BULLETIN DE LA S. M. F.

ZYGMUNT ZAHORSKI

Sur l'ensemble des points de non-dérivabilité d'une fonction continue

Bulletin de la S. M. F., tome 74 (1946), p. 147-178

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__147_0>

SUR L'ENSEMBLE DES POINTS DE NON-DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION CONTINUE (¹);

PAR M. ZYGMUNT ZAHORSKI.

Le but de ce Mémoire est de démontrer le théorème suivant :

LA CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QU'UN ENSEMBLE M SOIT L'ENSEMBLE DES POINTS DE NON-DÉRIVABILITÉ (²) D'UNE FONCTION CONTINUE D'UNE VARIABLE RÉELLE EST QUE M SOIT LA RÉUNION DE DEUX ENSEMBLES

$$M = M_1 + M_2,$$

OÙ M_1 EST UN G_δ ARBITRAIRE ET M_2 UN $G_{\delta\sigma}$ DE MESURE NULLE.

I. — LA CONDITION EST SUFFISANTE.

Supposons que l'ensemble M soit la réunion de trois ensembles

$$M = G + G_\delta + G_{\delta\sigma},$$

où $G = \text{int. } M$, et mes. $G_{\delta\sigma} = 0$. Je vais démontrer qu'il existe une fonction continue $F(x)$ telle que M soit l'ensemble des points de non-dérivabilité de $F(x)$. Comme les termes de la somme peuvent être supposés disjoints, il suffit de construire trois fonctions, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, dont les ensembles de points de non-dérivabilité soient les ensembles G, G_δ et $G_{\delta\sigma}$ respectivement, les valeurs des fonctions dérivées en tout point de dérivabilité étant finies. On posera alors

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x).$$

(¹) Ce Mémoire, remis en juillet 1939 à la *Société Mathématique*, ne put être publié dans son *Bulletin* jusqu'à ce jour et parut entre temps en langue russe, dans le *Recueil Mathématique* [(9), 51, 1941, p. 487-510].

(²) Nous pouvons convenir que les points où la dérivée existe et est infinie sont des points de dérivabilité, ou qu'ils n'en sont pas. *Le résultat reste le même dans les deux cas.*

Lemme 1. — *Pour tout ensemble ouvert linéaire* H *il existe une fonction partout dérivable* $f(\mathrm{H}, x)$ *telle que*

$$f(\mathrm{H}, x) = f'(\mathrm{H}, x) = 0$$

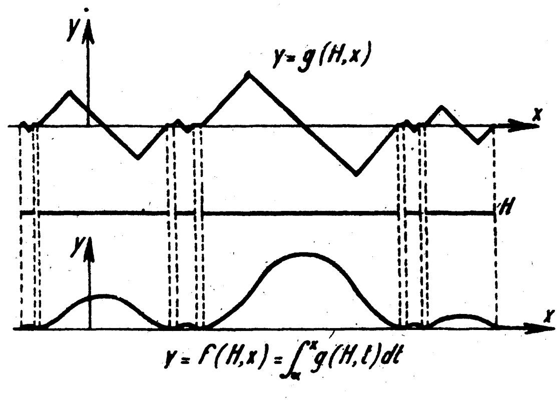
pour $x \notin \mathrm{H}$ *et* $f(\mathrm{H}, x) > 0$ *pour* $x \in \mathrm{H}$.

Démonstration. — Si $\mathrm{R} - \mathrm{H} \neq 0$ (R ensemble des nombres réels), posons $f(\mathrm{H}, x) = \int_\alpha^x g(\mathrm{H}, t)\,dt$, où $\alpha \in (\mathrm{R} - \mathrm{H})$ et où $g(\mathrm{H}, x)$ est définie comme suit : Si $x \notin \mathrm{H}$, $g(\mathrm{H}, x) = 0$. Si $x \in \mathrm{H}$ nous avons à distinguer trois cas : 1° Il existe un intervalle ouvert fini (a, b) contenant x et contenu dans H, tel que $a \notin \mathrm{H}$, $b \notin \mathrm{H}$. Alors

$$g(\mathrm{H}, x) = \mathrm{Min}\left(\left|\frac{a+b}{2} - x\right|, |x-a|, |x-b|\right).\mathrm{sign}\left(\frac{a+b}{2} - x\right).$$

2° Il existe une demi-droite $(-\infty, b)$ contenant x et contenue dans H, où $b \notin \mathrm{H}$. Alors $g(\mathrm{H}, x) = x - b$. 3° Il existe une demi-droite $(a, +\infty)$ contenant x, contenue dans H telle que $a \notin \mathrm{H}$.

Fig. 1.



Alors $g(\mathrm{H}, x) = x - a$. Si H coïncide avec toute la droite nous posons $f(\mathrm{H}, x) = 1$ pour tout x réel.

La fonction $g(\mathrm{H}, x)$ étant continue comme on le voit sans peine, la fonction $f(\mathrm{H}, x)$ est partout dérivable et l'on a $f'(\mathrm{H}, x) = g(\mathrm{H}, x)$

pour tout x réel. On a, de plus, pour $x \notin$ H,

$$f(\mathrm{H}, x) = \int_{\alpha}^{x} g(\mathrm{H}, t)\, dt = \int_{(\mathrm{R}-\mathrm{H})\,(\alpha, x)} g(\mathrm{H}, t)\, dt + \sum_{n} \int_{a_n}^{b_n} g(\mathrm{H}, t)\, dt,$$

la sommation étant étendue à tous les intervalles ouverts (a_n, b_n) contenus dans (α, x) et contigus à l'ensemble (R — H); comme toutes les intégrales figurant dans la formule ont la valeur zéro, on a $f(\mathrm{H}, x) = 0$. On a aussi toujours dans le même cas, $f'(\mathrm{H}, x) = g(\mathrm{H}, x) = 0$.

Supposons maintenant $x \notin$ H. Alors

$$\begin{aligned} f(\mathrm{H}, x) &= \int_{\alpha}^{x} g(\mathrm{H}, t)\, dt \\ &= \int_{\alpha}^{a} g(\mathrm{H}, t)\, dt + \int_{a}^{x} g(\mathrm{H}, t)\, dt \\ &= f(\mathrm{H}, a) + \int_{a}^{x} g(\mathrm{H}, t)\, dt = \int_{a}^{x} g(\mathrm{H}, t)\, dt > 0, \end{aligned}$$

où l'intervalle ouvert ab : $a < x < b$, est contenu dans H avec $a \notin$ H. Alors $f(\mathrm{H}, x) > 0$ pour $x \notin$ H. C. Q. F. D.

Théorème 1. — *La fonction* $\mathrm{F}_1(x) = f(\mathrm{G}, x) . \mathrm{W}(x)$, *où* $\mathrm{W}(x)$ *est la fonction continue non dérivable de Weierstrass, est non dérivable aux points de l'ensemble* G. *Et si* $x \notin$ G, $\mathrm{F}'_1(x)$ *existe et est égale à zéro.*

Démonstration :

$$\frac{\mathrm{F}_1(x+h) - \mathrm{F}_1(x)}{h} = f(\mathrm{G}, x+h) \frac{\mathrm{W}(x+h) - \mathrm{W}(x)}{h} + \mathrm{W}(x) \frac{f(\mathrm{G}, x+h) - f(\mathrm{G}, x)}{h}.$$

Si $x \in$ G, il existe, d'après les propriétés de la fonction $\mathrm{W}(x)$, deux suites $h_1, h_2, h_3 \ldots$ et $h'_1, h'_2, h'_3, \ldots$ tendant vers zéro et telles que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{W}(x+h_n) - \mathrm{W}(x)}{h_n} = +\infty, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{W}(x+h'_n) - \mathrm{W}(x)}{h'_n} = -\infty.$$

Comme

$$\lim_{n=\infty} f(G, x+h_n) = \lim_{n=\infty} f(G, x+h'_n) = f(G, x) > 0,$$

et

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(G, x+h_n) - f(G, x)}{h_n} = \lim_{n=\infty} \frac{f(G, x+h'_n) - f(G, x)}{h'_n} = f'(G, x),$$

on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{F_1(x+h_n) - F_1(x)}{h_n} = +\infty, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{F_1(x+h'_n) - F_1(x)}{h'_n} = -\infty.$$

La fonction $F_1(x)$ est donc non dérivable au point $x \in G$.

Si $x \notin G$, on a $f(G, x) = f'(G, x) = 0$, donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(G, x+h)}{h} = 0$. Comme $F_1(x) = 0$ et que $W(x)$ est une fonction bornée, il vient

$$F'_1(x) = \lim_{h \to 0} W(x+h) \frac{f(G, x+h)}{h} = 0, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme 2. — *Pour tout ensemble* Z *ne contenant aucun intervalle et contenu dans l'intervalle ouvert* (a, b) *et pour toute fonction continue* $f(x)$ *définie sur le segment* $\langle a, b \rangle$ *et telle que* $f(a) = f(b) = 0$ *et* $f(x) > 0$ *pour* $a < x < b$, *il existe un ensemble ouvert* H *tel que* $Z \subset H \subset (a, b)$ *et tel que tout carré ayant un côté dans* H *soit situé entièrement au-dessous de la courbe* $y = f(x)$.

