BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI CARTAN

Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), p. 29-64
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1950__78__29_0>

IDÉAUX ET MODULES DE FONCTIONS ANALYTIQUES DE VARIABLES COMPLEXES;

PAR M. HENRI CARTAN.

Introduction. — Dans un Mémoire intitulé : *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* (*Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, 61, 1944, p. 149-197; ce Mémoire sera désigné par les initiales I. F. A. tout le long du présent travail), j'ai tenté d'expliquer le rôle joué par les idéaux dans certaines questions de la théorie des fonctions analytiques de variables complexes; j'ai indiqué les principaux problèmes qui se posaient, et tâché de les résoudre. Je n'y suis parvenu que d'une façon incomplète, ayant dû laisser sans solution deux problèmes-clefs (« premier problème » et « deuxième problème », p. 187 de I. F. A.). Les mêmes questions ont été travaillées d'une manière indépendante au Japon par K. Oka, dont les beaux travaux antérieurs m'avaient d'ailleurs guidé dans mes recherches sur les idéaux. Sans avoir pu prendre connaissance de mon travail I. F. A., Oka a écrit en 1948 un Mémoire où il étudie les mêmes questions, quoique en des termes un peu différents. Dans ce Mémoire, qui paraît dans ce même volume du *Bulletin*, Oka résout le premier des deux problèmes-clefs dont je parlais plus haut, et obtient donc des résultats plus complets que ceux de mon Mémoire de 1944. Ayant eu le privilège de connaître en manuscrit le nouveau travail de Oka, j'ai été conduit à faire une nouvelle mise au point de l'ensemble de la théorie. D'une part je donne ici (ci-dessous, théorème 1) une solution simplifiée du « premier problème » (I. F. A., p. 187) résolu par Oka; d'autre part, grâce à la solution de ce premier problème, je résous aussi le « deuxième problème » (¹) (ci-dessous, théorème 2), ce qui me permet d'aborder franchement l'étude *globale* des variétés analytiques (*voir* par exemple les théorèmes 7 *ter* et 8 *ter* ci-dessous).

La lecture du présent Mémoire, qui donne autant que possible des démonstrations complètes, devrait en principe se suffire à elle-même; j'y fais peu d'usage de mon Mémoire I. F. A., l'optique d'ensemble ayant changé. Les quelques résultats initiaux qui sont admis ici sans démonstration sont énoncés explicitement sous forme de *lemmes*, avec renvois précis à I. F. A. ou à d'autres Ouvrages.

Le but final de ce travail est l'étude globale des idéaux (et des modules) de fonctions analytiques dans les *domaines d'holomorphie*; il est atteint au para-

(¹) *Note rajoutée à la correction des épreuves* : d'après des papiers communiqués récemment à l'auteur, il semble que K. Oka ait aussi obtenu, de son côté, une solution du deuxième problème.

graphe VIII (nos 27 à 33). Pour y parvenir, plusieurs étapes ont dû être franchies : tout d'abord, avant de pouvoir faire le passage du local au global, il faut approfondir les propriétés locales, c'est-à-dire voir comment les propriétés ponctuelles s'organisent localement; c'est l'objet du paragraphe III (les paragraphes I et II étant consacrés à l'exposition des notions de base) : dans ce paragraphe III on étudie la notion de *cohérence* locale, et l'on résout les deux problèmes-clefs dont il a déjà été question plusieurs fois. Il semble bien que toute cette partie de la théorie, dont le caractère est *local*, soit valable non seulement pour les fonctions analytiques de variables *complexes*, mais plus généralement pour les fonctions analytiques de variables prenant leurs valeurs dans un *corps valué complet* (qu'il faudrait toutefois supposer *algébriquement clos* pour le théorème 2).

C'est à partir du paragraphe IV que se fait le passage des propriétés locales aux propriétés globales. C'est aussi à partir de là qu'il est essentiel de se borner au corps des nombres complexes, car l'intégrale de Cauchy joue un rôle qui ne semble pas pouvoir être évité. On commence par l'étude globale des idéaux et modules dans certains ensembles compacts; ce n'est qu'au dernier paragraphe (§ VIII) que l'on effectue le passage des ensembles compacts à certains ensembles *ouverts* (en fait, les domaines d'holomorphie). Le cas des ensembles compacts nécessite lui-même le franchissement successif de plusieurs étapes : au paragraphe IV, il s'agit seulement des polycylindres compacts (et simplement connexes). Le cas plus général des « domaines polyédraux » (§ VII) s'y ramène ensuite, parce qu'on identifie un domaine polyédral à une variété analytique dans un polycylindre d'un espace à un plus grand nombre de dimensions, suivant une idée que l'on trouve déjà chez Oka en 1936-1937.

On a essayé de ramasser les résultats dans un petit nombre d'énoncés précis. Ces théorèmes sont puissants, mais ce ne sont que des théorèmes d'existence; ils en ont les inconvénients : ils ne fournissent pas de solution effective d'un problème particulier.

Qu'il me soit permis de profiter de cette occasion pour faire quelques rectifications ou mises au point de détail de mon Mémoire I. F. A. :

Page 157, lignes 8-9 : il n'est pas évident (ni même certain) que les modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ engendrés par $\mathfrak{M}$ forment un système cohérent sur E. C'est pourquoi les lignes 1 à 3 de la Note (14) du bas de la page 158 sont sujettes au doute, ainsi que l'affirmation (p. 158, lignes 10-12) qu'elles tendaient à justifier. Ceci infirme également la conclusion du « corollaire du théorème III », p. 183, qui repose sur la considération du « système cohérent engendré par $\mathfrak{M}$ ». En fait, il y a là un *problème ouvert :* est-il possible qu'un module, sur un polycylindre compact, ne puisse pas être engendré par un nombre *fini* d'éléments ?

Pages 160 et suivantes, les notions de « module pur » et de « module parfait » sont devenues sans objet, puisqu'on peut démontrer maintenant que tous les modules sont « purs » et « parfaits »; j'avais d'ailleurs émis cet espoir (p. 161, lignes 20-21).

Page 166, Note (19) de bas de page : la démonstration est insuffisante, à cause de la présence possible de composantes impropres.

Page 183, lignes 19 à 23 : l'affirmation est peut-être un peu sommaire. A ce sujet, *voir* ci-dessous, début du no 21, et lemme 5 (no 27)

Page 189, lignes 9-12, l'affirmation est correcte, mais sa justification est trop sommaire.

I. — Idéaux et modules; variétés analytiques.

1. Soit $\mathcal{C}$ le *corps* des nombres complexes; pour tout entier $n \geqq 1$, $\mathcal{C}^n$ désignera l'*espace vectoriel* des systèmes de n nombres complexes $(x_1, \ldots, x_n)$, où les opérations sont définies comme suit :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$a(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n) \qquad \text{pour} \quad a \in \mathcal{C}.$$

Pour tout sous-ensemble non vide A de $\mathcal{C}^n$, précisons la notion de *fonction holomorphe dans* A. Tout d'abord, cette notion est classique lorsque A est un ensemble *ouvert*; et l'ensemble $\mathcal{O}_A$ des fonctions holomorphes dans A ouvert est muni d'une structure d'*anneau*. Lorsque A et B sont ouverts, et que $A \subset B$, on a un homomorphisme canonique φ_{AB} de l'anneau $\mathcal{O}_B$ dans l'anneau $\mathcal{O}_A$: celui qui, à toute fonction f holomorphe dans B, associe la *restriction* de f à l'ensemble A. Il est clair que si $A \subset B \subset C$, l'homomorphisme φ_{AC} est égal au composé $\varphi_{AB}\,\varphi_{BC}$.

Pour une partie non vide quelconque A de $\mathcal{C}^n$ (en fait, on ne considérera, outre les sous-ensembles ouverts de $\mathcal{C}^n$, que des sous-ensembles *compacts*, c'est-à-dire bornés et fermés), considérons l'ensemble des voisinages ouverts V de A; l'ensemble des anneaux $\mathcal{O}_V$ correspondants est muni d'homomorphismes φ_{VW} comme ci-dessus (définis pour $V \subset W$). Par définition, l'anneau $\mathcal{O}_A$ sera la *limite inductive* (« direct limit ») des anneaux $\mathcal{O}_V$; cela signifie qu'un élément de $\mathcal{O}_A$ est défini par un élément d'un quelconque des $\mathcal{O}_V$, et que deux éléments $f \in \mathcal{O}_V$ et $g \in \mathcal{O}_W$ définissent le *même* élément de $\mathcal{O}_A$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert U de A, contenu dans V et W, tel que les restrictions de f et g à l'ensemble U soient identiques. Les opérations dans l'anneau $\mathcal{O}_A$ sont définies de manière évidente. Un élément de $\mathcal{O}_A$ prendra le nom de *fonction holomorphe dans* A.

Si A et B sont deux parties non vides de $\mathcal{C}^n$, telles que $A \subset B$, on a encore un homomorphisme canonique φ_{AB} de $\mathcal{O}_B$ dans $\mathcal{O}_A$. Si f est une fonction holomorphe dans B, l'élément $\varphi_{AB}(f) \in \mathcal{O}_A$ est une fonction holomorphe dans A, qu'on appellera encore la *restriction* de f à l'ensemble A.

Dans tout ceci, il n'a été question que de fonctions *scalaires*, c'est-à-dire prenant leurs valeurs dans le corps $\mathcal{C}$. Plus généralement, soit q un entier $\geqq 1$; on notera $\mathcal{O}_A^q$ l'ensemble des systèmes de q éléments de $\mathcal{O}_A$. Un élément de $\mathcal{O}_A^q$ peut être considéré comme une fonction (dans A) à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^q$, et $\mathcal{O}_A^q$ est donc muni d'une structure de *module* sur l'anneau $\mathcal{O}_A$. Tout sous-module de $\mathcal{O}_A^q$ sera appelé *module q-dimensionnel* dans A (ou, plus brièvement, module dans A, lorsque aucune confusion n'est à craindre). En particulier, pour $q = 1$, un module dans A n'est pas autre chose qu'un *idéal* de l'anneau $\mathcal{O}_A$; nous dirons : « idéal dans A ».

Dans le cas où l'ensemble A est réduit à un *point* x, on écrira $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_x^q$ au lieu de $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_A^q$. Un anneau tel que $\mathcal{O}_x$ sera dit *anneau ponctuel* (au point x); tout idéal de $\mathcal{O}_x$ sera dit *idéal ponctuel* (au point x), tout sous-module de $\mathcal{O}_x^q$ sera dit *module ponctuel* (au point x).

2. Rappelons que, dans un anneau quelconque (commutatif, avec élément unité) $\mathcal{O}$, toute famille $\mathcal{B}$ d'éléments de $\mathcal{O}$ *engendre* un idéal, à savoir l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'eléments de $\mathcal{B}$ à coefficients dans $\mathcal{O}$; c'est le plus petit idéal contenant $\mathcal{B}$. Plus généralement, dans un module $\mathcal{M}$ sur un anneau $\mathcal{O}$, toute famille $\mathcal{B}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ engendre un sous-module de $\mathcal{M}$: le sous-module des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de $\mathcal{B}$, à coefficients dans $\mathcal{O}$. Un module est *de type fini* s'il admet un système fini de générateurs. Un module (resp. un anneau) est dit *noethérien* si tout sous-module (resp. tout idéal) est de type fini. On sait que si $\mathcal{O}$ est un anneau noethérien, le module $\mathcal{O}^q$ des systèmes de q éléments de $\mathcal{O}$ est un module noethérien.

L'anneau $\mathcal{O}_x$ des fonctions holomorphes en un point x est *noethérien* (1). Donc tout sous-module de $\mathcal{O}_x^q$ est de type fini.

Revenons alors à notre exposé général. Si A et B sont deux parties non vides de $\mathcal{C}^n$, telles que $A \subset B$, l'homomorphisme φ_{AB} de $\mathcal{O}_B$ dans $\mathcal{O}_A$ transforme tout idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_B$ dans un sous-ensemble de $\mathcal{O}_A$, qui en général n'est pas un idéal; l'idéal engendré par $\varphi_{AB}(\mathcal{J})$ dans l'anneau $\mathcal{O}_A$ sera appelé l'*idéal engendré dans* A *par l'idéal* $\mathcal{J}$. Définition analogue du *module engendré dans* A par un sous-module de $\mathcal{O}_B^q$.

3. **Variétés analytiques.** — De même qu'une partie A de $\mathcal{C}^n$ définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions holomorphes dans un voisinage de A (voisinage qui peut varier avec la fonction), de même A définit une *relation d'équivalence dans l'ensemble* $\mathfrak{T}$ *des parties de* $\mathcal{C}^n$: deux sous-ensembles V et V′ de $\mathcal{C}^n$ sont A-équivalents s'il existe un *voisinage* U de A tel que $U \cap V = U \cap V'$. Soit $\mathfrak{T}_A$ le quotient de $\mathfrak{T}$ par cette relation d'équivalence; il est clair que dans $\mathfrak{T}_A$ les opérations de réunion finie, d'intersection finie, et de complémentaire sont définies.

Si $A \subset B$, deux ensembles B-équivalents sont *a fortiori* A-équivalents; on a donc une application canonique de $\mathfrak{T}_B$ sur $\mathfrak{T}_A$.

Quand dira-t-on qu'une fonction holomorphe dans A (élément f_A de l'anneau $\mathcal{O}_A$) *s'annule* sur un élément V_A de $\mathfrak{T}_A$? Soit V une partie de $\mathcal{C}^n$ ayant V_A pour image (dans l'application canonique de $\mathfrak{T}$ sur $\mathfrak{T}_A$); soit de même f une fonction holomorphe dans un voisinage de A, ayant f_A pour image dans $\mathcal{O}_A$. Nous dirons que f_A s'annule sur V_A s'il existe un voisinage U de A tel que f s'annule en tout point de $V \cap U$. Cette condition est indépendante du choix particulier de V et de f, une fois donnés V_A et f_A. Les éléments de $\mathcal{O}_A$ qui s'annulent sur un élément donné V_A de $\mathfrak{T}_A$ forment évidemment un *idéal*.

Étant donné un élément f_A de $\mathcal{O}_A$, il définit un élément V_A de $\mathfrak{T}_A$, de la manière suivante : prenons une f holomorphe dans un voisinage U de A, et admettant f_A pour restriction à A; soit V l'ensemble des zéros de f dans U; alors V_A sera, par définition, la classe d'équivalence de V dans $\mathfrak{T}_A$, classe qui est indépendante du choix de f, et qu'on appellera la *variété des zéros* de f_A.

(1) *Voir* par exemple W. Rückert, *Math. Annalen*, 107, 1933, p. 259-281. Une démonstration de ce théorème est donnée dans I. F. A., p. 191 et suiv., avec quelques compléments auxquels il sera renvoyé par la suite.

Étant donné un nombre fini de fonctions $f_1, \ldots, f_p$ holomorphes dans A, on définit l'*ensemble des zéros communs à ces fonctions* : c'est l'élément V_A de $\mathfrak{T}_A$, intersection des variétés des zéros de chacune des f_i $(i = 1, \ldots, p)$. V_A s'appelle aussi la *variété des solutions du système d'équations* $f_i = 0$ $(i = 1, \ldots, p)$.

Supposons A réduit à un *point* x. Un élément V_x de $\mathfrak{T}_x$ est appelé une *variété analytique* (complexe) *au point* x s'il est l'ensemble des solutions d'un système fini d'équations au point x. Une telle variété peut être *vide*. *L'idéal d'une variété analytique* V_x est, par définition, l'idéal de $\mathcal{O}_x$ formé des éléments qui s'annulent sur V_x (au sens défini ci-dessus).

