LAURENT CHISHOLM YOUNG

Surfaces paramétriques généralisées

Bulletin de la S. M. F., tome 79 (1951), p. 59-84
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1951__79__59_0>

SURFACES PARAMÉTRIQUES GÉNÉRALISÉES.

NOTE DE M. LAURENT CHISHOLM YOUNG,

DÉDIÉE A M. MAURICE FRÉCHET, A L'OCCASION DE SON JUBILÉ SCIENTIFIQUE.

I. — Partie générale.

1. Introduction. — Parmi les plus belles applications de la théorie des espaces abstraits de M. Fréchet, se trouvent sa définition maintenant classique de surface paramétrique et la notion correspondante de son aire comme fonctionnelle semi-continue, qui sont devenues le point initial de recherches profondes de toute une série de mathématiciens pendant près d'un demi-siècle.

Nous nous proposons ici de modifier cette définition de façon à établir pour elle, sous des conditions aussi larges que possible, le fameux *principe de minimum* du Calcul des Variations. La définition nouvelle est d'ailleurs liée directement à la théorie des fonctionnelles linéaires, donc à un chapitre classique de la théorie des espaces abstraits ([1]).

Notre définition est même beaucoup plus abstraite que celle de M. Fréchet et, en outre, sa réalisation géométrique peut présenter des discontinuités « non essentielles ». De telles discontinuités ne surprendront guère ceux qui ont suivi, en lisant entre les lignes, les idées développées par l'école de T. Radò au sujet de l'aire d'une surface au sens classique de Lebesgue-Fréchet. Cette école a exposé systématiquement le point de vue d'après lequel sont « non essentielles » certaines parties d'une surface où le Jacobien généralisé s'annule. D'autre auteurs, qui introduisent une métrique intrinsèque sur une surface, considèrent comme « non essentiels » les points infiniment éloignés selon cette métrique. De toute façon, si l'on admet qu'une partie d'une surface peut être « non essentielle », pourquoi assujettir cette partie à une condition quelconque, même à celle de la continuité ?

Pourtant ce n'est pas ce point de vue qui nous a guidé. Le choix de notre définition nous a été entièrement dicté par le but même que nous nous sommes proposé, d'établir le principe de minimum, ce qui n'est autre chose que de

([1]) Les idées et méthodes exposées ici ont leur origine dans des travaux analogues, datant de 1933-1938, qui concernent les courbes généralisées dans le Calcul des Variations. Le lecteur remarquera qu'elles sont très proches de celles que M. Laurent Schwarz a énoncées récemment dans un autre domaine de l'Analyse.

vraiment comprendre les problèmes du Calcul des Variation concernant les surfaces paramétriques élémentaires. A notre avis, une généralisation de la notion de surface élémentaire n'a de sens que dans la mesure où elle nous fait comprendre mieux les surfaces *élémentaires*. Ainsi, s'il se trouve que le minimum, dans un problème du Calcul des Variations est fourni par une surface généralisée, il faudra qu'on puisse en déduire une solution approximative fournie par une surface élémentaire qui s'en approche, et inversement.

2. Définitions provisoires. — Le mot « élémentaire » est assez vague : nous le préciserons aussi peu que possible, car ce qu'il contient d'arbitraire n'aura aucune influence sur la forme finale de nos résultats.

Désignons par x un vecteur variable dans l'espace cartésien à m dimensions, et par J le produit vectoriel de deux vecteurs de cet espace ; la partie de l'espace à $\frac{m(m-1)}{2}$ dimensions occupée par de tels produits sera dite : espace des J. Lorsque x est une fonction continue $x(u, v)$ dans le domaine $R, 0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$, nous dirons que $x(u, v)$ constitue une *représentation paramétrique*. Celle-ci sera dite « *de Lipschitz*, », si le rapport de la distance de deux valeurs de la fonction $x(u, v)$ à la distance des deux points (u, v) correspondants dans R reste borné. Elle sera dite « *de Dirichlet*, », si elle se réduit, sur presque toute droite parallèle à l'axe des u ou des v, à une fonction absolument continue d'une seule variable réelle, et si en outre, les dérivées partielles x_u, x_v sont à carrés sommables dans R. Parmi les représentations paramétriques de Dirichlet, choisissons-en une classe quelconque comprenant au moins les représentations paramétriques de Lipschitz : les membres de cette classe seront dits « *représentations paramétriques élémentaires* » (2).

Considérons les fonctions réelles continues $f(x, J)$ des vecteurs x, J à dimensions m et $\frac{m(m-2)}{2}$, qui sont assujetties à la *condition d'homogénéité* $f(x, \sigma J) = \sigma f(x, J)$ pour $\sigma \geq 0$. Nous désignons par $\mathfrak{F}_B$ l'espace constitué par ces fonctions, lorsque la distance de deux quelconques d'entre elles $f_1(x, J)$ et $f_2(x, J)$ est la quantité $Q_B(f_1 - f_2)$, où $Q_B(f)$ désigne le maximum de la valeur absolue de $f(x, J)$ pour tout couple x, J tel que $|x| \leq B$ et $|J| = 1$. Nous écrirons $\mathfrak{F}$ et $Q(f)$ au lieu de $\mathfrak{F}_B$ et $Q_B(f)$ lorsque $B = \infty$.

Étant donné une représentation paramétrique élémentaire $x(u, v)$, nous définissons presque partout sur R son Jacobien $J(u, v)$ comme le produit vectoriel de ses dérivées partielles x_u, x_v et nous formons, pour une fonction arbitraire f de $\mathfrak{F}$, l'intégrale de surface

$$(2.1) \qquad \mathfrak{L}(f) = \iint_R f[x(u, v), J(u, v)]\, du\, dv.$$

Deux représentations paramétriques élémentaires seront dites « *équivalentes* », si pour chaque f de $\mathfrak{F}$, elles donnent toutes deux la même valeur à l'intégrale

(2) Nous introduirons quelques hypothèses supplémentaires au paragraphe 6.

de surface (2.1). Toute classe de représentations paramétriques équivalentes deux à deux définit ce que nous appellerons une *surface paramétrique élémentaire* ([3]). Or, on voit tout de suite que cette dernière est définie par l'intégrale (2.1), et inversement. Nous allons donc identifier ([4]) la notion de surface paramétrique élémentaire avec celle d'intégrale de surface, c'est-à-dire avec celle d'une *fonctionnelle linéaire* $\mathcal{L}(f)$ possédant au moins une expression de la forme (2.1) où $x(u, v)$ est une représentation paramétrique élémentaire dont le Jacobien est $\mathrm{J}(u, v)$ presque partout.

Cette modification de la notion d'identité d'une surface entraîne une modification correspondante de la convergence. Nous dirons qu'une suite de surfaces paramétriques élémentaires *converge* si, pour chaque f de $\mathcal{F}$, les valeurs prises par les fonctionnelles linéaires $\mathcal{L}_n(f)$ correspondantes convergent.

Observons que notre définition des surfaces paramétriques élémentaires est toute faite pour restaurer, aux problèmes qui leur sont relatifs dans le Calcul des Variations, la possibilité d'une solution *unique*. Ce n'était pas le cas des définitions antérieures, puisqu'on n'avait qu'à modifier une solution donnée de façon triviale pour obtenir une solution nouvelle. Quant à notre définition de convergence, elle a pour effet de rendre *continues* toutes les fonctionnelles dont nous aurons à nous occuper, ce qui fait disparaître les difficultés traditionnelles du Calcul des Variations.

3. **Notations et résultats auxiliaires.** — Un ensemble E de fonctionnelles linéaires $\mathcal{L}(f)$ quelconques définies pour tout f de $\mathcal{F}$ sera nommé *limité*, si chaque suite de ses membres contient une sous-suite faiblement convergente. (Le terme « compact » étant utilisé dans un autre sens par certains mathématiciens, nous avons préféré lui substituer un terme nouveau). Le théorème suivant est connu :

(3.1) 1° *Étant donné une fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}(f)$ quelconque définie pour tout f de $\mathcal{F}$ il existe une constante $\mathrm{A} = a(\mathcal{L})$ appelée* NORME *de $\mathcal{L}$ et une constant $\mathrm{B} = b(\mathcal{L})$ appelée* MODULE *de $\mathcal{L}$ tellès que l'on ait $\mathcal{L}(f) \leqq \mathrm{A}\,\mathrm{Q}_{\mathrm{B}}(f)$ pour tout f de $\mathcal{F}$, et que cette inégalité cesse d'être vraie (pour au moins une fonction f de $\mathcal{F}$ dès que l'on remplace* A *ou* B *par une constante plus petite*; 2° *Pour qu'un ensemble* E *de fonctionnelles linéaires $\mathcal{L}(f)$ quelconques définies pour tout f de $\mathcal{F}$ soit limité, il faut et il suffit que leurs normes et leurs modules soient bornés.*

Une fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}(f)$ est dite *non négative* si le nombre $\mathcal{L}(f)$ est non négatif chaque fois que la fonction f est non négative. Évidemment :

(3.2) *Pour une fonctionnelle linéraire $\mathcal{L}(f)$ non négative, sa norme $a(\mathcal{L})$ a la valeur $\mathcal{L}(f_1)$ où $f_1(x, \mathrm{J})$ est la fonction* $|\mathrm{J}|$.

([3]) D'une manière analogue, nous appellerons surface paramétrique de Lipschitz (ou de Dirichlet), la notion de surface paramétrique élémentaire que l'on obtiendrait en identifiant les représentations paramétriques élémentaires avec les représentations paramétriques de Lipschitz (ou de Dirichlet).

([4]) Cette identification n'est pas arbitraire : pour savoir ce qu'est vraiment un être géométrique, il faut se demander comment on l'utilise. Or c'est bien l'intégrale (2.1) que nous formons chaque fois que nous utilisons une surface élémentaire dans le Calcul des Variations.

Nous écrirons quelquefois y pour le couple de vecteurs (x, J) et nous désignerons par $\mathfrak{F}_{\mathrm{Lip},B}$ la classe des fonctions $f(y)$ de $\mathfrak{F}$ telles que l'on ait

$$|f(y)| \leqq 1 \quad \text{et} \quad |f(y) - f(y')| \leqq |y - y'|,$$

pour y et y' situés dans l'ensemble des couples (x, J) où $|x| \leqq B$ et $|J| = 1$. Étant donné deux fonctionnelles linéaires $\mathcal{L}_1(f)$, $\mathcal{L}_2(f)$ quelconques définies pour tout f de $\mathfrak{F}$, nous nommerons *distance de Mc Shane* de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ la quantité $M_B(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)$, où $M_B(\mathcal{L})$ désigne le maximum pour f dans $\mathfrak{F}_{\mathrm{Lip},B}$ des valeurs prises par la fonctionnelle arbitraire $\mathcal{L}(f)$.

(**3**.3) *Tout ensemble de fonctionnelles linéaires non négatives $\mathcal{L}(f)$ dont les modules ne dépassent pas la constante* B, *est métrisable par la distance de Mc Shane de façon équivalente à la topologie faible.*

En d'autres termes : pour qu'une suite $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ de fonctionnelles non négatives, dont les modules ne dépassent pas B, converge faiblement, il faut et il suffit que $M_B(\mathcal{L}_n - \mathcal{L}_{n'}) \to 0$ lorsque $n, n' \to \infty$.

Les démonstrations de (**3**.1) et (**3**.3) s'obtiennent par exemple en adaptant, par des changements faciles, celles de Young [**4**, p. 88, th. 4.3] et de Mc Shane [**1**, p. 534].

Observons encore que, pour une constante B soit supérieure ou égale au module de la fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}(f)$, il faut et il suffit que pour tout f_0 de $\mathfrak{F}$

(3.4) *l'égalité* $Q_B(f_0) = 0$ *entraîne* $\mathcal{L}(f_0) = 0$.

En effet, la nécessité de cette condition se déduit directement de (**3**.1), tandis que sa suffisance s'obtient en remarquant que dans $\mathfrak{F}_B$ la fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}(f)$ possède une norme A, donc satisfait à l'inégalité $\mathcal{L}(f) \leqq AQ_B(f)$, et cette dernière inégalité, valable dans $\mathfrak{F}_B$, est valable aussi dans $\mathfrak{F}$ d'après (3.4), ce qui implique que B n'est pas inférieure au module de $\mathcal{L}(f)$.

