BULLETIN DE LA S. M. F.

LUCIEN GODEAUX

Sur les surfaces du cinquième ordre circonscrites à un hexaèdre complet

Bulletin de la S. M. F., tome 73 (1945), p. 27-42

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1945__73__27_0>

SUR LES SURFACES DU CINQUIÈME ORDRE CIRCONSCRITES A UN HEXAÈDRE COMPLET;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Les surfaces du 5^e ordre circonscrites à un hexaèdre complet, c'est-à-dire passant par les droites communes à 6 plans pris deux à deux, forment un système linéaire de dimension 5; elles se coupent deux à deux, en dehors de la base, suivant des courbes d'ordre 10 et de genre 11. Nous montrons que le long d'une de ces courbes, il existe une surface du 4^e ordre inscrite dans chacune des surfaces contenant cette courbe. D'autre part, pour chacune des surfaces du 5^e ordre envisagées, les sommets de l'hexaèdre sont doubles coniques. Ces propriétés nous permettent de déduire que chacune des surfaces du 5^e ordre envisagées représente une involution du 2^e ordre, possédant 20 points unis, appartenant à une surface que nous déterminerons.

Nous faisons voir ensuite que l'on peut transformer une des surfaces du 5^e ordre considérées en une surface d'ordre 10, appartenant à un espace linéaire à quatre dimensions, possédant 15 points triples à cônes tangents rationnels. De plus, il existe des hypersurfaces cubiques, passant par les 15 points triples, osculant la surface en tout point d'intersection. Il en résulte que la surface est l'image d'une involution cyclique d'ordre 3, possédant 15 points unis, appartenant à une surface dont nous déterminons les caractères.

De tout ceci, on conclut que la surface du cinquième ordre considérée est l'image d'une involution du 6^e ordre appartenant à une surface algébrique.

Les développements qui vont suivre constituent une application de la théorie des involutions cycliques, ayant un nombre fini de points unis, que nous avons développée depuis quelques années.

C'est à ce titre que cette note nous paraît présenter un certain intérêt [1].

1. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$ les faces d'un hexaèdre complet, quatre de ces plans ne passant donc jamais par un même point. Nous désignerons par a_{ik} la droite commune aux plans α_i, α_k et par A_{ikl} le point commun aux plans $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l$.

Il existe 15 droites a_{ik} et 20 points A_{ikl}. Une droite a_{ik} contient les 4 points A_{ikl} obtenus en donnant à l les valeurs $0, 1, \ldots, 5$ distinctes de i, k. Par un point A_{ikl} passent les droites a_{ik}, a_{il}, a_{kl}.

Cinq quelconques des 6 plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$ forment une surface du 5e ordre passant par les 15 droites a_{ik}. Désignons par F les surfaces du 5e ordre passant par les 15 droites a_{ik} et soit r la dimension du système $|F|$. Les surfaces F coupent le plan α_5 suivant 5 droites fixes et par conséquent, il existe ∞^{r-1} surfaces F comprenant le plan α_5 comme partie; elles sont complétées par les surfaces du 4e ordre circonscrites au pentaèdre complet formé par les plans $\alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_4$.

Les ∞^{r-1} surfaces du 4e ordre qui viennent d'être rencontrées coupent le plan α_4 suivant 4 droites fixes et par conséquent, il y en a ∞^{r-2} comprenant ce plan comme partie. Elles sont complétées par les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre formé par les plans $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ces surfaces sont en nombre ∞^3 et l'on a donc $r = 5$.

Si l'on désigne par

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_5 = 0$$

les équations respectives des plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$, la surface F générale a pour équation

$$\lambda_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 + \lambda_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 \varphi_0 + \ldots + \lambda_5 \varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 = 0.$$

Les surfaces F possèdent :

15 droites simples $a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{45}$;
20 points doubles coniques $A_{012}, A_{013}, \ldots, A_{345}$.

---

[1] On trouvera un résumé de nos recherches et la bibliographie de la question dans notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

2. Nous fixerons désormais l'attention sur une surface F irréductible déterminée et nous désignerons par C ses sections planes. Les courbes C sont de genre 6 et sont les courbes canoniques de la surface F; celle-ci a donc les genres

$$p_a = p_g = 4, \qquad p^{(1)} = 6, \qquad P_2 = 10, \qquad \ldots.$$

Chacun des points doubles coniques A_{ikl} est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré — 2, que nous désignerons par a_{ikl}.

