même réduction pour l'inversion fondamentale est possible d'une* ∞^2 *de manières, les fa-centres opposés* C, C' *étant arbitraires et l'axe correspondant de la fa-symétrie axiale étant leur fa-médiatrice.*

29. **Fa-déplacement indirect et réciproque.** — Arrêtons-nous sur le cas remarquable de l'inversion fondamentale en considérant *a priori*, en II^e, une décomposition quelconque $\mathcal{H} = \mathcal{D}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ de l'opération en trois fa-symétries d'axes δ, δ_1, δ_2; le premier axe δ étant directement invariant dans le fa-déplacement $\mathcal{H}$ comme dans la fa-symétrie $\mathcal{D}$ l'est aussi dans la fa-rotation de 2^e espèce produit des fa-symétries $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et, par conséquent, est perpendiculaire aux axes δ_1, δ_2 de celle-ci : de même, en procédant dans l'ordre inverse, δ_2 est perpendiculaire à δ et δ_1 et, par suite, *dans toute décomposition en* II^e *de l'inversion fondamentale en un produit de trois fa-symétries axiales les axes de celles-ci sont deux à deux rectangulaires :* ce résultat complète par son caractère nécessaire celui déjà signalé plus haut.

Un autre problème est de chercher s'il existe des fa-déplacements indirects et réciproques autres que ceux que l'on connaît déjà, les fa-symétries axiales et en II^e l'inversion fondamentale, les diverses réductions établies en donnant des solutions qui soulignent en même temps les rôles et caractères des opérations permutables. Si d'abord l'on réduit ce fa-déplacement $\mathcal{H}$ au produit $\mathcal{H} = \mathcal{D}\mathcal{C}$ d'une fa-symétrie $\mathcal{D}$ d'axe δ par une fa-symétrie centrale $\mathcal{C}$ de fa-centre C (ou C et C'), comme chacune de celles-ci est elle-même une opération réciproque, l'opération inverse de $\mathcal{H}$ est le produit $\mathcal{C}\mathcal{D}$ et la condition pour que $\mathcal{H}$ soit réciproque est donc que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ soient permutables, que chacune laisse l'autre invariante, ou encore que, en I^{re}, l'axe δ passe par le fa-centre C, et en II^e, qu'il passe par les deux fa-centres C, C' ou qu'il soit leur fa-médiatrice.

De même, si l'on réduit $\mathcal{H}$ au produit $\mathcal{H} = \mathcal{D}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{D}$ de deux opérations permutables, une fa-symétrie axiale $\mathcal{D}$ qui est une opération réciproque et une fa-rotation $\mathcal{R}$ qui, en général, ne l'est pas, l'opération inverse de $\mathcal{D}\mathcal{R}$ est non plus $\mathcal{R}\mathcal{D}$, mais $\mathcal{R}'\mathcal{D}$ où $\mathcal{R}'$ est la fa-rotation inverse de $\mathcal{R}$ et la condition cherchée, pouvant s'écrire $\mathcal{R}'\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{D}$ est que la fa-rotation $\mathcal{R}$ soit elle-même réciproque, donc en I^{re} où elle est de 1re espèce qu'elle soit la transformation identique et en II^{e} où elle est de 2^{e} espèce, qu'elle soit encore la transformation identique ou une fa-symétrie centrale $\mathcal{C}$ permutable avec $\mathcal{O}$ et l'on retrouve bien les mêmes solutions que précédemment.

Enfin en appliquant la notion d'invariant, on peut dire encore que la condition est que l'invariant du fa-déplacement soit le même que celui de son inverse ce qui n'a lieu que si cet invariant est nul en I^{re} et en II^{e} ou, en II^{e} seulement, égal à sa valeur maximum répondant à une fa-rotation d'angle égal à deux droits.

Ainsi *les seuls fa-déplacements indirects et réciproques sont en* I^{re} *les fa-symétries axiales et en* II^{e} *ces fa-symétries et l'inversion fondamentale.*

Remarquons enfin pour terminer que, en II^{e}, l'inversion fondamentale est un fa-déplacement indirect, non pas parce que, de même qu'une fa-symétrie, elle est une inversion, car cette inversion est alors négative, mais parce qu'elle se ramène à un produit de trois inversions positives ; en I^{re}, au contraire, quoique inversion positive, elle n'est pas un fa-déplacement puisqu'elle transforme le demi-plan de la figure en un autre qui n'en fait pas partie.

30. **Symétries de deux points; fa-cercles passant par deux points.** — Les notions précédentes de fa-déplacements et de fa-symétries permettent de revenir pour les préciser sur les symétries que présentent les figures simples formées par deux points ou deux fa-droites.

Reprenant d'abord la figure constituée par deux points distincts quelconques mais fa-propres en I^{re} et non opposés en II^{e}, on sait qu'elle admet deux fa-symétries axiales dont les axes sont la fa-droite δ_0 joignant ces points A, B pour l'une, et leur fa-médiatrice δ_1 pour l'autre, et une fa-symétrie centrale dont le centre F est le fa-milieu de AB, point d'intersection des deux axes précédents δ_0, δ_1; la première de ces fa-symétries, d'axe δ_0, laisse invariant chacun des deux points A, B, tandis que les deux autres échangent ces points.

Ces fa-symétries, qui se rattachent aux points fa-équidistants de A et B, permettent aussi de trouver les fa-droites fa-équidistantes de ces points. Considérons *a priori* une telle fa-droite γ : les perpendiculaires, uniques ou non, [AP], [BQ], abaissées de A et B sur cette fa-droite γ sont fa-égales ; écartant le cas particulier où P et Q étant confondus alors que A et B sont distincts, γ serait la fa-médiatrice de AB, deux cas généraux sont à distinguer suivant que A et B sont d'un même côté de γ ou de côtés différents. Dans le premier, la fa-symétrie ayant pour axe la fa-médiatrice de PQ laisse invariante cette fa-droite γ, et échange d'abord les points P et Q, puis les fa-droites PA, QB perpendiculaires en ces points à γ, et enfin les points A et B, placés sur ces perpendiculaires à des fa-distances de P et Q égales et de même sens, l'axe de cette fa-symétrie est donc δ_1, fa-médiatrice de AB, et γ est perpendiculaire à cette fa-médiatrice. Dans le second cas, en raisonnant de même sur la fa-symétrie ayant pour centre le fa-milieu de PQ, on constate que ce centre est aussi le fa-milieu F de AB et que γ passe donc par ce point F. Ces conditions, qui se présentent comme nécessaires, sont d'ailleurs manifestement suffisantes, et comme le second cas comprend, en particulier, celui qui avait été écarté où γ est la fa-médiatrice de AB, la conclusion générale est que *les fa-droites*

γ *fa-équidistantes de deux points distincts* A, B, *fa-propres en* $\mathrm{I^{re}}$, *non opposés en* $\mathrm{II^{e}}$, *forment deux familles, suivant qu'elles ne séparent pas où qu'elles séparent ces deux points, les premières étant les perpendiculaires à la fa-médiatrice* δ *de ces deux points, les secondes étant les fa-droites issues du fa-milieu* F *de ces deux points.* On remarquera que chacune de ces familles constitue un faisceau ; en $\mathrm{I^{re}}$, les deux faisceaux sont d'espèces différentes et le premier

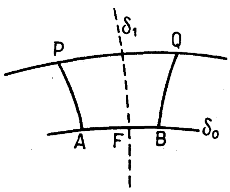

Fig. 17.

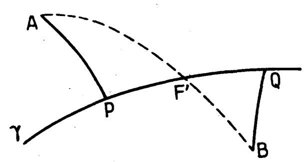

Fig. 18.

a pour points limites les points fa-impropres I, J de la fa-médiatrice δ, lesquels correspondent à des fa-droites limites γ réduites chacune à l'un de ces points I, J; en $\mathrm{II^{e}}$, ces deux faisceaux sont de même espèce : les fa-droites du second passant par les deux points opposés F, F′, sont aussi celles qui sont perpendiculaires à une même fa-droite θ de pôles F, F′ et de même les fa-droites du premier, perpendiculaires à la fa-médiatrice δ de AB sont aussi celles qui passent par les deux points opposés F_1, F'_1, pôles de δ_1, ceux-ci étant, comme F et F′ situés sur la fa-droite AB, qui est une fa-droite particulière passant par F et F′.

On aurait pu d'ailleurs, toujours en $\mathrm{II^{e}}$, traiter plus simplement la question et

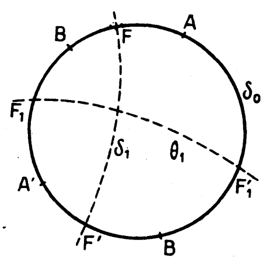

Fig. 19.

ramener les deux problèmes l'un à l'autre en observant que deux points opposés quelconques sont toujours fa-équidistants d'une fa-droite quelconque γ et séparés par celle-ci, de sorte que si A′ et B′ sont les opposés de A et B les fa-droites fa-équidistantes de A et B et séparant ces points sont aussi celles qui sont fa-équidistantes de A′ et B sans les séparer; les points fixes, deux à deux opposés, qui interviennent ici sont les uns les fa-milieux F de AB, F′ de A′B′, les autres les fa-milieux F_1 de AB′, F'_1 de A′B.