Dans le cas d'une surface paramétrique élémentaire $\mathcal{L}(f)$ de la forme (**2**.1), soit $x(u, v)$ une de ses représentations paramétriques élémentaires. Nous dirons que $x(u, v)$ possède une *borne essentielle* B, si l'on a :

(3.5) $|x(u, v)| \leqq B$ en presque tout point (u, v) tel que $J(u, v) \neq 0$.

Or on voit sans peine que, dans le cas où $\mathcal{L}(f)$ a la forme (**2**.1), la condition (3.5) équivaut à (**3**.4), c'est-à-dire que :

(3.6) *Le module de la surface paramétrique élémentaire $\mathcal{L}(f)$ est égal à la plus petite borne essentielle de $x(u, v)$, où $x(u, v)$ désigne une représentation paramétrique élémentaire quelconque de la surface $\mathcal{L}(f)$.*

En effet, si (3.5) a lieu, on trouve d'après (**2**.1),

$$\mathcal{L}(f) \leqq Q_B(f)\,\mathcal{L}(f_1) \quad \text{où} \quad f_1(x, J) = |J|:$$

tandis que si (3.5) n'a pas lieu, on peut construire une fonction $f(x, J)$ non négative, s'annulant pour $|x| \leqq B$, telle que l'on ait $\mathcal{L}(f) > 0$.

Remarquons encore que d'après (3.2) :

(3.7) *La norme $a(\mathcal{L})$ d'une surface paramétrique élémentaire $\mathcal{L}(f)$ coïncide avec son aire de Lebesgue-Fréchet.*

En effet, cette dernière est, comme on le sait, donnée elle aussi par l'intégrale de surface $\mathcal{L}(f_1)$, où $f_1(x, J) = |J|$.

D'ailleurs les surfaces paramétriques *généralisées*, que nous introduirons au paragraphe suivant, sont elles aussi des fonctionnelles linéaires $\mathcal{L}(f)$ possédant la norme $\mathcal{L}(f_1)$, où $f_1(x, J) = |J|$. Nous verrons que ces dernières comprennent comme cas particulier la notion classique d'une intégrale de surface étendue à une surface paramétrique au sens de Fréchet : et la norme coïncide encore dans ce cas avec l'aire de Lebesgue-Fréchet. Pour conserver une terminologie uniforme, qui soit conforme à celle que l'on utilise dans le cas des surfaces au sens de l'Analyse classique, nous dirons souvent « *aire* » et « *borne essentielle* » d'une surface paramétrique généralisée au lieu de « norme » et « module » de la fonctionnelle linéaire correspondante.

En tant que norme, *l'aire de Lebesgue-Fréchet joue bien entendu un rôle fondamental*, qui ne se laisse plus atteindre par les critiques récentes basées sur le point de vue « teratologique » de la géométrie de l'espace Euclidien. Donc, un des résultats immédiats de notre théorie est de vraiment faire comprendre en quoi consiste l'importance fondamentale de l'aire de Lebesgue-Fréchet.

4. **Les surfaces paramétriques généralisées.** — Passons à la tâche de compléter l'espace abstrait constitué par nos surfaces paramétriques élémentaires. De même que nous avons identifié ces dernières avec les fonctionnelles linéaires de la forme (2.1), nous allons identifier les surfaces paramétriques généralisées avec leurs limites faibles, en d'autres termes :

(4.1) *Une fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}(f)$ sera dite surface paramétrique généralisée, s'il existe une suite $\mathcal{L}_n(f) = \iint_R f[x_n(u, v), J_n(u, v)]\, du\, dv$ de fonctionnelles linéaires de la forme (2.1) où $x_n(u, v)$ est une représentation élémentaire de Jacobien $J_n(u, v)$ presque partout, telle que l'on ait pour chaque f de $\mathcal{F}$.*

$$\mathcal{L}(f) = \lim_n \mathcal{L}_n(f) \tag{4.2}$$

De cette façon, chaque suite convergente (§ 2) de surfaces paramétriques élémentaires a pour limite une surface paramétrique généralisée, se réduisant peut-être à une surface paramétrique élémentaire. En effet en considérant une suite de répétitions, on voit tout de suite que toute surface paramétrique élémentaire est en même temps surface paramétrique généralisée. D'ailleurs, nous verrons que la classe des surfaces paramétriques généralisées coïncide avec celle des fonctionnelles linéaires *non négatives*, définies dans $\mathcal{F}$; à cet égard, l'analogie entre les surfaces et les courbes généralisées fait défaut.

A la définition que nous avons donnée des surfaces paramétriques généralisées, joignons encore celle de leur convergence, toute semblable à celle adoptée pour les surfaces paramétriques élémentaires : une suite $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ de surfaces paramétriques généralisées *converge* si pour chaque f de $\mathfrak{F}$ il existe la limite finie $\lim\limits_n \mathcal{L}_n(f)$.

5. **Le principe de minimum.** — Soit E un ensemble donné de surfaces paramétriques élémentaires. Un problème classique du Calcul des Variations consiste à chercher la borne inférieure $\mu(f_0, \text{E})$ des valeurs $\mathcal{L}(f_0)$ prises pour $f=f_0$ par les fonctionnelles linéaires $\mathcal{L}(f)$ qui sont membres de E : nous l'appellerons le *problème élémentaire,* tandis que nous appellerons *problème généralisé* celui de la borne inférieure $\bar{\mu}(f_0, \text{E})$ des valeurs $\mathcal{L}(f_0)$ prises pour $f=f_0$ par les fonctionnelles linéaires $\mathcal{L}(f)$ qui sont limites de E.

(5.1) *On a toujours $\mu=\bar{\mu}$, c'est-à-dire que les deux problèmes équivalent l'un à l'autre.*

En effet, il suffit de montrer l'impossibilité de $\mu>\bar{\mu}$; cette inégalité entraînerait l'existence d'une suite convergente de membres $\mathcal{L}_n(f)$ de E dont la limite faible prendrait pour $f=f_0$ une valeur inférieure à μ; donc nous aurions $\lim\limits_n \mathcal{L}_n(f_0)<\mu$, d'où $\mathcal{L}_n(f_0)<p$ pour une certaine valeur de n, contrairement à la définition de μ.

5.2 Principe de minimum. — *La borne inférieure $\bar{\mu}(f_0, \text{E})$ est atteinte dans le problème généralisé pourvu que* E *soit limité* (§ 3), *c'est-à-dire pourvu que les membres de* E *possèdent une aire de Lebesgue-Fréchet bornée et des représentations paramétriques essentiellement bornées.*

En effet, par définition de μ il existe une suite de membres $\mathcal{L}_n(f)$ de E telle que $\mathcal{L}_n(f_0)\to\mu$. Soit $\mathcal{L}(f)$ la limite faible d'une sous-suite convergence $\{\mathcal{L}_{n_r}(f)\}$. On trouve

$$\mathcal{L}(f_0)=\lim_r \mathcal{L}_{n_r}(f_0)=\lim_n \mathcal{L}_n(f_0)=\mu,$$

ce qui achève la démonstration, d'après (5.1).

II. — Partie géométrique.

6. **Les notions de frontière et frontière-limite.** — Nous allons définir la frontière dans le sens traditionnel d'une courbe close orientée de Fréchet. Une telle définition ne s'adapte que partiellement à la notion de surface paramétrique généralisée ainsi que nous l'avons développée : par exemple il n'est pas dit qu'une telle frontière existe, ni qu'elle soit unique. Une théorie vraiment complète de la frontière devrait d'ailleurs comprendre, comme cas particulier, la belle théorie des Bouts Premiers de M. Carathéodory. Néanmoins, dans les problèmes classiques qui sont la raison d'être de tout ce que nous faisons ici, la frontière est une des données

du problème, et par conséquent, c'est une courbe élémentaire. Le lecteur qui, sans doute, aura hâte d'en arriver aux applications dans l'ordre d'idées classique, ne nous en voudra pas d'avoir omis de faire, dans cette première exposition de la théorie des surfaces paramétriques généralisées, une analyse plus complète de la notion de frontière, ce qui nous aurait retenu bien longtemps. L'analyse partielle que nous donnerons, suffira ici.

En désignant comme toujours par R le carré $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ du plan des (u, v), écrivons P pour le périmètre de R, et pour des besoins ultérieurs, R', R'', R''' pour les parties $0 \leq u \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \leq u \leq \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} \leq u \leq 1$ du carré R, et P', P'', P''' pour leurs périmètres.

Dans la suite, nous ferons quelques hypothèses supplémentaires sur *la classe des représentations paramétriques élémentaires* :

a. si $x(u, v)$ est une telle représentation, il en est de même de la fonction $x(u_0, v) = x^*(u, v)$, où u_0 désigne une constante sujette à $0 \leq u_0 \leq 1$;

b. étant donné une fonction continue $x(u, v)$ dans R, une décomposition finie $R = \Sigma R_\nu$ de R en rectangles partiels R_ν sans points intérieurs communs, un homéomorphisme conforme, ou Lipschitzien, $T_\nu(u, v)$ de R en R_ν, et une fonction $x_\nu(u, v)$ continue dans R telle que $x(u, v) = x_\nu[T_\nu(u, v)]$, alors si $x(u, v)$ est une représentation paramétrique élémentaire il en est de même des $x_\nu(u, v)$ et vice versa. (Peut-être d'autres hypothèses de ce genre qui rendent possibles certaines constructions simples).

Soient maintenant $\mathfrak{L}(f)$ une surface paramétrique généralisée, $x_n(u, v)$ une représentation paramétrique élémentaire d'une surface $\mathfrak{L}_n(f)$ t-elle que $\mathfrak{L}_n(f) \rightarrow \mathfrak{L}(f)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et désignons par $X_n(u, v)$ la fonction $x_n(u, v)$ sur le périmètre P de R. Nous dirons que $\mathfrak{L}(f)$ *admet une frontière* C, où C est une courbe close orientée de Fréchet, et que cette frontière est représentée par une fonction $X(u, v)$ définie sur P, si $X(u, v)$ est une représentation de C au sens de l'Analyse classique, et si l'on peut choisir les $x_n(u, v)$ de façon que $X_n(u, v) = X(u, v)$ pour chaque n. Dans le cas où $\mathfrak{L}(f)$ admet une frontière se réduisant à un seul point c'est-à-dire où $X(u, v)$ est une constante, la surface paramétrique généralisée $\mathfrak{L}(f)$ est dite *close*.

Nous dirons encore, généralement, que $\mathfrak{L}(f)$ admet une *frontière-limite* C, représentée par $X(u, v)$ sur P, si le choix des $x_n(u, v)$ peut se faire de façon que $X(u, v)$ soit la limite uniforme des $X_n(u, v)$ sur P.

Une frontière, ou frontière-limite, sera dite *régulière* si elle se compose d'un nombre fini d'arcs simples, disjoints deux à deux, sauf pour leurs extrémités.

Évidemment :

6.1 *Si $\mathfrak{L}(f)$ est limite d'une suite convergente de surfaces paramétriques généralisées $\mathfrak{L}_n(f)$ chacune desquelles admet la frontière* C, *alors $\mathfrak{L}(f)$ admet la frontière* C. *D'une façon analogue, si $\mathfrak{L}_n(f)$ admet une frontière-limite* C_n *où* $\lim C_n = C$, *la surface paramétrique généralisée $\mathfrak{L}(f) = \lim \mathfrak{L}_n(f)$ admet la frontière-limite* C.

Observons encore qu'une frontière, où frontière-limite, n'est jamais unique. En effet :

6.2 *Soit* C *une courbe close orientée de Fréchet, représentée sur* P *par une fonction* $X(u, v)$ *prenant sur le côté* $v = 1$, *de* P *la valeur constante* X_0. *Soit* X_1, *un autre point quelconque de l'espace des* x *et soit* C' *la modification de* C *obtenue en remplaçant* $X(u, v)$ *par une fonction* $X'(u, v)$ *égale à* $X(u, v)$ *sauf sur le côté* $v = 1$, $0 \leqq u \leqq 1$, *sur lequel la fonction* $X'(u, v)$ *est linéaire pour* $0 \leqq u \leqq \frac{1}{2}$ *et pour* $\frac{1}{2} \leqq u \leqq 1$ *et prend les valeurs* X_1, *pour* $u = \frac{1}{2}$ *et* X_0 *pour* $u = 0$ *et* $u = 1$. *Alors toute surface paramétrique généralisée* $\mathcal{L}(f)$, *qui admet la frontière ou frontière-limite* C, *admet aussi la frontière ou frontière-limite* C'.