Soient C^0, C^1, ..., C^5 les sections de F par les plans α_0, α_1, ..., α_5. Nous avons

$$(1) \qquad C \equiv C^i \equiv \Sigma a_{ik} + \Sigma a_{ikl}$$

où dans les sommations i est fixe, k et l prenant les valeurs 0, 1, ..., 5.

La droite a_{ik} coupe C en un point et chacune des courbes a_{ikl} où l est distinct de i, k, en un point. Il en résulte que la droite a_{ik} est une courbe rationnelle de degré — 3.

Les surfaces du système $|F|$ découpent, sur la surface F considérée, en dehors des droites a_{ik}, des courbes K d'ordre 10, formant un système linéaire $|K|$ de dimension 4. Le système $|K|$ est complet. Observons en effet qu'une courbe K ne peut appartenir à une quadrique, car les courbes K passent par les points A_{ikl} et cette quadrique devraient contenir les 15 droites a_{ik}. La série canonique d'une courbe C étant découpée par les quadriques, les courbes K déterminent, sur une courbe C, une série paracanonique g^4_{10}. Si le système complet $|K|$ avait une dimension supérieure à 4, il y aurait au moins une courbe K comprenant une courbe C comme partie; cette courbe serait complétée par une courbe d'ordre 5 passant par les 20 points A_{ikl} et coupant donc α_0 par exemple en 10 points, ce qui est absurde.

Considérons une courbe K irréductible déterminée et soient F' les surfaces du système $|F|$ passant par cette courbe. Les surfaces F' forment un faisceau comprenant la surface F sur laquelle nous avons fixé l'attention. Parmi les surfaces du faisceau, il en est une qui contient le plan α_5 par exemple comme partie. Elle est complétée par une surface du 4^e ordre circonscrite au pentaèdre formé par les plans α_0, α_1, ..., α_4. Plus généralement, la courbe K appartient à 6 surfaces du 4^e ordre circonscrites chacune à un des pentaèdres formé par 5 des 6 plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$.

D'après le théorème du reste, les courbes du système $|K|$ sont découpées sur F par les ∞^4 surfaces du 4^e ordre circonscrites à un de ces pentaèdres.

3. D'après la définition des courbes K, celles-ci satisfont à la relation fonctionnelle

$$5C \equiv K + \Sigma a_{ik} + 2\Sigma a_{ikl}, \tag{2}$$

les sommations s'étendant à toutes les valeurs de i, k, l.

Des relations (1), on déduit

$$6C \equiv C^0 + C^1 + \ldots + C^5 \equiv 2\Sigma a_{ik} + 3\Sigma a_{ikl}$$

et par conséquent, on a

$$C + K \equiv \Sigma a_{ik} + \Sigma a_{ikl}. \tag{3}$$

Nous avons vu qu'une courbe K appartient à 6 surfaces du 4^e ordre et par conséquent à une infinité de surfaces du 4^e ordre formant un système linéaire $|\Phi|$. Les surfaces Φ passant par une courbe K coupent encore F suivant des courbes K_1, d'ordre 10, et l'on a

$$4C \equiv K + K_1 + \Sigma a_{ikl}.$$

En comparant cette relation à la relation (2), on déduit

$$C + K_1 \equiv \Sigma a_{ik} + \Sigma a_{ikl}.$$

Par comparaison avec la relation (3), on a donc

$$K \equiv K_1.$$

Les surfaces Φ du 4^e ordre, passant par une courbe K, découpent donc sur F les courbes du système $|K|$. On a donc

$$4C \equiv 2K + \Sigma a_{ikl}. \tag{4}$$

On en déduit :

1° qu'il existe une surface du 4^e ordre, Φ_0, du système $|\Phi|$, inscrite dans la surface F le long de chaque courbe de $|K|$;

2° que les arêtes d'un pentaèdre formé par 5 des plans α_0, α_1, ..., α_5, forment une courbe K dégénérée.

Les surfaces du 4^e ordre passant par une de ces courbes K dégénérées sont en nombre ∞^1, par conséquent le système linéaire $|\Phi|$ des surfaces du 4^e ordre passent par une courbe K quelconque, a la dimension 4.

Les surfaces Φ, du 4^e ordre, assujetties à la seule condition de contenir une courbe K irréductible, sont de genres 1 ($p_a = P_k = 1$) et par conséquent tout système linéaire de courbes tracées sur une de ces surfaces a la dimension égale au genre. Cela étant, les ∞^4 surfaces Φ passant par une courbe K découpent sur l'une d'entre elles un système linéaire de sextiques de dimension 3. Ces sextiques sont donc de genre 3. Les surfaces du 4^e ordre passant par une sextique de genre 3 sont en nombre ∞^{12} et découpent sur l'une d'entre elles des courbes d'ordre 10 et de genre 11. Par suite, les courbes K sont de genre 11.