Démonstration. — Choisissons deux suites monotones de points $a_1, a_2, \ldots \to a$, et $b_1, b_2, \ldots \to b$, où $a_n < \frac{a+b}{2}$ et $b_n > \frac{a+b}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $a_n \notin Z$, $b_n \notin Z$. Soit $\delta(x)$ la distance du point x à la courbe $y = f(x)$, où $x \in \langle a, b \rangle$. La fonction $\delta(x)$ est continue et satisfait aux mêmes conditions que celles admises pour $f(x)$. Puisque la fonction $\delta(x)$ atteint sa borne inférieure sur tout segment fermé contenu dans son domaine d'existence, la borne inférieure de cette fonction sur les segments $\langle a_1, b_1 \rangle$, $\langle b_1, b_2 \rangle$, $\langle a_2, a_1 \rangle$, $\langle b_n, b_{n+1} \rangle$, $\langle a_{n+1}, a_n \rangle$ est égale respectivement à $\delta_0, \delta_1, \delta'_1, \ldots, \delta_n, \delta'_n$ et est donc positive. Considérons par exemple le segment $\langle b_n, b_{n+1} \rangle$. Le rectangle de base $\langle b_n, b_{n+1} \rangle$ et de hauteur δ_n est situé entièrement au-dessous de la courbe $y = f(x)$. Partageons le segment $\langle b_n, b_{n+1} \rangle$ en intervalles de longueur constante $l < \frac{\delta_n}{2}$. Soient

$$B_1 = b_n < B_2 < B_3 < \ldots < B_m = b_{n+1}$$

les extrémités de ces intervalles. A tout point B_k, $1 < k < m$ faisons correspondre un point α_k^n tel que $\alpha_k^n \notin Z$, et $|\alpha_k^n - B_k| < \frac{l}{4}$, et posons $\alpha_1^n = b_n$, $\alpha_m^n = b_{n+1}$. La longueur de l'intervalle $(\alpha_k^n, \alpha_{k+1}^n)$ est, comme on le voit sans peine, $< \frac{3}{4}\delta_n$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Les carrés de bases $(\alpha_k^n, \alpha_{k+1}^n)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ sont donc situés au-dessous de la courbe $y = f(x)$. On définit de manière tout à fait analogue les intervalles $(\alpha_k'^n, \alpha_{k+1}'^n)$ situés dans l'intervalle (a_{n+1}, a_n) et $(\alpha_k^0, \alpha_{k+1}^0)$ dans (a_1, b_1). L'ensemble

$$H = (a, b) - \bigcup_{n,k} [(\alpha_k^0) + (\alpha_k^n) + (\alpha_k'^n)],$$

où (γ) désigne l'ensemble composé d'un seul point γ, satisfait à toutes les conditions du lemme.

Lemme 3. — *A tout ensemble G_δ linéaire, ne contenant aucun intervalle, correspond une suite décroissante d'ensembles ouverts G'_n tels que :* 1° $G_\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n$; 2° *si les fonctions $f_n(x)$ telles que $|f_n(x)| \leqq f(G'_n, x)$ sont partout dérivables, la fonction*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

existe pour tout x réel et est dérivable en tout point $x \notin G_\delta$; plus précisément $f'(x) = \sum_{n=1}^{m} f'_n(x)$ *pour* $x \in (G'_m - G'_{m+1})$, $f'(x) = 0$ *pour* $x \notin G'_1$ et $f(x)$ est continue.

Démonstration. — Soit G_1, G_2, ... une suite d'ensembles ouverts tels que $G_\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Il existe évidemment un ensemble ouvert G''_1, avec $G''_1 \supset G_\delta$, composé d'intervalles ouverts disjoints de longueur < 1. Posons $G'_1 = G_1 G''_1$. Nous définissons par induction les ensembles G''_n et G'_n comme suit : Soit k un nombre réel >1. Posons, dans le lemme **2**, $f(x) = \frac{1}{k} f(G'_{n-1}, x)$ pour

$$a_i \leqq x \leqq b_i, \qquad a = a_i, \qquad b = b_i,$$

où $(a_i, b_i) \subset G'_{n-1}$, $a_i \notin G'_{n-1}$, $b_i \notin G'_{n-1}$ et $Z = G_\delta(a_i, b_i)$. Désignons par $G''_{n,i}$ l'ensemble satisfaisant alors aux conditions du lemme **2**, et posons $G''_n = \bigcup_i G''_{n,i}$, la sommation étant étendue à tous les intervalles contigus à l'ensemble complémentaire de G'_{n-1}, $G'_n = G_n . G''_n$, $G'_n \subset G''_n \subset G'_{n-1}$. On peut facilement montrer l'inclusion $G'_n \supset G_\delta$. D'autre part $G'_n \subset G_n$, donc

$$G_\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n.$$

La condition 1° du lemme est donc satisfaite.

Nous allons démontrer qu'il en est de même de la condition 2°. La suite $G'_1, G'_2, \ldots$ étant décroissante, les composantes de tout ensemble G'_n ont des longueurs <1. Il résulte de la définition de la fonction $f(G'_n, x)$ que son maximum sur l'intervalle $(a, b) \subset G'_n (a \notin G'_n, b \notin G'_n)$ est égal à $\frac{(b-a)^2}{16}$. L'arc de la courbe $y = f(G'_n, x)$ correspondant à l'intervalle (a, b) est donc situé à l'intérieur du carré de base (a, b). Il en résulte l'inégalité $f(G'_n, x) \leqq \frac{1}{k} f(G'_{n-1}, x)$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} f(G'_n, x)$ converge donc uniformément vers une limite finie et il en est de même de la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Supposons maintenant $x \notin G'_1$. Alors

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x+h) \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} f(G'_n, x+h)$$

$$\leqq f(G'_1, x+h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{k}{k-1} f(G'_1, x+h),$$

$$f(x) = 0,$$

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqq \frac{k}{k-1} \frac{f(G'_1, x+h)}{h},$$

donc

$$\limsup_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqq \frac{k}{k-1} f'(G'_1, x) = 0$$

et, *a fortiori*, $f'(x) = 0$.

Si $x \in (G'_m - G'_{m+1})$, on a les formules

$$f(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x) + \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x),$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{m} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}.$$

Pour $n > m$, $x \notin G'_n$, donc $f_n(x) = 0$, $f(G'_n, x) = 0 = f'(G'_n, x)$ et il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right| \\
&\quad = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f_n(x+h)}{h} \right| \leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \frac{f_n(x+h)}{h} \right| \\
&\quad \leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \frac{f(G'_n, x+h)}{h} \right| \\
&\quad \leqq \left| \frac{f(G'_{m+1}, x+h)}{h} \right| \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n} \\
&\quad \leqq \frac{k}{k-1} \left| \frac{f(G'_{m+1}, x+h)}{h} \right|;
\end{aligned}$$

comme $\lim_{n \to 0} \frac{f(G'_{m+1}, x+h)}{h} = f'(G'_{m+1}, x) = 0$, il s'ensuit que

$$\lim_{h \to 0} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = 0.$$

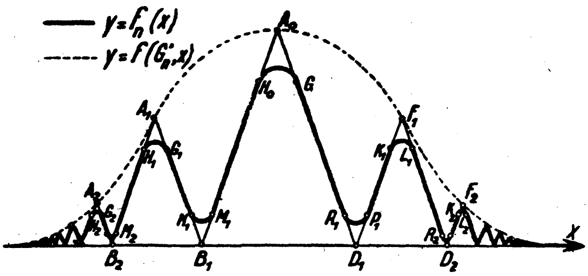
Les formules précédentes donnent quand $h \to 0$ l'égalité

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{m} f'_n(x). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME 2. — *Il existe une suite de fonctions satisfaisant à la même condition que les fonctions $f_n(x)$ du lemme 3 et telles* *que la série* $F_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *soit non dérivable en tout point de l'ensemble* G_δ.

Démonstration. — Nous définirons la suite des fonctions $f_n(x)$ comme suit. Si $x \notin G'_n$, posons $f_n(x) = 0$. Pour définir la fonction $f_n(x)$ sur l'intervalle $(a, b) \subset G'_n$ où l'on a $a \notin G'_n$, $b \notin G'_n$ nous menons du point le plus haut A_0 de la partie de la courbe $y = f(G'_n, x)$ correspondant à l'intervalle (a, b) deux droites de coefficients angulaires c^n et $-c^n$ (où c est un nombre réel fixe > 1). Par les points B_1, D_1 d'intersection de ces droites avec l'axe des x nous traçons deux droites parallèles respectivement aux précédentes; elles coupent la courbe $y = f(G'_n, x)$ aux points A_1, F_1. Nous menons ensuite pour les points A_1, F_1 la droite A_1B_2 parallèle à A_0B_1 et la droite F_1D_2 parallèle à A_0D_1, et ainsi de suite (*fig.* 2). Sur les segments obtenus nous

Fig. 2.



portons les segments A_nG_n, A_nH_n, F_nK_n, F_nL_n de longueur égale au $1/48^e$ de la longueur de A_nB_{n+1}, et les segments D_nR_n, D_nP_n, B_nM_n, B_nN_n de longueur égale au $1/48^e$ de la longueur du plus petit des segments passant par B_n (resp. D_n). Nous remplaçons les lignes brisées $H_nA_nG_n$, $K_nF_nL_n$ et $N_nB_nM_n$, $R_nD_nP_n$ par les arcs de parabole d'axe perpendiculaire à l'axe des x et tangents aux points H_n, G_n; K_n, L_n et N_n, M_n; R_n, P_n respectivement aux segments de ces lignes brisées. C'est la courbe ainsi obtenue que nous prenons comme partie de l'image de la fonction $f_n(x)$ correspondant à l'intervalle (a, b). On peut démontrer que la construction est possible, si

$$c^n > \max_{x\in(a,b)} |f'(G'_n, x)| = \max_{x\in(a,o)} |g(G'_n, x)| = \frac{b-a}{4} < \frac{1}{4},$$

donc en particulier dans notre cas où $c > 1$. La dérivabilité de la fonction $f_n(x)$ aux points de l'intervalle (a, b) résulte directement de la définition; si $x \notin G'_n$, nous avons la formule

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}\right| = \left|\frac{f_n(x+h)}{h}\right| < \left|\frac{f(G'_n, x+h)}{h}\right|,$$

d'où, en vertu des relations $f'(G'_n, x) = 0$, la relation $f'_n(x) = 0$.

