

# BULLETIN DE LA S. M. F.

URO KUREPA

## **Sur la relation d'inclusion et l'axiome de choix de Zermelo**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 80 (1952), p. 225-232

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1952\\_\\_80\\_\\_225\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__225_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SUR LA RELATION D'INCLUSION ET L'AXIOME  
DE CHOIX DE ZERMELO;**

PAR DJURO KUREPA.

Zagreb.

---

On connaît plusieurs propositions dont chacune est équivalente à l'axiome

(0.1) Z

de choix de Zermelo; telles sont, par exemple, le lemme de Zorn (*voir* Bourbaki [1], p. 37; Birkhoff [2], p. 42; Witt [6]), l'existence d'une chaîne maximale dans chaque ensemble ordonné (*voir* Birkhoff [2], p. 42), l'existence d'une chaîne maximale dans chaque famille  $F$  d'ensembles ordonnée par rapport à  $\subseteq$ , l'existence d'une famille disjonctive maximale dans chaque  $(F; \subseteq)$  (*voir* Vaught [5]), etc. Dans ce qui suit nous considérerons en particulier la relation d'inclusion  $\subseteq$  et quelques relations se rattachant à  $\subseteq$ ; nous prouverons quelques propositions nouvelles équivalentes à Z en donnant une solution partielle d'un problème (*cf.* le problème général 4.2 ci-après) dont la considération est, nous semble-t-il, intéressante au point de vue logique.

*Notations.* — Dans ce qui suit

(0.2)  $\nu, F$

désigneront respectivement l'ensemble vide (le vacuum) et une famille infinie quelconque d'ensembles non vides quelconques. Si au début d'une formule on a affaire au symbole  $(F)$ , il faut le lire « *quelle que soit F* » ou « *pour chaque F* »,  $F$  ayant, bien entendu, la signification de tout à l'heure.

**1. Les relations K, D, I de comparabilité, de disjonction et d'empiètement, entre ensembles.** — Pour deux ensembles non vides  $A, B$ , l'un et seulement l'un des trois cas que voici se présente :

K.  $A$  et  $B$  sont comparables :  $A \subseteq B$  ou  $B \supseteq A$ , ce que l'on peut désigner par  $AKB$ ;

D.  $A$  et  $B$  sont disjoints :  $A \cap B = \nu$ , ce que nous désignerons par  $ADB$ ;

I.  $A$  et  $B$  sont empiétants :  $A \setminus B \neq \nu \neq B \setminus A$ , ce qu'on peut désigner par  $AIB$ .

2. Les propositions KF, DF, IF. — Si  $\rho$  désigne l'une des relations K, D, I, c'est-à-dire si  $\rho \in \{K, D, I\}$ , l'on peut considérer la proposition  $\rho F$  que voici, F ayant la signification (0.2) :

PROPOSITION  $\rho F$  ou  $\rho(F)$ . — F contient une sous-famille maximale, soit  $F_\rho$ , dont les éléments distincts sont en relation  $\rho$

$$A, B \in F_\rho, \quad A \neq B \Rightarrow A \rho B.$$

Que  $F_\rho$  soit maximale, cela signifie que dans  $F \setminus F_\rho$  il n'y ait aucun élément en relation  $\rho$  avec chaque élément de  $F_\rho$ .

Remarque. — Si F ne contient aucun couple d'éléments distincts en relation  $\rho$ , cela signifie que quel que soit  $A \in F$  la famille  $\{A\}$  joue le rôle de  $F_\rho$ . Ainsi, on a les propositions KF, DF, IF.