Les courbes K passent simplement par les points A_{ikl} et une surface du système $|F|$, ne contenant pas une courbe K déterminée, rencontre celle-ci en 10 points en dehors des points A_{ikl}. Le système $|K|$ a donc le degré 10.

Les courbes K *découpées sur une surface* F *irréductible par les autres surfaces du système* $|F|$, *sont d'ordre* 10 *et forment un système linéaire complet* $|K|$ *de degré* 10, *de genre* 11 *et de dimension* 4. *Ces courbes satisfont à la relation fonctionnelle* (4) *et le long de chaque courbe* K; *il existe une surface du* 4^e *ordre inscrite dans la surface* F.

4. Rapportons projectivement les quadriques Q de l'espace S_3 contenant F aux hyperplans d'un espace linéaire S_9 à 9 dimensions. Aux points de S_3 correspondent ceux d'une variété V_3^8, d'ordre 8, à 3 dimensions. A la surface F considérée correspond une surface tracée sur V_3^8, que nous désignerons par F_0.

Pour construire la surface F_0, observons qu'aux plans de S_3 correspondent sur V_3^8 des surfaces de Veronese formant un système linéaire ∞^3, dépourvu de points-base, deux surfaces du système se rencontrant suivant une conique. En adjoignant à F un plan quelconque, nous formons une surface du 6^e ordre à laquelle correspond, sur V_3^8, la section de cette variété par une hypersurface cubique. Cette section se compose de la surface F et de la surface de Veronese homologue du plan considéré.

La surface F_0 est donc découpée, sur la variété V_3^8, par une hypersurface cubique contenant une surface de Veronese de la variété. Inversement, les hypersurfaces cubiques ne contenant pas V_3^8 et passant par F_0, coupent encore V_3^8 suivant les ∞^3 surfaces de Veronese de cette variété.

Aux surfaces du 4ᵉ ordre Φ correspondent les sections de V_3^8 par des hyperquadriques.

Aux 20 points A_{ikl}, doubles coniques pour F, correspondent sur F_0 20 points doubles coniques que nous désignerons par les mêmes symboles.

Aux 15 droites a_{ik} correspondent sur F_0 des coniques que nous désignerons encore par les mêmes symboles. Une conique contient 4 points doubles et par un point double passent 3 coniques.

Aux courbes K de F correspondent sur F_0 des courbes d'ordre 20, que nous désignerons encore par K. Les sections hyperplanes de F_0 sont des courbes 2C et la relation (4) peut s'écrire

$$2(2C) \equiv 2K + \Sigma a_{ikl}.$$

La surface F_0, d'ordre 20 :

1° possède 20 points doubles coniques;

2° contient un système linéaire $|K|$ de courbes de même ordre que la surface, passant simplement par les points doubles et tel qu'il existe une hyperquadrique inscrite dans la surface le long de toute courbe de ce système.

Il en résulte, d'après un théorème que nous avons établi autrefois [1], que la surface F_0 est l'image d'une involution I_2, d'ordre 2, appartenant à une surface que nous désignerons par F_2. Cette involution possède 20 points unis qui correspondent aux 20 points doubles A_{ikl}.

---

[1] *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, p. 289-312).

Si p_a est le genre arithmétique et $p^{(1)}$ le genre linéaire de la surface F_2, nous avons, d'après les formules établies dans notre Mémoire cité,

$$12(p_a+1) = 2.12.5 - 3.20,$$

d'où $p_a = 4$,

$$p^{(1)} - 1 = 2(6-1),$$

d'où $p^{(1)} = 11$.

5. Nous prendrons comme modèle projectif de F_2, la surface normale dont les sections hyperplanes correspondent soit aux courbes $2C$, soit aux courbes K. Sur cette surface F_2, l'involution I_2 est déterminée par une homographie harmonique dont l'un des axes coupe la surface aux 20 points unis de l'involution.

Aux courbes C, de genre 6, de F_0, correspondent sur F_2 des courbes de genre 11, que nous désignerons par C_2. Les courbes C_2 forment un système linéaire $|C_2|$, de degré 10, dont la dimension est au moins égale à 3.

Aux sections hyperplanes $2C$ de F_0 correspondent sur F_2 des courbes du système linéaire $|2C_2|$, de degré 40 et de genre 31.

