BULLETIN DE LA S. M. F.

KY FAN

Sur l'approximation et l'intégration des fonctions aléatoires

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 97-117
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__97_0>

SUR L'APPROXIMATION ET L'INTÉGRATION DES FONCTIONS ALÉATOIRES;

PAR M. KY FAN.

1. On sait, depuis Weierstrass, que toute fonction continue peut être représentée comme limite d'une suite de polynomes. On sait d'autre part, que la formule générale d'interpolation due à M. E. Borel [1] fournit un complément remarquable au théorème de Weierstrass. M. Borel a notamment démontré, d'une manière ingénieuse et pourtant élémentaire, qu'on peut former, une fois pour toutes, des polynomes $P_{m,n}(t)$ $(0 \leqq m \leqq n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ jouissant de la propriété suivante : étant donnée une fonction $F(t)$ définie et continue sur l'intervalle fermé $(0, 1)$, on a

$$F(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{m=0}^{n} F\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(t),$$

avec convergence uniforme sur $(0, 1)$.

M. Borel définit ces polynomes $P_{m,n}(t)$ en introduisant d'abord les fonctions $\varphi_{m,n}(t)$ continues sur $(0, 1)$ qui sont définies par les égalités suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi_{m,n}(t) = 0 & \text{pour } 0 \leqq t \leqq \dfrac{m-1}{n} \text{ et pour } t \geqq \dfrac{m+1}{n}; \\ \varphi_{m,n}(t) = \quad nt - m + 1 & \text{pour } \dfrac{m-1}{n} \leqq t \leqq \dfrac{m}{n}; \\ \varphi_{m,n}(t) = -nt + m + 1 & \text{pour } \dfrac{m}{n} \leqq t \leqq \dfrac{m+1}{n}. \end{cases}$$

Les polynomes $P_{m,n}(t)$ sont alors choisis de façon à vérifier l'inégalité

$$(2) \qquad |\varphi_{m,n}(t) - P_{m,n}(t)| < \frac{1}{(n+1)^2} \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

---

[1] É. BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*, 2ᵉ éd., 1928, p. 80-81.

Nous disons qu'une *fonction aléatoire* (1) $X(t)$ est définie sur l'intervalle fermé $(0, 1)$, si à tout point t de l'intervalle correspond une variable aléatoire déterminée $X(t)$, toutes ces variables aléatoires étant définies sur une même catégorie d'épreuves. Nous allons montrer que les fonctions certaines (2) $\varphi_{m,n}(t)$ et les polynomes certains (2) $P_{m,n}(t)$ employés par M. Borel peuvent encore nous servir dans les divers modes d'approximation des fonctions aléatoires. Les résultats ainsi obtenus contiennent deux extensions du théorème de Weierstrass aux fonctions aléatoires.

Ces résultats seront appliqués à l'intégration des fonctions aléatoires. Nous établirons quelques propositions sur l'intégrale en probabilité et nous en donnerons une définition descriptive.

I. — APPROXIMATION DES FONCTIONS ALÉATOIRES CONTINUES EN PROBABILITÉ.

2. Pour l'approximation des fonctions aléatoires continues en probabilité (3), nous allons d'abord établir le théorème suivant :

Théorème 1. — *Pour toute fonction aléatoire* $X(t)$ *définie et continue en probabilité sur l'intervalle fermé* $(0, 1)$, *la suite des fonctions aléatoires*

$$\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right)\varphi_{m,n}(t) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

converge en probabilité vers $X(t)$ *et cela uniformément sur* $(0, 1)$.

Autrement dit, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre N assez grand tel que l'inégalité $n \geqq N$ entraîne

$$(3) \quad \text{Prob}\left\{\left|X(t) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right)\varphi_{m,n}(t)\right| \geqq \varepsilon\right\} < \varepsilon \qquad \text{pour tout } t \text{ de } (0, 1).$$

(1) *Cf.* A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin, 1933, p. 39.

(2) Nous appellerons *fonctions certaines* (*polynomes certains*) les fonctions (les polynomes) au sens ordinaire n'ayant aucun rapport avec le hasard.

(3) C'est-à-dire *stochastiquement continues* selon la terminologie de E. Slutsky.

Démonstration. — Comme la fonction aléatoire $X(t)$ est continue en probabilité sur l'intervalle fermé $(0, 1)$, la continuité en probabilité est nécessairement uniforme sur $(0, 1)$, d'après un théorème de Slutsky [1]. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut donc déterminer un nombre N assez grand tel que l'on ait

$$\operatorname{Prob}\left\{ |X(t_1) - X(t_2)| \geqq \frac{\varepsilon}{2} \right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout couple de points t_1, t_2 de $(0, 1)$ vérifiant l'inégalité

$$|t_1 - t_2| \leqq \frac{1}{N}.$$

Je dis maintenant que $n \geqq N$ entraîne l'inégalité (3). En effet, soient t_0 un point quelconque de $(0, 1)$ et n un entier $\geqq N$; on peut toujours trouver un nombre entier non négatif $h \leqq n$ tel que l'on ait

$$\frac{h-1}{n} < t_0 \leqq \frac{h}{n}.$$

On a donc

$$t_0 = \frac{h-\theta}{n} \qquad \text{avec } 0 \leqq \theta < 1.$$

D'où, en tenant compte de (1)