Manifestement,

$$(2.1) \quad Z \Rightarrow (F)(\rho F) \quad (\rho = K, D, J),$$

(F) signifiant « quelle que soit F », F ayant la signification de (0.2). Autrement dit, quelles que soient la relation  $\rho \in \{D, I, K\}$  et la famille F, l'axiome Z de Zermelo entraîne l'existence d'une sous-famille maximale  $F_\rho \subseteq F$  dont les éléments distincts sont en relation  $\rho$ . Par ailleurs, nous venons de mentionner que

$$(2.2) \quad (F)(KF) \Leftrightarrow Z \quad (\text{cf. Birkhoff [1], p. 42}),$$

$$(2.3) \quad (F)(DF) \Leftrightarrow Z \quad (\text{cf. Vaught [3]}).$$

Nous prouverons qu'on a aussi le

THÉORÈME 2.1 :

$$(2.4) \quad (F)(IF) \Leftrightarrow Z.$$

En conséquence, les propositions

$$(2.5)_1 \quad Z, (F)(KF), (F)(DF), (F)(IF)$$

sont deux à deux équivalentes.

Pour prouver (2.4), il suffit d'après (2.3), de prouver l'équivalence

$$(2.5)_2 \quad (F)(DF) \Leftrightarrow (F)(IF).$$

Tout d'abord,  $(2.5)_1 \Rightarrow (2.5)_2$ , c'est-à-dire le premier membre de (2.5) en implique le second. En effet, faisons correspondre (cf. Marczewski [3], § 3) à chaque  $X \in F$  la famille

$$N(X)$$

ayant comme ses éléments : l'ensemble X et les

$$(2.6) \quad \{X, X'\} (X' \in F, X' \text{ non } IX) \quad (1).$$

---

(1) Bien entendu,  $\{X, X'\}$  se compose de X et  $X''$  comme ses éléments uniques; en conséquence,  $X'$  parcourant F de manière que  $X' \text{ non } IX$ , on aura  $\{X, X'\} \in N(X) \setminus \{X\}$  et vice versa.

NF désignant la famille des

$$(2.7) \quad N(X), \quad (X \in F),$$

la transformation (2.7) est une correspondance biunivoque entre F et NF. C'est que  $X \in N(X)$  et  $X \notin N(Y)$  si  $X \neq Y \in F$ . Pour la même raison, les éléments de NF sont ou bien disjoints ou bien empiétants. En particulier, si pour deux éléments  $X, Y \in F$ , on a  $N(X) \cap N(Y) = \nu$ , on n'a pas d'après (2.6)  $X \notin Y$ ; par conséquent, on a  $X \notin Y$ . Autrement dit,  $\Phi$  étant une famille disjonctive  $\subseteq NF$ , les éléments  $N^{-1}(A)$  ( $A \in \Phi$ ) sont deux à deux en relation I; en particulier, à une sous-famille *disjonctive maximale* de NF correspond ainsi une sous-famille *empiétante maximale* de la famille considérée F.

D'autre part, prouvons la conclusion inverse  $(2.5)_2 \Rightarrow (2.5)_1$ . Pour cela, considérons la transformation

$$(2.8) \quad E(X) \quad (X \in F).$$

$E(X)$  désignant pour chaque  $X \in F$  la famille composée de X et des familles

$$\{X, X'\}, \quad (X' \in F, X' \subset X).$$

Comme tout à l'heure, on prouve que (2.8) est une application biunivoque entre F et l'ensemble EF des  $E(X)$ , X parcourant F. En particulier, si  $X, X' \in F$ , alors

$$(2.9) \quad XDX' \Leftrightarrow E(X)IE(X').$$

Par conséquent, la famille EF contenant une sous-famille empiétante maximale, soit  $F_0$ , la famille  $E^{-1}F_0$  des  $E^{-1}Y$  ( $Y \in F_0$ ) est une sous-famille disjonctive maximale de F.