On remarquera encore, en $\mathrm{I^{re}}$ et en $\mathrm{II^{e}}$, que les deux familles ont une fa-droite commune et une seule, la fa-droite δ_0 joignant les deux points A et B, laquelle répond à des fa-distances nulles de A et B à cette fa-droite.

La proposition établie peut enfin s'interpréter autrement en considérant les fa-distances égales de A et B à un point O ou à une fa-droite γ ne séparant pas les points A et B comme les fa-rayons terminés en A et B d'un endocycle de fa-centre O ou d'un exocycle d'axe γ; elle concerne ainsi la *distribution des fa-cercles passant par deux points fa-propres distincts* A, B et signifie que *les fa-centres des endocycles et les bases des exocycles passant par* A *et* B *sont les points de leur fa-médiatrice* δ_1 *et les perpendiculaires à cette fa-médiatrice;* mais alors qu'en I^re^, ces fa-centres et ces bases se rapportent à des fa-cercles différents, en II^e^ ils se rapportent aux mêmes fa-cercles, chacun de ceux-ci pouvant être considéré simultanément comme un endocycle avec ses deux fa-centres situés sur δ_1 et comme un exocycle avec sa base perpendiculaire à δ_1; d'autre part, en I^re^ les deux familles de fa-cercles ont en commun deux fa-cercles limites constitués par deux horicycles dont les fa-centres I ou J sont les points fa-impropres de δ_1, et qui peuvent être aussi regardés comme des exocycles dont les bases se réduisent à ces points : on retrouve ici les deux horicycles passant par deux points.

Reste nn second cas général, celui d'une fa-droite γ séparant A et B, qui s'interprète de la même manière à condition d'envisager simultanément deux exocycles fa-symétriques par rapport à leur base commune γ et à ce titre fa-égaux, la proposition générale signifiant alors en I^re^ et en II^e^ que *les bases communes à deux exocycles fa-symétriques par rapport à l'une d'elles et passant l'un par* A, *l'autre par* B *sont les fa-droites issues du fa-milieu* F *de ces points* A, B.

En dernier lieu, on constatera immédiatement que ces diverses propositions sont aussi valables en III^e^ où elles constituent des propositions classiques de la Géométrie euclidienne.

31. Symétries de trois points; fa-cercles circonscrits et ex-circonscrits à un triangle. — Appliquons ces diverses propositions à un système de trois points A, B, C, tous fa-propres en I^re^ et distincts de leurs opposés en II^e^. On retrouve d'abord les propriétés déjà établies (§ 20) concernant soit l'existence d'un fa-cercle unique passant par ces trois points, soit celle d'un point O ou d'une fa-droite γ équidistants des trois points, la fa-droite ne séparant pas ces points, soit la qualité des fa-médiatrices des trois points deux à deux d'appartenir à un même faisceau de fa-droites concourantes en O ou perpendiculaires à γ ou parallèles en un même point fa-impropre.

Il y a lieu ensuite de rechercher s'il existe d'autres fa-droites équidistantes mais non d'un même côté de A, B, C; une telle fa-droite γ_1 sépare, par exemple, A des deux autres points B, C, elle passe donc par les fa-milieux F de A et B, E de A et C; elle est ainsi déterminée car F et E ne peuvent être confondus pas plus que B et C et en II^e^ ne peuvent être opposés car s'il en était ainsi B, qui est fa-symétrique de A par rapport à F aussi bien qu'à son opposé F′ se confondrait encore avec C; les points B et C sont alors fa-équidistants et d'un même côté de cette fa-droite γ_1 et celle-ci est donc perpendiculaire à la fa-médiatrice de BC. Il existe de même deux fa-droites analogues, γ_2 qui sépare B de A et C, et γ_3 séparant C de A et B;

ces trois fa-droites γ_1, γ_2, γ_3 sont généralement distinctes, γ_1 par exemple, qui ne sépare pas B et C ne pouvant se confondre avec γ_2 qui les sépare que dans le cas extrême où A, B, C se placent sur ces fa-droites et sont donc fa-alignés. Écartant ce cas banal, A, B, C sont les *sommets d'un fa-triangle non aplati* et la conclusion est *dans* les *trois* espèces que *dans tout fa-triangle* ABC *de sommets fa-propres en* I^{re} *et non opposés en* II^{e} *la fa-droite* EF *qui joint les fa-milieux* E, F *de deux côtés* AB, AC *est perpendiculaire à la fa-médiatrice du troisième côté* BC *et est la seule fa-droite équidistante des trois sommets et séparant des deux autres le sommet* A *opposé à ce troisième côté* BC.

On obtient ainsi dans un fa-triangle ABC trois fa-droites γ_1, γ_2, γ_3 équidistantes des trois sommets et séparant ceux-ci, alors qu'il en existe aussi une quatrième γ, ne séparant plus les sommets, dans tous les cas en II^{e} et en I^{re} lorsque les trois fa-médiatrices ont une perpendiculaire commune γ et non un point commun fa-propc ou fa-impropre.

On relie ainsi un fa-triangle quelconque ABC à un autre DEF dont les sommets sont les fa-milieux du premier et dont les fa-hauteurs (perpendiculaires abaissées de chaque sommet sur le côté opposé) sont les fa-médiatrices de ce premier; mais inversement, ainsi qu'on peut le voir immédiatement, un fa-triangle DEF quelconque, donné *a priori* peut ne pas correspondre à un premier ABC ; nous verrons plus tard à quelle condition il en est ainsi en retrouvant ce fa-triangle DEF à propos d'autres problèmes.

De même qu'avec deux points, ces divers résultats s'interprètent aussi en les rattachant à des fa-cercles; c'est ainsi que le faisceau des trois fa-médiatrices correspond au fa-cercle Γ passant par A, B, C, dit *circonscrit au fa-triangle* ABC et qui est suivant les cas, un endocycle centré au point fa-propre commun aux trois fa-médiatrices, ou un exocycle ayant pour base leur perpendiculaire commune, ou un horicycle centré en leur point fa-impropre commun.

Pour les mêmes raisons, la fa-droite γ_1, qui sépare A de B et C est la base d'un exocycle Γ_1 passant seulement par les deux sommets B, C, le troisième sommet A, dont la fa-distance à γ_1 est encore égale à celle de B et C, étant situé sur l'exocycle Γ'_1, fa-symétrique de Γ_1 par rapport à leur base commune γ_1; dans ces conditions, on dira que Γ_1, mais non Γ'_1, est le *fa-cercle ex-circonscrit au fa-triangle* ABC *par rapport au sommet* A; il en existe de même deux autres Γ_2, Γ_3, de bases γ_2, γ_3, par rapport aux sommets B, C; la conclusion est que *tout fa-triangle* ABC *admet un fa-cercle circonscrit qui en* I^{re} *peut être un endocycle*, *un exocycle ou un horicycle*, *et trois fa-cercles ex-circonscrits qui en* I^{re} *sont tous des exocycles.*

En II^{e}, ces conclusions ont une forme particulière simple : Γ_1 et Γ'_1 sont en effet, deux fa-cercles opposés qui appartiennent alors tout entiers à la figure non euclidienne en même temps que les opposés A$'$, B$'$, C$'$ de A, B, C, Γ_1 passant donc par les trois points A$'$, B, C et Γ'_1 par A, B$'$, C$'$, le premier est ainsi le fa-cercle circonscrit au fa-triangle A$'$BC et son existence résulte plus simplement de celle du fa-cercle circonscrit.

On peut aussi, toujours en II^{e}, donner une interprétation particulière des bases γ, γ_1, γ_2, γ_3 des quatre fa-cercles, circonscrit et ex-circonscrits, considérés comme des exocycles. Ainsi qu'on l'a vu à propos des fa-cercles passant par deux points A, B, la base γ du fa-cercle circonscrit Γ passe par les fa-milieux deux à deux deux opposés F_1, F'_1 de AB' et BA', E_1, E'_1 de AC' et CA', D_1, D'_1 de BC' et CB'; cela signifie que *en* II^e^ *les fa-milieux des six couples de points formés chacun par un sommet d'un fa-triangle et l'opposé d'un autre sommet forment un système de six points fa-alignés et deux à deux opposés et la fa-droite d'alignement est la base du fa-cercle circonscrit au fa-triangle;* les autres bases γ_1, γ_2, γ_3 ont des interprétations analogues où, pour γ_1 par exemple on remplace le fa-triangle ABC par $A'BC$ et où, sur les six points fa-alignés, on retrouve les quatre fa-milieux de deux côtés AB, AC du fa-triangle.