Aux courbes K de F_0 correspondent sur F_2 des courbes K_2, de genre 31, passant par les 20 points unis de I_2 et qui, d'après la théorie des involutions appartiennent au système $|2C_2|$.

Le système $|2C_2|$ a donc la dimension 14 et le modèle projectif de F_2 que nous envisageons est donc une surface d'ordre 40, à sections hyperplanes de genre 31, normale dans un espace linéaire S_{14} à 14 dimensions.

Sur cette surface F_2, l'involution I_2 est donc déterminée par une homographie harmonique ayant comme axes un espace linéaire σ_4, à 4 dimensions, ne rencontrant pas la surface, et un espace σ_9, à 9 dimensions, rencontrant la surface aux 20 points unis de I_2, points qui sont simples pour la surface. Les hyperplans passent par σ_4 découpant sur F_2 les transformées des courbes $2C$ de F_0; ceux qui passent par σ_9 découpent les courbes K_2.

A la conique a_{ik} de F_0 correspond sur F_2 une quartique elliptique que nous indiquerons par a'_{ik}. Si nous désignons par A'_{ikl} le point simple de F_2, uni pour I_2, homologue du point de diramation A_{ikl}, la quartique A'_{ik} contient 4 points A'_{ikl} et par un de ces points passent 3 quartiques analogues à a'_{ik}.

La quartique a'_{ik} est normale dans un espace à 3 dimensions rencontrant σ_9 suivant un plan et σ_4 suivant un point.

Le système canonique de F_0 est le système $|C|$, par conséquent, d'après un théorème de M. Enriques, $|C_2|$ est le système canonique de F_2. Si $|C_2|$ a une dimension supérieure à 3, c'est-à-dire si la surface F_2 est irrégulière, le système complet $|C_2|$ contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2. L'un, ∞^3, est le transformé de $|C|$; l'autre a pour points-base les 20 points unis de I_2. Comme $|C_2|$ a le degré 10, le dernier système est composé d'une seule courbe $\overline{C_2}$. A cette courbe correspond sur F_0 une courbe $\overline{C}$ d'ordre 10, elliptique, passant par les 20 points A_{ikl}. La courbe $\overline{C}$ rencontre les courbes C en 5 points et par conséquent il lui correspond sur F une quintique elliptique passant par les 20 points A_{ikl}, ce qui est absurde. Par conséquent, $\overline{C_2}$ ne peut exister, $|C_2|$ a la dimension 3 et la surface F_2 est régulière.

Le système $|2C_2|$ est le système bicanonique de F_2 et cette surface présente les caractères

$$p_a = p_g = 4, \qquad p^{(1)} = 11, \qquad P_2 = 15.$$

6. Retournons à la surface F. En combinant les relations (2) et (3), on obtient

$$3C + \Sigma a_{ik} \equiv 3K. \tag{5}$$

A deux courbes équivalentes sur la surface F ou F_0, correspondent sur F_2 deux courbes équivalentes. La relation (5) donne donc, sur F_2,

$$3C_2 + \Sigma a'_{ik} \equiv 3K_2,$$

c'est-à-dire, puisque $K_2 \equiv 2C_2$,

$$\Sigma a'_{ik} \equiv 3C_2. \tag{6}$$

D'ailleurs, les relations (1) donnent

$$\begin{aligned} C_2 &\equiv a'_{01} + a'_{02} + a'_{03} + a'_{04} + a'_{05}, \\ C_2 &\equiv a'_{01} + a'_{12} + a'_{13} + a'_{14} + a'_{15}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ C_2 &\equiv a'_{05} + a'_{15} + a'_{25} + a'_{35} + a'_{45}. \end{aligned}$$

Nous avons vu que parmi les courbes K se trouvent des courbes formées des 10 arêtes d'un des pentaèdres formés avec 5 des plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$. Sur la surface F_2, cette propriété conduit aux relations

$$\begin{array}{ll} K_2 \equiv \Sigma a'_{ik} & (i, k = 1, 2, 3, 4, 5), \\ K_2 \equiv \Sigma a'_{ik} & (i, k = 0, 2, 3, 4, 5), \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K_2 \equiv \Sigma a'_{ik} & (i, k = 0, 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

Considérons les intersections des courbes des deux membres de la relation (5) avec la courbe a'_{01}, par exemple. Cette courbe rencontre C_2 en 2 points et les courbes $a'_{02}, a'_{12}, a'_{03}, a'_{13}, \ldots, a'_{05}, a'_{15}$ chacune en 1 point. Si donc x est le degré de a'_{01}, on a

$$x + 8 = 3.2,$$

d'où $x = -2$. La courbe elliptique isolée a'_{01}, et de même les courbes a'_{ik}, ont le degré -2.