C. Q. F. D.

**3. Relations  $\bar{D}$ ,  $\bar{I}$ ,  $\bar{K}$  de non-comparabilité, de non-disjonction, de non-empiètement. Propositions  $\bar{D}F$ ,  $\bar{I}F$ ,  $\bar{K}F$ .** — Les relations  $\bar{D}$ ,  $\bar{I}$ ,  $\bar{K}$  respectivement les négations de K, D, I sont donc définies par les égalités suivantes :

$$(3.1) \quad A\bar{K}B \Leftrightarrow (\text{ni } A \subseteq B, \text{ ni } B \subseteq A),$$

$$(3.2) \quad A\bar{D}B \Leftrightarrow A \cap B \neq \nu,$$

$$(3.3) \quad A\bar{I}B \Leftrightarrow \text{non } (AIB) \Leftrightarrow ADB \text{ soit } AKB.$$

On peut alors considérer les propositions

$$(3.4) \quad \bar{D}F, \quad \bar{I}F, \quad \bar{K}F,$$

aussi bien que les propositions

$$(3.5) \quad (F)(\bar{D}F), \quad (F)(\bar{I}F), \quad (F)(\bar{K}F),$$

lesquelles évidemment résultent de l'axiome Z.

**THÉOREME 3.1.** — *Alors que chacune des propositions (F)( $\bar{D}F$ ); (F)( $\bar{I}F$ ) est*

(\*) C'est-à-dire Z est équivalent à ce que subsistent à la fois (V) et  $\bar{K}F$  pour chaque F.

équivalente à l'axiome  $Z$  de Zermelo, nous ne savons pas s'il en est encore ainsi de  $(F)(\bar{K}F)$ . Toutefois, on a

$$(3.6) \quad (V) \cap (F)(\bar{K}F) \Rightarrow Z \quad (2),$$

$(V)$  ou  $V$  désignant la proposition suivante :

PROPOSITION  $(V)$ . — Chaque ensemble peut être totalement ordonné  $(3)$ .

COROLLAIRE 3.1. — Chacune des propositions  $(F)(\bar{D}F)$ ,  $(F)(\bar{I}F)$  entraîne (en passant par  $Z$ , par exemple) la proposition  $(F)(\bar{K}F)$ .

Notation. —  $\Phi$  étant une famille non vide de propositions, l'intersection (le produit) des propositions  $\varphi \in \Phi$ , c'est la proposition

$$(3.7) \quad \bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi$$

subsistant si et seulement si chaque proposition  $\varphi \in \Phi$  subsiste. D'une manière duale, on définit l'union (la somme)

$$(3.8) \quad \bigcup_{\varphi \in \Phi} \varphi$$

subsistant si et seulement si au moins une proposition  $\varphi \in \Phi$  subsiste. En particulier,  $\varphi, \psi$  étant deux propositions, les propositions

$$(3.9) \quad \varphi \cap \psi, \quad \varphi \cup \psi$$

s'entendent d'elles-mêmes. Par exemple,

$$(3.10) \quad \begin{cases} \bar{K} = D \cup I, & \bar{D} = I \cup K, & \bar{I} = K \cup D \\ K = \bar{D} \cap \bar{I}, & D = \bar{I} \cap \bar{K}, & I = \bar{K} \cap \bar{D}. \end{cases}$$

3.1. Tout d'abord,

$$(3.1.1) \quad Z \Rightarrow (F)(\bar{D}F).$$

Pour cela, il suffit, d'après l'implication (2.3) de Vaught, de prouver que

$$(3.1.2) \quad (F)(\bar{D}F) \Rightarrow (F)(DF).$$

Or, l'équivalence (3.1.2) résulte d'un théorème de Marczewski ([3], § 5), d'après lequel les relations  $D, \bar{D}$  sont isomorphes. En effet, en considérant la transformation  $E$  définie par (2.8), on a affaire à une transformation biunivoque entre  $F$  et  $EF$  et ne jouissant de la propriété que pour  $A, B \in F$ , la relation  $ADB$  subsiste si et seulement si  $E(A)\bar{D}E(B)$ . Ceci étant, prouvons  $(3.1.2)_1 \Rightarrow (3.1.2)_2$ ; la famille  $EF$  contenant, d'après  $(3.1.2)_1$ , une famille maximale antidisjonctive, soit  $\Phi$ ,  $E^{-1}\Phi$  sera une famille maximale disjonctive de  $F$ , ce qui prouve que  $(F)(DF)$  subsiste. D'une façon analogue, en permutant les mots « antidisjonctive » et « disjonctive », on arrive à la conclusion  $(3.1.2)_2 \Rightarrow (3.1.2)_1$ .