Pour montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est non dérivable en tout point $x \in G_\delta$, il suffit d'indiquer pour tout $x \in G_\delta$ deux fonctions de l'entier n : $\varphi(n)$ et $\psi(n)$ telles que $\lim_{n=\infty} \varphi(n) = +\infty$, $\lim_{n=\infty} \psi(n) = -\infty$, et pour tout entier n et tout intervalle $(a, b)_n \subset G'_n$ contenant x, deux points $x'_n \in (a, b)_n$ et $x''_n \in (a, b)_n$ tels que

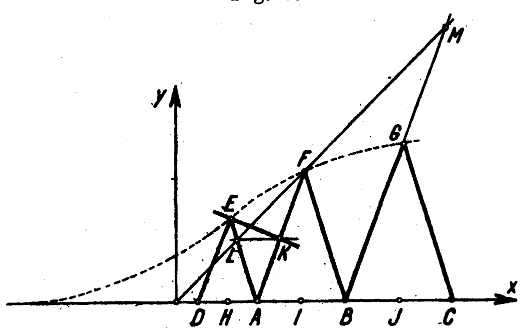
$$\frac{f(x)-f(x'_n)}{x-x'_n} \geqq \varphi(n), \qquad \frac{f(x)-f(x''_n)}{x-x''_n} \leqq \psi(n).$$

En effet, comme $G'_n \subset G'_{n-1}$ et comme G_δ ne contient aucun intervalle, on aura $\lim_{n=\infty} \text{mes}\,(a, b)_n = 0$, donc $\lim_{n=\infty} x'_n = \lim_{n=\infty} x''_n = x$, et la suite des quotients $\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}$ sera divergente.

Soit donc $x \in G_\delta$; alors $x \in G'_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$; x est donc situé sur la base (fermée) de l'un des triangles isocèles précédemment définis. Désignons par AB la base d'un tel triangle, par BC et AD les bases des triangles voisins, par F, G et E respectivement les sommets de ces trois triangles et par I, J, H les projections de ces sommets sur l'axe des x (*fig.* 3). Partageons AB en trois segments à l'aide des points distants respectivement de $\frac{AB}{4}$ de A et B.

Pour x situé dans le premier de ces segments fermés (le plus à gauche), posons $x'_n = I$, $x''_n = H$; pour x situé dans l'intervalle ouvert médian, posons $x'_n = A$, $x''_n = B$; et pour x situé dans le troisième segment fermé, posons $x'_n = J$, $x''_n = I$. On voit que les quotients $\frac{f_n(x)-f_n(x_n)}{x-x_n}$ varient en valeur absolue, de c^n jusqu'au minimum correspondant au coefficient angulaire de la droite KE, où K est le centre du segment AF si nous nous bornons à envisager la ligne brisée. Or, $|x - x'_n|$ et $|x - x''_n|$ sont égaux au moins à $\frac{AB}{4}$ et à $\frac{AD}{2}$, et la différence des ordonnées homologues de la courbe $y = f_n(x)$ et de la ligne brisée vaut au plus la

Fig. 3.



$1/48^e$ partie de $y(G)$; donc les quotients étudiés, relatifs à la courbe et à la ligne brisée diffèrent au plus de $\dfrac{2y(G)}{48 \min\left(\frac{AB}{4}, \frac{AD}{2}\right)}$.

Pour évaluer le coefficient angulaire de la droite KE, considérons le point L commun à la droite AE et à la droite FL de coefficient angulaire 1, situé au-dessous du point E. En effet, comme $f'(G'_n, x) < 1$, cette droite a un point commun (à savoir F), avec la courbe $f(G'_n, x)$; à gauche de F est au-dessous de la courbe $y = f(G'_n, x)$ et à droite de ce point, elle est au-dessus de cette courbe. Choisissons l'origine des coordonnées au point d'intersection de la droite FL avec l'axe des x et désignons l'abscisse du point A par a; alors les coordonnées (x, y) du point F (auquel nous attacherons le signe +), et du point L (auquel nous attacherons le signe —), sont les racines du système

$$y = x, \qquad y = \pm c^n(x - a).$$

Ces équations donnent

$$x = \pm c^n(x - a), \qquad x \mp x = \mp c^n a,$$
$$x = \frac{ac^n}{c^n \mp 1}, \qquad y = \frac{ac^n}{c^n \mp 1}.$$

L'ordonnée du point K est égale à $\frac{ac^n}{2(c^n-1)}$ et la valeur absolue du coefficient angulaire de la droite KL est égale à

$$\frac{\frac{ac^n}{c^n+1}-\frac{ac^n}{2(c^n-1)}}{\frac{a}{c^n+1}+\frac{a}{2(c_n-1)}}=c^n\frac{c^n-3}{3c^n-1}.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}
&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f_m(x)-f_m(x_n)}{x-x_n}\\
&=\sum_{m=1}^{n-1}\frac{f_m(x)-f_m(x_n)}{x-x_n}+\frac{f_n(x)-f_n(x_n)}{x-x_n}+\frac{\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}f_m(x)-\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}f_m(x_n)}{x-x_n}\\
&=\sum_{m=1}^{n-1}f'_m(\xi_m)+\frac{f_n(x)-f_n(x_n)}{x-x_n}+\frac{\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}f_m(x)-\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}f_m(x_n)}{x-x_n},
\end{aligned}$$

on peut écrire, pour $x_n=x'_n$ ou x''_n, en vertu des inégalités

$$f'_m(x)\leqq c^m,\qquad f(G'_m,\,x)\geqq f_m(x)\geqq 0,$$

$$f(G'_m,\,x)\leqq\frac{1}{k^{m-n}}f(G'_n,\,x)\qquad\text{pour } m\geqq n$$

et

$$\max f(G'_n,\,x)=y(G)\qquad\text{pour } x\in \mathrm{HJ},$$

l'inégalité

$$\left|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right|\geqq-\sum_{m=1}^{n-1}c^m+c^n\frac{c^n-3}{3c^n-1}$$

$$-\frac{y(G)}{24\min\left(\frac{AB}{4},\,\frac{AD}{2}\right)}-\frac{\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}y(G)}{\min\left(\frac{AB}{4},\,\frac{AD}{2}\right)}.$$

De plus, si le signe du second membre est $+$, le signe du quotient $\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}$ sera le même que celui du quotient relatif à la ligne brisée, c'est-à-dire $+$ pour x'_n et $-$ pour x''_n. Nous pouvons augmenter $y(G)$, en remplaçant G par le point M situé sur la droite FL. En désignant par a' l'abscisse du point B, j'obtiens les formules

$$\frac{y(M)}{y(F)} = \frac{c^n+1}{c^n-1}, \qquad AB = 2\frac{y(F)}{c^n},$$

$$AD = 2\frac{y(E)}{c^n} > 2\frac{y(L)}{c^n} = 2\frac{y(F)}{c^n}\frac{c^n-1}{c^n+1}.$$

Puisque $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{c^n-1}{c^n+1} = 1$, on a, pour n suffisamment grand,

$$\min\left(\frac{AB}{4}, \frac{AD}{2}\right) = \frac{AB}{4},$$

et

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right| &\geq -\frac{c^n-c}{c-1} + c^n\frac{c^n-3}{3c^n-1} \\ &\quad -\frac{c^n+1}{c^n-1}\frac{4c^n.y(F)}{24.2.y(F)} - \frac{1}{k-1}\frac{c^n+1}{c^n-1}\frac{4c^n y(F)}{2y(F)} \\ &= \frac{c}{c-1} + c^n\left(\frac{c^n-3}{3c^n-1} - \frac{1}{c-1} - \frac{1}{12}\frac{c^n+1}{c^n-1} - \frac{2}{k-1}\frac{c^n+1}{c^n-1}\right) \\ &= \varphi(n) = -\psi(n).\end{aligned}$$

Prenons $c=10$ et $k=25$; la somme entre-parenthèses tend vers $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{12}-\frac{2}{24}=\frac{1}{18}$, $\varphi(n) > \frac{10}{9} + 10^n\frac{1}{19}$ pour n suffisamment grand, et comme $\lim\limits_{n=\infty}\varphi(n)=\infty$, le théorème est démontré.