La surface F *est l'image d'une involution du* 2^e^ *ordre présentant* 20 *points unis appartenant à une surface* F_2 *de genres*

$$p_a = p_g = 4, \qquad p^{(1)} = 11, \qquad P_2 = 15.$$

Sur la surface F_2 *se trouvent* 15 *courbes elliptiques passant par les points unis de l'involution, un point uni appartenant à* 3 *courbes et une courbe contenant* 4 *points unis. L'ensemble de ces courbes constitue une courbe tricanonique de la surface.*

7. Rapportons projectivement les ∞^5 surfaces F aux hyperplans d'un espace linéaire S_5 à 5 dimensions. Aux points de l'espace S_5 correspondent ceux d'une variété normale V_3^{10}, à 3 dimensions d'ordre 10.

Les surfaces F touchant en A_{ikl} une droite p passant par ce point forment un système linéaire ∞^4 et il leur correspond les hyperplans passant par un point P de V_3^{10}. Ce point est simple pour cette variété. Lorsque la droite p varie, le point P décrit un plan, car une courbe K passe simplement par A_{ikl}. Nous désignerons ce plan par α_{ikl}.

Considérons maintenant une droite p s'appuyant sur la droite a_{01} par exemple, en un point P distinct de $A_{012}, A_{013}, A_{014}, A_{015}$.

Les surfaces F touchant en P la droite p rencontrent le plan pa_{01}, en dehors de a_{01}, suivant une courbe du 4e ordre coupant a_{01} en 5 points P, A_{012}, A_{013}, A_{014}, A_{015}. Cette courbe contient donc une seconde fois a_{01}. Les surfaces en question sont ∞^4 et forment un système linéaire de degré égal à celui du système $|K - a_{01}|$ sur une surface F, c'est-à-dire à 7. A ces surfaces correspondent les hyperplans passant par un point P' de V_3^{10}, triple pour cette variété. Lorsque la droite p et le point P varient, le point P' décrit une droite commune aux plans α_{012}, α_{013}, α_{014}, α_{015}. Cette droite, b_{01}, est triple pour la variété V_3^{10}.

A la surface F irréductible considérée, correspond une section hyperplane irréductible F_1 de V_3^{10}. Cette surface F_1 coupe les droites b_{ik}, homologues des droites a_{ik}, suivant 15 points triples que nous désignerons par A_{ik}. La surface F_1 contient 20 droites a_{ikl} appartenant aux plans α_{ikl}.

Aux points de F_1 infiniment voisins de A_{ik} correspondent les points de la droite a_{ik}. Il en résulte que le cône cubique tangent à F_1 en A_{ik} est rationnel et équivalent à la droite a_{ik} de degré -3. Ce cône est normal dans l'hyperplan S_4 contenant F_1.

La droite a_{ikl} représente le domaine du point A_{ikl} de F et est donc de degré -2.

Aux courbes K de F correspondent les sections hyperplanes de F_1; nous continuerons à les désigner par K. Aux courbes C de F correspondent sur F_1 des courbes du 10e ordre, passant par les 15 points triples A_{ik} de la surface; elles seront toujours désignées par C.

Observons en passant que les courbes C de F_1 ont pour sections hyperplanes les groupes d'une série paracanonique.

8. La surface F_1 possède :

1° 15 points triples coniques à cônes tangents rationnels;

2° Un système linéaire de courbes C, de même ordre que la surface, passant par les points triples, le long de chacune desquelles il y a une hypersurface cubique osculant la surface.

Cette seconde propriété est en effet la traduction projective de la relation fonctionnelle (5).

Il résulte de ces deux propriétés que la surface F_1 est l'image d'une involution cyclique d'ordre 3, I_3, appartenant à une certaine surface que nous désignerons par F_3 (¹). L'involution I_3 possède 15 points unis parfaits correspondant aux 15 points triples de F_1.

Le genre arithmétique p_a et le genre linéaire $p^{(1)}$ de la surface F_3 seront donnés par les formules

$$12(p_2+1) = 3.12.5 - 4.15,$$

d'où $p_a = 9$,

$$p^{(1)} - 1 = 3.5 + 15,$$

d'où $p^{(1)} = 31$.