Ce résultat est lui-même contenu dans la partie 3° du théorème suivant sur l'addition des surfaces paramétriques généralisées.

6.3 1° *Si les fonctionnelles linéaires* $\mathcal{L}_1(f)$ *et* $\mathcal{L}_2(f)$ *sont des surfaces paramétiques généralisées, il en est de même de leur somme* $\mathcal{L}_1(f) + \mathcal{L}_2(f)$; 2° *Si* $\mathcal{L}_1(f)$ *admet une frontière ou frontière-limite* C, *et si* $\mathcal{L}_2(f)$ *est close ou admet une frontière-limite se réduisant à un point de* C, *alors* $\mathcal{L}_1(f) = \mathcal{L}_2(f)$ *admet la frontière, ou frontière-limite,* C. [*Cette conclusion subsiste encore si l'on suppose de* $\mathcal{L}_2(f)$ *seulement qu'elle est limite d'une somme finie de surfaces paramétriques généralisées chacune desquelles est close ou admet une frontière limite se réduisant à un point correspondant de* C]; 3° *Soient* C_1 *et* C_2 *deux courbes closes orientées de Fréchet, représentées sur les périmètres* P' *de* R' *et* P''' *de* R''' *respectivement par des fonctions* $X_1(u, v)$ *et* $X_2(u, v)$ *constantes sur le côté de* P' *ou* P''' *qui ne fait pas partie de* P, *et soit* C *la courbe définie par la fonction* $X(u, v)$ *sur* P, *où* $X(u, v)$ *est égale à* $X_1(u, v)$ *sur* PP', *à* $X_2(u, v)$ *sur* PP''', *et à une fonction linéaire de* u *pour* $\frac{1}{3} \leqq u \leqq \frac{2}{3}$. *Alors si* $\mathcal{L}_1(f)$ *et* $\mathcal{L}_2(f)$ *admettent respectivement les frontières ou, frontières-limites* C_1 *et* C_2 *leur somme* $\mathcal{L}_1(f) + \mathcal{L}_2(f)$ *admet la frontière ou, frontière-limite,* C.

La démonstration facile de 1° et 2° est laissée au lecteur tandis que 2° se réduit de 3° si l'on observe qu'une surface close admet une frontière se réduisant à un point donné. La remarque entre parenthèses se déduit alors de (6.1).

Dans le cas où les courbes C_1 et C_2 de la partie 3° ont un point commun, on peut évidemment s'arranger à ce que $X(u, v)$ soit constante pour $\frac{1}{3} \leqq u \leqq \frac{2}{3}$, et nous exprimons la relation reliant dans ce cas C_1 et C_2 à C en écrivant $C = C_1 + C_2$. D'une façon analogue, on définit l'addition d'un nombre fini de surfaces paramétriques généralisées dont les frontières sont les courbes $C_0, \ldots, C_k$, où pour $r = 1, \ldots, k$, les deux courbes C_{r-1} et C_r ont au moins un point commun, et l'on définit la somme $C = C_0 + C_1 + \ldots + C_k$, qui d'ailleurs dépend de l'ordre des C_r.

7. **Décompositions cycliques.** — Nous appellerons *surface paramétrique*

généralisée avec frontière, un couple $\mathcal{L}(f)$, C où C est une frontière admise par $\mathcal{L}(f)$. Nous conviendrons de considérer comme un cas particulier où C, joue le rôle d'un zéro, une surface paramétrique généralisée close. Si l'on a, dans le sens du paragraphe précédent $\Sigma\mathcal{L}_n(f)=\mathcal{L}(f)$ et $\Sigma C_n = C$, les surfaces paramétriques généralisées avec frontières $\mathcal{L}_n(f)$, C_n seront dites *parties* de $\mathcal{L}(f)$, C.

Une surface paramétrique généralisée *close* non nulle $\mathcal{L}(f)$ sera dite *cyclique*, si elle ne possède pas de partie close non nulle différente de $\mathcal{L}(f)$ elle-même, *singulière* si elle ne possède pas de partie close cyclique. D'une façon analogue, une surface paramétrique généralisée avec frontière $\mathcal{L}(f)$, C sera dite *hémicyclique*, si elle ne possède pas de partie non nulle différente d'elle-même.

(7.1) *Soit $\mathcal{L}(f)$, C une surface paramétrique généralisée avec frontière, où C est une frontière régulière. Alors il existe une partie close singulière $\mathcal{L}_0^*(f)$, une suite finie ou infinie $\{\mathcal{L}_n^*(f)\ n=1, 2, \dots\}$ de parties closes cycliques et une suite finie $\{\mathcal{L}_k(f), C_k\}$ de parties hémi cycliques, de $\mathcal{L}(f)$, C telle que l'on ait*

$$C=\sum C_k \quad \textit{et} \quad \mathcal{L}(f)=\mathcal{L}^*(f)+\sum \mathcal{L}_k(f), \quad \textit{où} \quad \mathcal{L}^*(f)=\sum_{n\geq 0}\mathcal{L}_n^*(f).$$

D'après le principe du minimum (5.2), il existe une partie close $\mathcal{L}^*(f)$ d'aire maximale, telle que la partie $\mathcal{L}(f)-\mathcal{L}^*(f)$, C ne possède pas de partie close non nulle. Puisque C est régulière, on trouve facilement qu'il existe une décomposition de la forme $\mathcal{L}(f)-\mathcal{L}^*(f)=\Sigma\mathcal{L}_k(f)$ et $C=\Sigma C_k$, où les couples $\mathcal{L}_k$, C_k sont un nombre fini de parties hémicycliques. Il reste à décomposer la partie close $\mathcal{L}^*(f)$. Soit μ_1 la borne supérieure des aires des parties closes cycliques de $\mathcal{L}^*(f)$, et, si $\mu_1>0$, soit $\mathcal{L}_1^*(f)$ une de ces parties, d'aire $>\frac{1}{2}\mu_1$. Généralement, soit μ_n la borne supérieure des aires des parties closes cycliques de $\mathcal{L}^*(f)-\sum\limits_{1\leq\nu<n}\mathcal{L}_\nu^*(f)$, et, si $\mu_n>0$, soit $\mathcal{L}_n^*(f)$ une de ces parties, d'aire $>\frac{1}{2}\mu_n$. On trouve facilement que la somme $\Sigma\mu_n$ est convergente ou finie, donc que μ_n tend vers zéro ou s'annule pour une certaine valeur de n, et par conséquent que la *partie close* $\mathcal{L}_0^*(f)=\mathcal{L}^*(f)-\Sigma\mathcal{L}_n^*(f)$ (où la somme est étendue aux $n\geqq 1$ pour lesquels $\mathcal{L}_n^*(f)$ est défini) ne possède pas de partie close cyclique d'aire positive : elle est donc singulière, ce qui achève la démonstration.

Réciproquement, d'après (6.3) :

Si $C=\sum\limits_{k=1}^{K}C_k$ est régulière, si $\mathcal{L}_0^*(f)$ est close singulière, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{L}_n^*(f)$ est une somme convergente dont les termes sont closes cycliques et si les $\{\mathcal{L}_k(f), C_k\}$ sont hémicycliques, alors $\mathcal{L}(f)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n^*(f)+\sum\limits_{k=0}^{K}\mathcal{L}_k(f)$ admet la frontière C.

8. Les surfaces concentrées et les surfaces singulières. — Une surface paramétrique généralisée $\mathcal{L}(f)$ est dite *située* dans un ensemble fermé X de points de l'espace des x, si l'on a $\mathcal{L}(f) = 0$ chaque fois que f est une fonction $f(x, J)$ nulle pour tout x de X. Dans le cas où X ne comprend qu'un seul point x_0, une surface paramétrique généralisée située dans X est dite *concentrée au point* x_0.

Ainsi, si J_0 est un vecteur quelconque de l'espace des J tel que $|J_0| = 1$, l'expression $kf(x_0, J_0)$ où k désigne une constante positive, est une surface paramétrique généralisée concentrée au points x_0, puisque qu'elle est limite d'un *polyèdre* ([5]) composé de n faces identiques d'aires $\frac{k}{n}$ et de direction J_0. Nous appellerons cette expression : *surface plane de direction* J_0 *et d'aire* k *concentrée au point* x_0. D'une façon analogue, une combinaison linéaire à coefficients positifs $\Sigma a_i f(x_0, J_i)$ est une surface paramétrique généralisée concentrée au point x_0. En approximant par de telles combinaisons linéaires, on conclut facilement que :

(8.1) *Si* $\Lambda(\varphi)$ *est une fonctionnelle linéaire non négative de l'espace* Φ *des fonctions* $\varphi(J)$ *telles que* $\varphi(\sigma J) = \sigma\varphi(J)$ *pour* $\sigma \geqq 0$, *la fonctionnelle* $\mathcal{L}(f) = \Lambda(\varphi)$ *pour* $\varphi(J) = f(x_0, J)$ *est une surface paramétrique généralisée concentrée au point* x_0. *Inversement, toute surface paramétrique généralisée concentrée au point* x_0 *a cette forme.*

De théorèmes connus il s'ensuit que toute fonctionnelle linéaire non négative $\mathcal{L}(f)$ a la forme d'une intégrale de Bochner

$$\int \mathcal{L}_x(f)\, d\gamma \tag{8.2}$$

où γ est une mesure bornée, s'annulant hors d'une sphère finie, dans l'espace des x, et où $\mathcal{L}_x(f)$ est une surface paramétrique généralisée concentrée au point x, égale, par exemple à la *dérivée par réseaux* par rapport à γ de l'intégrale (8.2). Une telle $\mathcal{L}(f)$ se laisse donc approcher indéfiniment par une somme finie de surfaces concentrées, elle est donc surface paramétrique généralisée, c'est-à-dire que, comme nous l'avions annoncé au paragraphe 4 :

(8.3) *La classe des surfaces paramétriques généralisées coïncide avec celle des fonctionnelles linéaires non négatives.*

Remarquons encore que toute surface paramétrique généralisée concentrée au point x_0 admet une frontière-limite C se réduisant au point x_0. Or ceci ne veut pas dire qu'elle soit close, car il faut bien distinguer ici entre la notion de frontière et celle de frontière-limite. Pour que notre surface soit close, il faut qu'elle admette une frontière se réduisant au point x_0, et la condition suivante est alors nécessaire :

(8.4) *Si* $\mathcal{L}(f)$ *est une surface paramétrique généralisée close concentrée*

([5]) Nous appellerons polyèdre une surface paramétrique élémentaire définie par une représentation $x(u, v)$ *quasi linéaire*, c'est-à-dire linéaire dans chaque triangle d'une triangulation de R; les valeurs de $x(u, v)$ dans un tel triangle définissent une *face* du polyèdre pour laquelle le Jacobien $J(u, v)$ est constant; la direction de Jacobien s'appelle direction de la face en question, sa valeur absolue multipliée par l'aire du triangle correspondant dans R s'appelle aire de la face.

au point x_0, *on a* $\mathcal{L}(f) = \Lambda(\varphi)$ *où* $\varphi(\mathrm{J}) = f(x_0, \mathrm{J})$ *et où* $\Lambda(\varphi)$ *désigne une fonctionnelle linéaire non négative qui s'annule lorsque* $\varphi(\mathrm{J})$ *est une coordonnée du vecteur* J.

En effet, ceci se déduit de (8.1) jointe au résultat connu suivant (d'où l'on passe à la limite) : « Si $\mathcal{L}(f)$ est une surface paramétrique élémentaire close, elle s'annule lorsque $f(x, \mathrm{J})$ est une coordonnée du vecteur J ». Il suffit d'ailleurs de connaître ce résultat dans le cas d'un polyèdre clos, car on montre qu'une surface paramétrique élémentaire close, et, par conséquent, *une surface paramétrique généralisée close*, est limite d'un *polyèdre clos*.