---

(3) D'après Mostowski [4], on n'a pas  $(V) \Rightarrow Z$ .

8.2. Prouvons l'implication

$$(3.2.1) \quad (F)(\bar{D}F) \Rightarrow (F)(\bar{I}F).$$

Pour cela, il suffit de considérer la transformation (2.7); à une famille maximale  $\Phi \subseteq NF$  d'éléments deux à deux non disjoints correspond ainsi la famille  $N^{-1}\Phi$  maximale d'éléments non empiétant extraits de F.

Réciproquement,

$$(3.2.3) \quad (F)(\bar{I}F) \Rightarrow (F)(\bar{D}F).$$

La démonstration en est analogue à celle de (3.2.1)

Les relations (2.3) de Vaught, (3.1.2), (3.2.1) et (3.2.2) impliquent ceci :

$$(3.2.3) \quad Z \Leftrightarrow (F)(DF) \Leftrightarrow (F)(\bar{D}F) \Leftrightarrow (F)(\bar{I}F).$$

3.3. Pour achever la démonstration du théorème 3.1, il nous reste à prouver que

$$(3.3.1) \quad (V) \cap (F)(\bar{K}F) \Rightarrow Z.$$

LEMME 3.3.1. — *La proposition (F)( $\bar{K}F$ ) entraîne la proposition ( $\bar{K}$ ) que voici :*

PROPOSITION ( $\bar{K}$ ). — *Chaque ensemble ordonné  $(M; \leq)$  contient une antichaine maximale (antichaine veut dire ordonné sans points distincts comparables).*

En effet, F désignant la famille des

$$(3.3.2) \quad (-\infty, x]_M \quad (x \in M),$$

$(-\infty, x]_M$  étant l'ensemble des  $x' \in M$  vérifiant  $x' \leq x$ , on voit que les ensembles ordonnés  $(M; \leq)$ ,  $(F; \subseteq)$  sont isomorphes, la transformation (3.3.2) en étant une similitude; en particulier, chaque famille maximale de F avec des éléments non comparables — dont l'existence est assurée par  $\bar{K}F$  — provient d'un sous-ensemble de  $(M; \leq)$ , lequel est une antichaine maximale dans  $(M; \leq)$  comme étant isomorphe d'une antichaine maximale de  $(F; \subseteq)$ ; le lemme 3.3.1 est ainsi prouvé.

Or,

$$(3.3.3) \quad (V) \cap (\bar{K}) \Rightarrow Z.$$

En effet, soit F une famille non vide quelconque d'ensembles non vides; il s'agit de prouver l'existence d'un sous-ensemble

$$E \subseteq \bigcup_X X \quad (X \in F)$$

tel que E contienne un et seulement un point de chaque  $X \in F$ . Tout d'abord, à la suite de l'hypothèse (V), chaque  $X \in F$  peut être considéré comme une chaîne, mettons  $(X; \leq_X)$ ; soit alors  $fX$  l'ensemble des paires ordonnées

$$(3.3.4) \quad (X, a) \quad (a \in X);$$

l'ensemble  $fX$  sera ordonné par le principe de première différence : si  $a, b \in X$ , alors

$$(X; a) \leq (X; b) \text{ dans } fX \Leftrightarrow a \leq_X b \text{ dans } X.$$

Ceci étant, soit

$$F_0 = \bigcup_X fX (X \in F);$$

ordonnons  $F_0$  par  $\leq$  de manière que, pour  $(X; a), (X'; a') \in F_0$ , l'on ait

$$(X; a) \leq (X'; a') \text{ dans } F \Leftrightarrow a, a' \in X = X', \quad a \leq a' \text{ dans } X.$$