Lemme 4. — *Pour tout ensemble G_δ linéaire non vide de mesure nulle inclus dans $\langle a, b\rangle$ et pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g(x)$ dérivable croissante telle que : 1° $g'(x) < 1$ partout; 2° G_δ soit l'ensemble de tous les x tels que $g'(x) = 0$; 3° $g(b) - g(a) = b - a - \varepsilon$.*

Démonstration. — L'ensemble complémentaire de l'ensemble G_δ par rapport au segment $\langle a, b\rangle$ est un F_σ d'épaisseur 1 en tout point. Soit $F_\sigma = F_1 \cup F_2, \ldots,$ où les ensembles F_n sont fermés. Il existe un nombre k tel que $m_1 = \text{mes}(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k) > b - a - \varepsilon$. Posons $F'_1 = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$. D'après le théorème de MM. Lusin et Menchoff, à tout couple d'ensembles mesurables P_1, P_2 de mesures respectives μ_1 et μ_2, où $\mu_1 > \mu_2$, où P_2 est fermé, est contenu dans P_1 et contient exclusivement des points d'épaisseur 1 de P_1, et à tout nombre réel μ tel que $\mu_2 < \mu < \mu_1$, on peut faire correspondre un ensemble fermé P de mesure μ tel que : 1° $P_2 \subset P \subset P_1$; 2° tout point de P est un point d'épaisseur 1 de l'ensemble P_1, et 3° tout point de l'ensemble P_2 est un point d'épaisseur 1 de P.

Appliquons ce théorème en posant

$$P_2 = F'_1, \qquad P_1 = F_\sigma, \qquad \mu = \frac{m_1 + b - a}{2}.$$

Nous obtenons un ensemble $P = P'_1$ satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3°. Posons $F'_{\frac{1}{2}} = P'_1 \cup F_{k+1}$; alors $F'_{\frac{1}{2}} \subset F_\sigma$, donc

$$m_2 = \text{mes}\, F'_{\frac{1}{2}} < b - a,$$

l'ensemble $G_\delta \subset (a, b)$ n'étant pas vide. Cet ensemble évidemment satisfait aussi aux conditions 1°, 2° et 3°. Nous appliquons à nouveau le théorème de MM. Lusin et Menchoff en posant

$$P_1 = F_\sigma, \qquad P_2 = F'_{\frac{1}{2}}, \qquad \mu = \frac{b - a + m_2}{2}.$$

Nous obtenons ainsi l'ensemble P'_2 satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° et ensuite nous poserons $F'_{\frac{1}{4}} = P'_2 \cup F_{k+2}$. En répétant ce procédé, nous obtenons les suites d'ensembles $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$; $F'_1, F'_{\frac{1}{2}}, F'_{\frac{1}{2^2}}, \ldots, F'_{\frac{1}{2^n}}, \ldots$, et une suite de nombres réels positifs $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_n$, telles que P'_n soit un ensemble satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° du théorème de MM. Lusin et Menchoff par rapport aux ensembles $P_1 = F_\sigma$, $P_2 = F'_{\frac{1}{2^{n-1}}}$ et aux nombres $\mu = \dfrac{m_n + b - a}{2}$, où $F'_{\frac{1}{2^n}} = P'_n \cup F_{k+n}$, $m_{n+1} = \text{mes}\, F'_{\frac{1}{2^n}}$. Comme $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_{k+n} \subset F'_{\frac{1}{2^n}} \subset F_\sigma$, on a

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F'_{\frac{1}{2^n}} = F_\sigma.$$

Nous allons étendre maintenant à tous les nombres dyadiques r, où $0 < r < 1$ la définition des ensembles F'_r définis jusqu'ici pour $r = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nous procéderons comme il suit : supposons les ensembles $F'_{\frac{1}{2^n}}, F'_{\frac{2}{2^n}}, \ldots, F'_{\frac{k}{2^n}}, \ldots, F'_{\frac{2^n-1}{2^n}}, F'_1$ déjà définis. Pour définir l'ensemble $F'_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}[k = 1, 2, \ldots, (2^n - 1)]$, nous poserons, dans le théorème cité de MM. Lusin-Menchoff,

$$P_1 = F'_{\frac{k}{2^n}}, \qquad P_2 = F'_{\frac{k+1}{2^n}}, \qquad \mu = \frac{\operatorname{mes} F'_{\frac{k+1}{2^n}} + \operatorname{mes} F'_{\frac{k}{2^n}}}{2}, \qquad P = P'_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}.$$

Nous pouvons maintenant étendre la définition des ensembles F'_λ à tous les λ réels compris entre o et 1 en posant pour λ non dyadique

$$F'_\lambda = \bigcap_{r<\lambda} F'_r,$$

l'intersection étant étendue à tous les r dyadiques tels que $0 < r < \lambda$. En s'appuyant sur le théorème de Cantor (*Durchschnittsatz*), on démontre facilement que F'_λ est fermé et non vide pour tout λ réel, $0 < \lambda \leqq 1$. Si $\lambda_1 < \lambda_2$, $F'_{\lambda_2} \subset F'_{\lambda_1}$ et F'_{λ_2} se compose exclusivement de point d'épaisseur 1 de F'_{λ_1}, puisqu'en intercalant entre λ_1 et λ_2 deux nombres dyadiques $\frac{k_1}{2^{n_1}}$ et $\frac{k_2}{2^{n_2}}$, tels que

$$\lambda_1 < \frac{k_1}{2^{n_1}} < \frac{k_2}{2^{n_2}} < \lambda_2,$$

on a, d'après la définition des ensembles F'_λ,

$$F'_{\lambda_1} \supset F'_{\frac{k_1}{2^{n_1}}} \supset F'_{\frac{k_2}{2^{n_2}}} \supset F'_{\lambda_2}$$

et que l'ensemble $F'_{\frac{k_2}{2^{n_2}}}$ se compose exclusivement de points d'épaisseur 1 de $F'_{\frac{k_1}{2^{n_1}}}$.

Prenons un $x \in F_\sigma = \bigcup_{0<\lambda\leqq 1} F'_\lambda$; il existe donc des indices $\lambda > 0$ tels que $x \in F'_\lambda$. Soit $\lambda(x)$ la borne supérieure de ces λ. Posons

$$f(x) = \lambda(x) \qquad \text{pour } x \in F_\sigma,$$
$$f(x) = 0 \qquad \text{pour } x \in G_\delta.$$

Je vais démontrer que la fonction $f(x)$ ainsi définie est semi-continue supérieurement et asymptotiquement semi-continue inférieurement. En effet, si $x_0 \in G_\delta$, on a $x_0 \notin F_\delta$, et la distance δ de x_0 à F'_ε est positive. Si $\lambda > \varepsilon$, on a

$$F'_\lambda(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = 0,$$

puisque $F'_\lambda \subset F'_\varepsilon$ en vertu de $\lambda > \varepsilon$, donc $0 \leqq f(x) \leqq \varepsilon$, pour $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. La continuité de la fonction $f(x)$ au point $x_0 \in G_\delta$ est ainsi démontrée. Si $x_0 \in F_\sigma$ et $f(x_0) = \lambda_0$, on a

$$x_0 \notin F'_{\lambda_0 + \varepsilon},$$

donc x_0 est à une distance positive δ de l'ensemble $F'_{\lambda_0+\varepsilon}$. Pour $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, on a

$$f(x) \leqq \lambda_0 + \varepsilon = f(x_0) + \varepsilon.$$

La semi-continuité supérieure de la fonction $f(x)$ est ainsi démontrée. Pour démontrer la semi-continuité asymptotique inférieure de la fonction $f(x)$ aux points $x_0 \in F_\sigma$, posons comme ci-dessus, $f(x_0) = \lambda_0$ et considérons l'ensemble $F'_{\lambda_0-\varepsilon}$. Si $x \in F'_{\lambda_0-\varepsilon}$, on a

$$f(x) \geqq \lambda_0 - \varepsilon.$$

Comme x_0 appartient à $F'_{\left(\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$, c'est un point d'épaisseur 1 de l'ensemble $F'_{(\lambda_0-\varepsilon)}$. Le point x_0 est *a fortiori* un point d'épaisseur 1 de l'ensemble des x tels que $f(x) \geqq f(x_0) - \varepsilon$, ce qui prouve la semi-continuité asymptotique inférieure; donc, d'après ce que nous avons précédemment démontré, la fonction est asymptotiquement continue au point x_0.

La fonction $f(x)$ est de première classe de Baire et Young, elle est donc mesurable et comme elle est bornée ($0 \leqq f(x) \leqq 1$ pour tout $x \in \langle a, b \rangle$), elle est intégrable L. En vertu de la continuité asymptotique de la fonction $f(x)$, la dérivée de la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ coïncide avec $f(x)$. De plus, la fonction $f(x)$ est non négative et $\leqq 1$, et $f(x) = 1$ pour $x \in F'_1$; on a donc

$$b - a > c = \int_{aL}^{b} f(t)\,dt > \int_{F_1 L} f(t)\,dt = \text{mes}\, F'_1 > b - a - \varepsilon.$$

La fonction $g(x) = \frac{b-a-\varepsilon}{c} \int_{a\mathrm{L}}^{x} f(t)\,dt$ satisfait donc à toutes les conditions du lemme.