Aux courbes C correspondent des courbes C_3, de genre 31, passant par les 15 points unis de l'involution I_3, homologues des points de diramation A_{ik}. Nous désignerons ces points unis par $A''_{01}, A''_{02}, \ldots, A''_{45}$. Le système $|C_3|$ a le degré effectif 15.

Aux courbes K correspondent sur F_3 des courbes K_3 de genre 31, formant un système linéaire, privé de points-base, de degré 30. D'après la théorie des involutions, les courbes C_3 et K_3 appartiennent à un même système linéaire.

Les courbes canoniques de F_1, c'est-à-dire les courbes C, passent simplement par les points triples A_{ik} de cette surface; elles ont, d'après la théorie des involutions, pour transformées les courbes canoniques de F_3 passant simplement par les points unis A''_{ik} de I_3. Il en résulte que le système canonique de F_3 est le système linéaire *complet* $|K_3| = |C_3|$.

Supposons que le système complet $|K_3|$ ait une dimension supérieure à $p_a - 1 = 8$. Il contient alors 3 systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_3 : le système des transformées des courbes K; celui des transformées des courbes C; enfin un système de courbes $\overline{K}_3$ qui, d'après la théorie des involutions, doivent avoir pour points doubles les points unis (parfaits) A''_{ik} de I_3. Le système $|K_3|$ étant de degré 30, la courbe $\overline{K}_3$, si elle existe, est isolée et de genre 16. Il lui correspond sur F_1 une courbe $\overline{K}$ d'ordre 10, de genre -4 d'après la formule de Zeuthen et par conséquent dégénérée. D'autre part, la courbe $\overline{K}_3$ n'est pas rencontrée par les courbes C_3 en dehors des points unis A''_{ik} et par conséquent à la courbe $\overline{K}$ doivent correspondre des points isolés

(¹) *Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de l'Acad. de Belgique*, 1921, p. 105-124).

de la surface F, en nombre au plus égal à 10, appartenant à toutes les courbes K. Ces points ne peuvent être parmi les points A_{ikl}, qui jouent des rôles symétriques. On en conclut que la courbe $\overline{K}_3$ ne peut exister. Le système canonique $|K_3|$ de F_3 a donc la dimension $p_a - 1 = 8$ et la surface F_3 est régulière ($p_g = p_a = 9$).

Nous prendrons comme surface F_3 le modèle projectif canonique de cette surface, c'est-à-dire une surface de l'ordre 30, de l'espace S_8, dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques $K_3 \equiv C_3$.

Sur cette surface, l'involution I_3 est engendrée par une homographie de S_3, de période 3, ayant deux axes ponctuels : l'un de ces axes est un espace σ_3, à 3 dimensions, ne rencontrant pas la surface; le second est un espace σ_4 à 4 dimensions, rencontrant la surface aux 15 points unis A''_{ik}. Les hyperplans passant par σ_3 découpent les courbes homologues des courbes K; ceux qui passent par σ_4 découpent les transformées des courbes C. Les points A''_{ik} sont simples pour F_3 et le plan tangent à la surface en un de ces points s'appuie suivant une droite sur σ_3.

9. Aux 20 courbes a_{ikl} de F correspondent sur F_3 des courbes elliptiques que nous désignerons par a''_{ikl}. Chacune de ces courbes contient 3 points A''_{ik} et par un de ces points, passent 4 courbes a''_{ikl}.

La courbe a_{ikl} coupant les courbes K en un point, la courbe a''_{ikl} coupe les courbes K_3 en 3 points et est donc une cubique elliptique dont le plan s'appuie suivant une droite sur σ_4 et suivant un point sur σ_3.

A deux courbes équivalentes de F correspondent deux courbes équivalentes de F_3, par conséquent la relation fonctionnelle (4) donne, sur F_3,

$$4C_3 \equiv 2K_3 + \Sigma a''_{ikl}.$$

On en déduit

$$2C_3 \equiv 2K_3 \equiv \Sigma a''_{ikl}. \tag{7}$$

L'ensemble des courbes a''_{ikl} constitue donc une courbe bicanonique de F_3.

Considérons la courbe a''_{012}. Elle contient les points A''_{01}, A''_{02}, A''_{12}. Par chacun de ces points passent trois autres courbes a''_{ikl};

par A''_{01} par exemple, passent les courbes a''_{013}, a''_{014}, a''_{015}. Si l'on coupe les courbes des deux membres de (7) par les courbes a''_{012} et si x est le degré de cette courbe, on a

$$6 = x + 9,$$

d'où $x = -3$. Les courbes a''_{012} et en général les courbes a''_{ikl} sont donc de degré -3.