Évidemment, l'ensemble  $(F_0; \leq)$  est ordonné et l'on voit que chaque  $fX$  en est une chaîne maximale. Or, d'après la proposition ( $\bar{K}$ ) l'ensemble ordonné  $(F_0; \leq)$  contient une antichaine maximale, soit  $\bar{L}$ ; d'autre part, pour aucun  $X \in F$ , l'ensemble

$$(3.3.5) \quad \bar{L} \cap f(X)$$

n'est vide; l'ensemble (3.3.5) étant à la fois une chaîne et une antichaine en tant qu'appartenant à  $fX$  et à  $\bar{L}$  respectivement, l'ensemble (3.3.5) est monoponctuel; à cause de la forme (3.3.4) des éléments de  $fX$ , on en conclut que l'unique point de (3.3.5) est de la forme

$$(3.3.6) \quad (X; \varphi(X))$$

$\varphi(X)$  désignant le point unique de  $X$  tel que  $(3.3.6) \in (3.3.5)$ . En désignant, enfin, par  $E$  l'ensemble des  $\varphi(X) (X \in F)$ , on voit bien que  $E$  est l'ensemble demandé, étant donné qu'il contient un et un seul point de chaque  $X \in F$ , à savoir le point  $\varphi(X)$ .

3.4. *Remarque sur les relations D, I et K.* — A propos du comportement précédent des relations D, I, K, il y a intérêt à signaler ceci. D'une part, les relations D, I sont des relations binaires symétriques les plus générales dans le sens que, pour  $\alpha \in \{D, I\}$ , quelle que soit la relation binaire symétrique  $\rho$  définie dans un ensemble  $E$ , il y a une transformation  $\varphi_\alpha$  faisant correspondre à tout  $x \in E$  un ensemble non vide  $\varphi_\alpha(x)$  telle que l'on ait l'équivalence

$$x, y \in E, x \neq y, x \rho y \Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) \cap \varphi_\alpha(y)$$

(voir Marczewski [3], § 2 et 5).

D'autre part, la proposition analogue pour la relation K ne subsiste pas. En effet, soit  $(S; \leq)$  un ensemble ordonné; si pour  $x, y \in S$ ,  $x \parallel y$  signifie qu'on n'ait ni  $x \leq y$ , ni  $x \geq y$ , on a la relation symétrique  $\parallel$  dans  $E$ ; si alors, il existait une transformation  $\varphi$  faisant correspondre à tout  $x \in S$  un ensemble non vide  $\varphi(x)$  tel que l'on ait

$$x, y \in S, x \parallel y \Leftrightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y), \quad \varphi(x) K \varphi(y),$$

on en déduirait une extension totale d'ordre  $(S; \leq)$  par la relation  $\leq_1$  signifiant

$$x \leq_1 y \Leftrightarrow (x \leq y) \cup (\varphi(x) \subset \varphi(y)).$$

De même, si l'on définit  $\leq_2$  de manière que

$$x \leq_2 y \Leftrightarrow (x \leq y) \cup (\varphi(x) \supset \varphi(y)),$$

l'ensemble  $(S; \leq_2)$  est totalement ordonné; la superposition des ordonnances  $(S; \leq_1)$ ,  $(S; \leq_2)$  coïnciderait avec l'ordre donné  $(S; \leq)$ , ce qui ne serait pas possible si la dimension de celui-ci était  $> 2$ , comme, par exemple, si  $(S; \leq)$  coïncide avec l'ensemble des points et côtés d'un triangle (polygone) ordonné par  $\subseteq$  (c'est-à-dire ordonné par incidence).