La réciproque de (8.4) paraît être inexacte sans hypothèse supplémentaire. Pourtant, nous montrerons plus loin qu'elle est vraie si l'espace des x a trois dimensions.

Remarquons aussi que :

(8.5) *Si* $\mathcal{L}(f)$ *est une surface paramétrique généralisée concentrée close, il en est de même de la fonctionnelle* $k\mathcal{L}(f)$, *où* k *est une constante positive quelconque.*

Soit en effet $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ une suite de surfaces paramétriques élémentaires closes dont la limite (faible) est $\mathcal{L}(f)$, et soit $\mathcal{L}(f) = \Lambda(\varphi)$ où $\varphi(\mathrm{J}) = f(o, \mathrm{J})$, le point x_0 étant supposé coïncider avec l'origine sans que la généralité en souffre. En posant $\mathcal{L}_n^*(f) = \mathcal{L}_n(f_n)$ où $f_n(x, \mathrm{J}) = f(n^{-1}x, n^{-2}\mathrm{J})$ on trouve que $\mathcal{L}_n^*(f)$ est une surface paramétrique élémentaire close telle que $n^2\mathcal{L}_n^*(f) \to \mathcal{L}(f) = \Lambda(\varphi)$, d'où il suit que $k\mathcal{L}(f)$ est limite d'une surface paramétrique élémentaire close de la forme $p_n\mathcal{L}_n^*(f)$, où p_n est un entier tel que $n^{-2}p_n \to k$, ce qui achève la démonstration.

(8.6) *Pour que* $\mathcal{L}(f)$ *soit une surface paramétrique généralisée close singulière, il faut et il suffit que* $\mathcal{L}(f)$ *ait la forme* (8.9) *où* $\mathcal{L}_x(f)$ *désigne une surface paramétrique généralisée close concentrée au point* x.

La condition énoncée étant évidemment suffisante, il reste à démontrer sa nécessité, c'est-à-dire si nous exprimons $\mathcal{L}(f)$ sous la forme (8.2) il s'agit de montrer que $\mathcal{L}_x(f)$ est close, sauf peut-être pour un ensemble de points x de mesure γ égale à zéro. Nous avons vu que $\mathcal{L}_x(f)$ est (par rapport à γ) presque partout la dérivée par réseaux de l'intégrale (8.2). Nous choisissons comme réseau une division de l'espace des x par des hyperplans parallèles à ceux des coordonnées, tels que chacun d'eux soit de mesure γ égale à zéro. Pour presque tout x (relativement à γ), le vecteur abstrait $\mathcal{L}_x(f)$ est la limite du rapport fini correspondant, selon la métrique de Mc Shane qui est ici équivalente à la convergence faible. Pour montrer que $\mathcal{L}_x(f)$ est close, il suffit d'après (8.5) de montrer que l'intégrale (8.2) étendue à un intervalle I borné par nos hyperplans est une partie close de $\mathcal{L}(f)$, car en désignant par $n(\mathrm{I})$ l'entier le plus proche de $\frac{1}{\gamma}(\mathrm{I})$, il existe une constante positive k telle que $k^{-1}\mathcal{L}_x(f)$ soit limite de $\int_{\mathrm{I}} \mathcal{L}_x(f)\, d_\gamma n(\mathrm{I})$.

Il suffira de montrer que l'intégrale (8.2) étendue à la partie de l'espace d'un côté d'un de nos hyperplans est une partie close de $\mathcal{L}(f)$. Nous utiliserons pour cela le lemme élémentaire que voici, dont la démonstration peut être laissée au lecteur :

(8.7) *Soit* P *un polyèdre clos d'aire* a, *et soient* π' *et* π'' *deux hyperplans parallèles de l'espace des* x *dont la distance n'est pas moindre de* $a^{\frac{1}{4}}$. *Alors il existe entre* π' *et* π'' *un hyperplan parallèle à eux qui rencontre les faces de* P *en des segments dont la longueur totale ne dépasse pas* $a^{\frac{3}{4}}$.

De ce lemme, en remarquant que π divise P en deux polyèdres que l'on peut compléter, en ajoutant à chacun d'eux des faces situées sur π, de façon à les rendre clos, l'aire totale ajoutée pouvant être choisie $\leqq 2.\dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^2}{4\pi}$ selon l'inégalité isopérimétrique, donc $\leqq a^{\frac{3}{2}}$, on déduit facilement :

(8.8) *Soit* $T(f)$ *une surface d'aire* A *qui est somme de polyèdres clos chacun d'aire* $\leqq a$, *et soient* π', π'' *deux hyperplans distants d'au moins* $a^{\frac{1}{4}}$. *Alors il existe trois surfaces paramétriques élémentaires closes* $T^*(f)$, $T'(f)$, $T''(f)$ *où* $T(f)+T^*(f)=T'(f)+T''(f)$, *telles que* $T^*(f)$ *soit d'aire* $\leqq a^{\frac{1}{2}}A$, *que* $T'(f)$ *soit située du côté de* π'' *comprenant* π', *et que* $T''(f)$ *soit située du côté de* π' *comprenant* π''.

Pour compléter la démonstration de (8.6), il suffit de montrer que $\mathcal{L}(f)$ est somme de deux surfaces paramétriques généralisées closes situées de part et d'autre d'un hyperplan donné π de notre réseau. Soient π'_n et π''_n deux hyperplans parallèles à π distants de $\frac{1}{n}$. Nous pouvons écrire $\mathcal{L}(f)=\lim\limits_{n} T_n(f)$ où $T_n(f)$, satisfait aux conditions énoncées dans (8.8) avec $a=n^{-4}$ pour la surface $T(f)=T_n(f)$. En désignant par T^*_n, T'_n, T''_n les fonctionnelles T^*, T', T'' correspondantes, choisissons une suite d'entiers $n=n_r$ pour laquelle il existe les limites

$$\mathcal{L}_1(f)=\lim_{r} T'_{n_r}(f), \qquad \mathcal{L}_2(f)=\lim_{r} T''_{n_r}(f),$$

et remarquons que $\lim\limits_{n} T^*_n(f)=0$ puisque l'aire de la surface $T^*_n(f)$ tend vers zéro. On trouve que $\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}_1(f)+\mathcal{L}_2(f)$ est la décomposition cherchée.

9. Surfaces concentrées à orientations moyennes et condition de Weierstrass. — Soit $k\geqq 0$ et soient J_0 et J^*_0 deux vecteurs opposés de l'espace des J tels que $|J_0|=|J^*_0|=1$. Nous dirons que la surface paramétrique généralisée $\mathcal{L}(f)$ concentrée au point x_0 est *d'orientation moyenne* J_0 et *d'aire projetée correspondante* k_0 si l'expression $\mathcal{L}(f)+k_0 f(x_0, J^*_0)$ représente une surface concentrée close (6). D'après (8.4), il est clair que :

(6) En particulier si $\mathcal{L}(f)$ est concentrée close on choisit $k_0=0$ et J_0 arbitrairement. C'est d'ailleurs le seul cas où J_0 n'est pas unique.

(9.1) *Si $\mathcal{L}(f)$ concentrée au point x_0 est d'orientation moyenne* J_0 *et d'aire projetée correspondante k_0, on doit avoir $\mathcal{L}(f) = k_0 f(x_0, J_0)$ quand $f(x, J) = \varphi_i(J)$ où $\varphi_i(J)$ désigne une coordonnée du vecteur* J.

Notons encore le cas particulier $m = 3$ où la réciproque est vraie :

(9.2) *Dans le cas 3-dimensionnel, pour que $\mathcal{L}(f)$ concentrée au point x_0 soit d'orientation moyenne* J_0 *et d'aire projetée correspondante k_0, il faut et il suffit que l'on ait $\mathcal{L}(f) = k_0 f(x_0, J_0)$ quand $f(x, J) = \varphi_i(J)$ où $\varphi_i(J)$ désigne une coordonnée du vecteur* J.

La nécessité de (9.2) étant comprise dans (9.1), établissons sa suffisance. Nous pouvons poser $x_0 = 0$ et nous borner au cas où $\mathcal{L}(f)$ a la forme d'une somme finie $\Sigma k_i f(0, J_i)$ avec $k_i > 0$, $|J_i| = 1$, puisque $\mathcal{L}(f)$ se laisse approximer par une telle somme avec la même orientation moyenne et la même aire projetée correspondante. En outre, nous pouvons supposer que $k_0 = 0$: il s'agit alors de montrer que $\mathcal{L}(f)$ est close. Or ceci est évident dans le cas où il existe un polyèdre clos composé de faces d'aires k_i et d'orientations J_i, car en désignant ce polyèdre par $T(f)$ on a $T(f) = \Sigma k_i \varphi(J_i)$ lorsque $f(x, J)$ est une fonction $\varphi(J)$ indépendante de x, et par conséquent si l'on pose pour une $f(x, J)$ arbitraire $f(0, J) = \varphi(J)$, on aura

$$\mathcal{L}(f) = \Sigma k_i \varphi(J_i) = \operatorname{Lim} n^2 T(f_n), \quad \text{où} \quad f_n(x, J) = f(n^{-1}x, n^{-2}J),$$

ce qui exprime $\mathcal{L}(f)$ comme limite de la surface paramétrique élémentaire close $n^2 T_n(f)$, où $T_n(f) = T(f)$ s'obtient de $T(f)$ par un rapetissement dans le rapport $1 : n$. Le cas général se déduit maintenant de la simple remarque :

(9.3) *Si l'espace des x a trois dimensions, toute somme finie $\Sigma k_i \varphi(J_i)$ (où $k_i \geq 0$, $|J_i| = 1$) qui s'annule lorsque $\varphi(J)$ est une coordonnée de* J *est limite faible (dans l'espace Φ) d'une somme finie $\Sigma \bar{k}_r \varphi(\bar{J}_r)$ telle qu'il existe un polyèdre clos composé de faces d'aires $\bar{k}_r$ et de directions $\bar{J}_r$.*

Ceci se démontre par induction, le cas où l'indice i ne prend que deux valeurs étant trivial. La démonstration que le lecteur trouvera de lui-même ou en suivant Young [4, p. 101], en revient à remplacer une face d'un polyèdre clos par une série de « toits d'usines » placés côte à côte, chacun d'eux étant long et mince : en complétant les bouts de chaque toit par des morceaux dont l'aire totale est petite, on obtient encore un polyèdre clos.

On dit qu'une fonction $f_0(x, J)$ remplit en x_0 *la condition de Weierstrass* relative à la direction J_0, si l'on a

$$\sum_{i>0} k_i f_0(x_0, J_i^*) \geq k_0 f_0(x_0, J_0) \tag{9.4}$$

pour tout système fini de constantes positives k_i et de vecteurs $J_i (i > 0)$ où J_i et J_i^* sont opposés et $|J_i| = |J^*| = 1$, tel qu'il existe un polyèdre clos dont les faces ont les aires k_i et les directions J_i pour $i \geqq 0$. [Dans le cas $m = 3$, ceci équivaut à la condition : $f_0(x_0, J)$ est une fonction *convexe* de J en J_0, c'est-à-dire elle n'est pas inférieure à une certaine fonction linéaire de J, égale à elle pour $J = J_0$]. Or on voit facilement que la condition de Weierstrass peut s'écrire :

$$\mathcal{L}(f_0) \geqq k_0 f_0(x_0, J_0) \tag{9.5}$$

pour toute $\mathcal{L}(f)$ concentrée au point x_0, et qui possède l'orientation moyenne J_0 et l'aire projetée correspondante k_0.

Nous appellerons *condition de Weierstrass relative à zéro* au point x_0, la condition

$$\mathcal{L}(f_0) \geqq 0 \tag{9.6}$$

pour toute $\mathcal{L}(f)$ concentrée close au point x_0.

Comme on le voit sans peine, si $f_0(x, J)$ y satisfait en tout point x_0, on peut, *de toute surface paramétrique généralisée* fournissant un minimum dans un problème de type considéré au paragraphe 5 pour lequel E est l'ensemble des surfaces admettant une frontière donnée, *ôter sa partie singulière* sans qu'elle cesse de fournir un minimum. Si, en outre, $f_0(x, J)$ est indépendant de x, *on peut ôter également une partie close quelconque*, pour des raisons analogues.