Supposons maintenant que A soit un ensemble *ouvert* non vide de $\mathcal{C}^n$. Une partie V de A sera appelée *variété analytique dans* A si, pour tout point x de A, son image V_x dans $\mathfrak{T}_x$ est une variété analytique au point x. Il n'est nullement évident (ni même vrai en général) qu'une variété analytique dans A ouvert soit l'ensemble des zéros communs à une famille (même infinie) de fonctions holomorphes dans A. Le présent Mémoire est en partie une contribution à l'étude de ce problème (*voir* n° 31, théorème 7 *ter*).

Plus généralement : pour une partie A non vide quelconque de $\mathcal{C}^n$, un élément V_A de $\mathfrak{T}_A$ sera appelé une *variété analytique dans* A si, pour tout point x de A, son image V_x dans $\mathfrak{T}_x$ est une variété analytique au point x. Il est clair que si V_A est une variété analytique dans A, il existe un voisinage *ouvert* U de A, et une variété analytique V dans U, telle que V_A soit l'image de V dans $\mathfrak{T}_A$.

II. — Faisceaux de modules.

4. Nous allons introduire, avec K. Oka [2], la notion de *faisceau de modules*. Nous empruntons le mot de « faisceau » à la Topologie algébrique, où il a été introduit par J. Leray [3] en théorie de l'homologie; c'est à dessein que nous utilisons ici le même mot, pour désigner une notion analogue. D'ailleurs, ici comme en Topologie algébrique, la notion de faisceau s'introduit parce qu'il s'agit de passer de données « locales » à l'étude de propriétés « globales ».

Définition. — Les entiers n et q étant donnés, un *faisceau* $\mathcal{F}$ est une fonction qui, à chaque sous-ensemble ouvert non vide $X \subset \mathcal{C}^n$, associe un module q-dimensionnel dans X, noté $\mathcal{F}_X$, de manière que, si $X \subset Y$, le module engendré par $\mathcal{F}_Y$ dans X soit contenu dans $\mathcal{F}_X$.

Un faisceau $\mathcal{F}$ permet d'attacher à toute partie non vide A de $\mathcal{C}^n$ un module $\mathcal{F}_A$ (sous-module de $\mathcal{O}_A^q$), de la manière suivante : $\mathcal{F}_A$ est la réunion des modules engendrés (dans A) par les $\mathcal{F}_X$ relatifs aux voisinages ouverts X de A. Si $A \subset B$,

---

[2] Mémoire cité dans l'Introduction (Voir ce volume du *Bulletin*). Oka introduit cette notion au paragraphe 2 de son Mémoire, sous le nom de « idéal holomorphe de domaines indéterminés ». Nous adoptons ici une terminologie et une présentation différentes, mais le fond de la notion est le même.

[3] *C. R. Acad. Sc.*, 222, 1946, p. 1366-1368.

$\mathcal{F}_A$ contient le module engendré par $\mathcal{F}_B$ dans A. On notera que si $\mathcal{F}_X = \mathcal{O}_X$ pour tout X ouvert, alors $\mathcal{F}_A = \mathcal{O}_A$ pour toute partie non vide A.

Intersection de deux faisceaux : soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux q-dimensionnels dans $\mathcal{C}^n$. Posons, pour tout X ouvert (non vide), $\mathcal{H}_X = \mathcal{F}_X \cap \mathcal{G}_X$; les $\mathcal{H}_X$ définissent un faisceau $\mathcal{H}$, appelé l'intersection des faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, et l'on vérifie que $\mathcal{H}_A = \mathcal{F}_A \cap \mathcal{G}_A$ pour tout A non vide.

Faisceau sur un ensemble ouvert A. — Nous généraliserons comme suit la définition d'un faisceau. Soit A un ensemble ouvert non vide de $\mathcal{C}^n$; un faisceau sur A (ou A-faisceau) est une fonction qui, à chaque ensemble ouvert non vide X contenu dans A, associe un module $\mathcal{F}_X$ dans X, de telle manière que, si $X \subset Y \subset A$, le module engendré par $\mathcal{F}_Y$ dans X soit contenu dans $\mathcal{F}_X$. Le cas défini antérieurement était celui où $A = \mathcal{C}^n$. Dans le cas général, on définit de même $\mathcal{F}_X$ pour toute partie non vide X contenue dans A. On définit également l'*intersection* de deux A-faisceaux.

Tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}^n$ définit un faisceau sur A : il suffit de n'envisager que les $\mathcal{F}_X$ relatifs aux parties X de A. Inversement, un faisceau $\mathcal{F}$ sur A définit canoniquement un faisceau $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{C}^n$: $\mathcal{G}_X$ se compose des fonctions de $\mathcal{O}_X^q$ dont la restriction à $X \cap A$ appartient à $\mathcal{F}_{X \cap A}$.

5. Proposition 1. — *Étant donné un* A-*faisceau* $\mathcal{F}$, *tout point* x *de* A *possède un voisinage ouvert* X *tel que* $\mathcal{F}_x$ *soit engendré par* $\mathcal{F}_X$.

Cela résulte du fait que $\mathcal{F}_x$ admet un système fini de générateurs.

Corollaire. — *La collection des modules ponctuels* $\mathcal{F}_x$ *définis par un faisceau* $\mathcal{F}$ *satisfait à la condition* :

(*a*) *si une fonction* f *holomorphe dans un voisinage d'un point* x, *appartient* (¹) *au module* $\mathcal{F}_x$, *elle appartient aussi au module* $\mathcal{F}_y$ *pour tout point* y *d'un voisinage de* x (voisinage qui dépend évidemment de f).

La collection des modules ponctuels $\mathcal{F}_x$ (relatifs aux points x d'un ensemble ouvert A) ne suffit pas à reconstituer le A-faisceau $\mathcal{F}$. Toutefois, toute collection de modules ponctuels qui satisfait à la condition (*a*) définit un A-faisceau $\overline{\mathcal{F}}$ que voici : pour tout X *ouvert* non vide contenu dans A, $\overline{\mathcal{F}}_X$ se compose des fonctions f de $\mathcal{O}_X^q$ qui, en chaque point x de X, appartiennent au module $\mathcal{F}_x$ associé à ce point. Grâce à la condition (*a*), on constate alors que le module $\overline{\mathcal{F}}_Y$ que le faisceau $\overline{\mathcal{F}}$ associe à une partie non vide quelconque Y contenue dans A se compose aussi des fonctions de $\mathcal{O}_Y^q$ qui, en chaque point x de Y, appartiennent au module $\mathcal{F}_x$ associé à x. En particulier, $\overline{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x$ pour tout point x de A. Il y a donc correspondance biunivoque entre les collections de modules ponctuels (attachés

---

(¹) Nous disons, par abus de langage, qu'une fonction f appartient à un module au point x, si sa *restriction* au point x appartient à ce module.

aux différents points de A ouvert) qui satisfont à la condition (α), et les A-faisceaux $\mathcal{G}$ possédant la propriété suivante :

(b) *pour qu'une f de $\mathcal{O}_X^q$ appartienne à* $\mathcal{G}_X$ (X partie non vide de A), *il faut et il suffit que $f \in \mathcal{G}_x$ pour tout point $x \in$* X.

Un faisceau satisfaisant à (b) sera dit *complet*. Il est évident que l'*intersection de deux faisceaux complets est un faisceau complet.*

Étant donné un A-faisceau quelconque $\mathcal{F}$, soit, comme ci-dessus, $\overline{\mathcal{F}}$ le faisceau complet défini par la collection des modules ponctuels $\mathcal{F}_x$ que $\mathcal{F}$ attache aux points $x \in A$; il est clair que $\overline{\mathcal{F}}_X \supset \mathcal{F}_X$ pour toute partie X non vide de A. Le faisceau $\overline{\mathcal{F}}$ sera dit le *faisceau complété* de $\mathcal{F}$.

6. **Exemples de faisceaux.** — *Exemple* 1. — Soit A un ensemble ouvert non vide, donné une fois pour toutes, et soit $\mathcal{M}$ un module (q-dimensionnel) dans A. Pour chaque partie ouverte X de A, soit $\mathcal{F}_X$ le module engendré par $\mathcal{M}$ dans X (*cf.* n° 2). On définit ainsi un A-faisceau $\mathcal{F}$; on vérifie que, pour *toute* partie X non vide de A, $\mathcal{F}_X$ est le module engendré par $\mathcal{M}$ dans X. Le faisceau $\mathcal{F}$ est dit *engendré par le module* $\mathcal{M}$. Il n'est pas certain, *a priori*, qu'un tel faisceau soit *complet*; à ce sujet, *voir* plus loin (théorèmes 4, 4 *bis* et 4 *ter*).

D'autre part, soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modules q-dimensionnels dans A ouvert; il n'est pas certain que le faisceau engendré par l'intersection $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ soit identique à l'intersection des faisceaux engendrés par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement; à ce sujet, *voir* plus loin (théorèmes 5, 5 *bis* et 5 *ter*).

Exemple 2. — Soient p fonctions $f_i (1 \leqq i \leqq p)$ holomorphes dans un ensemble ouvert A, et à valeurs dans C^q. Pour chaque ensemble ouvert non vide X contenu dans A, considérons les systèmes de p fonctions $c_1, \ldots, c_p$ holomorphes dans X et telles que $\sum_i c_i f_i$ soit identiquement nulle dans X. Un tel système (c_i) sera considéré comme un élément de $\mathcal{O}_X^p$; l'ensemble de ces systèmes constitue un *module* dans X, que nous noterons $\mathcal{R}_X(f)$, et appellerons *module des relations* entre les f_i dans X. Les $\mathcal{R}_X(f)$ définissent un faisceau $\mathcal{R}(f)$, appelé *faisceau des relations* entre les f_i. Pour toute partie non vide Y de A (non nécessairement ouverte), on vérifie que $\mathcal{R}_X(f)$ se compose des éléments (c_i) de $\mathcal{O}_Y^p$ tels que $\sum_i c_i f_i$ soit l'élément *nul* de $\mathcal{O}_Y^q$. Ceci vaut, en particulier, lorsque Y est réduit à un point $x (x \in A)$; on écrira, dans ce cas, $\mathcal{R}_x(f)$, et l'on parlera du « module des relations entre les f_i au point x ». Enfin, on notera que, en vertu de la définition même, *tout faisceau de relations est un faisceau complet.*

Exemple 3. — Soit V une *variété analytique* dans un ensemble ouvert A (*cf.* n° 3). Pour chaque ensemble *ouvert* non vide X contenu dans A, considérons l'*idéal* $\mathcal{F}_X(V)$ des fonctions scalaires, holomorphes dans X, qui s'annulent en tout point de V. Les idéaux $\mathcal{F}_X(V)$ définissent un faisceau $\mathcal{F}(V)$, appelé *faisceau de la variété* V. Pour toute partie non vide Y de A, on vérifie que $\mathcal{F}_Y(V)$ est l'idéal formé des éléments de $\mathcal{F}_Y$ qui *s'annulent sur* V (cette locution signifiant, par abus de langage, que ces éléments s'annulent sur l'élément V_Y de $\mathcal{L}_Y$ défini par V; *cf.* ci-dessus, n° 3). On notera que, en vertu de la définition même, *le faisceau d'une variété est complet.*

III. — Faisceaux cohérents.

7. Soit $\mathcal{F}$ un A-faisceau (A : ensemble ouvert non vide). Il jouit de la propriété énoncée dans la proposition I du n° 5.

Définition. — Un A-faisceau $\mathcal{F}$ est dit *cohérent* en un point a de A si a possède un voisinage ouvert X tel que non seulement $\mathcal{F}_X$ engendre $\mathcal{F}_a$ au point a, mais que $\mathcal{F}_X$ *engendre* $\mathcal{F}_x$ *en tout point* x *suffisamment voisin de* a. (Dans ces conditions, pour *tout* voisinage ouvert Y assez petit de a, $\mathcal{F}_Y$ engendre $\mathcal{F}_x$ en tout point $x \in Y$). Un A-faisceau est dit *cohérent* (dans A) s'il est cohérent en tout point de A.

Nous allons commenter cette définition (ci-dessous n° 8) à la lumière d'un lemme remarquable, que nous rappelons ici sans démonstration (5) :

Lemme 1. — *Soit* U *un voisinage ouvert d'un point* a, *et* $\mathcal{M}$ *un module* (q-dimensionnel) *dans* U. *Il existe un voisinage ouvert* V *de* a, *contenu dans* U, *et jouissant de la propriété suivante : si une* f *holomorphe dans* V *appartient au module* $\mathcal{M}_a$ *engendré par* $\mathcal{M}$ *au point* a (d'une façon précise : si la restriction de f au point a appartient au module $\mathcal{M}_a$), *alors* f *appartient au module* $\mathcal{M}_V$ *engendré par* $\mathcal{M}$ *dans* V (d'une façon précise : la restriction de f à V appartient au module $\mathcal{M}_V$).

De ce lemme on déduit aussitôt (6) :

Corollaire 1 du lemme 1. — *Si deux modules q-dimensionnels* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}'$, *dans un voisinage ouvert d'un point* a, *engendrent le même module au point* a, *ils engendrent aussi le même module en chaque point* x *suffisamment voisin de* a.

Corollaire 2 du lemme 1. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un module dans* A *ouvert, et soit* a *un point de* A. *Alors il existe un voisinage ouvert* X *de* a (*contenu dans* A), *et un nombre* fini *de fonctions de* $\mathcal{M}$ *qui engendrent*, *dans* X, *le même module que* $\mathcal{M}$.

8. Proposition 2. — *Pour qu'un* A-*faisceau* $\mathcal{F}$ *soit cohérent en un point* a *de* A, *il faut et il suffit que la collection des modules ponctuels* $\mathcal{F}_x$ *satisfasse à la condition :*

c. Il existe un système fini S *de fonctions holomorphes au voisinage de* a,

(5) *Voir* I. F. A., théorème α, p. 191.
(6) *Cf.* I. F. A., « deuxième corollaire », p. 194.

et qui, en tout point x suffisamment voisin de a, engendre le module $\mathcal{F}_x$ attaché à ce point.

En effet, cette condition est nécessaire en vertu du corollaire 2 du lemme 1, appliqué au module $\mathcal{F}_x$ qui intervient dans la définition d'un faisceau cohérent. Elle est suffisante, en vertu de la proposition 1 (n° 5) et du corollaire 1 du lemme 1.

La proposition 2 montre que la notion de faisceau cohérent ne dépend en réalité que de la collection des modules ponctuels $\mathcal{F}_x$. Donc, *pour qu'un faisceau $\mathcal{F}$ soit cohérent en un point a, il faut et il suffit que son complété $\overline{\mathcal{F}}$ soit cohérent au point a.*

Remarque. — Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux cohérents en un même point a, et tels que $\mathcal{F}_a = \mathcal{G}_a$. On a alors $\mathcal{F}_x = \mathcal{G}_x$ pour tout point x assez voisin de a. En gros, on peut dire que, pour un A-faisceau $\mathcal{F}$ cohérent en un point a de A, la connaissance du module $\mathcal{F}_a$ détermine les modules $\mathcal{F}_x$ attachés aux points x suffisamment voisins de a.