Revenant en I^re^ où l'opposé A' d'un point A n'appartient plus à la figure non euclidienne et où un exocycle Γ_1 n'est qu'un arc de cercle qui se complète d'un second arc extérieur à cette figure, on remarquera d'après les mêmes raisons que *en* I^re^ *un exocycle ex-circonscrit à un fa-triangle* ABC *est porté par un cercle passant par deux sommets de ce fa-triangle et l'opposé du troisième.*

32. **Symétries de deux fa-droites.** — De même que pour deux points, il y a lieu d'étudier les fa-symétries, axiales et centrales, que peut posséder un système de deux fa-droites distinctes quelconques α, β. Parmi ces fa-symétries on relèvera d'abord celles qui laissent invariante chacune des fa-droites α, β et qui sont, comme on le voit immédiatement la fa-symétrie ayant pour centre le ou les points opposés où se coupent α et β si en I^re^ celles-ci sont sécantes, puis la fa-symétrie ayant pour axe la perpendiculaire commune à α et β si en I^re^ celles-ci sont non sécantes, et enfin dans le cas particulier où α et β sont des fa-droites rectangulaires, les deux fa-symétries ayant pour axes ces fa-droites.

Mais on n'entend par fa-symétries de deux fa-droites que celles qui *échangent ces fa-droites;* on a déjà rencontré à ce titre (§ 6), lorsque α et β sont sécantes, les fa-symétries ayant pour axes les fa-bissectrices de leur angle; mais reprenant cette étude, considérons la fa-symétrique β d'une fa-droite quelconque α par rapport à un axe θ, donné *a priori :* si θ est sécante à α, ce qui est toujours le cas en II^e^, β coupe α aux mêmes points et θ bissecte leur angle; si θ et α ont une perpendiculaire commune δ, ce qui est encore le cas en II^e^, δ est aussi perpendiculaire commune à α et β en des points P et Q, et θ passe par le fa-milieu de PQ; enfin en I^re^ si θ et α sont parallèles en un point fa-impropre I, β est aussi parallèle à α en ce même point I. Considérons, de même, la fa-symétrique β de α par rapport à un centre T donné *a priori* : écartant les cas particuliers où T serait un point de α où en II^e^ un pôle de α, β étant alors confondue avec α, β et α ont une perpendiculaire commune δ qui est la perpendiculaire, unique même en II^e^, abaissée de T sur α, et T est le fa-milieu de PQ, P et Q étant les pieds de cette perpendiculaire commune δ.

De là des résultats qui diffèrent suivant que l'on est en I^re^ ou en II^e^ : *en* II^e^ *deux fa-droites distinctes* α, β *admettent quatre fa-symétries et quatre seulement, deux axiales dont les axes sont rectangulaires et deux centrales dont les centres sont les pôles des axes des premières; ces axes sont les bissectrices de l'angle des deux fa-droites et ces centres sont les fa-milieux des pieds pris* *deux à deux de leur perpendiculaire commune* (nous figurons ces résultats, sans autre commentaire dans deux formes-types où l'on place au centre du cercle fondamental, soit un point d'intersection de α et β, soit un centre de fa-symétrie); *en* I[re] *deux fa-droites sécantes* α, β *admettent seulement deux fa-symétries, toutes deux axiales dont les axes sont rectangulaires et bissectent l'angle de ces fa-droites* α, β, *deux fa-droites non sécantes* α, β *admettent deux fa-symétries l'une axiale, l'autre centrale dont l'axe et le centre sont unis, ce centre* T *et cet axe* θ *étant le fa-milieu* T *et la fa-médiatrice* θ *de la perpendiculaire commune* PQ *aux deux fa-droites* α, β; *deux fa-droites parallèles* α, β *n'admettent qu'une fa-symétrie, qui est axiale, et dont l'axe est parallèle à ces*

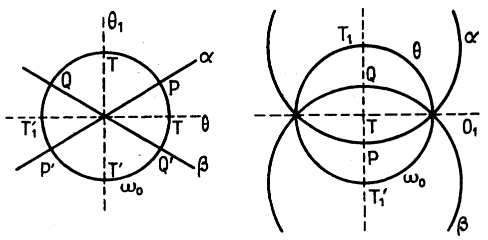

Fig. 20.

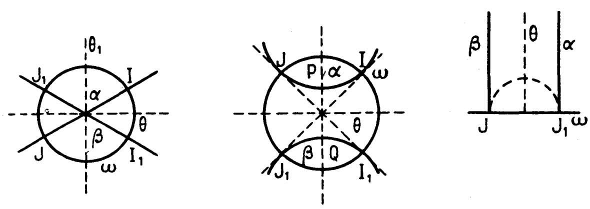

Fig. 21.

deux fa-droites en leur point fa-impropre commun (nous figurons, pour chacun de ces trois cas, une forme-type simple, le centre du cercle fondamental étant le point commun à α et β dans le premier cas, le centre T de fa-symétrie dans le second, et le point ∞ étant dans le troisième cas le point fa-impropre commun à α et β).

Une première application, immédiate concerne les points fa-équidistants de deux fa-droites α, β, ou encore la détermination par leurs fa-centres des endocycles en I[re], de tous les fa-cercles en II[e] qui sont tangents à α et β; le résultat est que *en* II[e] *deux fa-droites distinctes* α, β *admettent deux familles de fa-cercles tangents à ces deux fa-droites, le lieu de leurs fa-centres étant pour chaque famille l'un des axes de fa-symétrie des deux fa-droites; en* I[re], α *et* β *admettent deux familles d'endocycles tangents à ces deux fa-droites lorsque celles-ci sont sécantes et une seule famille lorsqu'elles sont non sécantes ou parallèles, le lieu des fa-centres dans chaque famille étant un axe de fa-symétrie des deux fa-droites;* on observera que en II[e] chacun de ces lieux géométriques est une fa-droite tout entière constituée au sens euclidien par un cercle entier ou une droite, tandis qu'en I^{re} ce lien qui est toujours, au sens non euclidien une fa-droite entière, n'est plus au sens euclidien qu'un arc de cercle intérieur au cercle fondamental.

33. **Fa-droites isogonales ou équidistantes à deux autres; fa-cercles tangents à deux fa-droites.** — Dans une seconde application, étudions de même, non plus les points, mais les fa-droites δ qui restent invariantes dans une fa-symétrie de deux fa-droites α, β. En raison de leurs caractères qui diffèrent suivant l'espèce de Géométrie, nous nous placerons d'abord en I^{re}, auquel cas une telle fa-droite invariante δ est perpendiculaire à un axe θ de fa-symétrie de α et β, ou passe par un centre T de fa-symétrie.

Le premier cas se subdivise à son tour en trois autres; si δ est sécante à α, elle l'est aussi, à β et de plus d'après la fa-symétrie axiale qui inverse les sens, elle forme avec α et β des angles égaux et de sens contraires, elle est dite *indirectement isogonale* à α et β : si δ est non sécante à α, pour les mêmes raisons, elle l'est aussi à β, ses fa-distances à α et β sont égales, et elle ne sépare pas celles-ci qui sont tout entières situées d'un même côté de δ, cette fa-droite δ est *équidistante non séparatrice* de α et β, ou encore elle est la *base d'un exocycle tangent à α et β*; si enfin dans un cas limite δ est parallèle à α, ses deux points fa-impropres, fa-symétriques par rapport à θ, appartiennent l'un à α, l'autre à β, δ est aussi parallèle à β, elle est donc une *parallèle commune en des points distincts et non séparatrice* à α et β; on peut dire aussi dans ce cas limite et bien que les termes d'angle et de fa-distance soient alors illusoires que δ forme encore avec α et β des angles égaux et de sens contraires, et que α et β se placent d'un même côté de δ à des fa-distances égales.

Le second cas, de δ passant par un centre T de fa-symétrie de α et β, s'étudie et se subdivise de la même manière avec cette circonstance qu'une fa-symétrie centrale est un fa-déplacement direct qui conserve les sens; ou bien δ, dite alors *directement isogonale* à α et β, est une sécante commune à ces fa-droites et forme avec elles des angles égaux mais de même sens; ou bien, non sécante à chacune des deux fa-droites α, β, elle leur est *équidistante séparatrice*; ou enfin dans un cas limite, elle leur est une *parallèle commune en des points distincts et séparatrice*, ce cas limite s'interprétant comme le précédent.

On rencontre ici des circonstances différentes avec des qualités dont on établit aisément toutes les réciproques; n'en développant que quelques-unes, considérons par exemple, donnée *a priori* une fa-droite δ équidistante de α et β; cette fa-droite δ est non sécante à α et à β, elle admet avec α une perpendiculaire commune AP, avec β une autre BQ, A étant sur α, B sur β, P et Q sur δ, et les fa-distances [AP], [BQ] sont égales; si δ ne sépare pas α et β, il en est de même pour A et B, et alors la fa-symétrie ayant pour axe θ la fa-médiatrice de PQ laisse invariante δ et échange P et Q, puis les perpendiculaires en P et Q à δ, les points A et B placés sur ces perpendiculaires à des fa-distances égales et de même sens de A et B et enfin les fa-droites α et β perpendiculaires en A et B aux fa-droites précédentes; δ est donc bien perpendiculaire à un axe θ de fa-symétrie de α et β;

si δ sépare α et β, le raisonnement est le même en y remplaçant la fa-symétrie d'axe θ par celle qui a pour centre le fa-milieu T de PQ et δ passe bien par un centre T de fa-symétrie de α et β.