$$\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t_0) = \theta X\left(\frac{h-1}{n}\right) + (1-\theta) X\left(\frac{h}{n}\right)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Prob}\left\{ \left| X(t_0) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t_0) \right| \geqq \varepsilon \right\} \\
&= \operatorname{Prob}\left\{ \left| (1-\theta)\left(X(t_0) - X\left(\frac{h}{n}\right)\right) + \theta\left(X(t_0) - X\left(\frac{h-1}{n}\right)\right) \right| \geqq \varepsilon \right\} \\
&\leqq \operatorname{Prob}\left\{ (1-\theta) \left| X(t_0) - X\left(\frac{h}{n}\right) \right| \geqq \frac{\varepsilon}{2} \right\} + \operatorname{Prob}\left\{ \theta \left| X(t_0) - X\left(\frac{h-1}{n}\right) \right| \geqq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\
&\leqq \operatorname{Prob}\left\{ \left| X(t_0) - X\left(\frac{h}{n}\right) \right| \geqq \frac{\varepsilon}{2} \right\} + \operatorname{Prob}\left\{ \left| X(t_0) - X\left(\frac{h-1}{n}\right) \right| \geqq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \quad [2].
\end{aligned}$$

---

[1] E. SLUTSKY, *Qualche proposizione relativa alla teoria delle funzioni aleatorie* (*Giorn. Istituto Ital. Attuari*, t. 8, 1937, p. 183-199). (*Voir* Teorema 1, p. 186.)

[2] Car $0 \leqq \theta < 1$.

Or, le point t_0 se trouve dans l'intervalle $\left(\frac{h-1}{n}, \frac{h}{n}\right)$ et $n \geqq N$; on voit donc, d'après la définition de N, que les deux dernières probabilités sont toutes $< \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, on a

$$\text{Prob}\left\{\left| X(t_0) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t_0)\right| \geqq \varepsilon\right\} < \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

Mais, t_0 est un point quelconque de $(0, 1)$, l'inégalité (3) est donc vérifiée pour tout point t de $(0, 1)$, pourvu que $n \geqq N$.

C. Q. F. D.

3. En ajoutant une hypothèse supplémentaire à celle du théorème **1**, on peut remplacer les fonctions certaines $\varphi_{m,n}(t)$ par les polynomes certains $P_{m,n}(t)$ définis par (2). Voici le théorème.

Théorème **2**. — *Soit* $X(t)$ *une fonction aléatoire définie et continue en probabilité sur* $(0, 1)$. *Si la valeur moyenne* (1) $\mathfrak{M}\,|X(t)|$ *de* $|X(t)|$ *est bornée quand* t *varie dans* $(0, 1)$, *la suite des fonctions aléatoires*

$$\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(t) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

converge en probabilité vers $X(t)$ *et cela uniformément sur* $(0, 1)$.

Démonstration. — Il s'agit de prouver qu'on a, pour tout nombre positif ε,

$$\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\left\{\left| X(t) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(t)\right| \geqq \varepsilon\right\} = 0,$$

uniformément par rapport à t.

D'après (2), on a

$$P_{m,n}(t) = \varphi_{m,n}(t) + \frac{1}{(n+1)^2}\,\omega_{m,n}(t) \qquad \text{avec } |\omega_{m,n}(t)| < 1.$$

(1) D'une façon générale, $\mathfrak{M}X$ désigne la valeur moyenne (= l'espérance mathématique) d'une variable aléatoire X.

D'où

$$(4)\quad \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(t) = \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t) + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \omega_{m,n}(t).$$

Il en résulte alors

$$\begin{aligned} &\operatorname{Prob}\left\{\left| X(t) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(t)\right| \geqq \varepsilon\right\} \\ &\leqq \operatorname{Prob}\left\{\left| X(t) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t)\right| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &+ \operatorname{Prob}\left\{\left| \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \omega_{m,n}(t)\right| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 1, la première probabilité du second membre converge uniformément par rapport à t, vers zéro, quand $n \to \infty$. Il nous suffit donc de montrer qu'on a, pour tout nombre positif ε,

$$(5)\qquad \lim_{n \to \infty} \operatorname{Prob}\left\{\left| \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \omega_{m,n}(t)\right| \geqq \varepsilon\right\} = 0,$$

avec convergence uniforme sur $(0, 1)$.

En appliquant l'inégalité de Bienaymé, nous écrivons

$$\begin{aligned} &\operatorname{Prob}\left\{\left| \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \omega_{m,n}(t)\right| \geqq \varepsilon\right\} \\ &\leqq \frac{1}{(n+1)^2 \varepsilon}\, \mathfrak{M}\left| \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \omega_{m,n}(t)\right|. \end{aligned}$$

Or, comme $|\omega_{m,n}(t)| < 1$, on a

$$\left| \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \omega_{m,n}(t)\right| \leqq \sum_{m=0}^{n} \left| X\left(\frac{m}{n}\right)\right|,$$

et par conséquent, en appelant C la borne de $\mathfrak{M}|X(t)|$,

$$\mathfrak{M}\left| \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \omega_{m,n}(t)\right| \leqq \sum_{m=0}^{n} \mathfrak{M}\left| X\left(\frac{m}{n}\right)\right| < (n+1)C.$$

Il vient donc

$$\text{Prob}\left\{\left|\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right)\omega_{m,n}(t)\right| \geqq \varepsilon\right\} < \frac{C}{(n+1)\varepsilon}.$$

Ainsi la convergence (5) a lieu uniformément sur (0, 1), ce qui achève la démonstration.