10. **Lemmes sur l'intégrale de Dirichlet.** — Nous aurons besoin de quelques lemmes adaptés du travail Young [6]. Une représentation paramétrique de Dirichlet (§ 2) sera dite *représentation* (N) si N est une constante dépassant la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\iint \{x_u^2 + x_v^2\} \frac{du\,dv}{2}$, étendue à R.

(10.1) *Toute surface paramétrique de Dirichlet dont l'aire de Lebesgue-Fréchet est inférieure à* N, *possède une représentation* (N).

(10.2) *Soient $\varepsilon > 0$ et $N > 0$. Alors il existe $\eta = \eta(\varepsilon, N) > 0$ tel que toute représentation (N) possède, pour un certain δ correspondant sujet à $\eta < \delta < \varepsilon$, un « grillage (ε, δ) demi-allongé ».*

Voir (3.1) et (10.2) du travail cité. Rappelons la définition : une représentation paramétrique $x(u, v)$ possède un « *grillage* (ε, δ) *demi-allongé* », s'il existe un nombre fini de droites parallèles aux axes de coordonnées du plan des (u, v), qui divisent R en rectangle dont les côtés sont de longueur entre δ et 2δ, de façon que, lorsque (u, v) décrit un segment quelconque intérieur à R situé sur l'une de ces droites, la courbe correspondante décrite par $x(u, v)$ est de longueur inférieure à ε.

(10.3) *Soit* C *une frontière rectifiable (au moins dans le voisinage de ses points multiples) et soit $\mathcal{L}(f)$, C hémi-cyclique et d'aire $<$ N. Alors il existe une suite $\{x_n(u, v)\}$ de représentations (N) de surfaces $\mathcal{L}_n(f)$ convergeant vers $\mathcal{L}(f)$, telle que les fonctions $X_n(u, v)$, qui désignent les $x_n(u, v)$ sur le périmètre* P *de* R, *soient des représentations également continues de la frontière donnée* C.

D'après nos hypothèses, il existe une suite de surfaces paramétriques élémentaires $\mathcal{L}_n(f)$ d'aires inférieures à N qui convergent vers $\mathcal{L}(f)$, qui admettent la frontière C, et qui possèdent d'après (10.1) des représentations (N) que nous désignerons par $x_n(u, v)$. Nous pouvons supposer, en effectuant, s'il le faut, un automorphisme conforme de R, que trois points fixes du périmètre P correspondent à trois points sur C, distincts et indépendants de n.

Supposons, si possible, que les $X_n(u, v)$, c'est-à-dire les fonctions $x_n(u, v)$ sur P, ne sont pas également continues. En posant $\eta_r = \eta\left(\frac{1}{r}, N\right)$ dans (10.2), on trouve qu'il existe alors une constante $a > 0$ et un indice $n = n_r$ arbitrairement grand avec r, tel que $X_n(u, v)$ décrit un arc de C de diamètre dépassant a lorsque (u, v) décrit un certain arc de P de longueur $\leqq \eta_r$. Ce dernier est donc situé dans au plus deux mailles adjacentes du grillage $\left(\frac{1}{r}, \delta\right)$ associé avec $x_n(u, v)$ d'après (10.2). Il s'ensuit qu'il existe un arc de grillage W_n de longueur $< \frac{4}{r}$ sur lequel $x_n(u, v)$ décrit une courbe Γ_n de longueur $< \frac{4}{r}$, où W_n se compose d'au plus quatre côtés de mailles du grillage et ses extrémités découpent sur P un arc W'_n de longueur $< \frac{2}{r}$ sur lequel l'oscillation de $X_n(u, v)$ dépasse a. Sur l'arc complémentaire $W''_n = P - W'_n$, cette oscillation dépasse une constante $b > 0$ pourvu que r soit suffisamment grand, à cause de la condition imposée à trois points fixes sur P.

Pour une suite convenable des entiers r, et par conséquent des $n = n_r$, l'arc de C décrit par $X_n(u, v)$ lorsque (u, v) décrit W'_n tendra vers une position limite C'. Nous supposerons pour simplifier les notations, en extrayant une sous-suite de nos $x_n(u, v)$ et en l'identifiant avec la suite primitivement définie, que ces valeurs de $n = n_r$ décrivent la suite de tous les entiers positifs, et nous écrirons ε_n pour les valeurs correspondantes de $\frac{1}{r}$ qui tendent évidemment vers zéro.

Les deux extrémités de l'arc C' coïncident, car elles sont limites de deux points qui se laissent joindre par Γ_n (de longueur $< 4\varepsilon_n$). Donc $C = C' + C''$ où C' et C'' sont deux courbes orientées closes, de diamètre respectivement $\geqq a$ et $\geqq b$, avec un point commun A, où A est la valeur commune prise par $X_n(u, v)$ en deux points p_n et q_n qui divisent P en deux arcs que la fonction $X_n(u, v)$ fait correspondre à C' et à C''.

Nous allons montrer que, contrairement à notre hypothèse selon laquelle $\mathcal{L}(f)$, C est un hémi cyclique, on peut écrire $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}'(f) + \mathcal{L}''(f)$ où $\mathcal{L}'(f)$ et $\mathcal{L}''(f)$ admettent respectivement les frontières C' et C''. Cette contradiction montrera que les $X_n(u, v)$ étaient bien également continues, ce qui implique (10.3).

Soient T'_n et T''_n les deux parties de R déterminées par W_n, et soient t'_n et t''_n deux arcs simples en dehors de R, chacun desquels joint p_n à q_n, tels que $T'_n + t'_n$ sépare du point à l'infini un domaine U'_n contenant T''_n et que $T''_n + t''_n$ sépare du point à l'infini un domaine U''_n contenant T'_n.

Soit $x'_n(u, v)$ la fonction continue, harmonique dans U'_n, égale à A sur t'_n et à $x(u, v)$ dans T'_n, et soit $x''_n(u, v)$ la fonction continue, harmonique dans U''_n, égale à A sur t''_n, et à $x(u, v)$ dans T''_n.

En transformant les domaines de définition de $x'_n(u, v)$ et de $x''_n(u, v)$ en R de façon conforme, on obtient des représentations paramétriques élémentaires de deux surfaces $\mathcal{L}'_n(f)$ et $\mathcal{L}''_n(f)$ admettant respectivement les frontières C′ et C″. En outre leur somme est égale à $\mathcal{L}_n(f) + \mathcal{L}^*_n(f)$ où $\mathcal{L}^*_n(f)$ est formée des deux surfaces harmoniques correspondant aux fonctions harmoniques que nous avons définies dans U'_n et U''_n, et dont les frontières ont par conséquent des longueurs bornées et des diamètres tendant vers zéro. D'après un théorème connu de Young [7], l'aire de $\mathcal{L}^*_n(f)$ tend donc vers zéro. Donc, en prenant une sous-suite des n pour lesquels il existe la limite $\mathcal{L}'(f) = \lim \mathcal{L}'_n(f)$, on trouve que $\mathcal{L}''(f) = \mathcal{L}(f) - \mathcal{L}'(f)$ est la limite correspondante de $\mathcal{L}''_n(f)$. Ceci montre que $\mathcal{L}'(f)$ et $\mathcal{L}''(f)$ admettent les frontières C′ et C″ respectivement, donc qu'ils fournissent la décomposition annoncée de $\mathcal{L}(f)$, ce qui achève la démonstration.

11. **Les surfaces à substratum** (N). — Soit $x(u, v)$ une représentation (N) de Jacobin $J(u, v)$ presque partout. Nous dirons que $x(u, v)$ est un *substratum* (N) d'une surface paramétrique généralisée donnée $\mathcal{L}(f)$ avec frontière C, s'il existe une partie close singulière $\mathcal{L}^s(f)$, de $\mathcal{L}(f)$ C, et, pour presque tout u, v de R, une surface paramétrique généralisée $\mathcal{L}_{uv}(f)$ concentrée au point $x(u, v)$ avec les propriétés suivantes :

(11.1) *a*. $\mathcal{L}_{uv}(f)$ est nulle lorsque $J(u, v)$ s'annule au point u, v;

b. $\mathcal{L}_{uv}(f)$ possède comme orientation moyenne et aire projetée correspondante, la direction et la valeur absolue de $J(u, v)$, lorsque $J(u, v)$ existe et ne s'annule pas au point u, v.

(11.2) *a*. $\mathcal{L}_{uv}(f)$, considéré comme un vecteur (avec la métrique Mc Shane) qui est fonction de u, v est intégrable dans R au sens de Bochner et l'on a :

b.

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}^s(f) + \iint_{\mathrm{R}} \mathcal{L}_{uv}(f)\, du\, dv.$$

Si, de plus, C est la courbe orientée close définie par $X(u, v)$, où $X(u, v)$ désigne $x(u, v)$ sur le périmètre P de R, alors nous dirons simplement que $x(u, v)$ est un substratum (N) de $\mathcal{L}(f)$. Une surface paramétrique généralisée $\mathcal{L}(f)$ pour laquelle il existe un substratum (N) sera dite *surface à substratum* (N) (7).

(7) Le but des paragraphes suivants est d'associer, à certaines surfaces paramétriques généralisées, des fonctions $x(u, v)$ permettant de les réaliser en quelque sorte, partiellement au moins dans l'espace des x. L'analogie avec les résultats obtenus, il y a une douzaine d'années, pour les courbes généralisées, devient apparente, avant tout dans le cas où l'espace des x a trois dimensions [comparer (9.2)]. Rappelons qu'on peut regarder une courbe généralisée comme formée de points $x(s)$ situés sur une courbe rectifiable au sens ordinaire (le substratum de la courbe généralisée), pourvu que l'on attache à chaque point, non pas une direction déterminée de la tangente, mais un ensemble de directions possibles entre lesquelles il y a une distribution de « probabilité » bien déterminée, telle que la direction moyenne soit celle de la tangente.

(11.3) *Soit* $\{x_n(u, v)\}$ *une suite, uniformément convergente dans* R, *de représentation* (N) *de surfaces paramétriques* $\mathcal{L}_n(f)$ *qui convergent à leur tour vers une surface paramétrique généralisée* $\mathcal{L}(f)$. *Supposons de plus que les fonctions* $X_n(u, v)$, *qui désignent les* $x_n(u, v)$ *sur le périmètre* P *de* R, *représentent au sens classique une même courbe rectifiable, orientée et close, Alors* $\lim x_n(u, v)$ *est un substratum* (N) *de* $\mathcal{L}(f)$.

Démonstration. — Remarquons pour commencer que, d'après un résultat classique [par exemple (11.1), p. 325 du travail cité], la limite $x(u, v)$ des $x_n(u, v)$ est elle aussi une représentation (N). Écrivons $g_n(u, v, J)$ et $g(u, v, J)$ pour $f[x_n(u, v), J)$ et $f[x(u, v), J]$, et soit $l_n(h)$ la fonctionnelle $\iint_R h[u, v, J_n(u, v)]\, du\, dv$ où $h(u, v, J)$ est une fonction continue de (u, v, J) positivement homogène en J, et où $J_n(u, v)$ désigne presque partout le Jacobien de $x_n(u, v)$.

