BULLETIN DE LA S. M. F.

R. CROISOT

Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 217-223
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__217_0>

PROPRIÉTÉS DES COMPLEXES FORTS ET SYMÉTRIQUES DES DEMI-GROUPES;

PAR R. CROISOT.

Introduction. — La lecture de ce travail suppose la connaissance des notions introduites et d'un certain nombre des résultats démontrés par P. Dubreil dans les deux Mémoires suivants : *Contribution à la théorie des demi-groupes*, I ([1]) et II ([2]).

Nous considérons ici, dans un demi-groupe D, un complexe H (supposé non vide) fort et symétrique ([3]) et étudions quelques propriétés d'un tel complexe liées à l'équivalence principale ([4]) $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$ qui lui correspond.

Nous montrons, en particulier, que le groupoïde quotient F d'un demi-groupe D par l'équivalence principale $\mathcal{R}$ attachée à un complexe H fort, symétrique et net ([5]) est un groupe. Si H, toujours fort et symétrique, est non net, le noyau N ([6]) du groupoïde quotient F, s'il n'est pas vide, est également un groupe.

PROPRIÉTÉ 1. — *Soit, dans un demi-groupe* D, *un complexe* H *fort et symétrique. Supposons que* H *soit contenu dans* D^2 *et qu'il soit ou bien net ou bien disjoint de son résidu* W ([7]). *Alors*, H *est saturé dans* D^2 *pour l'équivalence principale* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$.

Soit $h = mn \in H$ et soit $x = ab \equiv h\ (\mathcal{R})$; il faut établir $x \in H$. Le complexe H étant net ou disjoint de son résidu, il exite $y \in D$ tel que $hy \in H$. De $mn \in H$ et de $mny \in H$, résulte, puisque H est fort (et symétrique), $n \equiv ny\ (\mathcal{R})$, d'où, $\mathcal{R}$ étant régulière, $h \equiv hy\ (\mathcal{R})$. Mais, de $x \equiv h\ (\mathcal{R})$, résulte aussi $xy \equiv hy\ (\mathcal{R})$ et, par suite, $x \equiv xy\ (\mathcal{R})$, soit $ab \equiv aby\ (\mathcal{R})$. On a donc $b \equiv by\ (\mathcal{R})$, puisque $\mathcal{R}$ est simplifiable dans D si H est net, dans D — W si H est non net et que, dans ce cas,

([1]) *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, t. 63, 1941, p. 1-52. Référé DGI.
([2]) *Rendiconti di Mathematica e delle sue applicazioni*, 1951, p. 183-200. Référé DG II.
([3]) DG I, p. 9 et 22.
([4]) DG I, p. 7 et 22.
([5]) DG I, p. 8.
([6]) DG I, p. 24.
([7]) DG I, p. 8.

$ab \notin W$ puisque H est disjoint de W. Enfin, de $hy \in H$, on déduit $xy \in H$, soit $aby \in H$, puis $ab \in H$.

Corollaire. — *Dans les hypothèses de la propriété 1, le saturé* S *de* H *par* $\mathcal{R}$ *est fort et symétrique* [8].

On sait, en effet [9] que $\mathcal{R}_S = \mathcal{R}_{S \cap D^2}$ (avec $W_S = W_{S \cap D^2}$, éventuellement) et que S est fort en même temps que $S \cap D^2$.

Or, on a $S \cap D^2 = H$, d'où le corollaire.

Remarque 1. — La propriété 1 et son corollaire cessent d'être exacts si l'on affaiblit les hypothèses de l'une des façons suivantes :

1° H est fort, symétrique, net, mais non contenu dans D^2.

Exemple 1. — Prenons, pour D, le demi-groupe à quatre éléments a, b, c, d, dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c	d
a	c	c	d	a
b	c	c	d	a
c	d	d	a	c
d	a	a	c	d

Considérons le complexe $H = \{b, c\}$. Il est fort et net, et symétrique puisque D est abélien. On a $b \notin D^2$.

Les classes modulo $\mathcal{R}$ sont $\{a, b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$. H n'est pas saturé dans D^2 et $S = \{a, b, c\}$ n'est pas fort.