D'après la définition initiale d'un faisceau cohérent, il est clair que si un faisceau est *engendré par un module* $\mathcal{M}$ dans A *ouvert,* il est cohérent en tout point de A. Ainsi les faisceaux définis à l'exemple 1 ci-dessus (n° 6) sont cohérents. Notre tâche va consister maintenant à montrer que les faisceaux des exemples 2 et 3 sont aussi des faisceaux cohérents. C'est loin d'être évident et facile; en fait, il y a là deux problèmes que j'avais déjà posés, sans pouvoir les résoudre dans le cas le plus général, dans mon Mémoire I. F. A. (p. 187). Le premier de ces problèmes a, depuis cette époque, été complètement résolu par K. Oka (Voir ce même volume du *Bulletin*); nous donnons ci-dessous une version simplifiée de la démonstration de Oka. Quant au second problème (cohérence des faisceaux définis à l'exemple 3), il n'en a été jusqu'ici donné aucune solution, du moins à ma connaissance.

9. THÉORÈME 1. — *Le faisceau des relations entre des fonctions f_i $(1 \leqq i \leqq p)$ holomorphes dans* A *ouvert, est un faisceau cohérent en tout point de* A.

Ce théorème dépend de l'entier q (dimension de l'espace C^q dans lequel les fonctions f_i prennent leurs valeurs), et de l'entier n (dimension de l'espace C^n dont l'ensemble est A une partie ouverte). Il est trivial pour $n = 0$. Pour le démontrer, il susffira de prouver deux choses : 1° si, pour une valeur de n, il est vrai pour $q = 1$, il est vrai pour toute valeur de q; 2° s'il est vrai pour $n - 1$ (quel que soit q) il est vrai pour n et pour $q = 1$. Dans un cas comme dans l'autre, nous utiliserons la condition (c) qui caractérise un faisceau *cohérent* en un point a.

Prouvons d'abord : 1° Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions à valeurs q-dimensionnelles, holomorphes au voisinage d'un point a de l'espace C^n. Toute relation $\sum_i c_i f_i = 0$ entre des fonctions scalaires c_i équivaut au système de deux relations

$$\sum_i c_i g_i = 0, \qquad \sum_i c_i h_i = 0,$$

où les g_i sont des fonctions scalaires, et les h_i à valeurs $(q - 1)$-dimensionnelles. Le théorème 1 étant supposé vrai pour $q - 1$, il existe une famille finie de S de systèmes $(d_1, \ldots, d_p)$ holomorphes dans un voisinage du point a, et qui, en chaque point x suffisamment voisin de a, engendre le module $\mathcal{R}_x(g)$ des relations entre les g_i. Or le module $\mathcal{R}_x(f)$ est contenu dans $\mathcal{R}_x(g)$; donc, en tout point x d'un voisinage de a, tout élément $(c_1, \ldots, c_p)$ de $\mathcal{R}_x(f)$ s'écrira

$$c_i = \sum_j \lambda_j d_i^j, \tag{1}$$

où j est un indice qui parcourt S, et où les λ_j sont holomorphes au point x. Pour que $(c_1, \ldots, c_p)$ défini par (1) appartienne à $\mathcal{F}_x(f)$, il faut et il suffit qu'il appartienne à $\mathcal{R}_x(h)$, c'est-à-dire que

$$\sum_{i,j} \lambda_j d_i^j h_i = 0 \quad \text{dans l'anneau } \mathcal{O}_x,$$

ce qui s'écrit

$$\sum_j \lambda_j k_j = 0, \qquad \text{avec} \quad k_j = \sum_i d_i^j h_i.$$

Par suite, pour que le système $(c_1, \ldots, c_p)$ défini par (1) appartienne à $\mathcal{R}_x(f)$, il faut et il suffit que le système (λ_j) appartienne à $\mathcal{R}_x(k)$. Or les k_j sont des fonctions $(q-1)$-dimensionnelles. D'après le théorème 1 pour $q - 1$, le faisceau $\mathcal{R}(k)$ est cohérent au point a; soit (λ_j^l) (où l parcourt un ensemble fini L) un système fini d'éléments de $\mathcal{R}_a(k)$, qui engendre $\mathcal{R}_x(k)$ en tout point x assez voisin de a. Alors le système des $\sum_j \lambda_j^l d_i^j$ (où l parcourt L) engendre $\mathcal{R}_x(f)$ en tout point x assez voisin de a, ce qui prouve que le faisceau $\mathcal{R}(f)$ est cohérent au point a.

Après avoir prouvé 1°, il nous reste à prouver 2°, c'est-à-dire à procéder par récurrence sur le nombre n des dimensions de l'espace. Nous supposons que les fonctions $f_1, \ldots, f_p$, holomorphes au voisinage d'un point a de $\mathcal{C}^n$, sont à valeurs *scalaires*. On peut les supposer non identiquement nulles, sinon le théorème à démontrer est trivial. Il est classique que, le point a étant pris pour origine, on peut effectuer sur les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ une substitution linéaire de manière que pour les nouvelles variables (appelées à nouveau $x_1, \ldots, x_n$), $f_i(0, \ldots, 0, x_n)$ ne soit identiquement nul (en x_n) pour aucune des f_i non identiquement nulles (en $x_1, \ldots, x_n$). On écrira désormais y au lieu de x_n. On sait (*Vorbereitungssatz* de Weierstrass) [7] que chaque f_i non identiquement nulle est alors *équivalente* à un « polynome distingué » P_i en y, à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_{n-1}$, et dont toutes les racines sont *nulles* pour $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$ (« distingué » signifie que le coefficient du terme de plus haut degré en y est égal à *un*; « équivalent » signifie que l'on a, au voisinage de l'origine, $f_i = g_i P_i$, où g_i désigne une fonction holomorphe et non nulle à l'origine). Dans le cas où f_i est $\neq 0$ à l'origine,

---

[7] *Voir* par exemple S. Bochner et W. T. Martin, *Several complex variables* (*Princeton Univ. Press*, 1948), p. 188, theorem 1.

le polynome P_i est de degré zéro, et se réduit à la constante *un*. Si f_i est identiquement nulle au voisinage de l'origine, on conviendra que $g_i = 1$ et que P_i est identiquement nul.

Pour prouver que le faisceau $\mathcal{R}(f)$ des relations entre les f_i est cohérent à l'origine, il suffit évidemment de prouver que le faisceau $\mathcal{R}(P)$ des relations entre les P_i est cohérent à l'origine. Supposons que le degré α de P_p soit au moins égal au degré de n'importe lequel des P_i. Soit T la famille des $p-1$ systèmes $(c_1, \ldots, c_p)$ suivants :

$$
(\mathrm{T}) \quad \begin{cases} c_i = 0 \quad (2 \leqq i \leqq p-1), & c_1 = -P_p, \quad c_p = P_1, \\ c_i = 0 \quad (i = 1,\ 3 \leqq i \leqq p-1), & c_2 = -P_p, \quad c_p = P_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_i = 0 \quad (1 \leqq i \leqq p-2), & c_{p-1} = -P_p. \quad c_p = P_{p-1}. \end{cases}
$$

Chacun de ces systèmes est holomorphe au voisinage de l'origine et appartient au *module des relations* entre les P_i. Pour montrer que le faisceau $\mathcal{R}(P)$ est cohérent à l'origine, nous utiliserons la

Proposition auxiliaire. — *Soient* $P_1, \ldots, P_p$ *des polynomes distingués en* y, *de degrés au plus égaux au degré* α *de* P_p, *et à coefficients holomorphes en* $x_1, \ldots, x_{n-1}$ *dans un voisinage* U *de l'origine de l'espace* $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. *Pour tout point* (a, b) *tel que* $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in U$, *tout système* $(c_1, \ldots, c_p)$ *du module des relations* $\mathcal{R}_{(a,b)}(P)$ *est combinaison linéaire* [*à coefficients holomorphes au point* (a, b)] : 1° *de systèmes de la famille* T *définie ci-dessus*; 2° *de systèmes pour lesquels les* c_i *sont des* polynomes en y, *de degrés* $\leqq \alpha - 1$ (*à coefficients holomorphes au point* a). *Ce que nous exprimerons en disant que tout élément de* $\mathcal{R}_{(a,b)}(P)$ *est, au point* (a, b), congru modulo T *à un système pour lequel les* c_i *sont des polynomes de degrés* $\leqq \alpha - 1$.

Admettons pour un instant cette proposition, et montrons comment elle permet de prouver que le faisceau $\mathcal{R}(P)$ des relations entre les polynomes distingués P_i est *cohérent à l'origine*. Les systèmes de la famille T sont indépendants du point (a, b) voisin de l'origine; quant aux systèmes du type 2°, c'est-à-dire aux éléments du module des relations (entre les P_i) qui sont des polynomes (en y) de degrés $\leqq \alpha - 1$, il suffira de montrer qu'ils forment un faisceau cohérent à l'origine. Or la considération d'un système de polynomes c_i, de degrés $\leqq \alpha - 1$, revient à celle du système de tous leurs coefficients, qui sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de l'espace $\mathcal{C}^{n-1}$; et comme une identité $\sum_i c_i P_i = 0$ se traduit par des relations linéaires entre les coefficients des c_i, à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_{n-1}$, on est ramené à un faisceau de relations dans l'espace $\mathcal{C}^{n-1}$, faisceau qui est cohérent à l'origine, en vertu du théorème 1 supposé vrai pour $n-1$. Finalement, le théorème 1 est entièrement démontré, grâce à la proposition auxiliaire ci-dessus.

10. Reste à prouver la proposition auxiliaire ([8]). Soit (a, b) un point de $\mathcal{C}^n$ tel

([8]) La démonstration qui suit est essentiellement celle de Oka.

que a soit dans le voisinage U dont il est question dans l'énoncé. D'après le *Vorbereitungssatz* ([7]), on a, au voisinage du point (a, b),

$$P_p = P'P'',$$

où P' et P'' sont des polynomes distingués (en y), à coefficients holomorphes en $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ au voisinage du point a, et satisfaisant aux conditions suivantes : P'' est $\neq 0$ au point (a, b), P' a toutes ses racines égales à b pour

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (a_1, \ldots, a_{n-1})$$

[(P' est la constante *un* si P_p est $\neq 0$ au point (a, b))].

Soit alors un système $(c_1, \ldots, c_p)$ holomorphe au point (a, b), tel que

$$\sum_i c_i P_i = 0$$

dans un voisinage de (a, b). D'apres un théorème connu ([9]), on a des identités au voisinage de (a, b) :

$$c_i = \mu_i P' + c'_i \qquad (i = 1, \ldots, p-1),$$

où les μ_i sont holomorphes au point (a, b), et les c'_i sont des *polynomes* de degré strictement inférieur au degré de P'. Au point (a, b), le système $(c_1, \ldots, c_p)$ est donc *congru modulo* T à un système $(c'_1, \ldots, c'_p)$, où $c'_1, \ldots, c'_{p-1}$ viennent d'être définis, et

$$c'_p = c_p + \sum_{i \leq p-1} \left(\frac{\mu_i}{P''}\right) P_i.$$

Mais le système $(c'_1, \ldots, c'_p)$ équivaut au système $(P''c'_1, \ldots, P''c'_p)$, puisque $P'' \neq 0$ au point (a, b); et je dis que les $P''c'_i$ sont des *polynomes* (en y). Pour $i \leq p-1$, c'est clair; pour $i = p$, on a

$$P''c'_p = -\left(\frac{1}{P'}\right)\left(\sum_{i \leq p-1} c'_i P_i\right).$$

Effectuons la division du polynome $-\left(\sum_{i \leq p-1} c'_i P_i\right)$ par le polynome P', suivant les puissances décroissantes :

$$-\left(\sum_{i \leq p-} c'_i P_i\right) = P'Q + R \qquad \text{(degré de R < degré de P')}.$$

On aura

$$P''c'_p = Q + \frac{R}{P'},$$

ce qui prouve que $\frac{R}{P'}$ est holomorphe au point (a, b); or toutes les racines de P' étant égales à b au point a, ceci exige que R soit identiquement nul. Finalement, $P''c'_p = Q$ est bien un *polynome*.

([9]) *Voir* par exemple le livre cité en ([7]), p. 183, lemma 1.

La démonstration de la proposition auxiliaire sera achevée si nous prouvons ceci : tout système de *polynomes* $c_1, \ldots, c_p$ (en y), à coefficients holomorphes au point a, et qui satisfait à $\sum_i c_i P_i = 0$ identiquement au voisinage du point (a, b), est *congru modulo* T à un système analogue, mais pour lequel les degrés des polynomes sont tous $\leqq \alpha - 1$. Or, effectuons la division de polynomes

$$c_i = \nu_i P_p + c_i'' \qquad (i \leqq p-1),$$

où les c_i'' sont de degré $\leqq \alpha - 1$. Le système $(c_1, \ldots, c_p)$ est, au point (a, b), *congru modulo* T à un système $(c_1'', \ldots, c_p'')$, où $c_1'', \ldots, c_{p-1}''$ viennent d'être définis, et

$$c_p'' = c_p + \sum_{i \leq p-1} \nu_i P_i.$$

Comme les ν_i sont des polynomes, cette relation prouve que c_p'' est, comme $c_1'', \ldots, c_{p-1}''$, un polynome en y. De plus

$$c_p'' P_p = -\left(\sum_{i \leq p-1} c_i'' P_i \right)$$

est de degré $\leqq 2\alpha - 1$, et comme P_p est distingué de degré α, il en résulte que c_p'' est de degré $\leqq \alpha - 1$, comme chacun des autres c_i''. Ceci achève entièrement la démonstration de la proposition auxiliaire, et par suite celle du théorème 1.

11. **Conséquences diverses du théorème 1.** — Corollaire 1 du théorème 1. — *Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont deux* A*-faisceaux* (q-dimensionnels), *cohérents en un point a de* A, *le faisceau-intersection* (*cf.* n° 4) *est ausi cohérent au point a.*

En effet, soit $(f_1, \ldots, f_j)$ un système fini de générateurs du module $\mathfrak{M}_a$ que $\mathfrak{M}$ associe au point a; et soit $(g_1, \ldots, g_k)$ un système fini de générateurs du module $\mathfrak{M}'_a$ que $\mathfrak{M}'$ associe au point a. Alors $(f_1, \ldots, f_j)$ engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x assez voisin de a, et $(g_1, \ldots, g_k)$ engendre $\mathfrak{M}'_x$ en tout point x assez voisin de a. Considérons le module $\mathcal{R}(f, g)$ des relations entre les $j+k$ fonctions $f_1, \ldots, f_j, g_1, \ldots, g_k$. Si (c_i) est un tel système $(1 \leqq i \leqq j+k)$ holomorphe au point x, associons-lui la fonction $\sum_{i \leq j} c_i f_i \in \mathfrak{M}_x \cap \mathfrak{M}'_x$. On définit ainsi un *homomorphisme* du module $\mathcal{R}_x(f, g)$ *sur* le module $\mathfrak{N}_x = \mathfrak{M}_x \cap \mathfrak{M}'_x$. Cela posé, prenons une famille finie S de systèmes (c_i), holomorphes au voisinage de a, et qui engendre $\mathcal{R}_x(f, g)$ en chaque point x assez voisin de a; ce qui est possible en vertu du théorème 1. A chaque système (c_i) de la famille S, associons la fonction $\sum_{i \leq j} c_i f_i$; on obtient une famille finie de fonctions qui, en chaque point x assez voisin de a, engendre le module $\mathfrak{N}_x$. Ceci prouve que $\mathfrak{N}$ est un faisceau cohérent au point a. c. q. f. d.