Les fonctionnelles linéaires $l_n(h)$ ont leurs normes bornées, donc $l_n(g_n - g) \to 0$ et, pour la même raison, il existe la limite faible $l(h)$ des $l_n(h)$ pour une sous-suite convenable des n. Par conséquent, on a pour cette sous-suite,

$$l(g) = \lim l_n(g) = \lim l_n(g) + l_n(g_n - g),$$

ce qui peut s'écrire

$$l(g) = \lim l_n(g_n) = \lim \mathcal{L}_n(f) = \mathcal{L}(f).$$

En outre, comme au paragraphe 8, on a une formule du type

$$l(h) = \int l_{u,v}(h)\, d\gamma,$$

où γ est une mesure bornée dans R et où $l_{u,v}(h)$ désigne, pour u, v constants, une fonctionnelle linéaire non négative dans l'espace des fonctions de J continues et positivement homogènes. Posons

$$\gamma(E) = \gamma^*(E) + \iint_E \lambda(u, v)\,|J(u, v)|\, du\, dv,$$

c'est-à-dire décomposons la mesure $\gamma(E)$ en deux mesures; respectivement singulière et absolument continue par rapport à la mesure $\iint |J(u, v)|\, du\, dv$, et soient $\mathcal{L}^*(f) = \int l_{uv}(g)\, d\gamma^*$ et $\mathcal{L}_{uv}(f) = \lambda(u, v)\,|J(u, v)|\, l_{u,v}(g)$. Évidemment $\mathcal{L}_{uv}(f)$ est concentrée au point $x(u, v)$ et remplit la condition (11.1), *a.*, et l'on a

$$\mathcal{L}(f) = l(g) = \int l_{u,v}(g)\, d\gamma = \int l_{u,v}(g)\, d\gamma^* + \iint \mathcal{L}_{u,v}(f)\, du\, dv,$$

c'est-à-dire la formule (11.2), *b.* Il reste à montrer que $\mathcal{L}^*(f)$ est une partie close singulière et que $\mathcal{L}_{uv}(f)$ remplit la condition (11.1), *b.*

Or il suffira pour cela de montrer que, pour tout Δ d'un certain réseau, la fonctionnelle linéaire de f donnée par l'expression

$$(11.4) \qquad \int_\Delta l_{u,v}(g)\, d\gamma, \qquad \text{où} \quad g(u, v, J) = f[x(u, v), J],$$

admet la frontière $C(\Delta)$ définie par $x(u, v)$ sur le périmètre de Δ. En effet, si l'on ajoute à (11.4) l'expression

$$(11.5) \qquad \iint_\Delta f[x(u, v), J^*(u, v)]\, du\, dv, \qquad \text{où} \quad J^*(u, v) = -J(u, v),$$

on obtient dans ce cas une surface paramétrique généralisée *close* $\mathcal{L}_\Delta(f)$, ainsi qu'on le vérifie sans peine en exprimant (11.5) par changement de variables, comme une intégrale étendue à la couronne entre les périmètres de deux carrés concentriques du plan des u, v, le périmètre extérieur correspondant à un seul point intérieur de Δ, tandis que le périmètre intérieur correspond à celui de Δ, donc à la courbe $C(\Delta)$. En tant que close et additive par rapport à Δ, la surface paramétrique généralisée $\mathcal{L}_\Delta(f)$ sera aussi *singulière*; donc d'après (8.5) et (8.6), elle reste close quand on la divise par l'aire de Δ et qu'on passe à la limite, ce qui implique que sa dérivée est close, c'est-à-dire que la condition (11.1), *b.* est satisfaite; d'autre part, on peut exprimer $\mathcal{L}^*(f)$ comme limite d'une somme finie de termes de la forme (11.4) correspondant à un recouvrement, par un système fini d'intervalles Δ, d'un certain sous-ensemble fermé de l'ensemble des singularités de γ par rapport à la mesure $\iint |J(u, v)|\, du\, dv$, la mesure des Δ du recouvrement tendant vers zéro : on trouve alors que $\mathcal{L}^s(f)$ est limite de la somme correspondante des $\mathcal{L}_\Delta(f)$, donc close et singulière, et que $\mathcal{L}(f) - \mathcal{L}^s(f)$ est limite de la somme des intégrales (11.4) pour les Δ complémentaires, donc aussi limite de l'expression obtenue en ajoutant à cette somme les intégrales $\iint_\Delta f[x(u, v), J(u, v)]\, du\, dv$ pour les Δ du recouvrement, et par conséquent que $\mathcal{L}(f) - \mathcal{L}^s(f)$ admet la frontière $C(R)$.

Ainsi tout ce qu'il nous reste à faire, c'est de vérifier que pour tout Δ d'un certain réseau, la frontière $C(\Delta)$ est admise par (11.4), c'est-à-dire par la limite, pour une suite convenable des n, de l'expression

$$(11.6) \qquad \iint_{\Delta_n} f[x_n(u, v), J_n(u, v)]\, du\, dv,$$

où Δ_n désigne un intervalle dont les côtés sont situés sur quatre droites $d_n^{(i)}$ qui tendent vers les droites $d^{(i)}$ contenant les côtés de Δ, pourvu que l'inégalité $\gamma[d^{(i)}] \neq 0$ n'ait lieu que dans le cas où $d^{(i)}$ est un côté de R et où l'on pose $d_n^{(i)} = d^{(i)}$. (Ceci équivaut à exclure les Δ dont un côté est situé sur un certain ensemble dénombrable de droites.) D'ailleurs, la limite de (11.6) ne change pas si l'on ajoute à cette expression une surface dont l'aire tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Pour compléter notre vérification, il suffit d'effectuer cette addition de façon que la surface obtenue admette la frontière $C(\Delta)$: ceci est aisé *dans le cas où la frontière de* (11.6) *a une longueur inférieure à une constante ne dépendant pas de* n. Nous allons voir qu'on peut satisfaire à cette condition supplémentaire en choisissant bien notre réseau et les Δ_n.

Nous désignerons par d chacune des droites qui déterminent notre réseau, et par d_n une droite tendant vers d dont nous aurons à nous servir pour déterminer Δ_n. Si d est un côté de R, posons $d_n = d$ et remarquons que la courbe $x_n(u, v)$ où u, v décrit le segment de d dans R est un arc de C(R) et par conséquent de longueur bornée. Les autres droites d seront choisies de façon que $\gamma(d) = 0$, par la construction suivante.

Soit, dans une bande quelconque traversant R et possédant la forme $u_0 \leq u \leq u_1$, B un ensemble fermé de droites d^* telles que $\gamma(d^*) = 0$ qui découpent dans R un ensemble de points dont la mesure plane est $> \frac{(u_1 - u_0)}{2}$. On a, puisque $x_n(u, v)$ est une représentation (N),

$$\iint_{BR} \left(\frac{\partial x_n}{\partial v}\right)^2 du\, dv \leq 2\,N,$$

donc il existe une droite $d^* = d_n$ de B sur laquelle

$$\left\{\int \left|\frac{\partial x_n}{\partial v}\right| dv\right\}^2 \leq \int \left(\frac{\partial x_n}{\partial v}\right)^2 dv \leq \frac{4\,N}{(u_1 - u_0)},$$

c'est-à-dire sur laquelle la courbe décrite par $x_n(u, v)$ est de longueur bornée lorsque $n \to \infty$. En désignant par d la limite d'une sous-suite des d_n, on a $\gamma(d) = 0$ puisque d fait partie de B.

En procédant d'une manière analogue dans chaque bande rationnelle parallèle à un axe et traversant R on obtient un système de droites d, auquel nous ajoutons les côtés de R, qui définisent un réseau. Tout intervalle Δ de ce réseau est alors limite d'un intervalle Δ_n, déterminé par des droites d_n correspondantes sur lesquelles $x_n(u, v)$ décrit une courbe dont la longueur reste bornée lorsque $n \to \infty$; ce qu'il nous fallait pour achever la démonstration.

12. **Théorème fondamental sur la structure d'un hémicycle.** — Nous utiliserons dans ce paragraphe quelques notations nouvelles. Le symbole $x(u, v)$ désignera une fonction *qui n'est pas nécessairement continue* et le terme *Jacobien* $J(u, v)$ sera compris dans un sens que nous définirons. En outre, nous écrirons $Q(\mathcal{L})$ pour la norme d'une fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}(f)$, et $\mathcal{L}(f) = \lim_n \text{forte}\, \mathcal{L}_n(f)$ si les fonctionnelles linéaires $\mathcal{L}_n(f) - \mathcal{L}(f)$ possèdent des normes tendant vers zéro et des modules bornés : la limite forte, qui joue ici un rôle pour la première fois dans ce travail, implique évidemment la limite, telle que nous l'avons utilisée jusqu'ici, c'est-à-dire la limite faible.

Nous appellerons $x(u, v)$ *un substratum généralisé* (N) *de Jacobien* $J(u, v)$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-ensemble W de $R - P$ et deux fonctions correspondantes $\bar{x}(u, v)$ et $\bar{J}(u, v)$, où $\bar{x}(u, v)$ est une représentation (N) de Jacobien $\bar{J}(u, v)$ presque partout, tels que l'on ait

$$(12.1)\qquad \begin{cases} a.\ \text{dans } R - W : \bar{x}(u, v) = x(u, v) \quad \text{et} \quad \bar{J}(u, v) = J(u, v), \\ b.\ \displaystyle\iint_W \{|J(u, v)| + |\bar{J}(u, v)|\}\, du\, dv < \varepsilon. \end{cases}$$

Nous appellerons *frontière du substratum* la courbe orientée close définie par $X(u, v)$, où $X(u, v)$ désigne $x(u, v)$ sur le périmètre P de R. Nous dirons que $x(u, v)$ est un substratum généralisé (N) de Jacobien $J(u, v)$ ***d'une surface paramétrique généralisée donnée*** $\mathcal{L}(f)$ ***avec frontière*** C, s'il existe, en outre, une partie close singulière $\mathcal{L}^s(f)$ de $\mathcal{L}(f)$, C, et pour presque tout u, v de R une surface paramétrique généralisée $\mathcal{L}_{uv}(f)$ concentrée au point $x(u, v)$, avec les propriétés suivantes identiques à (11.1) et (11.2) :

(12.2) *a.* $\mathcal{L}_{uv}(f)$ est nulle lorsque $J(u, v)$ s'annule au point u, v;

b. $\mathcal{L}_{uv}(f)$ possède, comme orientation moyenne et aire projetée correspondante, la direction et la valeur absolue de $J(u, v)$, lorsque $J(u, v)$ ne s'annule pas au point u, v.

(12.3) *a.* $\mathcal{L}_{uv}(f)$, considéré (avec la métrique de Mc Shane) comme un vecteur qui est fonction de u, v, est intégrable dans R au sens de Bochner et l'on a

b. $$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}^s(f) + \iint_R \mathcal{L}_{uv}(f)\, du\, dv.$$

Si, de plus, C est la frontière du substratum, alors nous dirons simplement que $x(u, v)$ est un substratum généralisé de Jacobien $J(u, v)$ de $\mathcal{L}(f)$. Une surface paramétrique généralisée $\mathcal{L}(f)$ pour laquelle il existe un substratum généralisé (N) sera dite *surface à substratum généralisé* (N). Enfin, nous dirons d'une surface à substratum généralisé (N), et en particulier d'une surface à substratum (N), qu'elle est *à partie* $\mathcal{L}^s(f)$ *nulle*, si dans son expression sous la forme (12.3), *b.*, ou en particulier (11.2), *b.*, on a $\mathcal{L}^s(f) = 0$.

(12.4) 1° *Soit* C *une frontière rectifiable et soit* $\mathcal{L}(f)$, C *hémi cyclique et d'aire* $< N$. *Alors* $\mathcal{L}(f)$ *est une surface à substratum généralisé* (N) *et à partie* $\mathcal{L}^s(f)$ *nulle;* 2° ***En outre***, $\mathcal{L}(f)$ *est limite forte de surfaces* $\overline{\mathcal{L}}(f)$ *à substratum* (N) *et à partie* $\overline{\mathcal{L}}^s(f)$ *nulle, donc* (12.3), *b.* et (11.2), *b. prennent la forme*

$$\mathcal{L}(f) = \iint_R \mathcal{L}_{uv}(f)\, du\, dv, \qquad \overline{\mathcal{L}}(f) = \iint_R \mathcal{L}_{uv}(f)\, du\, dv;$$

3° *De plus, on a*

$$\iint_R Q(\mathcal{L}_{uv} - \overline{\mathcal{L}}_{uv})\, du\, dv \to 0;$$

4° ***Enfin*** C *est, soit pour* $\mathcal{L}(f)$, *soit pour* $\overline{\mathcal{L}}(f)$, *la frontière du substratum.*

Nous démontrerons d'abord 2° et 3°. Nous utiliserons pour cela (10.3) et un théorème sur les suites quasi compactes de représentations (N), qui constitue le résultat principal du travail (déjà cité au § 10) de Young [6]. (*Voir* (20.2), p. 333 et la remarque (15.2) du travail). Pour chaque $\varepsilon > 0$, ce théorème permet de modifier les $x_n(u, v)$ de (10.3) par un procédé d'interpolation harmonique pour en faire des fonctions $\overline{x}_n(u, v)$ avec les propriétés suivantes :

a. les $\overline{x}_n(u, v)$ sont des représentations (N) également continues dans R;

b. les points (u, v) pour lesquels $x_n(u, v) \neq \bar{x}_n(u, v)$ sont compris dans un sous-ensemble ouvert O_n de R tel que $\iint_{O_n} |\bar{J}_n(u, v)| \, du \, dv < \varepsilon$, où $|\bar{J}_n(u, v)|$ désigne le Jacobien de $\bar{x}_n(u, v)$.