Lemme 5. — *Pour tout ensemble* G_δ *linéaire de mesure nulle, il existe une suite décroissante d'ensembles ouverts* $G_n^\star$ *tels que :* 1° $G_\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^\star$; 2° *il existe une suite non croissante de fonctions* $h_n(x) \geqq 0$ *partout dérivables et telles que : a. la somme* $G_n^{\star\star}$ *des intervalles où la fonction* $h_n(x)$ *reste constante et* > 0 *forme un ensemble recouvrant* G_δ; *b. si* $x \notin G_n^\star$, *on a* $h_n(x) = h'_n(x) = 0$, *et c. sur tout intervalle* (a, b) *contenu dans* $G_n^\star$ *et contigu au complémentaire de* $G_n^\star$ *on a* $h_n(x) > 0$ *et il existe un* $c \notin G_\delta$ *tel que* $\frac{a+b}{2} \leqq c \leqq \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{8}$, $h_n(c) = b - c$,

$$0 \leqq h'_n(x) \leqq 1 + \lambda \qquad \textit{pour } a \leqq x \leqq c$$

et

$$-1 - \lambda \leqq h'_n(x) \leqq 0 \qquad \textit{pour } c \leqq x \leqq b,$$

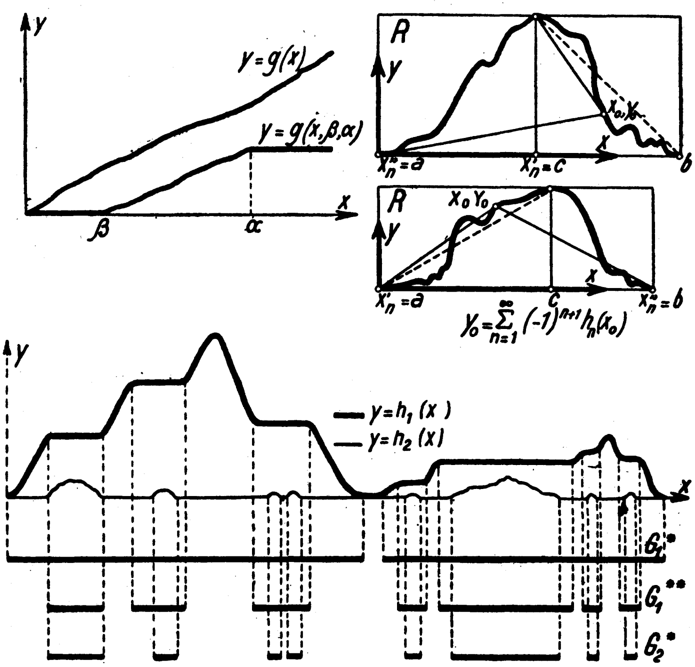
où $\lambda > 0$ *est une constante arbitraire;* 3° $c \notin G_n^{\star\star}$, $G_{n+1}^\star \subset G_n^{\star\star}$, $\lim_{n=\infty} h_n(x) = 0$ (*fig.* 4).

Démonstration. — Soit Z un ensemble linéaire de mesure nulle contenu dans un intervalle (a, b). Je définirai au moyen de la fonction $g(x)$ du lemme 4 une fonction $\psi(x)$ définie dans l'intervalle fermé $\langle a, b \rangle$ comme il suit. Je choisis un point c tel que $c \notin Z$, $\frac{a+b}{2} \leqq c \leqq \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{8}$ et un nombre ε tel que $\frac{c-b}{c-b-2\varepsilon} < 1 + \lambda$. Soient G_1 et G_2 deux ensembles ouverts de mesure $\leqq \varepsilon$ tels que

$$(1) \quad \begin{cases} Z(c, b) \subset G_2 \subset (c, b), & Z(a, c) \subset G_1 \subset (a, c), \\ \operatorname{mes}[(x, b) - (x, b)G_2] > 0, & \operatorname{mes}[(a, x) - (a, x)G_1] > 0, \\ \operatorname{mes}[(x, c) - (x, c)G_1] > 0, & \operatorname{mes}[(c, x) - (c, x)G_2] > 0, \end{cases}$$

pour tout $x \in (a, c) + (c, b)$. L'ensemble composé des points a, c, des extrémités a_i, b_i de tous les intervalles contigus au complémentaire de G_1 et de tous les points du complémentaire de G_1 qui ne sont pas pour lui des points d'épaisseur 1 est de mesure nulle. Il existe donc un ensemble G_δ^1 linéaire de mesure nulle le contenant. En vertu du lemme 4, il existe une fonction $g(x)$ telle que $g(a) = 0$, $g(c) = c - a - \varepsilon$, et $g'(x) = 0$ pour $x \in G_\delta^1$, $g'(x) > 0$ pour $x \in (a, c) - G_\delta^1$. Pareillement, il existe un ensemble G_δ^2 de mesure nulle contenant les points b, c, les

Fig. 4.



extrémités a'_i et b'_i de tous les intervalles contigus au complémentaire de G_2 et tous les points du complémentaire de G_2, qui ne sont pas pour lui des points d'épaisseur 1. En vertu du lemme 4, il existe une fonction $g_1(x)$ telle que $g_1(c) = 0$, $g_1(b) = b - c - \varepsilon$ et que $g'_1(x) = 0$ pour $x \in G_\delta^2$, $g'_1(x) > 0$ pour $x \in (c, b) - G_\delta^2$. Nous poserons

$$g_2(x) = b - c - \varepsilon - g_1(x).$$

On a donc

$$g_2(c) = b - c - \varepsilon, \qquad g_2(b) = 0 \qquad \text{et} \qquad g'_2(x) = 0 \qquad \text{pour } x \in G_\delta^2.$$

Faisons correspondre à tout intervalle (α, β) contenu dans G_1 $(\alpha \notin G_1, \beta \notin G_1)$ une fonction dérivable $g(x, \alpha, \beta)$ définie comme suit :

$$
\begin{array}{ll}
g(x, \alpha, \beta) = 0 & \text{pour } x \leqq \alpha, \\
g(x, \alpha, \beta) = g(x) - g(\alpha) & \text{pour } x \in (a, b), \\
g(x, \alpha, \beta) = g(\beta) - g(\alpha) & \text{pour } x \geqq b.
\end{array}
$$

Et de même faisons correspondre, à tout intervalle $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ contenu dans G_2 $(\bar{\alpha} \notin G_2, \bar{\beta} \notin G_2)$ une fonction dérivable $\bar{g}(x, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ telle que

$$
\begin{array}{ll}
\bar{g}(x, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = 0 & \text{pour } x \geqq \bar{\beta}, \\
\bar{g}(x, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = g_2(x) - g_2(\beta) & \text{pour } x \in (\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \\
\bar{g}(x, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = g_2(\alpha) - g_2(\beta) & \text{pour } x \leqq \bar{\alpha}.
\end{array}
$$

Posons [3]

$$
\psi_1(x) = g(x) - \sum_{n=1}^{\infty} g(x, a_n, b_n); \qquad \psi_2(x) = g_2(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}(x, a'_n, b'_n),
$$

la sommation s'étendant à tous les intervalles contigus aux complémentaires de G_1 et G_2 respectivement. Ces séries sont uniformément convergentes, donc les fonctions $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ sont continues. Je vais démontrer qu'elles sont aussi dérivables et que

$$
(2) \quad \psi'_1(x) = g'(x) - \sum_{n=1}^{\infty} g'(x, a_n, b_n); \qquad \psi'_2(x) = g'_2(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}'(x, a'_n, b'_n).
$$

Par raison de symétrie, il suffit de démontrer la première formule. *a*. Supposons d'abord que x_0 ne soit pas un point d'accumulation des points a_n et b_n. Alors, il existe un intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dans lequel toutes les fonctions $g(x, a_n, b_n)$,

---

[3] En construisant la fonction $\psi_1(x)$ j'ai utilisé en partie une construction analogue à celle de ma Note :

Zahorski, *Über die Konstruktion einer differenzierbaren, monotonen, nicht konstanten Funktion, mit überall dichter Menge von Konstanzintervallen.* (*Comptes rendus de la Soc. des Sc. et des Lettr. de Varsovie*, 1937, Classe III, pp. 202-206) et en partie la construction de Mme Bogomolowa, *Sur une classe des fonctions asymptotiquement continues* (*Moskowskij Matematiczeskij Sbornik*, t. 32, 1924, pp. 152-171, Russ., res. franc.).

à l'exception d'une au plus, sont constantes et la formule (2) est démontrée. *b*. Supposons ensuite que x_0 soit un point d'accumulation de l'ensemble des points a_n et b_n. Il en résulte que $x_0 \notin (a_n, b_n)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, donc $g'(x_0, a_n, b_n) = 0$. Il suffit de démontrer que

$$g'(x) = \psi_1'(x).$$

Comme $|g'(x, a_n, b_n)| < 1$ pour $x \in (a_n, b_n)$ et comme

$$g'(x, a_n, b_n) = 0$$

partout d'ailleurs, il vient

$$|g(x+h, a_n, b_n) - g(x, a_n, b_n)| \leqq \text{mes}[x, x+h)(a_n, b_n)],$$

donc

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} g(x+h, a_n, b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} g(x, a_n, b_n)\right| \leqq \text{mes}[(x, x+h)G_1].$$