2° H est fort, symétrique, contenu dans D^2, mais non net et non contenu dans $D - W$ [qu'il soit ou non interdit [10]].

Exemple 2. — D est le demi-groupe à quatre éléments a, b, c, d, dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	b

Soit le complexe $H = \{c\}$ fort, symétrique et contenu dans D^2, mais non net. On a $W = \{a, c\}$, et les autres classes modulo $\mathcal{R}$ sont $\{b\}$ et $\{d\}$. H n'est pas saturé dans D^2 et $S = W$ n'est pas fort. H est interdit.

---

[8] Ce résultat est à rapprocher du théorème 11 de DG I qui montre que, si un complexe fort H est parfait à droite (DG I, p. 14), son saturé S est fort. Remarquons que, dans les hypothèses de la propriété 1, H n'est pas nécessairement parfait (*voir* ex. 7).

[9] DG II, p. 4.

[10] DG I, p. 18.

Exemple 3. — D est le demi-groupe à cinq éléments a, b, c, d, e, dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	c	a
c	a	a	a	a	a
d	a	c	a	b	a
e	a	a	a	a	e

Soit le complexe $H = \{c, e\}$ fort, symétrique, non net, contenu dans D^2. On a $W = \{a, c\}$, et les autres classes modulo $\mathcal{R}$ sont $\{b\}$, $\{d\}$, $\{e\}$. H n'est pas saturé dans D^2 et $S = \{a, c, e\}$ n'est pas fort. H coupe à la fois W et $D - W$.

3° Si H est fort, net, contenu dans D^2, mais non symétrique, on ne peut affirmer qu'il soit saturé dans D^2 pour $\mathcal{R}_H$ ni que son saturé S dans D soit fort.

Exemple 4. — Prenons, pour D, le demi-groupe à huit éléments a, b, c, d, e, f, g, h, dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	c	c	e	e	g	g
b	b	b	d	d	f	f	h	h
c	a	a	c	c	e	e	g	g
d	b	b	d	d	f	f	h	h
e	e	e	g	g	a	a	c	c
f	f	f	h	h	b	b	d	d
g	e	e	g	g	a	a	c	c
h	f	f	h	h	b	b	d	d

On a $D = D^2$. Soit H le complexe $\{a, e, h\}$. Il est fort, net, non symétrique. Les classes modulo R_H sont $\{a, c, e, g\}$, $\{b, d\}$, $\{f, h\}$. Le complexe H n'est pas saturé dans D^2 pour $\mathcal{R}_H$ et son saturé $S = \{a, c, e, f, g, h\}$ n'est pas fort.

Remarque 2. — Dans les hypothèses de la propriété 1, en général, H n'est pas saturé dans D.

Exemple 5. — Soit le demi-groupe D à deux éléments a, b muni de la loi de composition $xy = a$. Le complexe $\{a\}$ satisfait aux hypothèses et n'est pas saturé dans D.

Avant de démontrer les théorèmes 1 et 2, établissons le lemme suivant :

Lemme. — *Soit* D *un demi-groupe possédant un élément s simplifiable* ($as = bs$ *ou* $sa = sb$ *entraîne* $a = b$) *et dans lequel il existe un élément u tel que $us = s$. Alors, u est élément unité bilatère de* D.

En effet, pour tout $x \in D$, on a

$$xus = xs, \qquad \text{d'où} \qquad xu = x,$$

puisque s est simplifiable à droite. En particulier,

$$su = s, \quad \text{d'où} \quad sux = sx \quad \text{et} \quad ux = x$$

pour tout x puisque s est aussi simplifiable à gauche.

Cas particulier. — Dans un semi-groupe, si u et s sont tels que $us = s$, u est élément unité bilatère.

THÉORÈME 1. — *Si* H *est un complexe fort, symétrique et net d'un demi-groupe* D, *le demi-groupe quotient* $F = D/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ *est l'équivalence principale* $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$, *est un groupe et le complexe* $D^2 \cap H$ (*fort, symétrique et net*) *est parfait et saturé dans* D^2 *pour* $\mathcal{R}$.