Le théorème précédent est une extension du théorème de M. Borel cité plus haut. Dans le cas particulier, où, pour tout point t de (0, 1) la variable aléatoire $X(t)$ correspondant à t est un nombre certain, notre théorème **2** se réduit à celui de M. Borel.

L'expression

$$\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(t)$$

est un polynome en t, dont les coefficients sont des variables aléatoires. On peut donc l'appeler *polynome aléatoire* et énoncer la proposition suivante généralisant le théorème classique de Weierstrass :

Soit $\mathbf{X}(t)$ *une fonction aléatoire définie et continue en probabilité sur* (0, 1). *Si la valeur moyenne de* $|X(t)|$ *est bornée sur* (0, 1), $X(t)$ *est limite uniforme d'une suite de polynomes aléatoires, la limite étant prise au sens de la convergence en probabilité.*

II. — APPROXIMATION DES FONCTIONS ALÉATOIRES f-CONTINUES EN MOYENNE.

4. Soit $f(x)$ une fonction certaine, définie et constamment croissante sur $0 \leqq x < +\infty$, nulle pour $x = 0$ et vérifiant la condition suivante : il existe un nombre positif B tel qu'on ait

$$f(x_1 + x_2) \leqq B f(x_1) + B f(x_2) \tag{6}$$

pour tout couple de nombres non négatifs x_1, x_2 [1].

---

[1] A titre d'exemple, les fonctions certaines $x^p (p > 0)$, $\dfrac{ax}{1+ax} (a > 0)$, $1 - e^{-x}$, $\text{th}\, x$ définies pour $0 \leqq x < +\infty$, sont des fonctions satisfaisant à toutes ces conditions. On peut en former beaucoup d'autres, car toute combinaison linéaire à coefficients positifs d'un nombre fini de telles fonctions est évidemment encore une telle fonction.

En utilisant cette fonction certaine $f(x)$, nous allons définir la *f-continuité en moyenne* d'une fonction aléatoire. Nous supposons dans les nos 4 à 7, que les fonctions aléatoires considérées $X(t)$ vérifient la condition suivante : *pour tout point t de* (o, 1), *la valeur moyenne* $\mathfrak{M}f(|X(t)|)$ *existe.* Sous cette limitation, la valeur moyenne $\mathfrak{M}f(|X(t_1)-X(t_2)|)$ existe aussi, quels que soient deux points t_1, t_2 de (o, 1). En effet, on a d'abord

$$|X(t_1)-X(t_2)| \leqq |X(t_1)|+|X(t_2)|$$

et, puisque $f(x)$ est croissante,

$$f\big(|X(t_1)-X(t_2)|\big) \leqq f\big(|X(t_1)|+|X(t_2)|\big).$$

Il vient alors

$$f\big(|X(t_1)-X(t_2)|\big) \leqq B f\big(|X(t_1)|\big)+B f\big(|X(t_2)|\big),$$
$$\mathfrak{M}f\big(|X(t_1)-X(t_2)|\big) \leqq B\,\mathfrak{M}f\big(|X(t_1)|\big)+B\,\mathfrak{M}f\big(|X(t_2)|\big).$$

Donc, la valeur moyenne $\mathfrak{M}f(|X(t_1)-X(t_2)|)$ existe.

Une fonction aléatoire $X(t)$ définie sur (o, 1) est dite *f-continue en moyenne* à un point t_0 de (o, 1), si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que l'on ait

$$\mathfrak{M}f\big(|X(t)-X(t_0)|\big) < \varepsilon$$

pour tout point t de (o, 1) vérifiant l'inégalité $|t-t_0| < \delta$. Si la fonction aléatoire est f-continue en moyenne en tout point de (o, 1), on dit qu'elle est f-continue en moyenne sur (o, 1).

La f-continuité en moyenne est introduite pour englober, entre autres, deux modes importants de continuité, à savoir : continuité en probabilité et continuité en moyenne d'ordre p ($p > 0$).

En effet, si pour une fonction certaine particulière $f(x)$ (vérifiant les conditions précisées plus haut), la fonction aléatoire $X(t)$ est f-continue en moyenne au point t_0, elle est aussi continue en probabilité au point t_0. Cela résulte immédiatement de l'inégalité de Bienaymé généralisée

$$\text{Prob}\,\{|X(t)-X(t_0)| \geqq \varepsilon\} \leqq \frac{\mathfrak{M}f\big(|X(t)-X(t_0)|\big)}{f(\varepsilon)}.$$

Inversement, si la fonction certaine $f(x)$ vérifie non seulement les conditions précisées plus haut, mais elle est bornée sur $0 \leqq x < +\infty$ et continue au point $x = 0$, alors toute fonction aléatoire $X(t)$ continue en probabilité en un point t_0 est aussi f-continue en moyenne en ce point. Cela résulte de l'inégalité suivante [1] :

$$\mathfrak{M} f\left(|X(t) - X(t_0)|\right) \leqq f(\varepsilon) + K.\text{Prob}\{|X(t) - X(t_0)| \geqq \varepsilon\},$$

où l'on suppose $f(x) \leqq K$ pour $0 \leqq x < +\infty$.