Si x_0 est un point d'épaisseur 1 du complémentaire de G_1, on a

$$\lim_{n=0} \frac{\text{mes}[(x_0, x_0+h)G_1]}{h} = 0$$

et alors, en vertu de l'inégalité précédente,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} g(x_0, a_n, b_n)\right) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si x_0 n'est pas un point d'épaisseur 1 du complémentaire de G_1, on a

$$g'(x_0) = 0.$$

Comme on le voit sans peine, on a sur tout intervalle (α, β),

$$|g(\beta) - g(\alpha)| \geqq \left|\sum_{n=1}^{\infty} g\ (\beta, a_n, b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} g\ (\alpha, a_n, b_n)\right|$$

donc

$$\left|\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right| \geqq \left|\frac{\sum_{n=1}^{\infty} g\ (x+h, a_n, b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} g\ (x, a_n, b_n)}{h}\right|$$

et la formule $g'(x_0) = 0$ entraîne l'égalité

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} g(x_0,\ a_n,\ b_n)\right)' = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La formule (2) est donc complètement démontrée et l'on voit de plus que les fonctions monotones $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ sont constantes respectivement sur $(a_n,\ b_n)$ et $(a'_n,\ b'_n)$. Si $x_0 \notin G_1$, l'égalité $\psi'_1(x_0) = g'(x_0) = 0$ n'est satisfaite que pour $x_0 \in G_\delta$ de mesure nulle, donc

$$\psi_1(x_1) = \mathrm{L}\!\!\int_a^{x_1} \psi'_1(t)\,dt = \mathrm{L}\!\!\int_{(a,\,x_1)-(a,\,x_1)\,G_1} g'(t)\,dt > 0$$

pour tout $x_1 \in (a,\ c)$, en vertu de (1), et de même

$$\psi_1(c) - \psi_1(x_1) > 0 \qquad \text{pour } x_1 \in (a,\ c),$$
$$\psi_2(c) - \psi_2(x_1) > 0, \qquad \psi_2(x_1) > 0 \qquad \text{pour } x_1 \in (c,\ b).$$

Donc

$$a,\ b,\ c \notin \langle A,\ B\rangle \qquad \text{si } \psi_{1,2}(x) = \text{const.} > 0 \qquad \text{pour } x \in \langle A,\ B\rangle.$$

De plus, $|\psi'_{1,2}(x)| < 1$ partout et nous déduisons des formules

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(c,\ a_n,\ b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} g(c,\ a_n,\ b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} g(a,\ a_n,\ b_n)$$
$$< \operatorname{mes}[(a,\ c)\ G_1] \leqq \varepsilon.$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}(c,\ a'_n,\ b'_n) \leqq \varepsilon,$$

les inégalités

$$c - a - 2\varepsilon < \psi_1(c) < c - a - \varepsilon,$$
$$b - c - 2\varepsilon < \psi_2(c) < b - c - \varepsilon.$$

Ainsi, en posant

$$\psi(x) = \frac{b - c}{\psi_1(c)}\,\psi_1(x) \qquad \text{pour } x \in \langle a,\ c\rangle$$

et

$$\psi(x) = \frac{b - c}{\psi_2(c)}\,\psi_2(x) \qquad \text{pour } x \in \langle c,\ b\rangle,$$

on obtient une fonction dérivable partout sur l'intervalle fermé $\langle a, b\rangle$, avec $\psi'(a)=\psi'(b)=\psi'(c)=0$, et telle que

$$|\psi'(x)|\leqq \mathrm{Max}\left[\frac{b-c}{c-a-2\varepsilon}, \frac{b-c}{b-c-2\varepsilon}\right]=\frac{b-c}{b-c-2\varepsilon}<1+\lambda,$$
$$\psi(x)>0 \qquad \text{pour } x\in(a,b).$$

$\psi(x)$ étant non décroissante sur $\langle a, c\rangle$ et non croissante sur $\langle c, b\rangle$.

Soit $G_1, G_2, \ldots$, une suite d'ensembles ouverts tels que

$$G_\delta=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Construisons la fonction $f(G_1, x)$ conformément au lemme **1**. Nous divisons ensuite l'ensemble G_1 en intervalles au moyen de points n'appartenant pas à G_δ, et dont la réunion forme un ensemble n'ayant aucun point d'accumulation sur G_1, les intervalles étant tels que les carrés qui les admettent pour base soient situés au-dessous de la courbe $y=f(G_1, x)$. Cette décomposition est possible en vertu du lemme **2**. Désignons par G_1^* la somme de ces intervalles ouverts. Je définirai la fonction $h_1(x)$ par les égalités

$$h_1(x)=0 \qquad \text{pour } x\notin G_1^*$$

et

$$h_1(x)=\psi(x) \qquad \text{pour } x\in(a, b)\subset G_1^*, \qquad a\notin G_1^*, \qquad b\notin G_1^*,$$

où $\psi(x)$ est la fonction définie ci-dessus, Z coïncidant maintenant avec l'ensemble $G_\delta(a, b)$. La dérivabilité de la fonction $h_1(x)$ en un point $x\in G_1^*$ résulte de la définition de cette fonction. Pour un point $x\notin G_1^*$, nous envisagerons deux cas : 1° $x\in G_1$, 2° $x\notin G_1$. Dans le premier cas x est un point isolé du complémentaire de G_1^* et l'on voit facilement qu'alors $h_1'(x)=0$. Dans le second cas, nous utiliserons les formules

$$h_1(x)\leqq f(G_1, x) \qquad \text{pour tout } x \text{ réel } (^1),$$
$$\left|\frac{h_1(x+h)-h_1(x)}{h}\right|=\left|\frac{h_1(x+h)}{h}\right|\leqq\left|\frac{f(G_1, x+h)}{h}\right| \qquad \text{pour } x\notin G_1,$$
$$f'(G_1, x)=0 \qquad \text{pour } x\notin G_1,$$

(1) La partie de la courbe $y=h_1(x)$ correspondant à G_1^* est située à l'intérieur des plus grands carrés ayant leurs bases contenues dans G_1^* (même dans les rectangles dont un côté est deux fois plus long que l'autre).

d'où il résulte que $h'_1(x) = 0$. La fonction $h_1(x)$ est donc dérivable partout et nous vérifions facilement que les conditions $2°(a)$, (b), (c) du lemme et la première condition 3° sont satisfaites pour $n = 1$ $(G_1^{**} = G_1 + G_2)$. Supposons maintenant que nous ayons déjà défini les ensembles G_1^*, G_2^*, ..., G_k^* contenant G_δ et satisfaisant à la condition 3° du lemme pour $n = 1, 2 \ldots, (k-1)$, ainsi que les fonctions $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_k(x)$ dérivables satisfaisant à la condition 2° du lemme et les ensembles G_1^{**}, G_2^{**}, ..., G_k^{**}. Appliquons le lemme 2 en y faisant $Z = G_\delta$, $f(x) = h_k(x)$. Désignons par H_k l'ensemble ouvert satisfaisant aux conditions du lemme 2. Formons l'ensemble

$$(3) \qquad H_k^* = H_k G_k^{**} G_{k+1}$$

et construisons $f(H_k^*, x)$ conformément au lemme 1. Divisons, au moyen d'une infinité dénombrable de points n'appartenant pas à G_δ et dont l'ensemble n'ait aucun point d'accumulation dans H_k^*, l'ensemble H_k^* en intervalles ouverts tels que les carrés ayant ces intervalles pour base soient situés en dessous la courbe $y = f(H_k^*, x)$ (lemme 2). Nous définissons l'ensemble G_{k+1}^* comme somme de ces segments. Nous définissons ensuite la fonction $h_{k+1}(x)$ de telle façon qu'elle soit par rapport à l'ensemble G_{k+1}^* ce que la fonction $h_1(x)$ est par rapport à l'ensemble G_1^*. La démonstration que $h_{k+1}(x)$ satisfait à la condition $2°$ (a), (b), (c) est la même que ci-dessus pour la fonction $h_1(x)$. Comme les suites d'ensembles G_1^*, G_2^*, ... et de fonctions ainsi définies satisfont évidemment à la première et à la deuxième relation de la condition 3°, il nous reste à démontrer que la suite $h_1(x)$, $h_2(x)$ est non croissante, que $\lim_{n=\infty} h_n(x) = 0$, et que la suite G_1^*, G_2^*, ... satisfait à la condition 1°. Comme les ensembles H_k, G_k^{**}, G_{k+1} contiennent G_δ, il en est de même, d'après (3), de H_k^* et comme G_{k+1}^* ne diffère de l'ensemble H_k^* que par des points n'appartenant pas à G_δ, G_{k+1}^* contient G_δ. D'autre part, $G_{k+1}^* \subset H_k^* \subset G_{k+1}$. Il en résulte qu'on a $G_\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^*$, c'est-à-dire que la condition 1° est satisfaite. Si $h_{k+1}(x) = 0$, alors $h_{k+1}(x) \leq h_k(x)$. Si $h_{k+1}(x) > 0$, alors $x \in G_{k+1}^*$. La partie de la courbe $y = h_{k+1}(x)$ correspondant à l'intervalle (a, b) contigu au complémentaire de l'ensemble $G^{\star}_{k+1}$ est située à l'intérieur du carré de base (a, b) inclus dans un carré dont la base est contenue dans H_k, puisque $H_k \supset G^{\star}_{k+1}$. Mais un tel carré est situé sous la courbe $y = h_k(x)$, donc $h_{k+1}(x) < h_k(x)$. Si $h_k(x) = 0$, $h_{k+n}(x) = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, et $\lim\limits_{k=\infty} h_k(x) = 0$. Si $h_k(x) > 0$ pour tout k, $x \in (a_k, b_k) \subset G^{\star}_k$, $a_k \notin G^{\star}_k$, $b_k \notin G^{\star}_k$, pour tout k, et $h_k(x) \leq \frac{b_k - a_k}{2}$. En vertu de l'égalité $\operatorname{mes} G_\delta = 0$, $\lim\limits_{k=\infty} \frac{b_k - a_k}{2} = 0$, donc $\lim\limits_{k=\infty} h_k(x) = 0$.