Corollaire 2 du théorème 1. — *Soit $\mathfrak{M}$ un module* (q-dimensionnel) *engendré* *par un nombre fini de fonctions holomorphes dans un voisinage* U *d'un point* a*; et soit* g *une fonction (scalaire) holomorphe dans* U, *et jouissant de la propriété suivante : si une fonction* (q-dimensionnelle) f *est holomorphe au point* a, *et si* gf *appartient au module* $\mathcal{M}_a$ *engendré par* $\mathcal{M}$, *alors* f *appartient elle-même à* $\mathcal{M}_a$. *Dans ces conditions, tout point* x *assez voisin de* a *jouit de la propriété suivante : si une fonction* (q-dimensionnelle) φ *est holomorphe au point* x, *et si* $g\varphi$ *appartient au module* $\mathcal{M}_x$ *engendré par* $\mathcal{M}$, *alors* φ *appartient elle-même à* $\mathcal{M}_x$.

En effet, soit $(g_1, \ldots, g_p)$ un système fini de générateurs de $\mathcal{M}$. Considérons le faisceau $\mathcal{R}(g_i, g)$ des relations entre $g_1, \ldots, g_p$ et g. Il est cohérent au point a (théorème 1). Un système fini de générateurs du module $\mathcal{R}_a(g_i, g)$ engendre donc $\mathcal{R}_x(g_i, g)$ en chaque point x assez voisin de a. Or, soit $(c_1, \ldots, c_p, f)$ un élément de $\mathcal{R}_a(g_i, g)$; on a $gf \in \mathcal{M}_a$, donc, d'après l'hypothèse de l'énoncé, $f \in \mathcal{M}_a$. Il en résulte qu'en tout point x assez voisin de a, tout élément $(c_1, \ldots, c_p, f)$ de $\mathcal{R}_x(g_i, g)$ est tel que $f \in \mathcal{M}_x$. Et ceci démontre précisément le corollaire que nous voulions établir.

12. Nous allons passer à l'étude des *faisceaux de variétés* (*cf.* ci-dessus, exemple 3 du n° 6). Auparavant, faisons une remarque : tout ce qui a été dit jusqu'à présent reste très probablement vrai si l'on remplace le corps $\mathcal{C}$ des nombres complexes par n'importe quel *corps valué complet*, car apparemment les lemmes dont on a eu à se servir valent dans ce cas plus général. Le théorème qui suit, au contraire, ne pourra être étendu qu'aux corps qui, en outre, sont *algébriquement clos*, puisqu'il s'agit, en somme, de caractériser des fonctions par le fait qu'elles s'annulent sur des variétés, solutions de systèmes d'équations. En fait, nous allons continuer à supposer qu'on a affaire au corps $\mathcal{C}$ des nombres complexes.

THÉORÈME 2. — *Le faisceau d'une variété analytique dans un ensemble ouvert* A *est un faisceau cohérent en tout point de* A.

On doit prouver ceci : soit V l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions holomorphes dans un voisinage ouvert U d'un point a; alors le faisceau de V est cohérent au point a. Or, soit V_a l'élément de $\mathcal{T}_a$ défini par V (*cf.* n° 3); V_a est une « variété analytique au point a ». On sait(10) que V_a est réunion d'une famille finie de variétés analytiques W_a^k ($k = 1, \ldots$) dont chacune est *irréductible*. Il existe donc un voisinage U′ du point a ($U' \subset U$) et une famille finie de variétés analytiques W^k dans U′ (chacune étant obtenue en égalant à zéro un nombre fini de fonctions holomorphes dans U′), telles que leur réunion soit $V \cap U'$, et que les W^k soient « irréductibles au point a ». Le faisceau $\mathcal{F}(V)$ de la variété V dans U′ est évidemment l'*intersection* des faisceaux $\mathcal{F}(W^k)$ des variétés W^k. Pour montrer que $\mathcal{F}(V)$ est cohérent au point a, il suffit, en vertu du corollaire 1 du théorème 1, de montrer que chaque faisceau $\mathcal{F}(W^k)$ est cohérent au point a.

(10) *Voir* W. RÜCKERT, Mémoire cité en (1); et le livre de BOCHNER et MARTIN, p. 207, theorem 3.

Bref, il suffit de démontrer le théorème 2 dans le cas où la variété V est *irréductible au point a*. Ceci revient à supposer que l'idéal $\mathcal{F}_a$ de V au point a est *premier*.

On sait ([11]) que l'étude de l'anneau d'intégrité, quotient de l'anneau $\mathcal{O}_a$ par l'idéal premier $\mathcal{F}_a$, conduit au résultat suivant : on peut faire une substitution linéaire sur les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de manière que :

1° les coordonnées du point a soient nulles;

2° les p premières coordonnées $x_1, \ldots, x_p$ soient telles que, si une fonction $f(x_1, \ldots x_p)$ est holomorphe à l'origine et appartient à $\mathcal{F}_a$, elle est identiquement nulle;

3° il existe un polynome distingué $F(y)$, à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_p$, nuls à l'origine, qui est irréductible, et tel que $F(x_{p+1}) \in \mathcal{F}_a$; on notera que $\dfrac{\partial F}{\partial x_{p+1}} \notin \mathcal{F}_a$;

4° il existe pour chaque entier $j \leqq n-p-1$, un polynome $P_j(y)$ à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_p$ à l'origine, tel que

$$\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}} x_{p+1+j} - P_j(x_{p+1}) \in \mathcal{F}_a \qquad (1 \leqq j \leqq n-p-1);$$

et un polynome distingué $Q_j(z)$, à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_p$, nuls à l'origine, tel que $Q_j(x_{p+1+j}) \in \mathcal{F}_a$;

5° la variété V de l'idéal premier $\mathcal{F}_a$ se compose, au voisinage de l'origine a, de l'adhérence de l'ensemble des solutions du système d'équations

$$\text{(E)} \qquad F(x_{p+1}; x_1, \ldots, x_p) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x_{p+1}} x_{p+1+j} - P_j(x_{p+1}; x_1, \ldots, x_p) = 0$$

pour lesquelles $\dfrac{\partial F}{\partial x_{p+1}} \neq 0$. De plus, à tout point b assez voisin de a est associée une décomposition $F = F'_b F''_b$ de F en un produit de deux polynomes distingués (dont le premier F'_b est de degré 0 si $b \notin V$), qui jouissent des propriétés suivantes :

(α). pour tout système $(x_1, \ldots, x_p)$ voisin du système $(b_1, \ldots, b_p)$ des p premières coordonnées de b, toutes les racines du polynome F'_b sont voisines de la coordonnée b_{p+1} du point b, et à chacune d'elles x_{p+1} correspond au moins un point de V, *voisin de b*, dont les $p+1$ premières coordonnées sont $x_1, \ldots, x_{p+1}$;

(β). en tout point de V assez voisin de b, et tel que $\dfrac{\partial F}{\partial x_{p+1}} \neq 0$, on a $F''_b \neq 0$.

Ces préliminaires étant rappelés, démontrons un lemme :

Lemme. — *Soit* S *un système fini de générateurs de l'idéal premier* $\mathcal{F}_a$. *Il existe un voisinage ouvert* U *de l'origine a qui jouit de la propriété suivante : si un point b est dans* U, *et si une fonction f, holomorphe en b, est telle qu'il existe un entier k pour lequel* $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_{p+1}}\right)^k f$ *appartienne à l'idéal* S_b *engendré par* S_b *au point b, alors f appartient à* S_b.

([11]) *Voir*, dans le livre de Bochner et Martin déjà cité, le Chapitre X.

En effet, si une f est une holomorphe au point a, et si $\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}} f \in S_a$, alors $f \in S_a$, puisque $S_a = \mathfrak{F}_a$ est un idéal premier. D'après le corollaire 2 du théorème 1, il existe donc un voisinage U de a tel que, si f est holomorphe en un point b de U, et si $\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}} f \in S_b$, alors $f \in S_b$. Cela étant, si $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}}\right)^k f \in S_b$, on conclut, par récurrence, que $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}}\right)^h f \in S_b$ pour tout entier h tel que $0 \leqq h < k$.

C. Q. F. D.

Il s'agit maintenant de démontrer que, en tout point b suffisamment voisin de l'origine a, l'idéal S_b engendré par S est précisément l'idéal $\mathfrak{F}_b$ de la variété V au point b; ceci prouvera le théorème 2.

Considérons la décomposition $F = F'_b F''_b$ de F au point b (*cf.* ci-dessus). Nous allons d'abord montrer que F'_b *appartient à l'idéal* S_b *engendré par* S *au point* b. L'idéal S_b est intersection d'idéaux primaires; puisque $F \in S_b$, on voit que, pour chaque idéal primaire $\mathfrak{J}$ de la décomposition : ou bien F'_b appartient à $\mathfrak{J}$, ou bien F''_b s'annule sur la variété de $\mathfrak{J}$. Or, la variété de $\mathfrak{J}$ est contenue dans celle de S_b, en tout point de laquelle les équations (E) sont vérifiées; donc tout point de la variété de $\mathfrak{J}$ tel que $\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}} \neq 0$ appartient à V, et par suite [*cf.* ci-dessus, propriété (β)] satisfait à $F''_b \neq 0$. De là on conclut que si $F'_b \notin \mathfrak{J}$, alors $\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}}$ s'annule sur la variété de $\mathfrak{J}$, donc une puissance de $\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}}$ appartient à $\mathfrak{J}$. Ceci vaut pour tout idéal primaire de la décomposition de S_b; par suite, il existe un entier k tel que $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}}\right)^k F'_b$ appartienne à S_b. D'après le lemme, ceci implique que F'_b appartient à S_b, ce qui établit l'assertion annoncée.

Soit maintenant f une fonction quelconque, holomorphe en un point b suffisamment voisin de l'origine a. Il est clair que f est congrue, modulo les polynomes $F(x_{p+1}; x_1, \ldots, x_p)$ et $Q_j(x_{p+1+j}; x_1, \ldots, x_p)$ (polynomes qui sont dans S_b), à un *polynome* en $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ (à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_p$). Donc, pour un entier k convenable, $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}}\right)^k f$ est congrue à un polynome $G(x_{p+1}, y_1, \ldots, y_{n-p-1})$ à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_p$, en posant $y_j = \frac{\partial F}{\partial x_{p+1}} x_{p+1+j}$. Or $G(x_{p+1}, y_1, \ldots, y_{n-p-1})$ est congru, modulo les fonctions

$$y_j - P_j(x_{p+1}; x_1, \ldots, x_p)$$

(fonctions qui appartiennent à S_b), à $G(x_{p+1}, P_1, \ldots, P_{n-p-1})$, qui est un polynome en x_{p+1}, à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_p$; ce polynome est lui-même congru, modulo F'_b, à un polynome $H(x_{p+1}; x_1, \ldots, x_p)$ de degré strictement plus petit que le degré de F'_b.

Or, on a montré que $F'_b \in S_b$. Donc $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}}\right)^k f$ est congrue, modulo S_b, au polynome H en x_{p+1}. Cela étant, *si* f *s'annule sur la variété* V *au voisinage de* b, le polynome H s'annule chaque fois que le polynome F'_b s'annule; or, d'après la propriété (α) rappelée ci-dessus, cela implique que H est identiquement nul. Finalement, on conclut que $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}}\right)^k f$ appartient à S_b; or, en vertu du lemme, ceci implique que f appartient à S_b. Et la démonstration du théorème 2 est achevée.

Remarque. — Il ne faudrait pas croire que les fonctions F, $\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}} x_{p+1+j} - P_j$ et Q_j suffisent toujours à engendrer l'idéal de la variété à l'origine. Par exemple, il n'en n'est pas ainsi pour la courbe (de l'espace à 3 dimensions x, y, z) définie par $x^p = y^q$, $z = xy$ (p et q étant des entiers premiers entre eux). Je dois cet exemple à l'obligeance de C. Chevalley, qui m'a également communiqué une démonstration du fait que l'idéal de cette courbe à l'origine ne peut être engendré par des fonctions du type ci-dessus.

IV. — Etude des idéaux et modules dans les pavés et les polycylindres.

14. Dans l'espace $\mathcal{C}^n$ dont les coordonnées complexes sont notées x_k $(1 \leq k \leq n)$, posons $x_k = u_k + iv_k$ (u_k et v_k réels). Les $2n$ coordonnées réelles u_k et v_k indentifient l'espace $\mathcal{C}^n$ à l'espace $\mathcal{R}^{2n}$. Dans cet espace, nous appelons *pavé* tout ensemble (compact) de la forme $a'_k \leq u_k \leq a''_k$, $b'_k \leq v_k \leq b''_k$ $(1 \leq k \leq n)$, où $a'_k \leq a''_k$ et $b'_k \leq b''_k$ (l'égalité n'est pas exclue); autrement dit, un pavé est le « produit » de $2n$ intervalles compacts (dont certains peuvent se réduire à un point unique). La *dimension* d'un tel pavé est le nombre des intervalles composants qui ne sont pas réduits à un point; elle est comprise entre o et $2n$ (bornes incluses).

Nous nous proposons d'établir les deux théorèmes fondamentaux que voici :

Théorème 3. — *Soit* A *un ensemble ouvert de* $\mathcal{C}^n$, *et* $\mathcal{F}$ *un* A-*faisceau cohérent. Alors, pour tout pavé* B *contenu dans* A, *il existe dans* B *un module de type fini, qui engendre* $\mathcal{F}_x$ *en chaque point* x *de* B.

Théorème 4. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un module quelconque dans un pavé* B. *Si une fonction* f *holomorphe dans* B *appartient, en chaque point* x *de* B, *au module* $\mathcal{M}_x$ *engendré par* $\mathcal{M}$, *alors* f *appartient au module* $\mathcal{M}$.

Ce théorème implique évidemment :

Corollaire du théorème 4. — *Si deux modules* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}'$, *dans un même pavé* B, *engendrent, en chaque point* x *de* B, *des modules* $\mathcal{M}_x$ *et* $\mathcal{M}'_x$ *égaux, alors les modules* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}'$ *sont identiques.*

(En effet, en vertu du théorème 4, chaque fonction de $\mathcal{M}$ appartient à $\mathcal{M}'$, et chaque fonction de $\mathcal{M}'$ appartient à $\mathcal{M}$).

Les deux théorèmes 3 et 4 vont être démontrés simultanément, grâce à une récurrence un peu subtile. Auparavant, signalons que ces théorèmes peuvent se généraliser au cas où l'ensemble B est d'un type plus général que les pavés ([13]). Dès maintenant, nous pouvons dire que les théorèmes 3 et 4 restent valables si l'on y remplace les pavés par les *polycylindres compacts*. Par « polycylindre compact », nous entendons un ensemble de la forme

$$x_k \in D_k \qquad (1 \leq k \leq n),$$

([13]) *Voir* ci-dessous, § VII, théorèmes 3 *bis* et 4 *bis*.

où, pour chaque k, D_k est un ensemble compact et *simplement connexe* du plan de la variable x_k; les ensembles D_k s'appellent les *composantes* du polycylindre. Voici pourquoi cette extension des théorèmes 3 et 4 est possible : étant donné un polycylindre compact B, et un voisinage arbitraire A de B, il existe un polycylindre compact B′ contenant B et contenu dans A, dont les composantes se représentent conformément sur des carrés; ainsi, par une transformation analytique définie au voisinage de B, B′ devient un *pavé*. Cela étant, pour démontrer le théorème 3 pour un polycylindre compact B contenu dans A, il suffira de le démontrer pour B′, donc pour un pavé. De même, pour le théorème 4, soit $\mathfrak{M}$ un module dans un polycylindre compact B; si une fonction f holomorphe au voisinage de B appartient, en chaque point x de B, au module engendré $\mathfrak{M}_x$, il existe un sous-module *de type fini* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ tel que f appartienne à $\mathfrak{N}_x$ en tout point x de B; il suffit de démontrer le théorème pour $\mathfrak{N}$, donc on peut supposer que le module donné existe *dans un voisinage* A *de* B, et que f appartient, en chaque point x de ce voisinage, au module $\mathfrak{N}_x$ engendré en ce point; en considérant un polycylindre B′ tel que $B \subset B' \subset A$, et qui se transforme en un pavé, on obtient la généralisation cherchée du théorème 4.