La surface F *est l'image d'une involution cyclique du* 3e *ordre présentant* 15 *points unis parfaits, appartenant à une surface* F_3 *de genres*

$$p_a = p_g = 9, \qquad p^{(1)} = 31, \qquad P_2 = 40.$$

Sur la surface F_3 *se trouvent* 20 *courbes elliptiques passant par les points unis de l'involution, un point uni appartenant à* 4 *courbes et une courbe contenant* 3 *points unis. L'ensemble de ces courbes constitue une courbe bicanonique de la surface.*

10. A un point de F_2 correspond un point de F et à ce point, 3 points de F_3. A un point de F_3 correspond un point de F et à ce point, 2 points de F_2. Les surfaces F_2, F_3 sont donc liées par une correspondance (2, 3). Nous désignerons par F^* une surface représentant les couples de points homologues dans cette correspondance.

A un point de F correspondent 6 points de F^* se répartissant en deux groupes de 3 points d'une involution J_3 ayant F_2 comme image, ou en trois groupes de 2 points d'une involution J_2 ayant F_3 comme image.

A un point de F_2 infiniment voisin du point simple A'_{ikl} correspond un point de F infiniment voisin de A_{ikl} et à ce point correspondent 3 points de la courbe a_{ikl}. A ces trois couples de points homologues dans la correspondance (2, 3) entre F_2 et F_3 correspondent 3 points de F^* engendrant une courbe elliptique a^*_{ikl}.

A un point de la courbe a''_{ikl} correspondent sur F_2 2 points confondus en A'_{ikl}, par conséquent, dans la correspondance (1, 2) existant entre F_3 et F^*, la courbe de diramation est la courbe $\Sigma a''_{ikl}$. La courbe unie de l'involution J_2 est Σa^*_{ikl}.

De même, à un point de F_3 infiniment voisin du point simple A''_{ik} correspondent 2 points de la courbe a'_{ik}. Les couples de points ainsi obtenus sont représentés sur F^* par 2 points appartenant à une courbe elliptique a^*_{ik}, transformée de a'_{ik} et de A^*_{ik}.

A un point de A'_{ik} correspondent sur F_3 3 points confondus avec A''_{ik}, par conséquent, dans la correspondance (1, 3) existant entre F_2 et F^*, la courbe de diramation est $\Sigma a'_{ik}$. La courbe Σa^*_{ik} est la courbe unie de l'involution J_3.

A une courbe C de F correspond sur F^* une courbe C^*. Entre C_2 et C^*, nous avons une correspondance (1, 3) présentant 30 points de diramation, donc C^* est de genre 61. Entre C_3 et C^*, nous avons une correspondance (1, 2) dépourvue de points de diramation. On retrouve la valeur 61 pour le genre de C^*. Les courbes C^* forment un système linéaire $|C^*|$ de degré 30 et de genre 61.

A une courbe K de F correspond sur F^* une courbe K^*. Entre K_3 et K^*, nous avons une correspondance (1, 2) présentant 60 points de diramation, donc K^* est de genre 91. On retrouve cette valeur en considérant la correspondance (1, 3) entre les courbes K_2 et K^*. Le système linéaire $|K^*|$ a le degré 60 et le genre 91.

11. Étudions en premier lieu la correspondance (1, 2) existant entre F_3 et F^*. Cette correspondance possède, sur F_3, la courbe de diramation $\Sigma a''_{ikl}$ et 15 points fondamentaux A''_{ik}. Sur la surface F^*, elle possède la courbe unie Σa^*_{ikl} et les courbes fondamentales a''_{ik}.

Le système canonique de la surface F^* comprend les courbes transformées des courbes canoniques de F_3, augmentées de la courbe unie et des courbes fondamentales. Le système canonique de F_3 est $|K_3|$. Une courbe K_3, transformée d'une courbe K de F, ne passe pas par les points fondamentaux A''_{ik}. On en conclut que le système canonique de la surface F^* est

$$|K^* + \Sigma a^*_{ik} + \Sigma a^*_{ikl}|.$$

Partons maintenant d'une courbe C_3; sur F_3, elle appartient au système $|K_3|$ mais passe par les 15 points fondamentaux A''_{ik}. Sa transformée sur F^* se compose donc d'une courbe C^* augmentée des courbes fondamentales a^*_{ik}. Le système canonique de F^* est donc