C. Q. F. D.

Lemme 6. — *Soit* $S_1(x)$, $S_2(x)$, ... *une suite convergeant vers une fonction* $S(x)$ *pour tout* x. *Si les fonctions* $f_n(x)$ *satisfont à la condition de Lipschitz*

$$|S_n(x_2) - S_n(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|,$$

la fonction $S(x)$ *satisfait aussi à la même condition.*

Démonstration. — Soit k un entier > 0. La suite $S_1(x)$, $S_2(x)$, ... étant convergente, il existe un entier N tel que

$$|S(x_1) - S_N(x_1)| < \frac{|x_2 - x_1|}{k} \quad \text{et} \quad |S(x_2) - S_N(x_2)| < \frac{|x_2 - x_1|}{k},$$

donc

$$|S(x_2) - S(x_1)| \leq |S(x_2) - S_N(x_2)| + |S_N(x_2) - S_N(x_1)| + |S_N(x_1) - S(x_1)|$$
$$< \frac{2|x_2 - x_1|}{k} + M|x_2 - x_1|.$$

En passant à la limite lorsque $k \to \infty$, on obtient l'inégalité cherchée

$$|S(x_2) - S(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|.$$

C. Q. F. D.

Lemme 7. — *Soit* $f(x) = \sum\limits_{n=\infty}^{\infty} f_n(x)$ *une série convergente de fonctions, dont chacune satisfait à la condition de Lipschitz*

$$|f_n(x_2) - f_n(x_1)| \leq M_n |x_2 - x_1|,$$

où $M = \sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ *est un nombre fini. Si toute fonction* $f_n(x)$ *est dérivable au point* x_0, *alors* $f(x)$ *l'est aussi et* $f'(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0)$.

De plus, $f(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz, et plus précisément $|f(x_2)-f(x_1)| \leqq \mathrm{M}\,|x_2-x_1|$.

Démonstration. — Soit N un entier tel que $\sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \mathrm{M}_n < \varepsilon$. La condition de Lipschitz entraîne l'inégalité $|f'_n(x_0)| \leqq \mathrm{M}_n$. Donc

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0)\right| \\
&\quad=\left|\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}-f'_n(x_0)\right)\right. \\
&\qquad\left.+\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty}\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}-\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} f'_n(x_0)\right| \\
&\quad<\left|\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}-f'_n(x_0)\right)\right|+2\varepsilon.
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $h \to 0$, nous obtenons l'inégalité

$$\limsup_{h\to 0}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0)\right| \leqq 2\varepsilon,$$

donc, ε étant un nombre positif arbitraire,

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0)\right|$$

existe et est égale à zéro, et, à plus forte raison,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0)=f'(x_0),$$

où

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0)\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{M}_n=\mathrm{M}.$$

Pour démontrer la deuxième partie du lemme, il suffit de poser, dans le lemme 6, $\mathrm{S}_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, $\mathrm{M}=\mathrm{M}$.

Lemme 8. — *Si nous définissons les fonctions $h_n(x)$ conformément au lemme 5, alors la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} h_n(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz avec la constante $1 + \lambda$ et l'ensemble de ses points de non dérivabilité coïncide avec* G_δ (G_δ *étant un ensemble arbitraire de mesure nulle*) (*fig.* 4).

Démonstration. — Conservons les notations utilisées dans le lemme 5. Il résulte de ce lemme 5 l'inclusion suivante

$$(4) \qquad G^{*}_{n+1} \subset G^{**}_{n} \subset G^{*}_{n} \qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots;$$

cette inclusion implique aussi l'inclusion

$$(5) \qquad G^{**}_{n} \subset G^{**}_{k} \qquad \text{pour } n \geqq k.$$

Soit n un entier fixé arbitrairement et posons

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} h_k(x).$$

$S_n(x)$ est, en même temps que les fonctions $h_k(x)$, dérivable et

$$S'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} h'_k(x).$$

Considérons un x tel que $S'_n(x) \neq 0$. Il existe un indice $l \leqq n$ tel que $h'_l(x) \neq 0$. Il en résulte que

$$(6) \qquad x \in G^{*}_{l} - G^{**}_{l}.$$

Prenons un indice $t \geqq l$. Les formules (6) et (5) impliquent que $x \notin G^{**}_{t}$, et, à plus forte raison, d'après (4), $x \notin G^{*}_{t+1}$; donc en vertu du lemme 5, $h_{t+1}(x) = h'_{t+1}(x) = 0$. D'autre part, d'après (4), $x \in G^{**}_{l-1} \subset G^{**}_{r}$, où $r < l$. D'après la définition de l'ensemble G^{**}_{r} (lemme 5), $h'_r(x) = 0$. Nous avons ainsi démontré que si $S'_n(x) \neq 0$, il existe précisément un indice $l \leqq n$ tel que $h'_l(x) \neq 0$. D'après les propriétés des fonctions $h_n(x)$ énoncées dans le lemme 5, il en résulte que $|S'_n(x)| \leqq 1 + \lambda$. D'après le théorème de Lagrange, il existe pour chaque couple de nombre réels x_1 et x_2 un ξ tel que $x_1 < \xi < x_2$, et que

$$\frac{S_n(x_2) - S_n(x_1)}{x_2 - x_1} = S'_n(\xi).$$

Il est ainsi établi que la fonction $S_n(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz; la valeur de la constante de Lipschitz étant ici égale à $1 + \lambda$. La suite $S_n(x)$ converge vers la fonction $f(x)$ en vertu des relations $0 \leq h_{k+1}(x) \leq h_k(x)$, $\lim\limits_{k=\infty} h_k(x) = 0$. En vertu du lemme 6, $f(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz avec une valeur de la constante de Lipschitz égale à $1 + \lambda$. Supposons maintenant que $x \notin G_\delta$. Alors il existe un nombre k, tel que $x \notin G^\star_n$ pour $n \geqq k$, donc $h_n(x) = h'_n(x) = 0$ pour $n \geqq k$. La somme $\sum\limits_{n=1}^{k-1} (-1)^{n+1} h_n(x)$ est dérivable. Considérons maintenant la série

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} h_n(x+h)}{h} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1} h_n(x+h) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1} h_n(x)}{h}$$

La suite $h_n(x)$ étant non croissante pour tout x réel, il vient

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} h_n(x+h)}{h} \right| \leq \left| \frac{h_k(x+h)}{h} \right|.$$

L'égalité $h'_k(x) = 0$ entraîne donc la formule

$$\lim_{h \to 0} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} h_n(x+h)}{h} = 0,$$

donc

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^{n+1} h'_n(x).$$

Il reste à démontrer que la fonction $f(x)$ est non dérivable aux points de l'ensemble G_δ. Soit donc $x_0 \in G_\delta$. Alors pour tout n, il existe un intervalle (α_n, β_n) contigu au complémentaire de $G^\star_n$ et contenant x_0. L'ensemble G_δ ne contenant aucun intervalle et la suite des ensembles $G_n^\star$ étant décroissante, on a $\lim_{n=\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$. Il nous suffit donc de trouver dans tout intervalle $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle$ deux points x'_n, x''_n, tels que

$$(7) \qquad \left| \frac{f(x''_n) - f(x_0)}{x''_n - x_0} - \frac{f(x'_n) - f(x_0)}{x'_n - x_0} \right| \geqq A,$$

où A est une constante > 0. D'après l'inclusion $(\alpha_n, \beta_n) \subset G_n^\star$ et (4), nous avons $(\alpha_n, \beta_n) \subset G_l^{\star\star}$ pour $l \leqq n-1$, d'où

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} h_k(x) = \text{const.} \qquad \text{pour } x \in \langle \alpha_n, \beta_n \rangle$$

et

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+1} h_k(x) - \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+1} h_k(x_0)}{x - x_0}$$
$$\text{pour } x \in \langle \alpha_n, \beta_n \rangle.$$

Posons dans la condition 2° du lemme 5 $a = \alpha_n$, $b = \beta_n$. Les points a, b, c n'appartenant pas à $G_n^{\star\star}$, ils n'appartiennent non plus à aucun $G_k^{\star\star}$, où $k \geqq n$, ni à $G_{k+1}^\star$, donc

$$h_{k+1}(a) = h_{k+1}(b) = h_{k+1}(c) = 0, \qquad \text{pour } k \geqq n.$$

Il en résulte que

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+1} h_k(a) = (-1)^{n+1} h_n(a) = 0,$$

de même

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+1} h_k(b) = 0,$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+1} h_k(c) = (-1)^{n+1} h_n(c) = (-1)^{n+1}(b - c).$$

L'arc de la courbe $y = (-1)^{n+1} h_n(x)$ correspondant à l'intervalle $\langle a, c \rangle$ est contenu dans le rectangle R (*fig.* 4) dont trois sommets sont les points $(a, 0)$; $(c, 0)$; $[c, (-1)^{n+1}(b-c)]$. La série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} h_k(x)$ étant alternée et les termes de cette série tendant d'une façon monotone vers zéro, la courbe

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}h_k(x)$$

est située aussi dans le rectangle R. Si $a<x_0<c$, nous définirons x'_n et x''_n comme il suit : $x'_n=a$ si

$$\left|\frac{\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+1}h_k(x_0)-\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+1}h_k(a)}{x_0-a}\right|$$

$$\geqq\left|\frac{\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+1}h_k(x_0)-\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+1}h_k(c)}{x_0-c}\right|$$

Si cette dernière inégalité n'est pas vérifiée nous poserons $x'_n=c$. Dans tous les cas on pose $x''_n=b$. Les quotients envisagés dans l'inégalité représentent les coefficients angulaires des droites joignant le point du rectangle R de coordonnées

$$x_0,\ \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+1}h_k(x_0)$$

aux points de coordonnées $(a, 0)$ et $(c, (-1)^n(c-b))$ respectivement. Il est facile de voir que la plus grande des valeurs absolues de ces coefficients est plus grande que la valeur absolue du coefficient angulaire de la diagonale du rectangle $\mathrm{R}=\dfrac{b-c}{c-a}\geqq\dfrac{\frac{3}{8}(b-a)}{\frac{5}{8}(b-a)}=\dfrac{3}{5}$.