15. Nous nous proposons, dans ce numéro et les suivants, de démontrer les théorèmes 3 et 4. Pour chaque entier r $(0 \leq r \leq 2n)$, considérons les deux énoncés :

Théorème 3_r. — *Soit* A *un ensemble ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *et* $\mathcal{F}$ *un* A-*faisceau cohérent. Alors, pour tout pavé* B *de dimension* $\leq r$ *contenu dans* A, *il existe dans* B *un module de type fini, qui engendre* $\mathcal{F}_x$ *en chaque point* x *de* B.

Théorème 4_r. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *un module dans un pavé* B *de dimension* $\leq r$. *Si une fonction* f *holomorphe dans* B *appartient, en chaque point* x *de* B, *au module* $\mathfrak{M}_x$ *engendré par* $\mathfrak{M}$, *alors* f *appartient au module* $\mathfrak{M}$.

Il est clair que, pour $r = 2n$, ces théorèmes se réduisent aux théorèmes 3 et 4 à démontrer. D'autre part, pour $r = 0$, ils sont triviaux. Nous démontrerons donc les théorèmes 3_r et 4_r par récurrence sur l'entier r; de façon précise, nous allons prouver les deux assertions suivantes :

α. les théorèmes 3_r et 4_r entraînent le théorème 3_{r+1};

β. les théorèmes 4_r et 3_{r+1} entraînent le théorème 4_{r+1}.

La preuve de ces deux assertions constituera une démonstration des théorèmes 3 et 4.

Auparavant, observons que le théorème 4_r entraîne :

Corollaire du théorème 4_r. — *Si deux modules* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{M}'$, *sur un même pavé* B *de dimension* $\leq r$, *engendrent, en chaque point* x *de* B, *des modules* $\mathfrak{M}_x$ *et* $\mathfrak{M}'_x$ *égaux, ils sont identiques.*

16. **Démonstration de l'assertion α.** — Soit B un pavé de dimension $r+1$ contenu dans l'ensemble ouvert A, dans lequel est donné, par hypothèse, un

A-faisceau cohérent $\mathcal{F}$. On cherche un système fini S de fonctions holomorphes dans B, et qui engendre $\mathcal{F}_x$ en chaque point x de B. Or B est défini par

$$a'_k \leq u_k \leq a''_k, \qquad b'_k \leq v_k \leq b''_k \qquad (u_k + iv_k = x_k, \qquad 1 \leq k \leq n).$$

On peut supposer par exemple $a'_1 < a''_1$; B est donc le produit d'un intervalle $\mathrm{I}(a'_1 \leq u_1 \leq a''_1)$ de la droite (u_1), et d'un pavé C, *de dimension* r, de l'espace $(v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n)$. Pour tout point u de I, soit C_u le pavé (de dimension r), produit du point $u \in \mathrm{I}$ et du pavé C. On peut appliquer le théorème 3_r au pavé C_u et au faisceau cohérent $\mathcal{F}$: il existe donc un système fini S_u de fonctions holomorphes au voisinage de C_u, et qui engendre le module $\mathcal{F}_x$ en tout point x de C_u. En vertu du corollaire 1 du lemme 1 (n° 7), S_u engendre aussi $\mathcal{F}_x$ en tout point x d'un *voisinage* de C_u. Ceci vaut pour chaque point u de l'intervalle compact I; en appliquant le théorème de Borel-Lebesgue, on voit qu'il existe une subdivision finie de l'intervalle I en intervalles fermés $\mathrm{I}_j (1 \leq j \leq p)$ tels que :

l'extrémité de I_j est l'origine de I_{j+1};

il existe un système fini S_j de fonctions holomorphes dans le pavé $\mathrm{I}_j \times \mathrm{C}$, et qui engendre $\mathcal{F}_x$ en tout point de ce pavé.

Désignons par I'_j la réunion des intervalles I_l pour $l \leq j$; c'est un intervalle. Nous allons montrer, par récurrence sur j, l'existence d'un système fini S'_j de fonctions holomorphes dans le pavé $\mathrm{I}'_j \times \mathrm{C}$, et qui engendre $\mathcal{F}_x$ en tout point x de ce pavé. Pour $j = 1$, il suffit de prendre $\mathrm{S}'_1 = \mathrm{S}_1$; pour $j = p$, on obtiendra un système de fonctions qui engendre $\mathcal{F}_x$ en tout point x de B, ce qui établira l'assertion α à démontrer. Il reste donc seulement à faire la récurrence sur j : supposons trouvé un système S'_j, et cherchons S'_{j+1}.

L'intervalle I'_{j+1} est la réunion de deux intervalles I'_j et I_{j+1} dont l'intersection se réduit à un point; soit u ce point. Les deux systèmes S'_j et S_{j+1} engendrent le même module $\mathcal{F}_x$ en tout point x du pavé C_u, intersection des pavés $\mathrm{I}'_j \times \mathrm{C}$ et $\mathrm{I}_{j+1} \times \mathrm{C}$; ils engendrent donc le même module dans le pavé C_u, en vertu du corollaire du théorème 4_r. Observons que $\mathrm{I}'_j \times \mathrm{C}$ et $\mathrm{I}_{j+1} \times \mathrm{C}$ sont deux polycylindres compacts, dont les composantes dans les plans des variables *complexes* x_k sont les mêmes, sauf pour la première variable x_1; et que les composantes de leur intersection sont simplement connexes. Cela dit, l'existence d'un système fini S'_{j+1} de fonctions holomorphes dans la réunion de ces deux polycylindres, et engendrant le même module que S'_j sur le premier, et le même module que S_{j+1} sur le second, résulte d'un lemme fondamental que nous rappelons ici sans démonstration [14] :

Lemme 2. — *Soient deux polycylindres compacts* D′ *et* D″, *qui ont les mêmes composantes dans les plans de toutes les variables complexes sauf une, et dont l'intersection est simplement connexe. Si deux modules q-dimensionnels de type fini* $\mathcal{M}'$ *dans* D′, *et* $\mathcal{M}''$ *dans* D″, *engendrent le même module dans le polycylindre-intersection* $\mathrm{D}' \cap \mathrm{D}''$, *il existe dans le polycylindre-réunion*

---

[14] I. F. A., lemme II, p. 156. La démonstration de ce lemme faisait l'objet essentiel d'un Mémoire antérieur : H. Cartan, *Sur les matrices holomorphes de n variables complexes* (*Journal de Math.*, 9e série, 19, 1940, p. 1-26).

$D = D' \cap D''$ *un module* (q-dimensionnel) *de type fini* $\mathcal{M}$, *qui engendre* $\mathcal{M}'$ *dans* D' *et* $\mathcal{M}''$ *dans* D''.

Ici, on trouvera donc un système fini S'_{j+1} qui engendre le même module que S'_j dans $I'_j \times C$ (et par suite engendre le même module $\mathcal{F}_x$ en tout point x de $I'_j \times C$), et qui engendre le même module que S_{j+1} dans $I_{j+1} \times C$ (et par suite engendre $\mathcal{F}_x$ en tout point x de $I_{j+1} \times C$). L'assertion α est ainsi établie.

17. **Démonstration de l'assertion** β. — Soient B un pavé de dimension $r+1$ dans l'espace $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{M}$ un module (q-dimensionnel) dans B, et f une fonction (q-dimensionnelle) holomorphe dans B et appartenant, en chaque point x de B, au module $\mathcal{M}_x$ engendré par $\mathcal{M}$ au point x. On veut montrer que f appartient au module $\mathcal{M}$.

Avec les notations du n° 16, B est le produit d'un intervalle I et d'un pavé C de dimension r. Pour chaque $u \in I$, on peut appliquer le théorème 4_r au pavé C_u et au module engendré par $\mathcal{M}$ dans C_u : il existe donc des fonctions (q-dimensionnelles) $g_i \in \mathcal{M}$ et des fonctions (scalaires) c_i holomorphes dans C_u, telles que $f = \sum_i c_i g_i$ dans C_u. Cette identité sera valable dans un *voisinage* de C_u. Il en est ainsi pour chaque point u de l'intervalle compact I; donc, en appliquant le théorème de Borel-Lebesgue, on voit qu'il existe une subdivision finie de l'intervalle I en intervalles fermés I_j $(1 \leqq j \leqq p)$, tels que l'extrémité de chaque I_j soit l'origine de I_{j+1}, et un système fini de fonctions (q-dimensionnelles) $f_i \in \mathcal{M}$, jouissant de la propriété suivante : dans chaque pavé $I_j \times C$, f appartient au module engendré par les f_i.

Soit, comme au n° 16, I'_j la réunion des intervalles I_l pour $l \leqq j$. Nous allons montrer, par récurrence sur j, que, dans le pavé $I'_j \times C$, f appartient au module engendré par les f_i. Pour $j = p$, ceci établira l'assertion β. Or, pour $j = 1$, on le sait déjà; il reste donc seulement à faire la récurrence sur j.

Supposons donc qu'on ait trouvé des fonctions (scalaires) a_i holomorphes dans $I'_j \times C$, telles que $f = \sum_i a_i f_i$ dans ce pavé. On sait déjà qu'il existe des fonctions (scalaires) b_i holomorphes dans $I_{j+1} \times C$, telles que $f = \sum_i b_i f_i$ dans ce pavé. Dans l'intersection des deux pavés précédents, qui est un pavé r-dimensionnel de la forme C_u, on a $\sum_i c_i f_i = 0$ (en posant $c_i = a_i - b_i$). Ceci nous amène à considérer le faisceau $\mathcal{R}$ des relations entre les f_i (*cf.* n° 6, exemple 2). Ce faisceau est *cohérent* (théorème 1, n° 9). Appliquons à ce faisceau le théorème 3_{r+1} : il existe une famille finie S de systèmes (d_i^m) (m est un indice qui parcourt S), holomorphes dans le pavé $(r+1)$-dimensionnel B, qui y satisfont à $\sum_i d_i^m f_i = 0$ pour chaque $m \in S$, et qui, en chaque point x de B, engendrent le module des relations entre les f_i au point x. Le système (c_i) appartient donc, en chaque point de C_u, au module engendré en ce point par les éléments de S. D'après le théorème 4_r, le système (c_i) appartient, dans le pavé C_u, au module engendré par S; on a donc, dans C_u,

$$c_i = \sum_m \lambda_m d_i^m,$$

où les fonctions (scalaires) λ_m sont holomorphes dans C_u.

Or C_u est un polycylindre compact, intersection des deux polycylindres $I'_j \times C$ et $I_{j+1} \times C$, dont les composantes dans les plans des variables complexes x_k sont les mêmes, sauf pour la première variable x_1. Nous allons alors utiliser un résultat classique ([15]), que nous rappelons sans démonstration :

LEMME 3. — *Soient deux polycylindres compacts* D' *et* D'' *ayant mêmes composantes dans les plans de toutes les variables complexes sauf une. Toute fonction* f *holomorphe dans l'intersection* $D' \cap D''$ *peut se mettre sous la forme* $f' - f''$, *où* f' *est holomorphe dans* D' *et* f'' *holomorphe dans* D''.

Appliquons ce lemme ici. On aura $\lambda_m = \lambda'_m - \lambda''_m$, où λ'_m est holomorphe dans $I'_j \times C$, et λ''_m holomorphe dans $I_{j+1} \times C$. On en déduit

$$c_i = c'_i - c''_i, \qquad \text{en posant} \quad c'_i = \sum_m \lambda'_m d_i^m, \qquad c''_i = \sum_m \lambda''_m d_i^m.$$

Il est maintenant facile de montrer que f appartient, dans le pavé $I'_{j+1} \times C$, réunion de $I'_j \times C$ et de $I_{j+1} \times C$, au module engendré par les fonctions f_i. En effet, dans $I' \times C$, on a

$$f = \sum_i (a_i - c'_i) f_i, \qquad \text{puisque} \quad \sum_i c'_i f_i = 0;$$

dans $I_{j+1} \times C$, on a

$$f = \sum_i (b_i - c''_i) f_i, \qquad \text{puisque} \quad \sum_i c''_i f_i = 0;$$

mais, dans l'intersection C_u des deux pavés précédents, on a

$$a_i - c'_i = b_i - c''_i.$$

On a ainsi, dans la réunion $I'_{j+1} \times C$,

$$f = \sum_i c_i f_i,$$

où la fonction c_i est définie comme étant $a_i - c'_i$ dans $I'_j \times C$, et $b_i - c''_i$ dans $I_{j+1} \times C$. Et ceci achève la démonstration de l'assertion β.

18. Nous allons maintenant tirer des conséquences des théorèmes fondamentaux 3 et 4. Nous les formulerons pour les *polycylindres compacts*, puisque les théorèmes 3 et 4 sont valables (on l'a vu au n° 14) non seulement pour les

([15]) Ce résultat est déjà à la base des démonstrations de COUSIN dans son Mémoire des *Acta Mathematica*, 19, 1895, p. 1-62.

pavés, mais pour les polycylindres compacts (*i.e*: produits d'ensembles compacts et *simplement connexes* dans les plans des variables complexes).

Théorème d'existence et d'unicité. — *Soit* A *un ensemble ouvert et* $\mathcal{F}$ *un* A-*faisceau cohérent. Pour tout polycylindre compact* B *contenu dans* A, *il existe dans* B *un module et un seul qui engendre, en chaque point* x *de* B, *le module* $\mathcal{F}_x$; *ce module est de type fini, et il est identique au module* $\overline{\mathcal{F}}_{B}$ *des fonctions* (*holomorphes dans* B) *qui appartiennent à* $\mathcal{F}_x$ *en tout point de* B. En particulier ce module est $\mathcal{F}_B$ si le faisceau $\mathcal{F}$ est *complet*.

En effet, l'existence d'un module $\mathcal{M}$ engendrant $\mathcal{F}_x$ en chaque point x de B est affirmée par le théorème 3; son unicité résulte du corollaire du théorème 4. Le fait que l'unique module générateur $\mathcal{M}$ est de type fini résulte du théorème 3. Enfin, il est clair que $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{F}}_B$, donc que $\overline{\mathcal{F}}_B$ engendre $\mathcal{F}_x$ en tout point x de B; ceci, grâce à l'unicité, entraîne $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{F}}_B$.

Corollaire. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un module dans un ensemble ouvert* A. *Pour tout polycylindre compact* B *contenu dans* A. *le module* $\mathcal{M}_B$ *engendré par* $\mathcal{M}$ *est de type fini.*

En effet, $\mathcal{M}_B$ engendre, en tout point x de B, le module $\mathcal{M}_x$ engendré par $\mathcal{M}$, et comme le système des $\mathcal{M}_x$ est cohérent, $\mathcal{M}_B$ est de type fini d'après le théorème d'existence et d'unicité.

Théorème 5. — *Soient* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}'$ *deux modules* (*q-dimensionnels*) *de type fini dans un polycylindre compact* B, *et soient* $\mathcal{M}_x$ *et* $\mathcal{M}'_x$ *les modules qu'ils engendrent en un point* x *de* B. *Alors le module-intersection* $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ *est de type fini, et engendre* $\mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}'_x$ *en tout point* x *de* B.