On en déduit qu'il existe une surface $\mathcal{L}_n^*(f)$ close, d'aire $< 2\varepsilon$, telle que l'on puisse écrire

$$\mathcal{L}_n(f) + \mathcal{L}_n^*(f) = \overline{\mathcal{L}}_n(f) + \overline{\mathcal{L}}_n^*(f), \tag{12.5}$$

où $\overline{\mathcal{L}}_n^*(f)$ est une surface close et où $\mathcal{L}_n(f)$ et $\overline{\mathcal{L}}_n(f)$ désignent les surfaces (N) représentées par $x_n(u, v)$ et $\bar{x}_n(u, v)$. Il suffit de poser

$$\mathcal{L}_n^*(f) = \iint_{O_n} \{ f[\bar{x}_n(u, v), \bar{J}_n(u, v)] + f[\bar{x}_n(u, v), \bar{J}_n^*(u, v)] \} \, du \, dv$$

où $\bar{J}_n^*(u, v)$ est le vecteur opposé à $\bar{J}_n(u, v)$, l'expression $\mathcal{L}_n^*(f)$ étant alors une surface close, d'ailleurs singulière; et l'on vérifie alors aisément que l'expression

$$\overline{\mathcal{L}}_n^*(f) = \iint_{O_n} \{ f[\bar{x}_n(u, v), \bar{J}_n^*(u, v)] + f[x_n(u, v), J_n(u, v)] \} \, du \, dv$$

est limite d'une somme de surfaces closes, et par conséquent qu'elle est close.

Or de (12.5) on tire

$$\mathcal{L}(f) + \lim_n \mathcal{L}_n^*(f) = \lim_n \overline{\mathcal{L}}_n(f) + \lim_n \overline{\mathcal{L}}_n^*(f)$$

pour une sous-suite convenable des n, dont nous supposerons de plus qu'elle fait converger uniformément les $\bar{x}_n(u, v)$ vers une limite $\bar{x}(u, v)$, qui sera alors, d'après (11.3), un substratum (N) de $\lim_n \overline{\mathcal{L}}_n(f)$, c'est-à-dire que nous avons

$$\lim_n \overline{\mathcal{L}}_n(f) = \overline{\overline{\mathcal{L}}}(f) = \overline{\overline{\mathcal{L}}}^s(f) + \iint_R \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{uv}(f) \, du \, dv,$$

où $\overline{\overline{\mathcal{L}}}_{uv}(f)$ est concentrée au point $\bar{x}(u, v)$, nulle si $\bar{J}(u, v) = 0$ et possède, si $\bar{J}(u, v)$ ne s'annule pas au point (u, v), la direction et la valeur absolue de $\bar{J}(u, v)$ comme orientation moyenne et aire projetée correspondante.

Ecrivons

$$\overline{\mathcal{L}}(f) = \iint_R \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{uv}(f) \, du \, dv, \qquad \overline{\mathcal{L}}_{uv}(f) = \overline{\overline{\mathcal{L}}}_{uv}(f), \qquad \overline{\mathcal{L}}^s(f) = 0,$$

et

$$\overline{\mathcal{L}}^*(f) = \overline{\overline{\mathcal{L}}}^s(f) + \lim_n \overline{\mathcal{L}}_n^*(f).$$

Nous obtenons

$$\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}^*(f) = \overline{\mathcal{L}}(f) + \overline{\mathcal{L}}^*(f), \tag{12.6}$$

où $\mathcal{L}^*(f) = \lim \mathcal{L}_n^*(f)$ est d'aire $\leq 2\varepsilon$, où $\mathcal{L}^*(f)$ et $\overline{\mathcal{L}}^*(f)$ sont closes, et où $\overline{\mathcal{L}}(f)$ admet comme $\mathcal{L}(f)$ la frontière C. En outre, $\bar{x}(u, v)$ est un substratum (N) de $\overline{\mathcal{L}}(f)$.

Faisons tendre $\varepsilon \to 0$ par une sous suite (dénombrable) convenable. Nous obtenons de (12.6),

$$\mathcal{L}(f) = \lim \overline{\mathcal{L}}(f) + \lim \overline{\mathcal{L}}^*(f),$$

où $\lim \overline{\mathcal{L}}(f)$ admet la frontière C et où $\lim \overline{\mathcal{L}}^*(f)$ est close : mais puisque $\mathcal{L}(f)$, C est hémicyclique, il s'ensuit que $\lim \overline{\mathcal{L}}^*(f) = 0$, donc d'après (3.2) que l'aire de $\overline{\mathcal{L}}^*(f)$ tend vers zéro et que

$$\mathcal{L}(f) = \lim \overline{\mathcal{L}}(f).$$

Cette dernière relation montre, d'après (3.1), que la suite des modules de $\overline{\mathcal{L}}(f) - \mathcal{L}(f)$ est bornée, tandis que la norme de $\overline{\mathcal{L}}(f) - \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}^*(f) - \overline{\mathcal{L}}^*(f)$ tend vers zéro avec ε, puisqu'elle ne peut dépasser la somme des aires de $\mathcal{L}^*(f)$ et $\overline{\mathcal{L}}^*(f)$.

Nous avons donc bien $\mathcal{L}(f) = \lim$ forte $\overline{\mathcal{L}}(f)$, ce qui est l'essentiel de 2°.

Soient maintenant $\mathcal{L}_n(f, \Delta)$, $\mathcal{L}_n^*(f, \Delta)$, $\overline{\mathcal{L}}_n(f, \Delta)$, $\overline{\mathcal{L}}_n^*(f, \Delta)$ les intégrales étendues à l'intervalle Δ au lieu de l'intervalle R, ou étendues à l'ensemble ΔO au lieu de l'ensemble O_n, des mêmes expressions que $\mathcal{L}_n(f)$, $\mathcal{L}_n^*(f)$, $\overline{\mathcal{L}}_n(f)$, $\overline{\mathcal{L}}_n^*(f)$. Nous ne prendrons d'ailleurs que les intervalles Δ d'un réseau déterminé par des droites parallèles aux axes, chacune desquelles est de mesure $\bar{\gamma}$ nulle, selon un système dénombrable de mesures $\bar{\gamma}$ définies en correspondance avec les $\overline{\mathcal{L}}(f)$ de la façon indiquée au paragraphe 11. Nous considérons un système fini de tels Δ, sans points intérieurs communs, dont la somme est R.

Pour une sous-suite convenable, il existe alors les limites $\mathcal{L}(f, \Delta)$, $\mathcal{L}^*(f, \Delta)$, $\overline{\overline{\mathcal{L}}}(f, \Delta)$ et $\mathcal{L}(f, \Delta) + \mathcal{L}^*(f, \Delta) - \overline{\overline{\mathcal{L}}}(f, \Delta)$, des expressions $\mathcal{L}_n(f, \Delta)$, $\mathcal{L}_n^*(f, \Delta)$, $\overline{\mathcal{L}}_n(f, \Delta)$ et $\overline{\mathcal{L}}_n^*(f, \Delta)$, où Δ appartient à notre système fini. En outre, en raisonnant comme pour la limite de (11.6), on a

$$\overline{\overline{\mathcal{L}}}(f, \Delta) = \overline{\overline{\mathcal{L}}}^s(f, \Delta) + \overline{\mathcal{L}}(f, \Delta), \qquad \text{où} \quad \overline{\mathcal{L}}(f, \Delta) = \iint_\Delta \overline{\mathcal{L}}_{uv}\, du\, dv$$

et où $\overline{\overline{\mathcal{L}}}^s(f, \Delta)$ est non négative.

En posant

$$\overline{\mathcal{L}}^*(f, \Delta) = \{ \mathcal{L}(f, \Delta) + \mathcal{L}^*(f, \Delta) - \overline{\overline{\mathcal{L}}}(f, \Delta) \} + \overline{\overline{\mathcal{L}}}^s(f, \Delta)$$

on a ainsi

$$\mathcal{L}(f, \Delta) + \mathcal{L}^*(f, \Delta = \overline{\mathcal{L}}(f, \Delta) + \overline{\mathcal{L}}^*(f, \Delta), \tag{12.7}$$

où chaque terme est une fonctionnelle linéaire non négative dont la somme par rapport à Δ (pour notre système fini) est le terme correspondant de (12.6).

Pour une seconde valeur de ε' de ε, les quantités $\mathcal{L}^*(f)$, $\mathcal{L}^*(f, \Delta)$, $\overline{\mathcal{L}}(f)$, $\overline{\mathcal{L}}(f, \Delta)$, $\overline{\mathcal{L}}_{uv}(f)$, $\overline{\mathcal{L}}^*(f)$, $\overline{\mathcal{L}}^*(f, \Delta)$ s'écriront $\mathcal{L}^{*\prime}(f)$, $\mathcal{L}^{*\prime}(f, \Delta)$, $\overline{\mathcal{L}}'(f)$, $\overline{\mathcal{L}}'(f, \Delta)$, $\overline{\mathcal{L}}'_{uv}(f)$, $\overline{\mathcal{L}}^{*\prime}(f)$, $\overline{\mathcal{L}}^{*\prime}(f, \Delta)$. En retranchant de (12.7) l'équation correspondante pour ε', on obtient une équation qui peut s'écrire

$$\overline{\mathcal{L}}(f, \Delta) - \overline{\mathcal{L}}'(f, \Delta) = \mathcal{L}^*(f, \Delta) - \mathcal{L}^{*\prime}(f, \Delta) + \overline{\mathcal{L}}^{*\prime}(f, \Delta) - \overline{\mathcal{L}}^*(f, \Delta). \tag{12.8}$$

En prenant la norme du côté gauche exprimé comme intégrale, on en déduit par addition par rapport à Δ

$$\sum_{\Delta}\text{norme}\left\{\iint_{\Delta}[\overline{\mathcal{L}}_{uv}(f)-\overline{\mathcal{L}}'_{uv}(f)]\,du\,dv\right\}$$
$$\leqq \text{aire}\{\mathcal{L}^{*}(f)\}+\text{aire}\{\mathcal{L}^{*\prime}(f)\}+\text{aire}\{\overline{\mathcal{L}}^{*}(f)\}+\text{aire}\{\overline{\mathcal{L}}^{*\prime}(f)\},$$

d'où il résulte par un passage à la limite,

$$(12.9)\qquad \iint_{\mathrm{R}} \mathrm{Q}\{\overline{\mathcal{L}}_{uv}-\overline{\mathcal{L}}'_{uv}\}\,du\,dv$$
$$\leqq \text{aire}\{\mathcal{L}^{*}(f)\}+\text{aire}\{\mathcal{L}^{*\prime}(f)\}+\text{aire}\{\overline{\mathcal{L}}^{*}(f)+\text{aire}\{\overline{\mathcal{L}}^{*\prime}(f)\},$$

et le côté droit tend vers zéro avec ε et ε'. De (12.9) on déduit 3° par un raisonnement classique, qui donnera d'ailleurs ce qui reste à établir de notre théorème.

Nous désignerons par $\{\varepsilon_\nu\}$ la suite des ε, et par $\mathcal{L}^{\nu}_{uv}$, $x^{\nu}(u, v)$, $\mathrm{J}^{\nu}(u, v)$ les $\overline{\mathcal{L}}_{uv}$, $\overline{x}(u, v)$, $\overline{\mathrm{J}}(u, v)$; de plus, nous écrirons $\frac{1}{2}(\delta_\nu)^2$ pour les quantités correspondantes aire $\{\mathcal{L}^{*}(f)\}+$aire$\{\mathcal{L}^{*}(f)\}$, et nous supposerons, en prenant une sous-suite des ε, s'il le faut, $\Sigma\delta_\nu$ convergente et à termes décroissants.