Soit encore, donnée *a priori*, une fa-droite δ parallèle à α et β en des points distincts; dans le cas général où α et β ne sont pas parallèles, les points fa-impropres I, J de α, I_1, J_1 de β sont distincts et il n'existe que quatre fa-droites II_1, IJ_1, I_1J, I_1J_1 possédant la qualité énoncée; dans le cas contraire, α et β ont un point fa-impropre commun I, les autres J et J_1 sont distincts et la fa-droite JJ_1 possède seule cette qualité; δ est donc l'une de ces quatre fa-droites ou cette fa-droite unique, et comme on sait que chacune de celles-ci reste invariante dans l'une des fa-symétries existant entre α et β, il en est bien de même pour δ : on retrouve d'ailleurs ici une disposition déjà rencontrée à propos de la perpendiculaire commune à deux fa-droites.

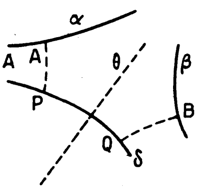

Fig. 22.

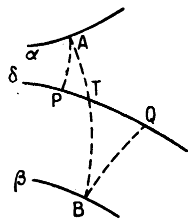

Fig. 23.

Acceptant les autres réciproques, on en retiendra principalement les résultats suivants :

En Ire deux fa-droites distinctes α, β n'admettent de sécante directement isogonale δ et de fa-droite δ_1 équidistante séparatrice que si ces fa-droites α, β sont non sécantes, les fa-droites δ et δ_1 étant alors celles qui passent par le centre de fa-symétrie de α et β et sont sécantes à α et β pour les premières, non sécantes pour les secondes.

Les exocycles tangents à deux fa-droites distinctes α, β forment deux familles si ces fa-droites α, β sont sécantes, une seule si elles sont non sécantes ou parallèles, et les bases de ces exocycles sont les fa-droites qui sont perpendiculaires à un axe de fa-symétrie de α et β et non sécantes à celles-ci.

Rapprochant ce dernier résultat de celui qui concerne les endocycles, *un même axe θ détermine simultanément dans une famille tous les fa-cercles tangents à α et β :* dans les deux cas généraux où α et β ne sont pas parallèles, les endocycles de la famille sont définis par leurs fa-centres qui parcourent l'axe θ, les exocycles le sont par leurs bases perpendiculaires à cet axe et non sécantes à α et β et décrivent deux bandes limitées chacune par un point fa-impropre de l'axe θ et une parallèle commune non séparatrice à α et β, enfin deux horicycles limites communes des unes et des autres ont pour fa-centres les points fa-impropres de l'axe θ, et deux perpendiculaires à θ, parallèles communes à α et β, sont deux autres endocycles limites réduits à leurs bases et de rayon nul; dans le cas particulier où α et β sont parallèles cette génération subsiste à cela près qu'il n'y a plus qu'une seule bande, une seule parallèle commune, un seul horicycle.

On observe encore que cette génération donne aussi les *fa-cordes de contact*, fa-droites joignant les points de contact de α et β avec un même fa-cercle, ces fa-cordes perpendiculaires à θ et sécantes à α et β décrivant la bande complémentaire des deux ou de la précédente, limitée par les deux ou la parallèle commune à α et β et perpendiculaire à θ.

34. Toute cette étude est à reprendre en II^e; mais elle est plus rapide et plus simple pour diverses raisons : l'une est que deux fa-droites distinctes α, β se coupent toujours en deux points opposés P, P′ et qu'il n'y a plus de fa-droites non sécantes ou parallèles; l'autre est que α et β ont simultanément deux fa-symétries axiales et deux centrales. Si donc une fa-droite δ est perpendiculaire à un axe θ de fa-symétrie de α et β, elle passe par les centres opposés de la fa-symétrie qui sont les pôles T, T′ de θ, et réciproquement; une fa-droite δ invariante dans une fa-symétrie axiale de α et β l'est aussi dans l'une de leurs fa-symétries centrales et réciproquement; donc *en* II^e *les mêmes fa-droites sont à la fois indirectement et directement isogonales à* α *et* β : chacune d'elles δ coupe α en deux points opposés A, A′ et sous des angles de sens contraires, elle coupe de même β en deux autres points B, B′ que l'on peut désigner de façon que A et B, A′ et B′ soient fa-symétriques par rapport à l'axe θ, A et B′, A′ et B l'étant alors par rapport aux centres T, T′ pôles de θ; δ est indirectement isogonale en A et B, A′ et B′ à α et β, et directement en A et B′, A′ et B.

Quant aux fa-cercles tangents à α et β, ils peuvent être considérés simultanément comme des endocycles et des exocycles; au premier titre, chacun d'eux a deux fa-centres opposés C, C′ qui appartiennent à un axe θ de fa-symétrie de α et β, et au second titre, chacun d'eux a une base δ laquelle, fa-médiatrice de CC′ est perpendiculaire à l'axe θ et en même temps passe par les centres de fa-symétrie T, T′ pôles de θ; la conclusion est que *en* II^e *les fa-cercles tangents à deux fa-droites distinctes* α, β *forment deux familles; si on les considère comme des endocycles, le lieu de leurs fa-centres, dans chaque famille, est un axe* θ *de fa-symétrie de* α *et* β *et si on les considère comme des exocycles, leurs bases sont les fa-droites issues de deux points opposés* T, T′ *centres de fa-symétrie de* α *et* β, *et pôles de l'axe* θ.

35. Symétries de trois fa-droites. — Passant à un système de trois fa-droites distinctes quelconques α, β, γ, il y a lieu d'étudier les relations existant entre leurs axes et centres de fa-symétrie deux à deux. Nous nous placerons d'abord en II^e où l'étude est plus simple en nous proposant de chercher un point fa-équidistant de α, β, γ ou encore un centre d'un fa-cercle tangent à ces trois fa-droites : les fa-centres opposés d'un tel fa-cercle Γ se placent sur l'un des axes ρ de fa-symétrie des deux fa-droites β, γ, sur un autre σ de γ, α; ces axes ρ, σ se coupent en deux points opposés O, O′ qui, par construction sont fa-équidistants des trois fa-droites α, β, γ et, par conséquent, appartiennent à un axe θ de fa-symétrie du troisième couple α, β de fa-droites; d'où ce premier résultat que *en* II^e, *étant données trois* *fa-droites distinctes* α, β, γ, *deux axes quelconques de fa-symétrie de deux couples de ces fa-droites concourent aux mêmes points avec l'un des axes de fa-symétrie du troisième couple.*

Si dans ce qui précède on remplace l'axe ρ par l'autre axe ρ_1 de fa-symétrie de β, γ sans changer σ, le troisième axe θ concourant avec les deux premiers doit aussi être remplacé par le second axe θ_1 de α, β car dans le cas contraire les points de concours de ρ, σ, θ seraient les mêmes que ceux de ρ_1, σ, θ, et seraient donc les points d'intersection opposés de ρ et ρ_1, comme ceux de β et γ, puis de γ et σ, de γ et α, et les trois fa-droites proposées α, β, γ seraient concourantes, cas particulier que nous écarterons dans tout ce qui suit; par conséquent, dans le cas général, les axes ρ_1, σ, θ_1 sont concourants, ainsi de même que ρ, σ_1, θ_1, puis ρ_1, σ_1, θ, mais ρ_1, σ, θ, ni ρ, σ_1, θ, ni ρ_1, σ_1, θ_1 ne le sont pas : *en* II^e *lorsque trois fa-droites* α, β, γ *ne sont pas concourantes, les axes de fa-symétrie des trois couples qu'elles forment deux à deux s'associent trois par trois en étant concourants, de telle façon que si* ρ, σ, θ *sont trois de ces axes concourants, il en est de même pour* ρ, σ_1, θ_1 ; ρ_1, σ, θ_1 ; ρ_1, σ_1, θ.

Revenant au problème initial des fa-cercles tangents à α, β, γ, chacune de ces quatre combinaisons donne deux points de concours opposés O, O$'$ qui sont les fa-centres communs à deux fa-cercles opposés répondant à la question, d'où *huit fa-cercles tangents aux trois fa-droites* α, β, γ.

Si l'on précise en considérant α, β, γ, non concourantes comme fa-droites portant respectivement les côtés BC, CA, AB d'un fa-triangle ABC défini par trois sommets non fa-alignés A, B, C, on peut choisir pour axes ρ, σ les bissectrices intérieures des angles en B et C de ce fa-triangle; leurs points d'intersection sont intérieurs, l'un O au fa-triangle, l'autre O$'$ au fa-triangle opposé, le troisième axe θ concourant en O et O$'$ avec ρ et σ est donc la bissectrice intérieure du troisième angle de sommet A, et des deux fa-cercles, l'un Γ dit *fa-cercle inscrit* au triangle, est intérieur à ce triangle, et son fa-centre O répond à un rayon inférieur à $\frac{\pi}{2}$, et l'autre Γ', que l'on ne retiendra pas spécialement, est intérieur au triangle opposé A$'$B$'$C$'$, et égal au précédent.