Voici la démonstration de ce théorème. On peut considérer $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ comme des modules dans un *voisinage* ouvert de B. La collection des modules $\mathcal{M}_x$ est cohérente, et de même celle des modules $\mathcal{M}'_x$; d'après le corollaire du théorème 1 (n° 11), la collection des modules $\mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}'_x$ est cohérente. En vertu du théorème d'existence et d'unicité (ci-dessus), le module $\mathcal{N}$ des fonctions (holomorphes dans B) qui appartiennent à $\mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}'_x$ en chaque point x de B est de type fini, et engendre $\mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}'_x$ en tout point x de B. Or, pour que $f \in \mathcal{N}$, il faut et il suffit que : 1° f appartienne à $\mathcal{M}_x$ en tout point $x \in$ B; 2° f appartienne à $\mathcal{M}'_x$ en tout point $x \in$ B. En vertu du théorème 4, ces deux conditions signifient respectivement que f appartient à $\mathcal{M}$ et appartient à $\mathcal{M}'$; ainsi, $\mathcal{N}$ est l'intersection $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$, ce qui démontre le théorème.

19. Le théorème d'existence et d'unicité du numéro précédent va être appliqué maintenant au *faisceau des relations* entre p fonctions holomorphes f_i (n° 6, exemple 2). Puisque ce faisceau est *cohérent* (théorème 1, n° 9), et complet, il vient :

Théorème 6. — *Soient* p *fonctions* $f_1, \ldots, f_p$ *holomorphes dans un polycylindre compact* B (et à valeurs q-dimensionnelles). *Le module des systèmes de* *fonctions scalaires* $c_1, \ldots, c_p$, *holomorphes dans* B, *et tels que* $\sum_i c_i f_i$ *soit nul dans* B (c'est-à-dire dans un voisinage de B), *engendre, en chaque point* x *de* B, *le module des relations entre les* f_i *en ce point* x. C'est l'*unique* module, dans B, qui jouisse de cette propriété.

Appliquons aussi le théorème d'existence et d'unicité au faisceau d'une variété (n° 6, exemple 3). Ce faisceau est *cohérent* (théorème 2, n° 12) et complet. Donc :

THÉORÈME 7. — *Soit* V *une variété analytique dans un ensemble ouvert* A. *Pour tout polycylindre compact* B *contenu dans* A, *il existe dans* B *un idéal* $\mathcal{J}$ *et un seul qui engendre, en chaque point* x *de* B, *l'idéal de la variété* V *en ce point* x. *L'idéal* $\mathcal{J}$ *est de type fini, et c'est l'idéal des fonctions* (holomorphes dans B) *qui s'annulent sur* V_B (notation définie au n° 3). Autrement dit, $\mathcal{J}$ est l'idéal que le faisceau de la variété associe à B.

On peut donc dire, en particulier, qu'une variété analytique dans un ensemble ouvert A peut, dans tout polycylindre compact contenu dans A, être *définie par un nombre fini d'équations* (analytiques dans ce polycylindre).

V. — Fonctions sur une variété.

20. THÉORÈME 8. — *Soit* V *une variété analytique dans un ensemble ouvert* A, *et* f *une fonction holomorphe dans un voisinage de* V. *Pour tout polycylindre compact* B *contenu dans* A, *il existe une fonction* g, *holomorphe dans un voisinage* B′ *de* B, *et telle que* $g - f$ *s'annule en tout point de* $V \cap B'$.

Ce théorème va résulter du théorème suivant [16] :

THÉORÈME 9. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un module* (q-dimensionnel) *dans un polycylindre compact* B, *et soit* $\mathcal{M}_x$ *le module qu'il engendre en un point* x *de* B. *Supposons qu'on ait attaché, à chaque point* x *de* B, *une fonction* (q-dimensionnelle) f_x *holomorphe au point* x, *de manière à satisfaire à la condition suivante : tout point* a *de* B *possède un voisinage ouvert* U *tel qu'il existe une* F *holomorphe dans* U *et congrue à* f_x *modulo* $\mathcal{M}_x$ *en chaque point* x *de* $B \cap U$. *Dans ces conditions, il existe une fonction* g *holomorphe dans* B, *et congrue à* $f(x)$ *modulo* $\mathcal{M}_x$ *en tout point de* B.

Montrons d'abord comment le théorème 8 résulte du théorème 9; après quoi nous prouverons le théorème 9.

Dans les hypothèses du théorème 8, il existe dans B un idéal $\mathcal{J}$ de type fini, qui engendre en tout point x de B l'idéal $\mathcal{J}_x$ de la variété V au point x (*cf.* théorème 7, n° 19). La fonction holomorphe f étant donnée dans un voisinage de V,

---

[16] *Cf.* I. F. A., théorème I, p. 161; et OKA (Mémoire cité dans l'Introduction), § 7, théorème 2.

posons, pour tout point $x \in B$, $f_x = f$ si $x \in V$, $f_x = 0$ si $x \notin V$. On est dans les conditions d'application du théorème 9, et l'existence de la fonction g cherchée en résulte.

Reste à démontrer le théorème 9. Il suffit de faire la démonstration quand B est un *pavé*. On procède par récurrence sur la dimension r du pavé. Pour $r = 0$, c'est trivial. Supposons le théorème vrai pour r, et prouvons-le pour $r+1$. En raisonnant comme pour les théorèmes 3_r et 4_r (nos 15, 16, 17), et en reprenant les notations de leurs démonstrations, on est ramené à prouver ceci : étant donné, dans le pavé $I'_j \times C$, une fonction holomorphe g' qui, en tout point x de ce pavé, soit congrue à f_x modulo $\mathcal{M}_x$, et, dans le pavé $I_{j+1} \times C$, une fonction holomorphe g'' qui, en tout point x de ce pavé, soit congrue à f_x modulo $\mathcal{M}_x$, alors il existe dans le pavé $I'_{j+1} \times C$, réunion des deux précédents, une fonction holomorphe g qui, en tout point x de ce pavé, soit congrue à f_x modulo $\mathcal{M}_x$. Or la différence $g' - g''$ appartient à $\mathcal{M}_x$ en tout point de l'intersection C_u des pavés $I'_j \times C$ et $I_{j+1} \times C$; donc elle appartient au module engendré par $\mathcal{M}$ dans C_u (en vertu du théorème 4). On a ainsi

$$g' - g'' = \sum_i \lambda_i \varphi_i \qquad (\varphi_i \in \mathcal{M},\ \lambda_i \text{ holomorphes dans } C_u).$$

Mais, d'après le lemme 3 (n° 17), on a $\lambda_i = \lambda'_i - \lambda''_i$, où λ'_i est holomorphe dans $I'_j \times C$, et λ''_i holomorphe dans $I_{j+1} \times C$. Alors la fonction g égale à $g' - \sum_i \lambda'_i \varphi_i$ dans $I'_j \times C$, et égale à $g'' - \sum_i \lambda''_i \varphi_i$ dans $I_{j+1} \times C$, répond à la question. La démonstration du théorème 9 est ainsi achevée.

VI. — Fonctions dans un domaine polyédral.

21. Soit D un ensemble *ouvert* non vide de $\mathcal{C}^n$. On sait, et nous rappellerons plus loin (lemme 5), que si D est un « domaine d'holomorphie » [17], D est réunion d'une suite croissante de sous-ensembles compacts, dont chacun est défini comme étant l'ensemble des points x d'un certain sous-ensemble ouvert A de D, qui satisfont à un nombre fini de relations $|\varphi_k(x)| \leq 1$, les φ_k étant des fonctions (scalaires) holomorphes dans D. Les ensembles de ce type ont été considérés pour la première fois par A. Weil (*C. R. Acad. Sc.*, **194**, 1932, p. 1034; et *Math. Ann.*, **111**, 1935, p. 178-182); dans le Mémoire I. F. A., nous leur avons donné le nom de « domaines polyédraux ».

Ici, nous allons appeler de ce nom une classe un peu plus vaste d'ensembles compacts :

Définition. — On appelle *domaine polyédral* tout sous-ensemble P de $\mathcal{C}^n$ défini comme suit : P est l'ensemble (supposé *compact*) des points x d'un ensemble ouvert non vide $A \subset \mathcal{C}^n$ qui satisfont à un nombre fini de relations

$$\varphi_k(x) \in D_k \qquad (1 \leq k \leq p),$$

---

[17] La définition en est rappelée ci-dessous, n° 27.

où les D_k sont des ensembles compacts *simplement connexes* du plan de la variable complexe, et les φ_k des fonctions (scalaires) holomorphes dans A.

Pour la suite, il sera bon d'avoir explicité le :

LEMME 4. — *Tout domaine polyédral* P *possède un* voisinage P′ *qui est encore un domaine polyédral. D'une façon précise, si* P *est défini comme l'ensemble des points x de* A *ouvert tels que* $\varphi_k(x) \in D_k$, *il existe un ensemble ouvert* A′ *contenant* P *et contenu dans* A, *et des voisinages compacts* D'_k *des* D_k *respectivement, tels que l'ensemble* P′ *des points x de* A′ *satisfaisant à* $\varphi_k(x) \in D'_k$ *soit* compact.

Nous laissons au lecteur la démonstration, facile, de ce lemme, qui a un caractère purement topologique et fait intervenir seulement la *continuité* des fonctions φ_k.

22. Nous allons maintenant montrer que, en gros, un domaine polyédral peut être assimilé à une *variété analytique dans un polycylindre compact* d'un espace à un plus grand nombre de dimensions ([18]).

Considérons l'espace $\mathcal{C}^{n+p}$ où les coordonnées (complexes) sont $x_j (1 \leqq j \leqq n)$ et $y_k (1 \leqq k \leqq p)$. A chaque point $x = (x_j)$ de l'ensemble ouvert $A \subset \mathcal{C}^n$, associons le point $[x_j, y_k = \varphi_k(x)]$ de $\mathcal{C}^{n+p}$; on définit ainsi une application analytique φ de A dans $\mathcal{C}^{n+p}$. Elle applique biunivoquement A sur un sous-ensemble V de $\mathcal{C}^{n+p}$. Soit alors B le polycylindre compact de $\mathcal{C}^{n+p}$ défini par

$$|x_j| \leqq r, \qquad y_k \in D_k,$$

où r est choisi assez grand pour que P soit contenu dans $|x_j| \leqq r$. L'application φ transforme P dans $V \cap B$; comme P est compact, $V \cap B$ est compact, donc *fermé* dans $\mathcal{C}^{n+p}$. De plus, au voisinage de chacun de ses points, l'ensemble $V \cap B$ est défini par des équations analytiques $y_k = \varphi_k(x)$.

On peut dire la même chose pour le domaine polyédral P′ dont parle le lemme 4. On en déduit aussitôt que l'élément V_B de $\mathfrak{V}_B$ défini par V est une *variété analytique dans* B (*cf.* n° 3). Autrement dit, il existe un *voisinage ouvert* B′ de B, tel que $V \cap B'$ soit une variété analytique dans B′.

Considérons alors une fonction holomorphe dans le domaine polyédral P. Elle provient d'une fonction $f(x)$ holomorphe dans un voisinage P′ de P. Nous allons lui associer une fonction holomorphe au voisinage de $V \cap B$ (dans l'espace $\mathcal{C}^{n+p}$) : à savoir, celle qui est égale à $f(x)$ en tout point (x, y) suffisamment voisin de $V \cap B$ pour que x soit dans P′. Appliquons maintenant le théorème 8 (n° 20) : il existe une fonction $g(x, y)$ holomorphe dans un voisinage B′ du polycylindre B, et égale à $f(x)$ en tout point (x, y) de $V \cap B'$. D'où le :

THÉORÈME 10 ([19]). — *Soit donné un domaine polyédral* P *défini, dans l'espace* (x), *par des relations*

$$x \in A, \qquad \varphi_k(x) \in D_k \qquad (1 \leqq k \leqq p)$$

([18]) Idée due à Oka, comme il est dit dans l'Introduction.

([19]) Déjà démontré dans I. F. A., § X, p. 185.

(où A est ouvert, les φ_k sont holomorphes dans A, et les D_k sont compacts et simplement connexes). *Pour une fonction $f(x)$ holomorphe au voisinage de* P, *il existe une fonction $g(x, y_k)$ holomorphe au voisinage du polycylindre*

$$|x_j| \leq r, \qquad y_k \in D_k$$

(r étant assez grand pour que P soit contenu dans $|x_j| \leq r$), *et telle que l'on ait identiquement, dans un voisinage de* P,

$$g[x, \varphi_k(x)] = f(x).$$

Corollaire. — *Toute fonction holomorphe dans le domaine polyédral* P *est limite uniforme, dans* P, *de polynomes par rapport aux x_j et aux $\varphi_k(x)$* [théorème de Weil-Oka ([20])].

En effet, dans le polycylindre B, $g(x, y)$ est limite uniforme de polynomes en x_j et y_k, puisque les composantes D_k sont simplement connexes.

VII. — Idéaux et modules dans un domaine polyédral.

23. Nous conservons les notations des n^{os} 21 et 22.

Un module $\mathfrak{M}$ dans le polycylindre B définit un module dans le domaine polyédral P, module que nous noterons $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{M})$: il se compose, par définition, des restrictions à $V \cap B$ des fonctions de $\mathfrak{M}$ ($V \cap B$ étant identifié à P); autrement dit, les fonctions de $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{M})$ sont les fonctions de la forme $g(x, \varphi_k(x))$, où g parcourt le module $\mathfrak{M}$. Inversement, un module $\mathfrak{N}$ dans P définit un module dans B, noté $\varphi(\mathfrak{N})$: le module des fonctions dont la restriction à $V \cap B$ appartient à $\mathfrak{N}$; autrement dit, le module des $g(x, y_k)$ (holomorphes dans B) telles que $g(x, \varphi_k(x))$ appartienne à $\mathfrak{N}$. On a $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(\mathfrak{N})) = \mathfrak{N}$, en vertu du théorème 10.

De même pour les *modules ponctuels :* un module $\mathfrak{M}_{(a,b)}$ en un point (a, b) de B, tel que $b_k = \varphi_k(a)$ [ce qui exprime que le point (a, b) appartient à V] définit un module au point $a \in$ P : le module, noté $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{M}_{(a,b)})$, des fonctions $g(x, \varphi_k(x))$, où g parcourt $\mathfrak{M}_{(a,b)}$. Inversement, un module $\mathfrak{N}_a$ en un point a de P définit un module, noté $\varphi(\mathfrak{N}_a)$, au point $(a, \varphi_k(a))$ de B : le module de toutes les fonctions $g(x, y_k)$ telles que $g(x, \varphi_k(x))$ appartienne à $\mathfrak{N}_a$. Il est clair que $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(\mathfrak{N}_a)) = \mathfrak{N}_a$.

Grâce aux correspondances précédentes, tous les théorèmes des paragraphes IV et V (théorèmes 3 à 9) vont pouvoir être étendus au cas où le polycylindre compact B de ces théorèmes est remplacé par un *domaine polyédral.* Commençons par généraliser le théorème 3.

---

[20] *Cf.* I. F. A., p. 185.

Théorème 3 *bis*. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent dans un voisinage ouvert d'un domaine polyédral* P. *Il existe dans* P *un module de type fini, qui engendre $\mathcal{F}$ en chaque point x de* P.