$$|C^* + 2\Sigma a^*_{ik} + \Sigma a^*_{ikl}|.$$

On a d'ailleurs

$$K^\star \equiv C^\star + \Sigma a^\star_{ik}.$$

Observons que les courbes elliptiques a''_{ik} sont isolées et ne se rencontrent pas deux à deux. De même les courbes elliptiques $a^\star_{ikl}$ sont isolées et ne se rencontrent pas deux à deux. Une courbe $a^\star_{ik}$ rencontre 4 courbes $a^\star_{ikl}$ et une courbe $a^\star_{ikl}$ rencontre 3 courbes $a^\star_{ik}$. Les 60 points communs aux courbes $a^\star_{ik}$ et $a^\star_{ikl}$ sont unis à la fois pour les involutions J_2 et J_3.

Les courbes $a^\star_{ik}$ sont fondamentales pour le système $|K^\star|$ et les courbes $a^\star_{ikl}$ fondamentales pour le système $|C^\star|$.

Considérons maintenant la correspondance (1, 3) entre les surfaces F_2 et $F^\star$. Sur la première de ces surfaces, la correspondance possède la courbe de diramation $\Sigma a'_{ik}$ et 20 points fondamentaux A'_{ikl}. Sur $F^\star$, la correspondance possède la courbe unie $\Sigma a^\star_{ik}$ et les courbes fondamentales $a^\star_{ikl}$. Observons qu'à un point de a'_{ik} correspondent 3 points confondus de la courbe $a^\star_{ik}$. Il en résulte que le système canonique de $F^\star$ comprend les courbes transformées des courbes canoniques C_2 de F_2, augmentées de la courbe unie comptée deux fois et des courbes fondamentales. On retrouve donc le système

$$|C^\star + 2\Sigma a^\star_{ik} + \Sigma a^\star_{ikl}|.$$

Sur F_2, le système bicanonique comprend les courbes $2C_2$ et K_2. Considérons une courbe K_2; elle passe par les 15 points fondamentaux A'_{ikl} et sa transformée sur $F^\star$ est donc une courbe du système $|K^\star + \Sigma a_{ikl}|$. En ajoutant à cette courbe la courbe unie $\Sigma a^\star_{ik}$ comptée quatre fois et les courbes fondamentales comptées deux fois, on obtiendra une courbe bicanonique de la surface $F^\star$. On a donc

$$K^\star + \Sigma a^\star_{ikl} + 4\Sigma a^\star_{ik} + 2\Sigma a^\star_{ikl} \equiv 2(K^\star + \Sigma a^\star_{ik} + \Sigma a^\star_{ikl}).$$

Par conséquent, on a

$$K^\star \equiv 2\Sigma a^\star_{ik} + \Sigma a^\star_{ikl}. \tag{8}$$

On en déduit

$$C^\star \equiv \Sigma a^\star_{ik} + \Sigma a^\star_{ikl}. \tag{9}$$

De ces relations, on pourrait d'ailleurs déduire respectivement les relations (6) et (7), et inversement.

12. Soient p_a le genre arithmétique et $p^{(1)}$ le genre linéaire de la surface F^*. Des formules établies par M. Severi [1] sur les genres de deux surfaces en correspondance rationnelle, on déduit sans peine, en appliquant ces formules à la correspondance entre F_3 et F^*,

$$p_a = 34, \qquad p^{(1)} = 211.$$

Observons qu'en utilisant les relations (8) et (9), le système canonique de F^* peut être représenté par

$$|C^* + K^*| = |3\Sigma a^*_{ik} + 2\Sigma a^*_{ikl}|.$$

Référons-nous à un modèle bicanonique de la surface F^*; les sections hyperplanes sont donc les courbes $2C^* + 2K^*$; la surface est d'ordre 4×210 et appartient à un S_{244}.

Des relations (8) et (9) et du fait que les courbes a^*_{ik} sont fondamentales pour $|K^*|$, les courbes a^*_{ikl} fondamentales pour $|C^*|$, on déduit facilement que les courbes a^*_{ik} sont de degré -2 et sont, sur la surface bicanonique considérée, des quartiques elliptiques. Les courbes a^*_{ikl} sont de degré -3; ce sont des sextiques elliptiques sur le modèle bicanonique de la surface.

La surface du 5e ordre circonscrite à un hexaèdre complet, représente une involution du 6e ordre appartenant à une surface de genres

$$p_a = 34, \qquad p^{(1)} = 211.$$

(Manuscrit reçu le 31 janvier 1945.)

---

[1] *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* (*Rend. R. Istituto Lomb.*, 1903, p. 495-315).