Les autres combinaisons d'axes concourants, telles que ρ_1, σ_1, θ sont ensuite formées par les bissectrices extérieures ρ_1, σ_1 des angles en B et C et la bissectrice intérieure θ du troisième angle, bissectrices qui sont aussi les bissectrices intérieures du fa-triangle A$'$BC déduit du premier en y remplaçant un sommet A par son opposé A$'$; chacune de ces combinaisons donne encore deux fa-cercles, l'un Γ_1, dit *fa-cercle exinscrit à l'angle* A du fa-triangle, qui est inscrit et intérieur au triangle A$'$BC, et l'autre Γ'_1, son opposé, inscrit au triangle AB$'$C$'$; les huit cercles tangents aux trois fa-droites α, β, γ sont ainsi placés respectivement à l'intérieur des huit régions triangulaires en lesquelles ces fa-droites partagent le plan.

On généralise ici les propriétés de la Géométrie classique : *en* II^e, *les bissectrices intérieures des angles d'un fa-triangle sont concourantes, et il en est de même de deux bissectrices extérieures et de la bissectrice intérieure du troisième* *angle; un fa-triangle admet huit fa-cercles tangents à ses trois côtés, dont un inscrit et trois exinscrits et quatre autres opposés aux précédents.*

On pourra reprendre cette étude en considérant les fa-symétries centrales et leurs centres reliant deux à deux les trois droites α, β, γ, et en cherchant les droites isogonales à celles-ci; sans qu'il soit besoin de répéter les raisonnements, on obtient ainsi des propriétés analogues, lesquelles peuvent d'ailleurs se déduire aussi des premières en rappelant que des fa-droites concourantes ont des pôles fa-alignés et réciproquement; on en déduit donc que, *en* II^e, *étant données trois fa-droites non concourantes* α, β, γ, *deux fa-symétries centrales de deux couples de ces fa-droites ont des centres, deux à deux opposés, qui sont fa-alignés avec les centres de l'une des fa-symétries du troisième couple; il existe ainsi quatre*

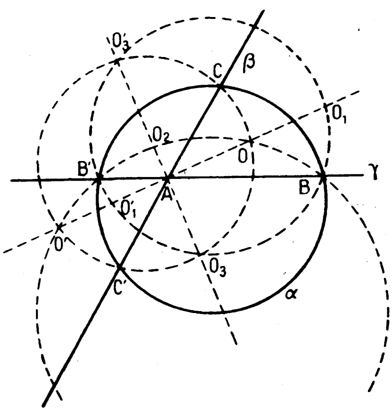

Fig. 24.

fa-droites d'alignement dont chacune porte les centres d'une fa-symétrie de chacun des trois couples formés par les trois fa-droites α, β, γ *et coupe orthogonalement un axe de fa-symétrie de ces mêmes couples;* constatons encore que *chaque fa-droite d'alignement a pour pôles les fa-centres d'un fa-cercle inscrit ou exinscrit à tout triangle formé par* α, β, γ, et qu'elle est ainsi la base de ce fa-cercle considéré comme exocycle.

36. Reprenant cette étude en I^{re} et les trois fa-droites distinctes α, β, γ, en nous inspirant de ce qui a été obtenu en II^e, nous avons à combiner une fa-symétrie $\mathcal{R}$ de β et γ avec une autre $\mathcal{S}$ de γ et α, chacune d'elles pouvant être axiale ou centrale. Dans un premier cas, analogue à celui traité en II^e, ces fa-symétries sont axiales et leurs axes ρ, σ sont sécants ou parallèles; leur point commun O, fa-propre ou fa-impropre, est le centre d'un endocycle ou d'un horicycle Γ tangent à γ, puis par fa-symétrie tangent aussi à β et à α, il appartient donc à l'axe θ d'une fa-symétrie axiale $\mathcal{T}$ entre β et γ : les trois axes ρ, σ, θ sont concourants ou parallèles en un même point, et les trois fa-symétries $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$

seront dites, comme leurs trois axes, appartenir au *faisceau de sommet* O *de fa-symétries*.

Les autres cas se présentent en variétés assez nombreuses qu'il est recommandé d'étudier successivement, mais dont il nous suffira de relever un caractère commun : dans l'un d'eux, les fa-symétries $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ sont encore axiales, mais leurs axes ρ, σ sont non sécants, ils ont donc une perpendiculaire commune δ qui reste invariante dans ces deux fa-symétries; or dans tous les autres cas, que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ soient toutes deux centrales, ou que l'une soit axiale et l'autre centrale, elles admettent de même une fa-droite invariante commune δ qui est la fa-droite joignant leurs centres ou la perpendiculaire menée du centre de l'une sur l'axe de l'autre. Cela étant, en raison des deux fa-symétries $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, cette fa-droite δ se trouve dans une même position par rapport aux trois fa-droites α, β, γ : ou bien, en associant α, β, γ deux à deux, elle leur est sécante et isogonale directement ou indirectement, ou bien elle leur est non sécante et fa-équidistante, séparatrice ou non séparatrice; ou enfin elle leur est parallèle, ses deux points fa-impropres appartenant d'après la fa-symétrie $\mathcal{R}$, l'un I à β, l'autre J à γ, puis d'après $\mathcal{S}$, J à γ et I à α, α et β étant donc dans ce dernier cas parallèles au point I et δ leur étant parallèle en ce même point; dans les deux cas généraux, δ est donc aussi invariante dans l'une $\mathcal{T}$ des deux fa-symétries du troisième couple α, β de fa-droites, cette fa-symétrie pouvant être centrale ou axiale suivant divers cas dont on pourra discuter; mais il n'en est plus de même dans le cas limite qui ferait ainsi exception; on peut cependant faire rentrer ce cas dans le cas général en disant que α et β qui ont déjà une fa-symétrie axiale, en admettent encore une seconde, dite *fa-symétrie singulière*, considérée comme limite d'une fa-symétrie axiale dont l'axe a ses deux points fa-impropres confondus et se réduit à ce point, et d'une fa-symétrie centrale dont le centre est ce point fa-impropre, cette convention de langage étant la même que celle qui concerne une inversion singulière, dont le cercle d'inversion est réduit à un point.

Ces fa-symétries singulières peuvent s'associer comme on vient de le faire avec deux fa-symétries générales $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$; supposons, en effet, *a priori*, que $\mathcal{R}$ soit singulière, donc que les fa-droites β, γ soient parallèles en un point fa-impropre I et que la fa-symétrie $\mathcal{S}$ de γ et α reste générale; il leur correspond encore une fa-droite δ définie comme ayant un point fa-impropre en I et suivant les cas, passant par le centre ou perpendiculaire à l'axe de $\mathcal{S}$; la fa-symétrie $\mathcal{S}$ laisse δ invariante en échangeant ses points fa-impropres I, J, et fait correspondre à γ qui passe par I la fa-droite α qui passe donc par J; δ est ainsi une parallèle commune à α et β et reste bien invariante dans l'une $\mathcal{T}$ des fa-symétries du troisième couple α, β.

Le raisonnement et le résultat restent les mêmes lorsque $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont toutes deux singulières, en écartant toutefois le cas où α, β, γ seraient parallèles en un même point fa-impropre I.

Toutes ces considérations conduisent, ainsi qu'on l'a déjà fait plus haut à propos d'axes concourants, à considérer une seconde espèce de faisceau de fa-symétries et à appeler *faisceau de fa-symétries de base* δ l'ensemble des fa-symétries les unes axiales d'axes perpendiculaires à une même fa-droite δ, les autres centrales ou singulières de centres fa-propres ou fa-impropres situés sur δ, et cela permet de résumer tout ce qui précède dans une première conclusion générale, analogue à celle qui s'est présentée en II^e : *en* I^{re} *étant données trois fa-droites* α, β, γ *non parallèles en un même point fa-impropre, deux fa-symétries quelconques de deux couples de ces fa-droites appartiennent à un faisceau comprenant une fa-symétrie du troisième couple.*

Comme en II^e, on constate ensuite que si l'on remplace $\mathfrak{R}$ par la seconde fa-symétrie $\mathfrak{R}_1$ entre β et γ sans changer $\mathfrak{S}$, la fa-symétrie $\mathfrak{T}$ doit aussi être remplacée par la seconde fa-symétrie $\mathfrak{T}_1$ entre α et β, à moins que les trois fa-droites α, β, γ n'appartiennent avec $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_1$ à un même faisceau, et l'on en déduit que *en* I^{re} *lorsque les trois fa-droites* α, β, γ *n'appartiennent pas à un même faisceau, les fa-symétries* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, ..., *générales ou singulières, qui les relient deux à deux, appartiennent trois par trois à un même faisceau, de telle façon que s'il en est ainsi pour* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, *il en est de même pour* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_1$; $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}_1$; $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}$.