Si n est impair, alors

$$\frac{\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+1}h_k(x'_n)-\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+1}h_k(x_0)}{x'_n-x_0}\geqq\frac{3}{5}.$$

et

$$\frac{\sum_{h=n}^{\infty}(-1)^{k+1}h_k(x''_n)-\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+1}h_k(x_0)}{x''_n-x_0}\leqq 0.$$

La formule (7) est donc démontrée et $A = \frac{3}{5}$. Si n est pair, on parvient d'une façon tout à fait analogue à la même formule. Un raisonnement analogue permet de conclure que cette formule est aussi valable pour $x_0 \in (c, b)$ si l'on pose $A = 1$. Donc, dans tous les cas,

$$\left| \frac{f(x'_n) - f(x_0)}{x'_n - x_0} - \frac{f(x''_n) - f(x_0)}{x''_n - x_0} \right| \geq \frac{3}{5}.$$

C. Q. F. D.

Théorème 3. — *Pour chaque ensemble* $G_{\delta\sigma}$ *de mesure nulle, il existe une fonction lipschitzienne* $F_3(x)$ *telle que l'ensemble des points de non dérivabilité de la fonction* $F_3(x)$ *soit l'ensemble* $G_{\delta\sigma}$.

Démonstration. — D'après un théorème de M. Lusin, il existe une suite d'ensembles $G_\delta^{(1)}$, $G_\delta^{(2)}$ ..., deux à deux disjoints tels que

$$G_{\delta\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} G_\delta^{(n)}.$$

Pour tout n entier, nous prenons pour fonction $f_n(x)$ celle du lemme 8 avec $G_\delta = G_\delta^{(n)}$. Posons

$$H_n(x) = \frac{1}{2^n}\big(f_n(x) - f_n(0)\big), \qquad F_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x).$$

Nous venons de démontrer que la fonction $F_3(x)$ satisfait à la condition du théorème 3.

D'après le lemme 8 et la définition de la fonction $H_n(x)$, on a

$$|H_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}|x|(1+\lambda), \qquad \text{donc} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}|H_n(x)| \leq |x|(1+\lambda)$$

et

$$|H_n(x_1) - H_n(x_2)| \leq \frac{1}{2^n}|x_1 - x_2|(1+\lambda).$$

On peut donc appliquer le lemme 7 en y posant

$$f_n(x) = H_n(x), \qquad M_n = \frac{1}{2^n}(1+\lambda), \qquad M = 1+\lambda.$$

$H_n(x)$ étant d'après le lemme 8 dérivable en tout point $x \notin G_{\delta\sigma}$, il en résulte que $F_3(x)$ l'est aussi.

Il nous reste à démontrer qu'inversement, si $x_0 \in G_{\delta\sigma}$, alors la fonction $F_3(x)$ est non dérivable au point x_0. Soit donc $x_0 \in G_{\delta\sigma}$. Il existe donc un indice k tel que $x_0 \in G_\delta^{(k)}$. Les ensembles $G_\delta^{(l)}$ étant disjoints, $x_0 \notin G_\delta^{(l)}$ pour $l \neq k$. On en couclut en tenant compte du lemme 8, que $H_k(x)$ est non dérivable au point x_0, tandis que toutes les fonctions $H_l(x)$ pour $l \neq k$ sont dérivables au point x_0. En vertu du lemme 7, la somme $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{\infty} H_i(x)$ est donc dérivable au point x_0.

On aboutit ainsi à la conclusion que

$$F_3(x) = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{\infty} H_i(x) \right) + H_k(x)$$

est non dérivable au point x_0. C. Q. F. D.

Remarque. — La fonction $S(x) = F_3(x) + (1 + 2\lambda)\, x$ est croissante, dérivable pour $x \notin G_{\delta\sigma}$, non dérivable pour $x \in G_{\delta\sigma}$, et $\lambda \leqq \dfrac{S(x_1) - S(x_2)}{x_1 - x_2} \leqq 2 + 3\lambda$.

II. — La condition est nécessaire.

Théorème 4. — *$f(x)$ étant une fonction continue, l'ensemble M de tous les points de non-dérivabilité de la fonction $f(x)$ est la réunion d'un ensemble G_δ et d'un ensemble $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle.*

Démonstration. — Désignons par M' l'ensemble de tous les points x en lesquels $f(x)$ n'admet pas de dérivée finie, par M'' l'ensemble de tous les points en lesquels $f(x)$ n'admet de dérivée ni finie, ni infinie. Nous voulons démontrer que M' aussi bien que M'' est la réunion d'un ensemble G_δ et d'un ensemble $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle. L'ensemble E de tous les x, tels que une au moins des dérivées unilatérales de Dini est $\pm\infty$, est contenu évidemment dans M'. Envisageons l'ensemble $M' - E$. Toute dérivée unilatérale de Dini étant finie sur cet ensemble, $M' - E$ est, d'après le théorème connu ([6]) de mesure nulle. Comme on le sait, E est un G_δ ([7]) et M′ est un $G_{\delta\sigma}$ ([8]). La décomposition

$$M' = E + (M' - E)$$

satisfait donc aux conditions désirées.

Pour démontrer l'existence d'une décomposition analogue pour l'ensemble M″, posons

$$J_1 = \underset{x}{E}[\bar{f}_-(x) = +\infty]\,\underset{x}{E}[\underline{f}_-(x) = -\infty],$$
$$J_2 = \underset{x}{E}[\bar{f}_+(x) = +\infty]\,\underset{x}{E}[\underline{f}_+(x) = -\infty],$$
$$J_3 = \underset{x}{E}[\bar{f}_+(x) = +\infty]\,\underset{x}{E}[\underline{f}_-(x) = -\infty],$$
$$J_4 = \underset{x}{E}[\bar{f}_-(x) = +\infty]\,\underset{x}{E}[\underline{f}_+(x) = -\infty],$$

et envisageons l'ensemble $M'' - (J_1 + J_2 + J_3 + J_4)$. On vérifie que J_1, J_2, J_3, J_4 sont des G_δ ([7]), que $M'' \supset J_1 + J_2 + J_3 + J_4$, et que $M'' - (J_1 + J_2 + J_3 + J_4) = (M' - E) + E_1 + E_2 + E_3$, où E_1 est l'ensemble de tous les x en lesquels précisément une des dérivées unilatérales de Dini est égale à $\pm\infty$, E_2 est l'ensemble de tous les x en lesquels $f(x)$ admet une dérivée unilatérale égale à $\pm\infty$ sans avoir une dérivée infinie de l'autre côté. E_3 est l'ensemble de tous les x en lesquels deux dérivées supérieures de Dini sont infinies, deux inférieures finies, ou inversement. En vertu du théorème cité ([6]), les ensembles $M' - E$, E_1, E_2, E_3 sont tous de mesure nulle. L'ensemble M″ étant un $G_{\delta\sigma}$, il en résulte que l'ensemble $M_2 = M'' - (J_1 + J_2 + J_3 + J_4)$ est un $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle, et l'ensemble $M_1 = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$ est un G_δ. On a en outre ($M = M'$ ou M'')

$$M = M_1 + M_2, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarques. — 1° Si $F(x)$ n'admet pas de dérivée finie ni infinie pour $x \in M$, et si $|F'(x)| < \infty$ pour $x \notin M$, $M = M' = M''$.

([6]) SAKS, *Theory of the Integral*, Warszawa-Lwów, 1937, Monografje Matematyczne, p. 270, théorèmes (4.2) et (4.4).

([7]) CARATHEODORY, *Vorlesungen über reelle Functionen*. Leipzig u. Berlin, 1927, p. 529, Satz 2.

([8]) HAUSDORFF, *Mengenlehre*. Berlin u. Leipzig, 1927, p. 274.

2° La question se pose de savoir si *tout ensemble* $G_{\delta\sigma}$ *peut constituer l'ensemble de points de non-dérivabilité d'une fonction continue.*

Il est facile de démontrer que *la réponse à cette question est négative.* En effet, *il existe des ensembles* F_σ *qui ne peuvent pas être décomposés de la manière indiquée dans le théorème fondamental.* Prenons comme exemple un ensemble F_σ de première catégorie qui soit partout de mesure positive. Supposons que

$$F_\delta = G_\delta + G_{\delta\sigma} = G_\delta + F$$

où F'_σ est de mesure nulle. Il en résulte que l'ensemble G_δ est partout de mesure positive et, par suite, de deuxième catégorie, ce qui est contraire à l'hypothèse.

(Manuscrit reçu le 1er mars 1946.)