Ainsi, *pour toute fonction certaine* $f(x)$, *définie et bornée sur* $0 \leqq x < +\infty$, *constamment croissante, nulle pour* $x = 0$, *continue au point* $x = 0$ *et vérifiant la condition* (6) $\left(\text{Telles sont par exemple les fonctions } f(x) = \frac{ax}{1 + ax} \text{ avec } a > 0,\ f(x) = 1 - e^{-x}\right)$, *la f-continuité en moyenne équivaut à la continuité en probabilité.*

En outre, la fonction certaine $f(x) = |x|^p$, où p est un nombre positif quelconque, vérifie évidemment les hypothèses que nous avons faites sur $f(x)$ au début de ce numéro [2]. Dans ce cas où $f(x) = |x|^p$, les fonctions aléatoires f-continues en moyenne sont ce qu'on appelle habituellement fonctions aléatoires *continues en moyenne d'ordre p.*

5. Lemme 1. — *Toute fonction aléatoire* $X(t)$ *définie et f-continue en moyenne sur l'intervalle fermé* $(0, 1)$ *y est uniformément f-continue en moyenne.*

C'est-à-dire qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif δ tel qu'on ait

$$\mathfrak{M} f\left(|X(t_1) - X(t_2)|\right) < \varepsilon$$

pour tout couple de points t_1, t_2 de $(0, 1)$ à une distance inférieure à δ.

---

(1) *Cf.* Kolmogoroff, *op. cit.*, p. 38.

(2) Dans le cas actuel où $f(x) = |x|^p$ $(p > 0)$, on peut prendre $B = 2^{p-1}$ ou 1 selon $p \geqq 1$ ou non.

Démonstration. — Dans le cas contraire, on pourrait trouver un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, quel que soit n, il y ait deux points t_n, t'_n de $(0, 1)$ vérifiant

$$|t_n - t'_n| < \frac{1}{n}, \qquad \mathfrak{M}f\big(|X(t_n) - X(t'_n)|\big) \geqq \varepsilon.$$

De la suite $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ on pourrait extraire une suite t_{p_1}, $t_{p_2}, \ldots, t_{p_n}, \ldots$ convergeant vers un point t_0 de $(0, 1)$. Alors, la suite $t'_{p_1}, t'_{p_2}, \ldots, t'_{p_n}, \ldots$ convergerait vers la même limite t_0. Or, on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}f\big(|X(t_{p_n}) - X(t'_{p_n})|\big) &\leqq \mathfrak{M}f\big(|X(t_{p_n}) - X(t_0)| + |X(t'_{p_n}) - X(t_0)|\big)\\ &\leqq B\,\mathfrak{M}f\big(|X(t_{p_n}) - X(t_0)|\big) + B\,\mathfrak{M}f\big(|X(t'_{p_n}) - X(t_0)|\big).\end{aligned}$$

Les deux quantités du dernier membre tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il est donc impossible que $\mathfrak{M}f\big(|X(t_{p_n}) - X(t'_{p_n})|\big)$ reste $\geqq \varepsilon$.

C. Q. F. D.

Lemme 2. — *Pour toute fonction aléatoire* $X(t)$, *définie et f-continue en moyenne sur* $(0, 1)$, $\mathfrak{M}f\big(|X(t)|\big)$ *est borné sur* $(0, 1)$.

Démonstration. — Prenons d'abord un nombre positif ε arbitrairement choisi. D'après le lemme 1, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $|t_1 - t_2| < \delta$ implique $\mathfrak{M}f\big(|X(t_1) - X(t_2)|\big) < \varepsilon$. Les nombres ε, δ étant ainsi choisis, je dis que, quel que soit le nombre entier positif n, $|t_1 - t_2| < n\delta$ implique aussi

$$\mathfrak{M}f\big(|X(t_1) - X(t_2)|\big) < \psi(\varepsilon, n, B),$$

où

$$\psi(\varepsilon, n, B) = \varepsilon(B + B^2 + \ldots + B^{n-2} + 2B^{n-1}).$$

En effet, soient $t_1 < t_2$ deux points tels que $|t_1 - t_2| < n\delta$. Partageons l'intervalle (t_1, t_2) en n parties égales à l'aide des points de division $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = t_2$. On a alors

$$|\tau_{i-1} - \tau_i| < \delta$$

et, par suite,

$$\mathfrak{M}f\big(|X(\tau_{i-1}) - X(\tau_i)|\big) < \varepsilon.$$

D'autre part, en utilisant les hypothèses faites concernant la fonction certaine $f(x)$, nous avons

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M} f\big(|X(t_1)-X(t_2)|\big)\\ &\quad\leqq B\mathfrak{M} f\big(|X(\tau_0)-X(\tau_1)|\big)+B^2\mathfrak{M} f\big(|X(\tau_1)-X(\tau_2)|\big)+\ldots\\ &\quad+B^{n-2}\mathfrak{M} f\big(|X(\tau_{n-3})-X(\tau_{n-2})|\big)+B^{n-1}\mathfrak{M} f\big(|X(\tau_{n-2})-X(\tau_{n-1})|\big)+\\ &\quad+B^{n-1}\mathfrak{M} f\big(|X(\tau_{n-1})-X(\tau_n)|\big).\end{aligned}$$

Il vient donc que

$$\mathfrak{M} f\big(|X(t_1)-X(t_2)|\big)<\psi(\varepsilon, n, B).$$

Dès lors, si l'on prend N assez grand pour qu'on ait $N\delta > 1$, on aura

$$\mathfrak{M} f\big(|X(t_1)-X(t_2)|\big)<\psi(\varepsilon, N, B),$$

quels que soient deux points t_1, t_2 de $(0, 1)$. En particulier, on a, pour tout t de $(0, 1)$,

$$\mathfrak{M} f\big(|X(t)-X(0)|\big)<\psi(\varepsilon, N, B),$$

d'où

$$\mathfrak{M} f\big(|X(t)|\big)<B\mathfrak{M} f\big(|X(0)|\big)+B\psi(\varepsilon, N, B).$$

C. Q. F. D.

6. Énonçons à présent le théorème suivant :

Théorème 3. — *Pour toute fonction aléatoire* $X(t)$, *définie et* f*-continue en moyenne sur* $(0, 1)$, *on a*

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M} f\left(\left|X(t)-\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right)\varphi_{m,n}(t)\right|\right)=0 \tag{7}$$

avec convergence uniforme sur $(0, 1)$.