Le complexe $D^2 \cap H$ est non vide puisque H est net; soit $h_1 = ab \in D^2 \cap H$. H étant net, il existe $x_1 \in D$ tel que $abx_1 = h_1x_1 \in H$. De $abx_1 \in H$ et de $ab \in H$, résulte $bx_1 \equiv b\,(\mathcal{R})$. Donc, en désignant par B et X_1 respectivement les classes de b et x_1 modulo $\mathcal{R}$, on a, dans F, $BX_1 = B$.

F étant un semi-groupe ([11]), $X_1 = E$ *est élément unité de* F (cas particulier du lemme).

Soit alors h_2 un élément quelconque de $D^2 \cap H$. Le même raisonnement montre qu'il existe $x_2 \in D$ tel que $h_2x_2 \in H$ et que la classe X_2 de x_2 est aussi élément unité de F. D'où $X_2 = X_1 = E$ et $x_2 \equiv x_1\,(\mathcal{R})$. Par suite, H étant fort, on a $h_2x_1 \in H$ et $h_2 \equiv h_1\,(\mathcal{R})$. Donc, $D^2 \cap H$ *est parfait.*

Désignons par K la classe modulo $\mathcal{R}$ constituée par le saturé de $D^2 \cap H$ par $\mathcal{R}$. Soit X un élément quelconque de F et x un élément de X. H étant net, il existe $y \in D$ tel que $xy \in H \cap D^2 \subseteq K$. Par suite, il existe $Y \in F$ tel que $XY = K$. En particulier, pour tout $A \in F$, il existe A' tel que $(KA)A' = K$, ce qui entraîne $AA' = E$ et montre que F *est un groupe.*

Enfin, $D^2 \cap H$ est saturé dans D^2 pour $\mathcal{R}$ comme il résulte de la propriété 1.

COROLLAIRE 1. — *Soit* D *un demi-groupe dans lequel il existe un complexe* $H = \{h_\iota\}_{\iota \in I}$ *tel que* $xy \in H$ *ait, pour tout* x (*pour tout* y), *une solution et une seule en* y (*en* x). *Alors,* H *ne contient qu'un seul élément et* D *est un groupe.*

En effet, H est un complexe net, fort, symétrique (l'équivalence principale à droite et l'équivalence principale à gauche coïncident avec l'égalité) et l'on a $F \simeq D$. Donc, D est un groupe; par suite, H est contenu dans D^2 et ne contient qu'un seul élément puisqu'il est parfait.

COROLLAIRE 2. — *Si* H *est un complexe fort et symétrique d'un demi-groupe strict* ([12]) D, *le demi-groupe quotient* $F = D/\mathcal{R}$ *est un groupe* ([13]).

En effet, par définition, H est net dans ces hypothèses.

([11]) DG I, th. 26 *a*, p. 23.

([12]) DG I, p. 10.

([13]) On peut obtenir le corollaire 2 d'une manière différente qui utilise une propriété intéressante des demi-groupes stricts. On sait qu'un demi-groupe D qui vérifie l'axiome des quotients à droite est strict à droite (DG I, p. 11). La réciproque est vraie quand D est simplifiable d'un côté. En effet, dans ce cas, tout complexe réduit à un seul élément est fort, ce qui entraîne l'existence

Corollaire 3. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe* H *d'un demi-groupe* D *soit classe dans une équivalence régulière* ρ *telle que le demi-groupe quotient* D/ρ *soit un groupe est que* H *soit fort, symétrique, net et homogène* ([14]). *Il existe alors une seule équivalence* ρ *répondant à la question.*

On sait que la condition est nécessaire ([15]).

Elle est suffisante d'après le théorème 1.

L'unicité résulte facilement du fait que, dans un groupe, il existe une seule équivalence régulière, l'égalité, admettant une classe réduite à un seul élément.

Remarque. — Dans les hypothèses du théorème 1, le complexe H n'est pas nécessairement parfait comme le montre l'exemple 1.