Mais cette proposition a néanmoins un caractère qui n'est pas le même en I^{re}

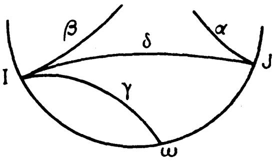

Fig. 25.

et en II^e, car en II^e un même faisceau de fa-symétries, de même qu'un faisceau de fa-cercles, a simultanément deux sommets opposés O, O′ et une base δ, tandis qu'en I^{re}, il ne possède qu'une seule de ces deux qualités.

37. Fa-cercles inscrits et ex-inscrits à un fa-triangle. — Comme en II^e, ces propositions s'appliquent à la recherche des points et fa-droites équidistants de trois fa-droites α, β, γ, des fa-droites isogonales à celles-ci, et plus particulièrement des fa-cercles qui leur sont tangents. Il n'y a lieu de s'arrêter que sur ce dernier problème et, laissant de côté une variété assez nombreuse de cas divers nous nous limiterons au seul cas où α, β, γ sont deux à deux sécants ou parallèles, portant ainsi les côtés d'un fa-triangle fa-propre ou fa-impropre ABC, dont le sommet A opposé à α est le point commun fa-propre ou fa-impropre aux fa-droites sécantes ou parallèles β, γ, le sommet B commun à γ, α et C commun à α, β. Prises deux à deux, ces fa-droites ont, si elles sont sécantes, deux fa-symétries toutes deux axiales, et dont les axes passent par leur point d'intersection, et si elles sont parallèles, elles n'en ont plus qu'une seule, toujours axiale, et dont l'axe, qui leur est parallèle au même point, passe encore par leur point commun.

Opérant alors comme on l'a fait en II^e et cherchant soit le centre d'un endocycle ou d'un horicycle, soit la base d'un exocycle, on est conduit à envisager une bissectrice ρ de l'angle en A du fa-triangle, une autre σ de l'angle en B, et plusieurs cas se présentent. Dans le premier, ρ et σ sont sécantes ou parallèles, leur point commun O, fa-propre ou fa-impropre, est le centre d'un endocycle ou d'un horicycle répondant à la question et à ce titre appartient aussi à une bissectrice θ du

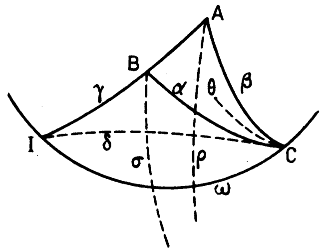

Fig. 26.

troisième angle du fa-triangle; ce premier cas est, en particulier, comme en II^e, celui où ρ et σ sont les bissectrices intérieures des angles en A et B du fa-triangle ABC, le troisième axe θ étant alors la bissectrice intérieure du troisième couple, et leur point de concours O étant le fa-centre d'un endocycle nécessairement intérieur au fa-triangle, tangent aux trois côtés α, β, γ, dit encore *inscrit* au fa-triangle ABC.

Dans un second cas, ρ et σ sont non sécantes; elles ont une perpendiculaire commune δ qui ne peut être sécante à γ auquel cas elle serait indirectement isogonale à β et γ, ainsi qu'à γ et α, donc directement isogonale à α et β, ce qui est impossible avec deux fa-droites sécantes qui n'ont pas de centre de fa-symétrie; δ est donc, en général, non sécante à γ et, par construction, elle est fa-équidistante non séparatrice de β et γ, de γ et α, donc aussi de α et β et à ce titre est perpendiculaire à un axe θ de fa-symétrie de α et β, les trois axes ρ, σ, θ appartenant ainsi comme dans le premier cas à un même faisceau et δ étant la base d'un exocycle tangent à α, β, γ qui répond à la question; dans le cas particulier où δ est parallèle à γ, l'un I de ses points fa-impropres est commun à δ et γ, et d'après

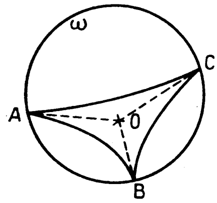

Fig. 27.

les deux fa-symétries, son second point fa-impropre est aussi commun à δ, α et β, et est donc le sommet C du fa-triangle ABC; l'exocycle de base δ tangent à α, β, γ se réduit alors à cette base δ, son fa-rayon étant nul, mais α et β n'ont plus qu'un seul axe θ de fa-symétrie, et cet axe θ étant aussi parallèle à γ au même point fa-impropre C n'est plus comme ρ et σ perpendiculaire à δ et les trois axes ρ, σ, θ n'appartiennent plus à un même faisceau; ce cas particulier fait donc exception sur ce point.

Ce cas exceptionnel peut au reste être évité tant que le fa-triangle ABC n'a pas tous ses sommets fa-impropres; le raisonnement précédent s'applique, en effet, quels que soient les points A et B, fa-propres ou fa-impropres, avec cette seule observation que si A, par exemple, est fa-impropre, l'axe ρ est unique et ne peut pas se choisir de deux manières comme lorsque A est fa-propre. Reste donc seulement le cas extrême où les trois sommets A, B, C sont tous fa-impropres; les trois axes ρ, σ, θ, tous uniques, jouent alors les mêmes rôles que celui des bissectrices intérieures du cas général : ils concourent donc encore en un point O, centre d'un endocycle inscrit au triangle et il n'y a pas d'autre fa-cercle tangent aux trois côtés α, β, γ.

Revenant au cas général où les sommets A, B, C sont tous fa-propres et désignent par ρ, σ, θ les trois bissectrices intérieures des angles du fa-triangle, par ρ_1, σ_1, θ_1 leurs bissectrices extérieures, on peut comme on l'a fait plus haut, combiner chacune des bissectrices ρ, ρ_1 de l'angle en A avec chacune des bissectrices σ, σ_1 de l'angle en B, d'où quatre combinaisons donnant chacune un fa-cercle tangent à α, β, γ; la combinaison ρ, σ s'associe à la troisième bissectrice intérieure θ en donnant l'endocycle inscrit au fa-triangle ABC; ensuite la combinaison ρ_1, σ ne peut s'associer à la même bissectrice intérieure θ, car s'il en était ainsi le faisceau comprenant les deux bissectrices intérieures σ, θ ainsi que ρ et ρ_1 aurait son sommet en A, les fa-droites α, β, γ seraient concourantes et le fa-triangle ABC aurait ses sommets confondus; ce sont donc ρ_1, σ, et θ_1, deux bissectrices extérieures et une intérieure qui appartiennent à un même faisceau de fa-droites concourantes à un point O fa-propre ou fa-impropre ou perpendiculaire en à une même base δ et qui déterminent un fa-cercle, endocycle, horicycle ou exocycle tangent à α, β, γ, mais placé dans la région extérieure au triangle limitée par le côté AC et les prolongements au delà de A et C des deux autres, et dit *fa-cercle exinscrit* dans l'angle B du fa-triangle; de même, les deux autres combinaisons donnant les faisceaux ρ, σ_1, θ_1, et ρ_1, σ_1, θ correspondent aux fa-cercles exinscrits dans les angles A et C.

Lorsqu'un sommet A et un seul est fa-impropre, l'axe ρ_1 n'existe plus, ρ seul se combine avec σ et σ_1; il ne subsiste que deux combinaisons et faisceaux, ρ, σ, θ et ρ_1, σ_1, θ_1, donnant le fa-cercle inscrit et un seul fa-cercle exinscrit, celui-ci placé dans l'angle de sommet fa-impropre A.

Avec deux ou trois sommets fa-impropres, σ_1 n'existe plus, et ne subsistent que la combinaison et faisceau ρ, σ, θ et le fa-cercle inscrit.

En résumé, ayant écarté les deux cas où α, β, γ ne sont pas distinctes ou sont concourantes, où le fa-triangle ABC est aplati sur une fa-droite ou réduit à un point, et considérant encore lorsque deux fa-droites α, β sont parallèles en un sommet fa-impropre C leur axe de fa-symétrie, θ comme la bissectrice intérieure de leur angle, la bissectrice extérieure n'existant plus, nous retiendrons de tout ce qui précède les conclusions suivantes, analogues à celles établies en II[e] :

Les bissectrices intérieures des angles d'un fa-triangle sont concourantes *et leur point de concour set le fa-centre de l'endocycle inscrit au fa-triangle; les bissectrices extérieures, si elles existent, de deux angles, et la bissectrice intérieure du troisième appartiennent à un même faisceau de fa-droites concourantes en un point fa-propre ou fa-impropre ou perpendiculaires à une même fa-droite; ce point ou cette fa-droite est le fa-centre ou la base d'un fa-cercle ex-inscrit dans le troisième angle du fa-triangle.*

Tout fa-triangle a un endocycle inscrit et admet, en outre, trois fa-cercles exinscrits si ses sommets sont tous fa-propres, un seul si l'un de ses sommets et un seul est fa-impropre, aucun si deux au moins de ses sommets sont fa-impropres.