Démonstration. — D'après le lemme 1, $X(t)$ est uniformément f-continue en moyenne sur $(0, 1)$. Étant donné un nombre positif ε, on peut donc trouver un nombre N assez grand tel que

$$|t_1-t_2|\leqq\frac{1}{N}$$

entraîne

$$\mathfrak{M} f\big(|X(t_1)-X(t_2)|\big)<\frac{\varepsilon}{2B}\ \ (^1).$$

---

(1) B désigne toujours la constante positive figurant dans la condition (6).

Je vais montrer que, pour ce nombre N ainsi choisi, l'inégalité $n \geqq N$ entraîne

$$\mathfrak{M} f\left(\left|X(t)-\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t)\right|\right)<\varepsilon \qquad (0 \leqq t \leqq 1). \tag{8}$$

Cela est suffisant pour démontrer notre théorème, puisque la fonction certaine $f(x)$ ne prend que des valeurs non négatives.

Soit t_0 un point quelconque de $(0, 1)$ et $n \geqq N$. On peut trouver, comme dans la démonstration du théorème **1**, un nombre entier $h \leqq n$ tel que

$$t_0=\frac{h-\theta}{n} \qquad \text{avec } 0 \leqq \theta<1.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} & X(t_0)-\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t_0) \\ & \quad=(1-\theta)\left(X(t_0)-X\left(\frac{h}{n}\right)\right)+\theta\left(X(t_0)-X\left(\frac{h-1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M} f\left(\left|X(t_0)-\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t_0)\right|\right) \\ & \quad \leqq B\, \mathfrak{M} f\left((1-\theta)\left|X(t_0)-X\left(\frac{h}{n}\right)\right|\right)+B\, \mathfrak{M} f\left(\theta\left|X(t_0)-X\left(\frac{h-1}{n}\right)\right|\right). \end{aligned}$$

Comme $0 \leqq \theta < 1$ et $f(x)$ est une fonction croissante, il vient donc

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M} f\left(\left|X(t_0)-\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t_0)\right|\right) \\ & \quad \leqq B\, \mathfrak{M} f\left(\left|X(t_0)-X\left(\frac{h}{n}\right)\right|\right)+B\, \mathfrak{M} f\left(\left|X(t_0)-X\left(\frac{h-1}{n}\right)\right|\right). \end{aligned}$$

Or, t_0 est entre $\frac{h-1}{n}$ et $\frac{h}{n}$, et $n \geqq N$, on voit alors, d'après la définition de N, que les deux quantités du second membre sont chacune $< \frac{\varepsilon}{2}$. Le premier membre est donc $<\varepsilon$ pour $n \geqq N$. Ainsi, l'inégalité (8) a lieu pour tout point t de $(0, 1)$, pourvu que $n \geqq N$.　　　　C. Q. F. D.

Observons que le théorème 1 peut être regardé comme un cas particulier du théorème 3. En effet, le théorème 3 se réduit au théorème 1, si l'on prend pour $f(x)$ une fonction certaine qui, non seulement vérifiant les conditions précisées au début du n° 4, est bornée sur $0 \leqq x < +\infty$ et continue au point $x = 0$.

7. Le théorème 3 s'applique en particulier aux fonctions aléatoires continues en moyenne d'ordre p positif quelconque. Si nous supposons $p \geqq 1$, ce qui englobe les deux cas les plus importants $p = 1$ et $p = 2$, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Pour toute fonction aléatoire* $X(t)$, *définie et continue en moyenne d'ordre p* ($p \geqq 1$) *sur* $(0, 1)$, *on a*

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M} \left| X(t) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(t) \right|^p = 0 \tag{9}$$

avec convergence uniforme sur $(0, 1)$.

Démonstration. — On tire d'abord de (4)

$$\mathfrak{M} \left| X(t) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(t) \right|^p$$
$$\leqq B\,\mathfrak{M} \left| X(t) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t) \right|^p + B\,\mathfrak{M} \left| \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \omega_{m,n}(t) \right|^p.$$

D'après le théorème 3,

$$\mathfrak{M} \left| X(t) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t) \right|^p$$

tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il suffit donc de montrer que

$$\mathfrak{M} \left| \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \omega_{m,n}(t) \right|^p \tag{10}$$

tend aussi uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Pour cela, observons d'abord qu'il existe, en vertu du lemme 2, un nombre C tel que

$$\mathfrak{M}\,|\,X(t)\,|^p < C \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

Si $p = 1$, on a, en tenant compte de $|\,\omega_{m,n}(t)\,| < 1$,

$$\mathfrak{M}\left|\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right)\omega_{m,n}(t)\right| \leqq \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{m=0}^{n}\mathfrak{M}\left|X\left(\frac{m}{n}\right)\right| < \frac{C}{n+1}.$$