Théorème 2. — *Si* H *est un complexe fort, symétrique et non net d'un demi-groupe* D *et si le noyau* N *du demi-groupe quotient* $F = D/\mathcal{R}$, *où* $\mathcal{R}$ *est l'équivalence principale* $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$, *est non vide,* N *est un groupe et le complexe* $D^2 \cap H$ (*fort et symétrique*) *est parfait et saturé dans* D^2 *pour* $\mathcal{R}$.

N étant non vide, H *n'est pas interdit*. En effet, W désignant le résidu de H, supposons qu'on ait $H \subseteq W$; pour tout $X \in F$, avec $X \neq W$ ([18]), choisissons $x \in X$; il existe $y \in D$ tel que $xy \in H$; Y désignant la classe modulo $\mathcal{R}$ qui contient y, on a $Y \neq W$ et $XY = W$, ce qui entraîne $X \notin N$: N serait vide, contrairement à l'hypothèse.

Montrons qu'*il existe* $U \in N$ *tel que* $UA = AU = A$ *pour tout* $A \in F$. Soit $s \in D$ tel que $s \in S \in N$; il existe $t \in D$ tel que $st \in H$; on a $t \notin W$, d'où $st \notin W$, puisque $s \in N$; par suite, il existe $u \in D$ tel que $ust \in H$, ce qui entraîne $us \equiv s\,(\mathcal{R})$ et, dans F, $US = S$; $S \in N$ étant un élément simplifiable de F, on voit d'après le lemme que U est élément unité de F; de plus, on a $U \in N$ car $UZ = W$ ou $ZU = W$ entraîne $Z = W$.

Montrons que $H \cap D^2$ *est disjoint de* W. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, donc qu'il existe $w \in W$ tel que $w = xy \in H$; soit u un élément quelconque de U; on a $uw \equiv w\,(\mathcal{R})$, donc $w' = uw \in W$ et l'on ne peut avoir $w' \in H$, ce qui entraînerait $w \notin W$; on a $ux \equiv x\,(\mathcal{R})$ et de $xy \in H$, résulte $uxy \in H$, soit $w' \in H$, ce qui constitue une contradiction.

Le complexe $H \cap D^2$ *est parfait*. Soit $h_1 = ab \in D^2 \cap H$; de $h_1 \notin W$, résulte l'existence de $x_1 \in D$ tel que $abx_1 \in H$, d'où $bx_1 \equiv b\,(\mathcal{R})$ et $bu \equiv bx_1\,(\mathcal{R})$ pour tout élément $u \in U$; on en déduit $u \equiv x_1\,(\mathcal{R})$, puisque $b \notin W$, et $x_1 \in U$, d'où $abu = h_1 u \in H$; de même, pour $h_2 \in H \cap D^2$, on a $h_2 u \in H$ et, par suite, $h_2 \equiv h_1\,(\mathcal{R})$.

---

des quotients à droite si D est strict à droite. Il en résulte qu'un demi-groupe qui possède trois des quatre propriétés suivantes : *simplifiable à droite*, *simplifiable à gauche*, *strict à droite*, *strict à gauche* possède la quatrième et est un groupe. Le corollaire 2 se déduit alors du fait que F est un semi-groupe (DG I, th. 26 *b*, p. 23) et du fait qu'un demi-groupe homomorphe à un demi-groupe strict à droite est strict à droite.

([14]) DG I, p. 27.

([15]) DG I, th. 29 *c*, p. 28.

Établissons maintenant que N *est un groupe*. Soit X un élément quelconque de N, et soit K la classe modulo $\mathcal{R}$ qui contient $H \cap D^2$; on a $KX \neq W$ puisque $X \in N$ et $K \neq W$; donc, il existe $X' \in F$ tel que $KXX' = K = KU \neq W$; on en déduit $XX' = U$; enfin, on a $X' \in N$; en effet, $X'Z = W$ entraîne $XX'Z = UZ = W$, d'où $Z = W$; de même, $ZX' = W$ entraîne $ZX'X = ZU = W$, d'où $Z = W$ (car on a aussi $XX'X = UX = XU \neq W$, d'où $X'X = U$).

Finalement, $D^2 \cap H$ est saturé dans D^2 d'après la propriété 1.