On observera que en Ire en considérant tout le plan euclidien et non le demi-fa-plan non euclidien limité par le cercle fondamental ω, il existe comme en IIe quatre autres cercles tangents aux cercles, propres ou impropres, portant les trois côtés du fa-triangle ; ces quatre cercles se déduisent des quatre premiers dans l'inversion fondamentale par rapport à ω, mais ils ne sont tangents aux cercles portant les côtés que dans les parties qui n'appartiennent pas à la figure non euclidienne et à ce titre ne sont pas des solutions du problème non euclidien qui vient d'être traité. On retrouve ainsi dans cette étude, en Ire et en IIe, ce que l'on appelle le *problème de Gergonne*, qui est celui des cercles tangents à trois autres, mais restreint ici au cas où les trois cercles donnés se coupent deux à deux en des points distincts ; ces trois cercles admettent un cercle orthogonal commun ω, réel ou imaginaire, qui joue le rôle du cercle fondamental, et l'on constate que dans ce cas le problème de Gergonne admet huit solutions.

38. **Cas d'égalité des fa-triangles.** — Nous terminerons ces premiers chapitres, où contrairement aux angles les fa-distances n'interviennent pas par leurs mesures qui ne sont pas encore définies, par l'étude analogue à celle de la Géométrie classique de cas simples d'égalité de fa-triangles. Dans tout fa-triangle ABC, on distingue six *éléments* qui sont ses angles A, B, C, tous compris entre o et deux droite (ou o et π), et ses fa-côtés, respectivement opposés à ces angles :

$$a = [\mathrm{BC}], \qquad b = [\mathrm{CA}], \qquad c = [\mathrm{AB}],$$

fa-distances dont nous savons seulement jusqu'ici reconnaître les caractères d'égalité ou d'inégalité.

Connaissant trois de ces éléments, on peut facilement, dans des cas simples, construire le fa-triangle et si, à sa position près, le problème n'admet qu'une seule solution, avec ou sans condition de possibilité, on en déduit un cas d'égalité de fa-triangles.

Il en est ainsi lorsque l'on connaît un angle A et les deux côtés adjacents b, c car il suffit de placer arbitrairement deux demi-fa-droites Ax, Ay formant les côtés de l'angle A, et de porter sur chacune d'elles, à partir de A, les fa-longueurs

$$b = [\mathrm{AC}], \qquad c = [\mathrm{AB}].$$

Il en est de même lorsque l'on connaît un côté a et les deux angles adjacents B, C, en plaçant arbitrairement un segment de fa-droite $a = [BC]$, et menant par ses extrémités B, C, d'un même côté de ce segment les demi-fa-droites Bx et Cy qui font avec lui des angles égaux à B et C ; en II^e ces fa-droites se coupent toujours en deux points opposés dont un et un seul A situé par rapport à BC du côté choisi, répond à la question ; en I^re elles se coupent sous une condition de possibilité qu'il y aura lieu d'établir, mais ne peuvent se couper qu'en un seul point, le problème ne pouvant donc avoir, toujours à la position près du fa-triangle, qu'une seule solution.

Un troisième cas est celui où l'on connaît les trois côtés a, b, c : le premier $a = [BC]$ étant arbitrairement placé, le troisième sommet A doit être ainsi qu'on l'a déjà vu (§ 13) à propos des fa-déplacements laissant invariants les deux points B, C, un point commun aux deux endocycles de fa-centres B et C et de fa-rayons c, b, lesquels se coupent sous une condition qu''il y aura aussi lieu d'établir et que nous trouverons à la base de la métrique des fa-distances, mais ne peuvent avoir, d'un seul côté de la fa-droite BC, qu'un seul point d'intersection A, le problème ne pouvant donc avoir encore qu'une seule solution.

D'autres combinaisons moins simples pourraient conduire à la même conclusion; on n'en retiendra qu'une seule, celle où l'on connaît les trois angles A, B, C, et que nous allons étudier; admettant, ainsi qu'on va le voir plus bas, qu'elle ne peut conduire qu'à une solution unique, nous retiendrons de ce qui précède les *quatre cas d'égalité* qui suivent de fa-triangles :

Deux fa-triangles qui en I^re *ou en* II^e *ont ou,* 1° *un angle égal compris entre deux côtés fa-égaux chacun à chacun ou,* 2° *un côté fa-égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun ou,* 3° *leurs trois côtés fa-égaux chacun à chacun ou,* 4° *leurs trois angles égaux chacun à chacun, sont fa-égaux.*

39. **Fa-triangle d'angles donnés.** — Proposons-nous donc de construire un fa-triangle ABC connaissant ses trois angles A, B, C, tous compris entre entre 0 et π. On observe d'abord que les données du problème ne comprennent avec des angles qu'une seule longueur, le rayon R du cercle fondamental ω en I^re, de son contraire ω_0 en II^e et, par suite, que, à une similitude près, le problème peut se traiter sans tenir compte de cette longueur.

Une seconde observation, est que, en écartant les fa-triangles limites dont les sommets ou les fa-droites portant les côtés ne sont pas tous distincts, un angle A d'un fa-triangle est nul lorsque ses deux côtés Ax, Ay, issus du sommet A en étant distincts, sont tangents en ce point, donc lorsque l'on est en I^re et que le sommet A est fa-impropre, situé sur ω.

Par conséquent, en se plaçant d'abord dans le cas général où l'un au moins A des angles donnés n'est pas nul, son sommet A sera fa-propre et d'une manière simple, en I^re et en II^e, pourra être placé au centre de ω, les côtés Ax, Ay issus de ce sommet étant alors portés par deux demi-droites issues de A faisant entre elles cet angle non nul A; le troisième côté doit ensuite se placer sur un cercle propre Γ coupant Ax en un point inconnu B sous l'angle donné B et, de même Ay

en un point C sous l'angle C, et sans achever la détermination de ω par son module le problème se réduit à la recherche d'un cercle Γ coupant deux droites Ax, Ay sous les angles donnés B, C ou plus simplement à celle de la direction de la corde BC.

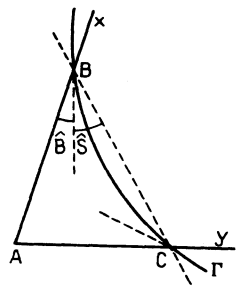

Fig. 28.

Cette corde fait un même angle inconnu S compris entre o et π avec les tangentes en B et C dont la direction est donnée par les angles B, C; en I[re] où l'arc BC de Γ doit tourner sa convexité vers le centre A de ω et se placer ainsi entre les tangentes et la corde, les angles en B et C du triangle rectiligne (et non du fa-triangle) ABC, égaux respectivement à $B + S$, $C + S$, satisfont donc avec A à la condition

$$A + (B + S) + (C + S) = \pi \qquad \text{ou} \qquad S = \frac{\pi - (A + B + C)}{2};$$

en II[e] où la disposition est inverse, les angles en B et C étant alors $B - S$, $C - S$, cette condition devient :

$$A + (B - S) + (C - S) = \pi \qquad \text{ou} \qquad S = \frac{(A + B + C) - \pi}{2};$$

sauf discussion elle détermine S dans les deux cas; BC peut donc être une parallèle arbitraire à une direction définie par cet angle S; on en déduit les tangentes

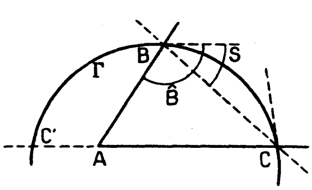

Fig. 29.

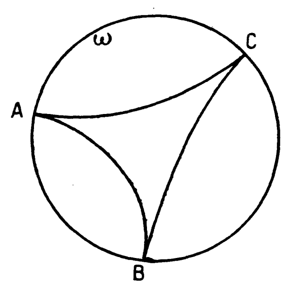

Fig. 30.

en B et C au cercle Γ, puis le cercle Γ lui-même et enfin son cercle orthogonal ω_1, de centre A qui est réel en I[re], imaginaire en II[e] et peut alors être considéré comme le cercle fondamental ω à moins que celui-ci ne soit donné *a priori* auquel cas il suffit de déplacer parallèlement à elle-même la première droite BC dans l'homothétie de centre A qui fait correspondre à ω_1 le cercle concentrique et de même espèce ω.

En I^{re}, lorsque l'un au moins des deux angles B, C mais non A est nul, on constate, avec $B = 0$, que cette construction donne une tangente en B à Γ qui se confond avec Ax, d'où un cercle Γ tangent en B à Ax et un cercle ω_1 passant par B, et l'on vérifie ainsi que le sommet B de cet angle nul du fa-triangle est bien un point fa-impropre. Mais il reste le cas réservé où, toujours en I^{re}, les angles A, B, C sont tous nuls ; la construction du fa-triangle est alors immédiate ; les trois sommets tous fa-impropres sont trois points arbitraires de ω et les trois fa-côtés sont portés par les cercles orthogonaux à ω en deux de ces points ; en forme-type où un sommet A est en ∞, deux de ces fa-côtés sont portés par les demi-droites parallèles et de même sens, Bx, Cy perpendiculaires en B et C à la droite ω, et le troisième BC est le demi-cercle de base BC. Rappelant que deux quelconques

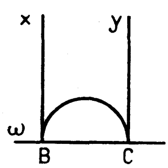

Fig. 31.