Ainsi, dans le cas $p = 1$, l'expression (10) tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Si $p > 1$, appelons q le nombre défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En employant une inégalité bien connue, nous avons

$$\left|\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right)\omega_{m,n}(t)\right|^p \leqq \left(\sum_{m=0}^{n}\left|X\left(\frac{m}{n}\right)\right|^p\right)\left(\sum_{m=0}^{n}|\,\omega_{m,n}(t)\,|^q\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Comme $|\,\omega_{m,n}(t)\,| < 1$, on a alors

$$\left|\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right)\omega_{m,n}(t)\right|^p \leqq (n+1)^{\frac{p}{q}}\sum_{m=0}^{n}\left|X\left(\frac{m}{n}\right)\right|^p.$$

D'où

$$\mathfrak{M}\left|\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right)\omega_{m,n}(t)\right|^p$$

$$\leqq (n+1)^{\frac{p}{q}-2p}\sum_{m=0}^{n}\mathfrak{M}\left|X\left(\frac{m}{n}\right)\right|^p < C(n+1)^{\frac{p}{q}-2p+1}.$$

Cette dernière quantité tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, car

$$\frac{p}{q} - 2p + 1 = -p < -1.$$

Ainsi, pour $p > 1$, l'expression (10) tend aussi uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Le théorème est donc établi.

Nous avons ainsi encore une extension du théorème de Weierstrass aux fonctions aléatoires : *Toute fonction aléatoire* *définie et continue en moyenne d'ordre p $(p \geqq 1)$ sur $(0, 1)$ est limite uniforme d'une suite de polynomes aléatoires, la limite étant prise au sens de la convergence en moyenne d'ordre p.*

III. — INTÉGRALES EN PROBABILITÉ.

8. Passons à présent aux intégrales en probabilité et commençons par rappeler la définition de E. Slutsky ([1]). Soit $X(t)$ une fonction aléatoire définie sur l'intervalle fermé (a, b), où $a < b$. Imaginons l'intervalle (a, b) décomposé en un certain nombre fini d'intervalles partiels par les points de division

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b;$$

prenons dans chaque intervalle (t_{i-1}, t_i) un point τ_i arbitrairement choisi ([2]), et formons la somme

$$S = \sum_{i=1}^{n} X(\tau_i)(t_i - t_{i-1}).$$

S est une variable aléatoire dépendant de la fonction aléatoire $X(t)$, du mode de subdivision de (a, b) et du choix des points τ_i. La fonction aléatoire $X(t)$ est dite *intégrable en probabilité* sur (a, b), si S converge en probabilité vers une variable aléatoire J, lorsque la longueur maxima des intervalles partiels (t_{i-1}, t_i) tend vers zéro ([3]). Autrement dit, à tout nombre positif ε on peut faire

---

([1]) E. Slutsky, *Sur les fonctions éventuelles compactes* (*Atti Congresso Intern. Matematici*, Bologna, 1928, t. 6, p. 111-115); *Sur les fonctions éventuelles continues, intégrables et dérivables dans le sens stochastique* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 187, 1928, p. 878-880).

([2]) M. Slutsky dit que chaque point τ_i est choisi *au hasard* dans l'intervalle partiel (t_{i-1}, t_i). Mais nous pensons que le choix des points τ_i est seulement arbitraire, et que dans ce choix le hasard n'intervient pas. Il faut en effet distinguer *le choix au hasard* et *le choix arbitraire*.

([3]) En remplaçant la convergence en probabilité par la convergence en moyenne d'ordre p $(p > 0)$ ou par la convergence presque certaine, on définit d'une façon analogue l'*intégration en moyenne d'ordre p* ou *l'intégration presque certaine*. M. Fréchet propose d'appeler *intégrale stochastique* l'intégrale d'une fonction aléatoire selon l'un quelconque de ces divers modes d'intégration, alors le terme « intégrale stochastique » a été introduit par Slutsky pour désigner ce que nous appelons ici intégrale en probabilité. Notons encore qu'une remarque analogue s'applique aux divers modes de continuité des fonctions aléatoires.

correspondre un nombre positif η tel qu'on ait

$$\mathrm{Prob}\,\{\,|\,S - J\,| \geqq \varepsilon\,\} < \varepsilon,$$

pourvu que toutes les différences $t_i - t_{i-1}$ soient $< \eta$. La variable aléatoire J est appelée *l'intégrale en probabilité* de $X(t)$ sur (a, b) (¹) et se représente par le symbole

$$J = (\mathrm{I.\ e.\ p.}) \int_a^b X(t)\,dt.$$

9. Théorème 5. — *Soit*

$$X_1(t),\ X_2(t),\ \ldots,\ X_k(t),\ \ldots$$

une suite de fonctions aléatoires intégrables en probabilité sur (a, b) *et telles que* $\mathfrak{M}\,|\,X_k(t)\,|$ *existe* ($k = 1, 2, 3, \ldots;\ a \leqq t \leqq b$). *Soit d'autre part* $X(t)$ *une fonction aléatoire définie sur* (a, b) *et telle que* $\mathfrak{M}\,|\,X(t)\,|$ *existe* ($a \leqq t \leqq b$) (²). *Si l'on a*

$$\lim_{k \to \infty} \mathfrak{M}\,|\,X(t) - X_k(t)\,| = 0 \tag{11}$$

uniformément sur (a, b), $X(t)$ *est aussi intégrable en probabilité sur* (a, b) *et, de plus, la suite des intégrales en probabilité*

$$(\mathrm{I.\ e.\ p.}) \int_a^b X_k(t)\,dt \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{12}$$

converge en probabilité vers l'intégrale en probabilité de $X(t)$ *sur* (a, b).