Définissons en effet une collection de modules ponctuels $\mathcal{G}_{(x,y)}$ aux points (x, y) d'un voisinage de B, de la façon suivante : si $(x, y) \in$ V, $\mathcal{G}_{(x,y)}$ sera $\varphi(\mathcal{F}_x)$ (notation expliquée ci-dessus); et si $(x, y) \in$ V, $\mathcal{G}_{(z,y)}$ sera le module de toutes les fonctions (q-dimensionnelles) holomorphes au point (x, y). On vérifie immédiatement que la collection des $\mathcal{G}_{(x,y)}$ est cohérente ([21]). Appliquons-lui le théorème 3 : il existe dans B un module $\mathcal{G}$ de type fini, qui engendre $\mathcal{G}_{(x,y)}$ en chaque point (x, y) de B. Le module $\overset{-1}{\varphi}(\mathcal{G})$ est un module de type fini dans P, et ce module engendre $\mathcal{F}_x$ en chaque point x de P, ce qui démontre le théorème.

24. Voici maintenant comment se généralise le théorème 4 :

Théorème 4 *bis*. — *Soit $\mathcal{M}$ un module dans un domaine polyédral* P; *si une fonction f holomorphe dans* P *appartient, en chaque point x de* P, *au module $\mathcal{M}_x$ engendré par $\mathcal{M}$ en ce point, alors f appartient au module $\mathcal{M}$.*

Considérons en effet le module $\varphi(\mathcal{M})$. En un point de B non situé sur V, il engendre le module de *toutes* les fonctions (q-dimensionnelles) holomorphes en ce point; cela tient à ce que l'idéal de la variété V dans B engendre l'idéal-unité en un point non situé sur V, en vertu du théorème 7 (n° 19). D'autre part, en un point (x, y) de B $\cap$ V, le module $\varphi(\mathcal{M})$ engendre le module $\varphi(\mathcal{M}_x)$. Pour qu'une fonction g holomorphe dans B appartienne, en chaque point de B, au module engendré par $\varphi(\mathcal{M})$ en ce point, il suffit donc que, pour chaque point x de P, g appartienne au module $\varphi(\mathcal{M}_x)$. Cette condition entraîne alors que g appartient au module $\varphi(\mathcal{M})$, d'après le théorème 4.

Cela étant, soit f holomorphe dans P, et appartenant à $\mathcal{M}_x$ en chaque point x de P. Prenons une $g(x, y)$ holomorphe dans B, et telle que $g(x, \varphi_k(x)) = f(x)$, ce qui est possible d'après le théorème 10. Alors g appartient à $\varphi(\mathcal{M}_x)$ en tout point x de P. D'après ce qu'on vient de voir, il s'ensuit que g appartient à $\varphi(\mathcal{M})$. Or ceci exprime que f appartient au module $\mathcal{M}$. c. q. f. d.

25. Voici comment se généralise le théorème 9 du n° 20 :

Théorème 9 *bis*. — *Soit $\mathcal{M}$ un module dans un domaine polyédral* P, *et soit $\mathcal{M}_x$ le module qu'il engendre en un point x de* P. *Supposons qu'on ait attaché à chaque point x de* P *une fonction f_x holomorphe au point x, de manière à satisfaire à la condition suivante : tout point a de* P *possède un*

([21]) Prenons en effet un système fini de fonctions f_i engendrant le module $\mathcal{F}_a$ attaché à un point a; posons $g_i(x, y) = f_i(x)$ au voisinage de (a, b) tel que $b_k = \varphi_k(a)$. Au système des g_i ainsi définies, adjoignons un système fini de générateurs du module des fonctions q-dimensionnelles (q désigne la dimension de l'espace des valeurs des fonctions du faisceau $\mathcal{F}$) qui s'annulent sur V au voisinage du point (a, b). On obtient ainsi un système fini de fonctions qui engendre $\mathcal{G}_{(x,y)}$ en tout point (x, y) suffisamment voisin de (a, b).

voisinage ouvert U *tel qu'il existe une fonction* F *holomorphe dans* U *et congrue à* f_x *modulo* $\mathcal{M}_x$ *en chaque point* x *de* $\mathrm{P} \cap \mathrm{U}$. *Dans ces conditions, il existe une fonction* g *holomorphe dans* P, *et congrue à* f_x *modulo* $\mathcal{M}_x$ *en chaque point* x *de* P.

En effet, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 3 *bis* (n° 23), il existe dans B un module $\mathcal{G}$ qui, en tout point (a, b) de B non situé sur V, engendre le module de toutes les fonctions (q-dimensionnelles) holomorphes en ce point, et, en tout point $(a, b) \in \mathrm{B} \cap \mathrm{V}$, engendre le module $\varphi(\mathcal{M}_a)$. D'autre part, pour chaque point $a \in \mathrm{P}$, soit (a, b) le point correspondant de V dans B [défini par $b_k = \varphi_k(a)$], et soit $h_{(a,b)}$ la fonction, holomorphe au point (a, b), définie par $h_{(a,b)}(x, y) = f_a(x)$. Si (a, b) est un point de B non situé sur V, posons $h_{(a,b)} = 0$.

Cela dit, le module $\mathcal{G}$ dans le polycylindre B, et la collection des fonctions $h_{(a,b)}$ attachées aux points de B, satisfont aux conditions du théorème 9 (n° 20). Appliquons-leur ce théorème : il existe une fonction $\mathrm{H}(x, y)$ holomorphe dans B, et qui, en chaque point (a, b) de B, est congrue à $h_{(a,b)}$ modulo le module engendré par $\mathcal{G}$ en ce point. Alors $\mathrm{H}(x, \varphi_k(x)) = g(x)$ est une fonction holomorphe dans P, et, en tout point a de P, elle est congrue à f_a modulo $\mathcal{M}_a$.

C. Q. F. D.

26. Toutes les conséquences que nous avons tirées des théorèmes 3, 4 et 9 aux paragraphes IV et V, nous allons pouvoir les tirer maintenant de leurs généralisations (théorèmes 3 *bis*, 4 *bis* et 9 *bis* qui viennent d'être démontrés). Nous nous bornerons à donner les énoncés :

Théorème d'existence et d'unicité. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau cohérent dans un voisinage d'un domaine polyédral* P. *Il existe dans* P *un module et un seul qui engendre, en chaque point* x *de* P, *le module* $\mathcal{F}_x$; *ce module est de type fini, et il est identique au module* $\overline{\mathcal{F}_{\mathrm{P}}}$ *des fonctions (holomorphes dans* P) *qui appartiennent à* $\mathcal{F}_x$ *en tout point* x *de* P. *En particulier, ce module est* $\mathcal{F}_{\mathrm{P}}$ *si le faisceau* $\mathcal{F}$ *est complet.*

Corollaire. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un module dans un voisinage d'un domaine polyédral* P. *Le module engendré par* $\mathcal{M}$ *dans* P *est de type fini.*

Théorème 5 *bis*. — *Soient* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}'$ *deux modules (q-dimensionnels) de type fini dans un domaine polyédral* P, *et soient* $\mathcal{M}_x$ *et* $\mathcal{M}'_x$ *les modules qu'ils engendrent en un point* x *de* P. *Alors le module-intersection* $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ *est de type fini, et engendre* $\mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}'_x$ *en tout point* x *de* P.

Théorème 6 *bis*. — *Soient* p *fonctions* $f_1, \ldots, f_p$ *holomorphes dans un domaine polyédral* P (et à valeurs q-dimensionnelles). *Le module des systèmes de fonctions scalaires* $c_1, \ldots, c_p$ *holomorphes dans* P, *et tels que* $\sum_i c_i f_i$ *soit nul au voisinage de* P, *engendre, en chaque point* x *de* P, *le module des relations entre les* f_i *en ce point* x. C'est l'*unique* module, dans P, qui jouisse de cette propriété.

THÉORÈME 7 *bis.* — *Soit* V *une variété analytique dans un voisinage d'un domaine polyédral* P. *Il existe dans* P *un idéal* $\mathfrak{I}$ *et un seul qui engendre, en chaque point* x *de* P, *l'idéal de la variété* V *en ce point* x. *L'idéal* $\mathfrak{I}$ *est de type fini, et c'est l'idéal des fonctions* (holomorphes dans P) *qui s'annulent sur* V_P (notation définie au n° 3). Autrement dit, $\mathfrak{I}$ est l'idéal que le *faisceau de la variété* V associe à l'ensemble P.

THÉORÈME 8 *bis.* — *Soit* V *une variété analytique dans un voisinage d'un domaine polyédral* P, *et* f *une fonction holomorphe au voisinage de* V. *Il existe une fonction* g, *holomorphe dans un voisinage* P' *de* P, *et telle que* $g-f$ *s'annule en tout point de* $V \cap P'$.

Remarque. — Tous les énoncés précédents valent si l'on y remplace P par un ensemble de la forme

$$x_j \in D_j,$$

où D_j est un ensemble *compact* du plan de la variable x_j, qui n'est plus astreint (comme c'était le cas aux paragraphes IV et V) à être simplement connexe. En effet, tout voisinage d'un tel ensemble D contient un domaine polyédral contenant D, comme l'on s'en convainc aisément. Ainsi, il se trouve *a posteriori* que *les hypothèses de simple connexion que nous avions dû faire pour les démonstrations des théorèmes* 3 *à* 9 *peuvent être levées sans que les conclusions cessent d'être valables.*

VIII. — Idéaux et modules dans un domaine d'holomorphie.

27. Tous les théorèmes obtenus jusqu'à présent se rapportent aux idéaux et modules considérés dans des ensembles *compacts* d'une nature particulière. Nous allons maintenant envisager des ensembles *ouverts*; nous nous bornerons aux *domaines d'holomorphie*, ce qui est une restriction assez naturelle.

Nous allons voir comment les théorèmes 3 à 9 s'étendent à ces ensembles ouverts; il est d'ailleurs peu probable qu'ils soient valables pour des ensembles ouverts qui ne seraient pas des domaines d'holomorphie.

Rappelons ce qu'on entend par « domaine d'holomorphie » (« Regularitätsbereich ») : c'est un ensemble ouvert $D \subset \mathcal{C}^n$, tel qu'il existe une fonction holomorphe dans D et n'admettant de prolongement analytique dans aucun ensemble ouvert strictement plus grand que D. Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 5. — *Soit* D *un domaine d'holomorphie; alors* D *est réunion d'une suite croissante de domaines polyédraux* (*compacts*) $P_j (j=1, 2, \ldots)$ *tels que* : 1° *tout compact de* D *soit contenu dans un des* P_j; 2° *toute fonction holomorphe dans un quelconque de ces* P_j *soit limite uniforme, dans* P_i, *de fonctions holomorphes dans* D.

Pour le prouver, nous admettrons ([22]) que D est limite d'une suite croissante de sous-ensembles *compacts* D_j telle que tout compact de D soit contenu dans un des D_j, chacun de ces D_j jouissant de la propriété suivante : pour tout point y de D n'appartenant pas à D_j, il existe une fonction φ holomorphe dans D et satisfaisant à

$$|\varphi(y)| > 1, \qquad |\varphi(x)| \leqq 1, \qquad \text{pour tout } x \in D_j.$$

On peut évidemment supposer que D_j est contenu dans l'*intérieur* de D_{j+1}; alors il existe un domaine polyédral P_j contenant D_j et contenu dans D_{j+1} : ce sera l'ensemble des points de l'intérieur de D_{j+1} qui satisferont à un nombre fini de relations de la forme

$$|\varphi_k(x)| \leqq 1,$$

où les φ_k sont holomorphes dans D_{j+1}, et même dans D.

Ainsi D est réunion de la suite croissante des domaines polyédraux P_j. En outre, si f est une fonction holomorphe dans P_j, alors, d'après le corollaire du théorème 10 (n° 22), f est, dans P_j, limite uniforme de polynomes par rapport aux variables x et aux fonctions $\varphi_k(x)$, donc limite uniforme de fonctions holomorphes dans D. Ceci achève la démonstration du lemme 5.

Corollaire du lemme 5. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un module dans un domaine d'holomorphie* D; *pour tout ensemble compact* K *contenu dans* D, *le module* $\mathcal{M}_K$ *engendré par* $\mathcal{M}$ *dans* K est de type fini.

En effet, l'un des domaines polyédraux P_j contient K. Le module engendré par $\mathcal{M}$ dans P_j est de type fini (n° 25, corollaire du théorème d'existence et d'unicité), et ce module engendre $\mathcal{M}_K$ dans K.

28. Nous aurons aussi besoin d'une propriété importante des *modules ponctuels*, que nous rappelons ici sans démonstration ([23]).

Lemme 6. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un module en un point a. Si une fonction f holomorphe dons un voisinage* U *de a est limite uniforme, dans* U, *de fonctions holomorphes dans* U *et appartenant au module* $\mathcal{M}$ *au point a, alors f appartient à* $\mathcal{M}$ *au point a.*

Corollaire du lemme 6. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un module dans un* domaine polyédral P. *Si une fonction f holomorphe dans* P *est, dans un voisinage* U *de* P, *limite*

([22]) Voici brièvement pourquoi il en est ainsi. Soit, pour chaque $\varepsilon > 0$, A_ε l'ensemble des points de D tels que la boule ouverte de rayon ε, centrée en ce point, soit contenue dans D; l'ensemble A_ε est fermé. Soit d'autre part B_r la boule fermée de centre origine et de rayon r. Pour ε assez petit, et r assez grand, $A_\varepsilon \cap B_r$ est un ensemble *compact* C non vide, contenu dans D. Pour tout point $y \notin C$ tel que $y \in D$, il existe une φ holomorphe dans D et telle que $|\varphi(y)| > 1$, $|\varphi(x)| \leqq 1$ pour tout $x \in C$. Car si $y \notin B_r$, il existe une fonction *linéaire* φ telle que $|\varphi(y)| > 1$, $|\varphi(x)| \leqq 1$ pour $x \notin B_r$; et si $y \notin A_\varepsilon$, l'existence de φ résulte d'un théorème de P. Thullen (*voir* Cartan-Thullen, *Math. Annalen*, 106, 1932, p. 617-647), que l'on pourra trouver dans le livre de Bochner et Martin déjà cité (p. 86, theorem 3).

([23]) *Voir* I. F. A., p. 194, « premier corollaire ».

uniforme de fonctions holomorphes dans U *et appartenant à* $\mathcal{M}$, *alors* f *appartient à* $\mathcal{M}$.

En effet, en chaque point x de P, f appartient au module $\mathcal{M}_x$ engendré par $\mathcal{M}$, d'après le lemme 6. Or ceci entraîne que f appartient à $\mathcal{M}$, en vertu du théorème **4** *bis* (n^o 24).

29. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer des théorèmes analogues aux théorèmes **3** à **9** pour les domaines d'holomorphie. Commençons par le théorème 3. Nous considérons un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ dans un domaine d'holomorphie D. Pour chacun des domaines polyédraux P_j que le lemme 5 lui associe, il existe dans P_j un module et un seul qui engendre $\mathcal{F}_x$ en chaque point x de P_j (*cf.* n^o 25, théorème d'existence et d'unicité); notons $\mathcal{M}_j$ ce module, qui se compose des fonctions (holomorphes dans P_j) qui appartiennent à $\mathcal{F}_x$ en tout point x de P_j. Désignons en outre par $\mathcal{M}$ le module des fonctions *holomorphes dans* D, et qui appartiennent à $\mathcal{F}_x$ en chaque point x de D. Nous allons montrer que *le module* $\mathcal{M}$ *engendre* $\mathcal{F}_x$ *en chaque point* x *de* D, d'où il résultera d'ailleurs que $\mathcal{M}$ engendre $\mathcal{M}_j$ dans P_j.

Or soit $\mathcal{G}_x$ le module engendré par $\mathcal{M}$ au point x; il est évident que $\mathcal{G}_x \subset \mathcal{F}_x$, et il suffit donc de montrer que si une fonction f appartient à $\mathcal{F}_x$, elle appartient à $\mathcal{G}_x$. D'après le lemme 6 appliqué au module ponctuel $\mathcal{G}_x$, il suffit de montrer que f est limite uniforme, dans un voisinage de x, de fonctions de $\mathcal{M}$. C'est ce que nous allons prouver maintenant.