4. L'ensemble T. Problèmes. — Soit

$$(4.1) \quad T = \{ D, \bar{D}, I, \bar{I}, K, \bar{K} \};$$

pour chaque ensemble non vide  $S \subseteq T$ , on a [cf. (3.7), (3.8)] des relations bien définies

$$\bigcup_{\varphi \in S} \varphi, \quad \bigcap_{\varphi \in S} \varphi;$$

en particulier, pour chaque famille F non vide d'ensembles non vides, on a des propositions bien définies

$$\bigcup_{\varphi \in S} \varphi F, \quad \bigcap_{\varphi \in S} \varphi F.$$

PROBLÈME 4.1. — A-t-on

$$(4.1) \quad \bar{D}F \Rightarrow IF \cup KF \quad (*)?$$

D'une manière analogue, a-t-on

$$(4.2) \quad \bar{I}F \Rightarrow DF \cup KF,$$

$$(4.3) \quad \bar{K}F \Rightarrow DF \cup IF?$$

Nous venons de voir (th. 3.1) que, abstraction faite du cas où S se compose de  $\bar{K}$  comme son élément unique, on a

$$(F) \left( \bigcap_{\varphi \in S} \varphi F \right) \Rightarrow Z;$$

dans tous les cas si  $\varphi \neq S \subseteq T$ , alors (\*)

$$(F) \left( \bigcap_{\varphi \in S} \varphi F \right) \Rightarrow Z.$$

Dans cet état de choses, il y a lieu de poser le problème suivant :

PROBLÈME 4.2. — Si  $\varphi \subset S \subseteq T$ ; a-t-on

$$(4.4) \quad (F) \left( \bigcup_{\varphi \in S} \varphi F \right) \Rightarrow Z?$$

(\*) Bien entendu,  $\bar{I} = D \cup K$  [cf. (3.10)]. Explicitons (4.1) : si une famille F contient une famille maximale d'ensembles non disjoints, contient-elle nécessairement une famille maximale d'ensembles deux à deux : a. empiétants; b. comparables; et réciproquement.

(\*) Quant au (V), voir th. 3.1.



ou, du moins (\*),

$$(4.5) \quad (V) \cap (F) \left( \bigcup_{\varphi \in S} \varphi F \right) \Leftrightarrow Z ?$$

En particulier, a-t-on

$$(4.6) \quad (F) (DF \cup IF \cup KF) \Leftrightarrow Z ?$$

ou, du moins,

$$(4.7) \quad (V) \cap (F) (DF \cup IF \cup KF) \Leftrightarrow Z ?$$

De même, est-ce que pour chaque  $X \in \{D, I, K\}$ , on a

$$(F) (XF \cup \bar{X}F) \Leftrightarrow Z ?$$

En particulier, a-t-on

$$(4.6)_1 \Rightarrow Z ?$$

ou, d'une manière explicite, est-ce que l'axiome  $Z$  est une conséquence de l'hypothèse  $(4.6)_1$  disant que chaque famille  $F$  d'ensembles non vides contient une famille maximale  $F_0$  telle que l'on a bien

$$A, B \in F_0, A \neq B \Rightarrow ADB$$

ou bien

$$A, B \in F_0, A \neq B \Rightarrow AIB$$

ou bien

$$A, B \in F_0, A \neq B \Rightarrow AKB ?$$

Est-ce que cela subsiste au moins en supposant encore  $(V)$ ? C'est-à-dire a-t-on  $(4.7)_1 \Rightarrow Z$ ?

Il y a là un complexe de problèmes bien intéressants au point de vue logique?

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BIRKHOFF (G.), *Lattice Theory*, New-York, 1948, 2<sup>e</sup> édition, p. 14-284.
- [2] BOURBAKI (N.), *Éléments de Mathématiques*, 1<sup>re</sup> partie, livre I (Théorie des ensembles), Paris, 1939, p. 8-51.
- [3] MARCZEWSKI (SZPILRAJN) (E.), *Sur deux propriétés des classes d'ensembles (Fundamenta Math., Warszawa, t. 33, 1945, p. 303-307).*
- [4] MOSTOWSKI (A.), *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip (Fundamenta Math., Warszawa, t. 32, 1933, p. 201-252).*
- [5] VAUGHT (R. L.), *On the equivalence of the Axiome of choice and a maximal principle (Bull. Amer. Math. Soc., New-York, t. 58, 1952, p. 66).*
- [6] WITT (E.), *Beweisstudien zum Satz von M. Zorn (Math. Nachrichten, Berlin, t. 4, 1951, p. 434-438).*