ABC, $A_1B_1C_1$, de tels fa-triangles se déduisent toujours l'un de l'autre dans un fa-déplacement direct (§ 23), on vérifie de suite que tous ces fa-triangles sont égaux et se réduisent donc à un seul, à un fa-déplacement près.

En conséquence, la construction d'un fa-triangle d'angles donnés ne peut donner dans tous les cas qu'une seule solution du problème et cela justifie le quatrième cas, énoncé plus haut par anticipation, d'égalité des fa-triangles.

Reprenant ensuite cette construction pour en discuter, on constate qu'elle n'est possible que sous diverses conditions dont la première est que l'angle calculé S soit positif. En I^{re} cette condition est la seule, car si elle est remplie les valeurs de $B + S$, $C + S$ sont inférieures à π d'après l'équation donnant S et l'on peut construire successivement sans autre condition le triangle rectiligne ABC, le cercle Γ auquel A est alors extérieur, et le cercle réel orthogonal ω_1. Cette condition est d'ailleurs satisfaite, avec $S = \frac{\pi}{2}$, dans le cas particulier où les angles A, B, C étant tous nuls, on a trouvé directement une solution du problème.

Mais en II^e d'autres conditions apparaissent : c'est d'abord que les valeurs $B - S$, $C - S$ de deux angles du triangle ABC qui, d'après le calcul de S, sont encore inférieures à π, soient ici positives ; ce triangle ABC et le cercle Γ peuvent alors être construits et il reste une dernière condition pour l'existence du cercle imaginaire ω_1 orthogonal à Γ, à savoir que le point A soit intérieur à Γ, donc que l'angle A dont les côtés interceptent sur Γ l'arc BC soit inférieur à l'angle inscrit S qui intercepte le même arc ; cette dernière condition pouvait d'ailleurs être prévue comme analogue aux deux précédentes, $B - S > 0$, $C - S > 0$; en y remplaçant S par sa valeur, la dernière, par exemple, s'écrit

$$C + \pi - A - B > 0 \quad \text{ou} \quad A + B < C + \pi,$$

et l'ensemble de ces trois conditions se réduit à une seule qui est la précédente si C est le plus petit des trois angles donnés.

On retrouverait d'ailleurs ces conditions, mais seulement avec leur caractère nécessaire, en appliquant la première condition à un fa-triangle tel que ABC′ déduit du premier, en y remplaçant un sommet C par le point opposé C′, les angles A, B se changeant en leurs supplémentaires et C ne changeant pas, ce qui donne :

$$(\pi - A) + (\pi - B) + C > \pi \quad \text{ou} \quad C + \pi > A + B.$$

En conclusion, le 4^e^ cas d'égalité des fa-triangles se complète ainsi : *pour qu'il existe un fa-triangle ayant trois angles donnés, il faut et il suffit en* I^re^ *que la somme de ces angles soit inférieure à deux droits, en* II^e^ *que cette somme soit supérieure à deux droits et que chacun de ces angles, augmenté de deux droits, soit plus grand que la somme des deux autres.*

Cette conclusion fait apparaître le rôle important que joue en Géométrie non euclidienne la somme $A + B + C$ des angles d'un fa-triangle; elle marque une opposition caractéristique entre les deux espèces I^re^ et II^e^ et un rapprochement avec la Géométrie euclidienne ou de III^e^ espèce où cette somme est deux droits on en retiendra que *la somme des angles de tout fa-triangle est inférieure à deux droits en* I^re^ *espèce, supérieure en* II^e^ *et égale en* III^e^; on dit souvent aussi que *si dans une Géométrie la somme des angles d'un fa-triangle particulier est inférieure, supérieure ou égale à deux droits, elle a la même qualité dans tout autre fa-triangle.*

40. **Côté et angles adjacents d'un fa-triangle en I^re^.** — Il y a lieu, de même, de discuter de la construction d'un fa-triangle correspondant au deuxième cas d'égalité, les données étant un côté c et les angles adjacents A, B, et en restant en I^re^, le problème étant toujours possible en II^e^. Nous utiliserons la forme-type dans laquelle le cercle fondamental ω est une droite et la fa-droite portant le côté donné $c = [AB]$ une demi-droite Iz perpendiculaire à ω en un point I; nous plaçant dans le cas général où A et B sont différents de O et π et c inférieur à la limite supérieure des fa-distances, les points A, B étant donc fa-propres et se succédant, par exemple, dans l'ordre I, A, B; on mène en A et B d'un même côté de Iz les demi-droites Ax, By distinctes de Iz, faisant avec AB les angles donnés $A = BAx$, $B = ABy$, puis les arcs de cercle AJ, BK, limités sur Iz en A ou B et sur ω en J ou K, et centrés tous deux sur ω; le troisièmet somme C doit être à l'intersection de ces deux arcs de cercle, d'où une condition de possibilité et une seule $IK < IJ$.

On évalue IK en fonction des données en observant que l'angle B est un angle inscrit dont la moitié est l'angle IBK du triangle rectangle BIK, ce qui donne

$$IK = IB \operatorname{tg} \frac{B}{2};$$

on évalue de même IJ à l'aide d'un angle inscrit qui est alors le supplément $\pi - A$ de A, et l'on a

$$IJ = IA \operatorname{tg} \frac{\pi - A}{2} = \frac{IA}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}};$$

la condition de possibilité s'écrit donc $\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} > 0\right)$

$$IB \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqq IA \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \leqq \frac{IA}{IB}.$$

On en déduit une représentation simple du rapport $\frac{IA}{IB}$ qui représente ici le côté c en se plaçant dans le cas particulier où l'un des deux angles, A par exemple, est droit $\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1\right)$, la valeur limite de l'autre B étant alors comme on sait l'angle de parallélisme φ associé à la fa-distance $c = [AB]$ et représentant cette fa-distance; on trouve ainsi une représentation de cet angle par la formule

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{IA}{IB}$$

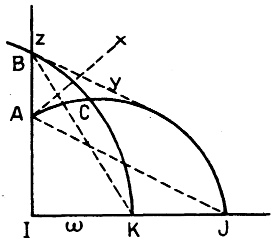

Fig. 32.

et la condition de possibilité du problème prend la forme

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \leqq \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

où $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, toutes positives peuvent varier, les deux premières de 0 à $+\infty$, et la troisième de 0 à 1, φ étant aigu, le cas limite de l'égalité étant celui où le sommet C du fa-triangle est fa-impropre.

On constate que cette condition s'applique aussi à la limite dans les cas qui ont été écartés, soit avec $\varphi = 0$ qui répond à c égal au maximum des fa-distances et qui impose un sommet A ou B fa-impropre et l'angle correspondant A ou B nul, soit seulement avec, par exemple, $A = 0$, B et φ n'étant pas nuls, le fa-triangle ABC étant alors aplati sur le côté AB.

On observe ensuite que $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ étant inférieur à 1, cette condition impose $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} < 1$, soit entre angles aigus

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{B}{2} < \frac{\pi - A}{2} \quad \text{ou} \quad A + B < \pi,$$

ce qui est bien nécessaire, la somme $A + B + C$ devant être elle-même inférieure à π.

De cette condition, où $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ croissent en même temps que A et B, tandis que $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, croissant avec φ, est au contraire décroissant lorsque la fa-distance c est croissante, on retiendra principalement que *si en* Ire *deux des trois éléments consécutifs* A, c, B *d'un fa-triangle restent fixes, le troisième reste inférieur à un maximum qui est atteint lorsque le fa-triangle a un sommet fa-impropre.*

Nous recommanderons, au moins à titre d'exercice, de reprendre cette construction et d'en retrouver tous les résultats en utilisant une autre forme-type, celle qui a déjà été employée avec le problème des trois angles donnés, et dans

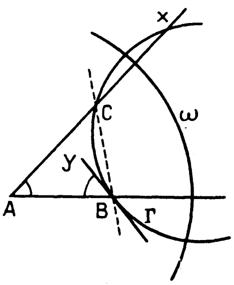

Fig. 33.

laquelle on place au centre du cercle fondamental ω le sommet A de l'un des deux angles donnés supposé non nul; la construction reste immédiate et l'on pourra s'aider dans la discussion de l'angle S déjà rencontré à propos du fa-triangle défini par ses trois côtés, et qui sera ici l'angle formé par la corde BC du cercle portant le côté inconnu BC avec ses tangentes en B et C.

Après avoir ainsi établi, dans les deux problèmes précédents, des conditions numériques de possibilité dans la construction d'un fa-triangle répondant aux 4e et 2e cas d'égalité de fa-triangles, et en constatant que le 1er cas répond à un problème toujours possible, il reste de même à établir des conditions numériques de possibilité dans le problème répondant au 3e cas d'égalité, celui d'un fa-triangle dont les trois côtés sont donnés; mais ceci exige que l'on précise auparavant, ainsi que nous allons le faire, la signification numérique des fa-distances et ses qualités.

(*A suivre*)