Soit j assez grand pour que le point x soit intérieur à P_j. Puisque $\mathcal{M}_j$ engendre $\mathcal{F}_x$ au point x, on a, au voisinage du point x,

$$f = \sum_i c_i f_i,$$

où les f_i appartiennent à $\mathcal{M}_j$, et les c_i sont holomorphes au voisinage de x. Il suffira de montrer que chaque f_i est, dans P_j, limite uniforme de fonctions de $\mathcal{M}$.

Soit donc à nouveau g une fonction de $\mathcal{M}_j$, et soit à approcher g uniformément, dans P_j, par des fonctions de $\mathcal{M}$. D'après le théorème d'existence et d'unicité du n^o 25, g appartient au module engendré dans P_j par le module $\mathcal{M}_{j+1}$, et peut donc s'écrire

$$g = \sum_i d_i g_i,$$

où les g_i appartiennent à $\mathcal{M}_{j+1}$, et les d_i sont holomorphes dans P_j. D'après le lemme 5, les d_i sont limites uniformes, dans P_j, de fonctions holomorphes dans D; donc g est limite uniforme, dans P_j, de fonctions de $\mathcal{M}_{j+1}$. Chacune d'elles est à son tour, pour la même raison, limite uniforme, dans P_{j+1}, de fonctions de $\mathcal{M}_{j+2}$, et ainsi de suite. Étant donné la fonction g de $\mathcal{M}_j$, et une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p, \ldots$ de somme arbitrairement petite, on pourra trouver des fonctions $g_1 \in \mathcal{M}_{j+1}, \ldots, g_p \in \mathcal{M}_{j+p}, \ldots$ telles que

$$|g - g_1| \leq \varepsilon_1 \quad \text{dans } P_j, \quad \ldots, \quad |g_p - g_{p+1}| \leq \varepsilon_{p+1} \quad \text{dans } P_{j+p}, \quad \ldots.$$

Il existe une fonction *h holomorphe dans* D, et qui, sur tout compact contenu dans D, est limite uniforme de la suite des g_p; dans P_j, on a $|g-h| \leq \varepsilon$. D'après le lemme 6, h appartient à $\mathcal{F}_x$ en chaque point x de D, c'est-à-dire h appartient au module $\mathcal{M}$. Ce qui achève la démonstration.

On a ainsi démontré que le module $\mathcal{M}$ engendre $\mathcal{F}_x$ en chaque point x de D: d'où le :

Théorème 3 *ter*. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau cohérent dans un domaine d'holomorphie* D. *Il existe dans* D *un module qui engendre* $\mathcal{F}_x$ *en chaque point* x *de* D.

30. Y a-t-il un théorème analogue aux théorèmes 4 et 4 *bis*, qui assurerait l'*unicité* du module engendrant les modules ponctuels d'un faisceau cohérent dans D, lorsque D est un domaine d'holomorphie ? Un exemple très simple va montrer qu'une telle unicité n'a plus lieu. Prenons une seule variable complexe x, et soit D le plan entier à distance finie; considérons l'idéal $\mathcal{J}$ engendré, dans D, par les fonctions

$$f_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad f_1(x) = \frac{\sin x}{x}(1-x^2)^{-1}, \qquad \ldots,$$
$$f_p(x) = \frac{\sin x}{x} \prod_{1 \leq k \leq p} \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}, \qquad \ldots.$$

L'idéal $\mathcal{J}$ se compose des fonctions (holomorphes dans tout le plan) qui s'annulent pour toutes les valeurs entières de x *sauf un nombre fini*. La constante *un*, qui appartient à l'idéal $\mathcal{J}_x$ engendré par $\mathcal{J}$ en tout point x, n'appartient cependant pas à $\mathcal{J}$. Ceci montre qu'il n'y a pas de théorème analogue au théorème 4 *bis*, tout au moins si l'on ne fait pas de restrictions convenables.

Introduisons la notion suivante : $\mathcal{M}$ étant un module dans un ensemble *ouvert* D, on désignera par $\tilde{\mathcal{M}}$ le module des fonctions (holomorphes dans D) qui sont, sur tout compact contenu dans D, limites uniformes de fonctions de $\mathcal{M}$. Ce module $\tilde{\mathcal{M}}$ se nommera l'*adhérence* du module $\mathcal{M}$; un module $\mathcal{M}$ sera dit *fermé* s'il est identique à son adhérence. Remarquons tout de suite que, *sur tout domaine polyédral* P *contenu dans* D, *les modules* $\mathcal{M}$ *et* $\tilde{\mathcal{M}}$ *engendrent le même module* : c'est une conséquence immédiate du corollaire du lemme 6 (n° 28).

L'exemple précédent montre qu'*il existe des modules non fermés* : en effet, la constante *un* appartient à l'adhérence du module $\mathcal{J}$ ci-dessus.

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème analogue aux théorèmes 4 et 4 *bis* :

Théorème 4 *ter*. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un module dans un domaine d'holomorphie* D. *Si une fonction f holomorphe dans* D *appartient, en chaque point* x *de* D, *au module* $\mathcal{M}_x$ *engendré par* $\mathcal{M}$, *alors f appartient à l'adhérence du module* $\mathcal{M}$. En particulier, si $\mathcal{M}$ est *fermé*, on peut conclure que *f appartient à* $\mathcal{M}$.

Démonstration. — Sur chacun des domaines polyédraux P_j, f appartient au module engendré par $\mathcal{M}$, d'après le théorème 4 *bis*; donc f est limite uniforme, dans P_j, de fonction de $\mathcal{M}$.

COROLLAIRE. — *Si deux modules fermés $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, dans un domaine d'holomorphie* D, *engendrent, en chaque point x de* D, *des modules $\mathcal{M}_x$ et $\mathcal{M}'_x$ égaux, ils sont identiques.*

31. Voici maintenant les analogues des théorèmes 5, 6 et 7. Mais d'abord, les théorèmes 3 *ter* et 4 *ter* entraînent :

THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent dans un domaine d'holomorphie* D. *Il existe dans* D *un module fermé et un seul qui engendre, en chaque point x de* D, *le module $\mathcal{F}_x$; c'est le module des fonctions (holomorphes dans* D) *qui appartiennent à $\mathcal{F}_x$ en chaque point x de* D.

THÉORÈME 5 *ter*. — *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux modules fermés (q-dimensionnels) dans un domaine d'holomorphie* D, *et soient $\mathcal{M}_x$ et $\mathcal{M}'_x$ les modules qu'ils engendrent en un point x de* D. *Alors le module-intersection $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ est fermé, et engendre $\mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}'_x$ en chaque point x de* D.

Le fait que $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ est fermé est trivial. La collection des modules ponctuels $\mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}'_x$ est cohérente (n° 11, corollaire du théorème 1); donc (théorème d'existence et d'unicité) il existe un module fermé $\mathcal{N}$ qui engendre $\mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}'_x$ en chaque point x de D : c'est le module des fonctions (q-dimensionnelles) qui appartiennent à $\mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}'_x$ en chaque point x de D. Pour que f appartienne à $\mathcal{N}$, il faut et il suffit que $f \in \mathcal{M}_x$ pour tout x, et $f \in \mathcal{M}'_x$ pour tout x; d'après le théorème 4 *ter*, ceci exprime que $f \in \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}'$. Donc $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 6 *ter*. — *Soient p fonctions $f_1, \dots, f_p$ holomorphes dans un domaine d'holomorphie* D (et à valeurs q-dimensionnelles). *Le module des systèmes de fonctions scalaires $c_1, \dots, c_p$ holomorphes dans* D, *et tels que $\sum_i c_i f_i$ soit nul dans* D, *engendre, en chaque point x de* D, *le module des relations entre les f_i en ce point*. C'est l'*unique* module *fermé*, dans D, qui jouisse de cette propriété.

Ce théorème est une conséquence du théorème d'existence et d'unicité, appliqué au faisceau des relations entre les f_i, faisceau qui est cohérent. On remarquera que *le module des relations entre les f_i dans* D *engendre, dans chaque domaine polyédral* P *contenu dans* D, *le module des relations entre les f_i dans* P. Cela résulte de la confrontation des théorèmes 6 *ter* et 6 *bis*.

THÉORÈME 7 *ter*. — *Soit* V *une variété analytique dans un domaine d'holomorphie* D. *Il existe dans* D *un idéal fermé $\mathcal{I}$ et un seul qui engendre, en* *chaque point x de* D, *l'idéal de* V *au point x; c'est l'idéal des fonctions* (holomorphes dans D) *qui s'annulent sur* V.

On obtient ce théorème en appliquant le théorème d'existence et d'unicité au faisceau de la variété V, faisceau qui est cohérent.

Corollaire. — *Les fonctions qui s'annulent sur* V *n'ont pas d'autre zéro commun que les points de* V.

32. Avant d'aller plus loin, on peut se demander s'il n'existe pas de critère simple permettant d'affirmer qu'un module, dans un domaine d'holomorphie D, est *fermé*. A ce propos, nous allons démontrer ce qui suit :

Théorème 11. — *Tout module de type fini, dans un domaine d'holomorphie, est fermé.*

(Remarquons que ceci entraîne que l'idéal $\mathcal{J}$ donné en exemple au n° 30 *n'est pas de type fini*, comme il serait d'ailleurs facile de le prouver directement).

Soit $\mathcal{M}$ un module engendré par des fonctions $f_1, \ldots, f_p$ holomorphes dans le domaine d'holomorphie D; D est réunion d'une suite croissante de domaines polyédraux P_j, comme il est dit au lemme 5. Soit g une fonction de l'adhérence $\bar{\mathcal{M}}$; on veut montrer que g appartient à $\mathcal{M}$. Or la restriction de g à P_j appartient au module engendré par $\mathcal{M}$, et l'on a donc, dans P_j,

$$g = \sum_i c_i^j f_i \qquad (\text{les } c_i^j \text{ étant holomorphes dans } P_j).$$

De même, on a

$$g = \sum_i c_i^{j+1} f_i \quad \text{dans } P_{j+1}.$$

Dans P_j, on a

$$\sum_i (c_i^{j+1} - c_i^j) f_i = 0,$$

donc le système des $(c_i^{j+1} - c_i^j)$ appartient, dans P_j, au module des relations entre les f_i. D'après le théorème 6 *ter*, le système des $(c_i^{j+1} - c_i^j)$ est combinaison linéaire, à coefficients holomorphes dans P_j, d'éléments du module des relations entre les f_i *dans* D. En approchant les coefficients de cette combinaison par des fonctions holomorphes dans D (lemme 5), on voit que le système $(c_i^{j+1} - c_i^j)$ est limite uniforme, dans P_j, de systèmes (d_i) holomorphes dans D, et tels que $\sum_i d_i f_i = 0$ dans D.

Posons $\bar{c}_i^{j+1} = c_i^{j+1} - d_i$; on a $g = \sum_i \bar{c}_i^{j+1} f_i$ dans P_{j+1}, et l'on peut supposer les d_i choisis de manière que $\bar{c}_i^{j+1} - c_i^j$ soit arbitrairement petit dans P_j. De là il résulte que l'on peut attacher à chaque P_j un système (a_i^j) holomorphe dans P_j, de manière que

$$g = \sum_i a_i^j f_i \quad \text{dans } P_j, \qquad |a_i^{j+1} - a_i^j| \leq 2^{-j} \quad \text{dans } P_j.$$

Pour chaque $i (1 \leq i \leq p)$, la suite des a_i converge, uniformément sur tout compact de D, vers une fonction a_i holomorphe dans D. On aura évidemment

$$g = \sum_i a_i f_i \quad \text{dans D},$$

par passage à la limite. Ainsi g appartient au module $\mathfrak{M}$. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Étant données p fonctions (scalaires) f_i holomorphes dans un domaine d'holomorphie* D, *et sans zéro commun dans* D, *il existe dans* D *une identité* $\sum_i a_i f_i = 1$, *où les a_i sont holomorphes dans* D.

33. Il nous reste à donner, pour les domaines d'holomorphie, deux théorèmes analogues aux théorèmes 8 et 9.

Théorème 8 *ter*. — *Soit* V *une variété analytique dans un domaine d'holomorphie* D, *et f une fonction holomorphe au voisinage de* V. *Il existe une fonction g, holomorphe dans* D, *et égale à f en tout point de* D.

Ce théorème va résulter du suivant :

Théorème 9 *ter*. — *Soit $\mathfrak{M}$ un module* (q-dimensionnel) *dans un domaine d'holomorphie* D, *et soit $\mathfrak{M}_x$ le module qu'il engendre en un point x de* D. *Supposons qu'on ait attaché, à chaque point x de* D, *une fonction* (q-dimensionnelle) *f_x holomorphe au point x, de manière à satisfaire à la condition suivante : tout point a de* D *possède un voisinage ouvert* U *tel qu'il existe une fonction* F *holomorphe dans* U *et congrue à f_x modulo $\mathfrak{M}_x$ en chaque point x de* U. *Dans ces conditions, il existe une fonction g holomorphe dans* D, *et congrue à f_x modulo $\mathfrak{M}_x$ en chaque point x de* D.

Montrons d'abord comment le théorème 8 *ter* résulte du théorème 9 *ter*; après quoi nous prouverons le théorème 9 *ter*.

Dans les hypothèses du théorème 8 *ter*, il existe dans D un idéal $\mathfrak{J}$ qui engendre, en chaque point x de D, l'idéal $\mathfrak{J}_x$ de la variété V au point x (théorème 7 *ter*). La fonction holomorphe f étant donnée dans un voisinage de V, posons, pour tout point x de D, $f_x = f$ si $x \in V$, $f_x = 0$ si $x \notin V$. On est dans les conditions d'application du théorème 9 *ter*, et l'existence de la fonction cherchée g en résulte.

Reste à démontrer le théorème 9 *ter*. Reprenons les domaines polyédraux P_j que le lemme 5 associe au domaine d'holomorphie D. Dans les hypothèses du théorème 9 *ter*, on sait déjà, grâce au théorème 9 bis, qu'il existe une fonction h_j holomorphe dans P_j, et qui, en chaque point x de P_j, est congrue à f_x modulo $\mathfrak{M}_x$.

Une telle h_j est déterminée à l'addition près d'une fonction du module engendré par $\mathfrak{M}$ dans P_j (d'après le théorème 4 *bis*). On va profiter de cette circonstance pour remplacer les h_j par des g_j jouissant des mêmes propriétés, et satisfaisant en outre aux conditions : $|g_{j+1} - g_j| \leq 2^{-j}$ dans P_j. Montrons ceci par récurrence sur j : g_j étant déjà choisie, la différence $h_{j+1} - g_j$ appartient au module engendré par $\mathfrak{M}$ dans P_j, donc est limite uniforme, dans P_j, de fonctions du module $\mathfrak{M}$ lui-même. Si a est une fonction de $\mathfrak{M}$, telle que $|h_{j+1} - h_j - a| \leq 2^{-j}$ dans P_j, il suffira de prendre $g_{j+1} = h_{j+1} - a$.

Cela posé, la suite des g_j ainsi choisies converge, uniformément sur tout compact de D, vers une fonction g holomorphe dans D ; grâce au lemme 6, g est congrue à f_x modulo $\mathfrak{M}_x$ en chaque point x de D ; ce qui démontre le théorème.

(Manuscrit reçu le 15 septembre 1949).