Démonstration. — 1° Montrons d'abord que la suite (12) converge en probabilité vers une variable aléatoire J. En posant

$$J_k = (\mathrm{I.\ e.\ p.}) \int_a^b X_k(t)\,dt \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

(¹) L'intégrale en probabilité sur (a, b) d'une fonction aléatoire intégrable en probabilité est unique, si l'on considère deux variables aléatoires presque certainement égales comme non distinctes.

(²) Bien entendu, toutes les fonctions aléatoires considérées ici se rapportent à une même catégorie d'épreuves.

on a

$$\text{(13)}\qquad \begin{aligned}&\operatorname{Prob}\{|J_k - J_{k+q}| \geqq \varepsilon\}\\ \leqq\ &\operatorname{Prob}\left\{\left|J_k - \sum X_k(\tau_i)(t_i - t_{i-1})\right| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\\ +\ &\operatorname{Prob}\left\{\left|J_{k+q} - \sum_i X_{k+q}(\tau_i)(t_i - t_{i-1})\right| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\\ +\ &\operatorname{Prob}\left\{\left|\sum_i [X_k(\tau_i) - X_{k+q}(\tau_i)](t_i - t_{i-1})\right| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\},\end{aligned}$$

l'inégalité, qui est valide quels que soient les indices k, $k+q$, quel que soit le nombre positif ε et quels que soient les points t_i, τ_i.

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}&\operatorname{Prob}\left\{\left|\sum_i [X_k(\tau_i) - X_{k+q}(\tau_i)](t_i - t_{i-1})\right| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\\ &\leqq \frac{3}{\varepsilon}\mathfrak{M}\left|\sum_i [X_k(\tau_i) - X_{k+q}(\tau_i)](t_i - t_{i-1})\right|\\ &\leqq \frac{3}{\varepsilon}\sum_i (t_i - t_{i-1})\mathfrak{M}\,|X_k(\tau_i) - X_{k+q}(\tau_i)|.\end{aligned}$$

Or, d'après la convergence uniforme (11), étant donné un nombre positif ε, on peut déterminer un entier positif K assez grand tel qu'on ait

$$\mathfrak{M}\,|X_k(t) - X_{k+q}(t)| < \frac{\varepsilon^2}{9}\,\frac{1}{b-a} \qquad (a \leqq t \leqq b),$$

pour tout $k \geqq K$ et pour tout $q > 0$. On a alors pour tout $k \geqq K$ et $q > 0$

$$\text{(14)}\qquad \operatorname{Prob}\left\{\left|\sum_i [X_k(\tau_i) - X_{k+q}(\tau_i)](t_i - t_{i-1})\right| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\} < \frac{\varepsilon}{3},$$

l'inégalité qui est valide sous la seule condition $k \geqq K$ et $q > 0$; les points t_i, τ_i n'étant soumis à aucune condition.

Ayant ainsi choisi K, soient maintenant k un entier fixe $\geqq K$ et q un entier positif fixe. On peut diviser (a, b) en intervalles partiels (t_{i-1}, t_i) assez petits tels que les deux inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\text{(15)}\qquad \operatorname{Prob}\left\{\left|J_k - \sum_i X_k(\tau_i)(t_i - t_{i-1})\right| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\text{(16)}\qquad \operatorname{Prob}\left\{\left|J_{k+q} - \sum_i X_{k+q}(\tau_i)(t_i - t_{i-1})\right| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après (13), (14), (15) et (16), on a finalement le résultat suivant : étant donné un nombre positif ε, on peut déterminer un nombre entier K assez grand tel qu'on ait

$$\text{Prob}\{|J_k - J_{k+q}| \geqq \varepsilon\} < \varepsilon$$

pour tout $k \geqq K$ et pour tout $q > 0$. En appliquant un critère bien connu (dû à E. Slutsky) de la convergence en probabilité [1], il en résulte alors que la suite (12) converge en probabilité vers une variable aléatoire, que nous désignons par J.

2° Nous allons maintenant prouver que la fonction aléatoire $X(t)$ est intégrable en probabilité sur (a, b) et qu'on a

$$J = (\text{I. e. p.}) \int_a^b X(t)\,dt. \tag{17}$$

Soit ε un nombre positif arbitrairement donné. Quels que soient les points t_i, τ_i et quel que soit l'indice k, on a

$$\begin{aligned}
&\text{Prob}\left\{\left|\sum X(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - J\right| \geqq \varepsilon\right\} \\
\leqq\ &\text{Prob}\left\{\left|\sum_i [X(\tau_i) - X_k(\tau_i)](t_i - t_{i-1})\right| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \\
&+ \text{Prob}\left\{|J_k - J| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \\
&+ \text{Prob}\left\{\left|\sum_i X_k(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - J_k\right| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\}
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
&\text{Prob}\left\{\left|\sum_i X(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - J\right| \geqq \varepsilon\right\} \\
\leqq\ &\frac{3}{\varepsilon}\sum_i (t_i - t_{i-1})\mathfrak{M}\,|X(\tau_i) - X_k(\tau_i)| \\
&+ \text{Prob}\left\{|J_k - J| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \\
&+ \text{Prob}\left\{\left|\sum_i X_k(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - J_k\right| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\}.
\end{aligned}$$

---

[1] *Voir*, par exemple, KOLMOGOROFF, *op. cit.*, p. 32.