Corollaire. — *Si* H *est un complexe fort, symétrique et non net d'un demi-groupe* D [18], *et si le résidu* W *de* H *est premier* [16], N *est non vide et* F *est un pseudo-groupe* [17].

Remarque 1. — Dans les hypothèses du théorème 2, la classe K modulo $\mathcal{R}$ qui contient $D^2 \cap H$ n'est pas nécessairement un élément de N.

Exemple 6. — Soit le demi-groupe D à trois éléments *a*, *b*, *c*, dont la table de multiplication est la suivante :

	a	*b*	*c*
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*c*	*c*
c	*c*	*c*	*c*

Considérons le complexe $H = \{b\}$. Il est fort, symétrique, non net et contenu dans D^2. Les classes modulo $\mathcal{R}$ sont $W = \{c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$. On a $F \simeq D$ et $N = \{a\}$. $K = \{b\}$ n'est pas élément de N. Le même exemple montre que N peut être non vide sans que W soit premier.

Remarque 2. — H étant toujours fort et symétrique, si N est vide, les exemples 2 et 3 montrent que le complexe $D^2 \cap H$ peut être interdit ou couper à la fois W et $D - W$. Il peut aussi être disjoint de W.

Exemple 7. — Prenons pour D le demi-groupe à trois éléments *a*, *b*, *c*, dont la table de multiplication est la suivante :

	a	*b*	*c*
a	*a*	*c*	*c*
b	*c*	*b*	*c*
c	*c*	*c*	*c*

Considérons le complexe $H = \{a, b\}$. Il est fort symétrique, non net, contenu dans D^2. Les classes modulo $\mathcal{R}$ sont $W = \{c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$. On a $F \simeq D$, N est vide et H est disjoint de W.

---

[16] DG I, p. 11.

[17] DG I, p. 25. On obtient ce corollaire un peu plus simplement en adaptant la démonstration du théorème 1 à ce cas.

Dans l'exemple 7, bien que disjoint de son résidu, le complexe H n'est pas parfait. Ce fait est général en vertu de la propriété suivante :

Propriété 2. — H *étant un complexe fort et symétrique d'un demi-groupe* D, *pour que* N *soit non vide, il faut et il suffit que* F *possède un élément unité, il faut et il suffit que* $D^2 \cap H$ *soit parfait.*

Ces conditions sont nécessaires d'après le théorème 2 et la première d'entre elles est évidemment suffisante.

Supposons $D^2 \cap H$ parfait et soit K la classe modulo $\mathcal{R}$ qui contient $D^2 \cap H$. Soit $X \in F$, avec $X \neq W$ (un tel élément existe certainement puisque $D^2 \cap H$ est parfait). Il existe $Y \in F$ tel que $XY = K \neq W$. Il existe $U \in F$ tel que $UK = K$. On en déduit $UXY = XY \neq W$, d'où $UX = X$. Cette relation est également valable pour $X = W$. Donc, F possède un élément unité à gauche, et de la même façon un élément unité à droite, par suite un élément unité bilatère et N est non vide.

Considérons maintenant le sous-ensemble N′ de F constitué par les éléments X tels que $AXB = W$ entraîne $A = W$ ou $B = W$. On a évidemment $N' \subseteq N$. Si W est premier, on a $N' = N$. Sinon, on peut trouver $A \,\&\, B \in F$ tels que $AB = W$, avec $A \neq W$, $B \neq W$; supposons N non vide et soit $X \in N$, X' l'inverse de X dans N; on a $AXX'B = W$, avec $A \neq W$ et $X'B \neq W$ (puisque $B \neq W$ et $X' \in N$); par suite, $X \notin N'$ et N′ est vide. On a donc démontré la

Propriété 3. — H *étant un complexe fort, symétrique et non net* [18] *d'un demi-groupe* D, N′ *est non vide si et seulement si* W *est premier. C'est alors un groupe confondu avec le noyau* $N = F - \{W\}$.

---

[18] On suppose naturellement que $H \cap D^2$ n'est pas vide, afin d'avoir $F \neq \{W\}$.