Soit $\mathrm{E}=\Sigma\mathrm{E}_\nu$ où E_ν est l'ensemble des points (u, v) de R satisfaisant aux conditions suivantes :

α. il existe la limite forte de $\mathcal{L}^{\nu'}_{uv}(f)$ lorsque $\nu'\to\infty$;

β. on a

$$x^{\nu}(u, v)=x^{\nu+1}(u, v)=x^{\nu+2}(u, v)=\ldots \qquad\text{et}\qquad \mathrm{J}^{\nu}(u, v)=\mathrm{J}^{\nu+1}(u, v)=\mathrm{J}^{\nu+2}(u, v)=\ldots.$$

Nous définissons dans E,

$$\mathcal{L}_{uv}(f)=\lim_{\nu}\text{ forte }\mathcal{L}^{\nu}_{uv},\qquad x(u, v)=x^{\nu}(u, v),\qquad \mathrm{J}(u, v)=\mathrm{J}^{\nu}(u, v),$$

tandis que hors de E nous posons $\mathcal{L}_{uv}(f)=0$, $\mathrm{J}(u, v)=0$ et nous complétons, d'une manière arbitraire la définition de $x(u, v)$, sauf qu'aux points de P nous posons $x(u, v)=x^{\nu}(u, v)$ pour tout ν. Évidemment 4° sera satisfaite, et en outre $\mathcal{L}_{uv}(f)$ remplit les conditions (12.2).

D'après (12.9), on a

$$\iint_{\mathrm{R}} \mathrm{Q}\{\mathcal{L}^{\nu+1}_{uv}-\mathcal{L}^{\nu}_{uv}\}\,du\,dv<(\delta_\nu)^2,$$

et par conséquent, en dehors d'un ensemble de points (u, v) de mesure plane $<\delta_\nu$, $\mathrm{Q}\{\mathcal{L}^{\nu+1}_{uv}-\mathcal{L}^{\nu}_{uv}\}<\delta_\nu$. Ceci implique $x^{\nu+1}(u, v)=x^{\nu}(u, v)$ lorsque $\mathrm{Q}\{\mathcal{L}^{\nu}_{uv}\}\geqq\delta_\nu$, et par conséquent, aussi, $\mathrm{J}^{\nu+1}(u, v)=\mathrm{J}^{\nu}(u, v)$ lorsque $\mathrm{Q}\{\mathcal{L}^{\nu+1}_{uv}\}\geqq\delta_\nu$, exception faite d'un ensemble supplémentaire de mesure plane nulle. [La conclusion est d'ailleurs la même lorsque $\mathrm{Q}\{\mathcal{L}^{\nu}_{uv}\}\geqq\delta_\nu$.]

En dehors d'un ensemble W_ν de points (u, v) de mesure plane $<\eta_\nu=\delta_\nu+\delta_{\nu+1}+\ldots$, on aura par addition, lorsque les équations

$$x^{\nu'}(u, v)=x^{\nu'+1}(u, v)=\ldots \qquad\text{et}\qquad \mathrm{J}^{\nu'}(u, v)=\mathrm{J}^{\nu'+1}(u, v)=\ldots$$

ne sont pas toutes satisfaites, $\mathrm{Q}\{\mathcal{L}^{\nu'}_{uv}\}<\eta_{\nu'}$ pour tout $\nu'\geqq\nu$.

Donc dans $R - W_\nu - E$, on a pour $\nu' \geqq \nu$,

$$Q\{\mathcal{L}^{\nu'}_{uv} - \mathcal{L}_{uv}\} = Q\{\mathcal{L}^{\nu'}_{uv}\} < \eta_{\nu'}.$$

Ainsi $\mathcal{L}_{uv}(f)$ est limite forte de $\mathcal{L}^{\nu'}_{uv}(f)$ dans $R - W_\nu$, donc (en faisant tendre $\nu \to \infty$) presque partout, et l'on trouve, d'après (12.9) et le lemme classique de Fatou,

$$\iint_R Q\{\mathcal{L}^{\nu}_{uv} - \mathcal{L}_{uv}\}\, du\, dv \leqq (\delta_\nu)^2$$

d'où 3° est une conséquence immédiate.

On a aussi, *a fortiori*, que la norme de $\iint_R \{\mathcal{L}^{\nu}_{uv} - \mathcal{L}_{uv}\}\, du\, dv$ tend vers zéro, donc que

$$\iint_R \mathcal{L}_{uv}(f)\, du\, dv = \lim_{\nu} \text{ forte} \iint_R \mathcal{L}^{\nu}_{uv}(f)\, du\, dv = \lim_{\nu} \text{ forte } \mathcal{L}^{\nu}(f) = \mathcal{L}(f).$$

Ainsi 1° sera établi si les conditions (12.1) sont vérifiées. Soit $\varphi(J)$ une fonction linéaire du vecteur J telle que $\varphi(J) \leqq |J|$ et que $\varphi[J(u, v)] \leqq |J(u, v)|$. On a d'après (9.1)

$$\mathcal{L}_{uv}(\varphi) = \varphi[J(u, v)], \qquad \text{donc} \quad |J(u, v)| = \mathcal{L}_{uv}(\varphi) \leqq \mathcal{L}_{uv}(|J|) = Q\{\mathcal{L}_{uv}\},$$

et d'une façon analogue $|J^\nu(u, v)| \leqq Q\{\mathcal{L}^{\nu}_{uv}\}$. Il s'ensuit, en posant $W = R - E_\nu$,

$$\iint_W \{|J(u, v)| + |J^\nu(u, v)|\}\, du\, dv \leqq 2\iint_{R-E_\nu} Q\{\mathcal{L}_{uv}\}\, du\, dv + \iint_R Q\{\mathcal{L}^{\nu}_{uv} - \mathcal{L}_{uv}\}\, du\, dv,$$

ce qui donne bien (12.1), puisque, pour $\nu \to \infty$, le membre droit tend vers la limite $2\iint_{R-E} Q\{\mathcal{L}_{uv}\}\, du\, dv$ qui est nulle.

Notre démonstration est donc achevée.

13. **Applications, problèmes ultérieurs à résoudre, cas particuliers.** — On connaît une foule de questions d'Analyse qui se laissent formuler comme problèmes du Calcul des Variations. Les méthodes exposées ici doivent permettre de restaurer au Calcul des Variations sa place d'outil fondamental de l'Analyse. Pour cela, il faudra encore résoudre certains problèmes ultérieurs, par exemple, les suivants :

a. Trouver une expression analogue à celle de (12.4) pour les *cycles*;

b. Démontrer un *théorème inverse* à (12.4) du genre : « Si $x(u, v)$ est un substratum généralisé (N) de Jacobien $J(u, v)$ d'une surface paramétrique donnée $\mathcal{L}(f)$ avec la frontière C, alors la frontière du substratum est une frontière admise par $\mathcal{L}(f)$ ».

Observons que *b*. s'obtient immédiatement si l'on possède l'énoncé très vraisemblable suivant :

c. « Si pour une surface paramétrique généralisée donnée $\mathcal{L}(f)$, il existe une surface paramétrique généralisée $\mathcal{L}'(f)$ admettant la frontière $-C$ [c'est-à-dire la frontière C décrite en sens inverse] telle que $\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}'(f)$ soit close, alors $\mathcal{L}(f)$ admet la frontière C ».

Ce même énoncé servirait d'ailleurs aussi de base à une théorie tout à fait générale de la frontière, en définissant comme frontière de $\mathcal{L}(f)$ la classe des $\mathcal{L}'(f)$ telles que $\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}'(f)$ soit close.

Pour l'instant, nous n'avons pas pu résoudre *a.* et nous ne possédons la démonstration désirée dans *b.* *que dans le cas où l'espace des x est à trois dimensions.* Celle-ci est calquée sur une démonstration d'un théorème correspondant pour les surfaces non paramétriques du travail de Young [4]. Esquissons-la. On démontre d'abord, en se basant sur (9.2), le résultat désiré dans le cas où $x(u, v)$ est plan, c'est-à-dire $J(u, v)$ a presque partout une direction constante : on utilise pour cela une approximation par une figure dont l'apparence est celle d'une série de toits d'usine longs et minces placés côte à côte. Ensuite, on étend le résultat obtenu au cas où R est la somme d'un nombre fini de carrés R_ν, dans chacun desquels $x(u, v)$ est plan, et d'un ensemble complémentaire $R - \Sigma R_\nu$ dans lequel $\mathcal{L}_{uv}(f) = f[x(u, v), J(u, v)]$. Le cas général se déduit alors par un passage à la limite.

Aux problèmes ultérieurs que nous avons mentionnés, on peut ajouter celui de se débarrasser d'hypothèses restrictives concernant la frontière : nos définitions la limitent au cas d'une courbe orientée close de Fréchet; dans la décomposition cyclique, elle est supposée régulière; dans (12.4) elle est supposée rectifiable.

Enfin, on aura à étudier (comme par exemple dans le travail de Young [5] les conditions nécessaires, les surfaces extrémales qui y satisfont, et jusqu'à la théorie de Morse qui devient particulièrement simple du point de vue où nous nous plaçons.

Bien entendu, toutes ces questions ne sont pas indispensables pour chaque problème du Calcul des Variations concernant les surfaces paramétriques. Il y a des classes de problèmes importants que nous sommes à même de traiter d'ores et déjà.

1° Supposons l'espace des x, 3 dimensionnel. Pour les surfaces paramétriques généralisées $\mathcal{L}(f)$ qui admettent une frontière C donnée, régulière et rectifiable, le minimum de $\mathcal{L}(f_0)$, où f_0 est une fonction donnée de $\mathfrak{F}$, est atteint par une somme finie de surfaces à substratum généralisé (N), où N est une certaine constante, pourvu que l'on sache que $\mathcal{L}(f_0) \to \infty$ avec l'aire de $\mathcal{L}(f)$. En outre on peut poser pour chacune d'elles $\mathcal{L}(f) = 0$ dans la formule (12.3), *b*, et la somme finie se réduit à un seul terme si C est une courbe simple.

2° L'espace des x étant à un nombre fini arbitraire m de dimensions, soit $f_0(x, J)$ une fonction de $\mathfrak{F}$ remplissant (pour tout J et en chaque point x) la condition de Weierstrass (9.4). Pour les surfaces paramétriques généralisées $\mathcal{L}(f)$ qui admettent une frontière C donnée, régulière et rectifiable, le minimum de $\mathcal{L}(f_0)$ est atteint par une somme finie de surfaces, chacune desquelles *coïncide* avec un substratum généralisé (N), où N est une certaine constante, pourvu que l'on sache encore que $\mathcal{L}(f_0) \to \infty$ avec l'aire de $\mathcal{L}(f)$

Nous disons que $\mathcal{L}(f)$ coïncide avec un substratum généralisé (N) défini par les fonctions $x(u, v)$, $J(u, v)$ si l'on a

$$\mathcal{L}(f) = \iint_R f[x(u, v), J(u, v)]\, du\, dv.$$

Donc dans le cas 2° la solution est de la même forme essentiellement que les surfaces paramétriques élémentaires dont nous sommes parti, sauf que $x(u, v)$ et $J(u, v)$ sont de nature plus générale, par exemple $x(u, v)$ peut être discontinue en un point intérieur de R où $J(u, v) = 0$.

BIBLIOGRAPHIE ([8]).

[1] Mc Shane E. J., *Duke Math. Journ.*, 6, 1940, p. 513-536.

[2] Young L. C., *Proc. Roy. Soc.* (A), 141, 1933, p. 325-341.

[3] Young L. C., *C. R. Soc. Sc. et Lettres de Varsovie*, XXX, 1937, Cl. III, p. 212-234.

[4], [5] Young L. C., *Ann. of Math.*, 43, 1942, p. 84-103 et 530-544.

[6] Young L. C., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64, 1948, p. 317-335.

[7] Young L. C., *Proc. London Math. Soc.*, 49, 1944, p. 209-212.

([8]) Nous n'avons pas essayé de lister les innombrables travaux qui sont à la base des recherches exposées ici.