Or, on peut déterminer un entier K assez grand tel qu'on ait à la fois

$$\mathfrak{M}\,|\,X(t)-X_K(t)\,|<\frac{\varepsilon^2}{9}\,\frac{1}{b-a}\qquad(a\leqq t\leqq b),$$

et

$$\text{Prob}\left\{\,|\,J_K-J\,|\geqq\frac{\varepsilon}{3}\right\}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Il vient donc

$$\text{Prob}\left\{\left|\sum_i X(\tau_i)(t_i-t_{i-1})-J\right|\geqq\varepsilon\right\}$$
$$<\frac{2\varepsilon}{3}+\text{Prob}\left\{\left|\sum_i X_K(\tau_i)(t_i-t_{i-1})-J_K\right|\geqq\frac{\varepsilon}{3}\right\},$$

l'inégalité qui est valide quels que soient les points t_i et τ_i, Mais $\sum_i X_K(\tau_i)(t_i-t_{i-1})$ converge en probabilité vers J_K, lorsque la longueur maxima des intervalles partiels tend vers zéro. On voit donc que $\sum X(\tau_i)(t_i-t_{i-1})$ converge en probabilité vers J, quand la longueur maxima des intervalles partiels tend vers zéro. Ainsi, $X(t)$ est intégrable en probabilité sur (a, b), et l'on a bien (17).

C. Q. F. D.

10. Comme conséquence des théorèmes 4 et 5, nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 6. — *Toute fonction aléatoire continue en moyenne d'ordre* 1 (1) *sur* (a, b) *y est intégrable en probabilité* (2).

Démonstration. — On peut toujours supposer $a=0$, $b=1$. Soit $X(t)$ une fonction aléatoire continue en moyenne d'ordre 1

(1) Quand il s'agit d'une fonction aléatoire $X(t)$ continue en moyenne d'ordre 1 sur (a, b), nous supposons toujours implicitement que la valeur moyenne $\mathfrak{M}\,|\,X(t)\,|$ existe pour tout point t de (a, b).

(2) M. Slutsky [*voir* ses publications citées dans la note (1) à la page 110] a établi l'intégrabilité en probabilité d'une fonction aléatoire $X(t)$ sous les hypothèses que $\mathfrak{M}X(t)$, $\mathfrak{M}[X(t)]^2$ sont des fonctions (certaines) continues de t et que $\mathfrak{M}[X(t)X(t+s)]$ est une fonction (certaine) continue de t et de s. Il est facile de voir que notre hypothèse de la continuité en moyenne d'ordre 1 est moins stricte que les hypothèses de M. Slutsky.

sur (o, 1). En vertu du théorème **4**, on a, d'une façon uniforme sur (o, 1),

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}\left| X(t) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(t) \right| = 0.$$

D'après le théorème **5**, il suffit donc de prouver que les fonctions aléatoires

$$\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(t) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{18}$$

sont intégrables en probabilité.

Or, il est aisé de voir que les fonctions aléatoires

$$X\left(\frac{m}{n}\right) P_{m,n}(t) \qquad (0 \leqq m \leqq n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

sont toutes intégrables en probabilité sur (o, 1). D'autre part, la somme d'un nombre fini de fonctions aléatoires intégrables en probabilité est évidemment intégrable en probabilité. Les fonctions aléatoires (18) sont donc intégrables en probabilité et par suite $X(t)$ est aussi intégrable en probabilité.

C. Q. F. D.

11. Nous allons maintenant donner une définition descriptive de l'intégrale en probabilité pour les fonctions aléatoires continues en moyenne d'ordre 1.

Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille des fonctions aléatoires (se rapportant à une même catégorie d'épreuves) continues en moyenne d'ordre 1 sur (a, b). On vérifie d'abord sans peine que la famille $\mathfrak{F}$ jouit des trois propriétés suivantes :

1° *Si* $X(t)$ *et* $Y(t)$ *appartiennent à* $\mathfrak{F}$, *la somme* $X(t) + Y(t)$ *appartient également à* $\mathfrak{F}$.

2° *Soit* $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_k(t), \ldots$ *une suite de fonctions aléatoires de* $\mathfrak{F}$. *Soit d'autre part*, $X(t)$ *une fonction aléatoire définie sur* (a, b) *et telle que* $\mathfrak{M}\,|X(t)|$ *existe pour tout point* t *de* (a, b). *Si l'on a*

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{M}\,|X(t) - X_k(t)| = 0 \tag{19}$$

uniformément sur (a, b), $X(t)$ *appartient à* $\mathfrak{F}$.

3° *Si* $X(t)$ *est une fonction aléatoire définie sur* (a, b) *et de la forme*

$$X(t) = A x(t), \tag{20}$$

où A *est une variable aléatoire telle que* $\mathfrak{M}|A|$ *existe et où* $x(t)$ *est une fonction certaine continue au sens ordinaire sur* (a, b), *alors* $X(t)$ *appartient à* $\mathcal{F}$.

Posons maintenant pour toute fonction aléatoire $X(t)$ de $\mathcal{F}$

$$J[X] = (\text{I. e. p.}) \int_a^b X(t)\, dt.$$

On voit que $J[X]$ possède les trois propriétés suivantes [1] :

(i). *Quelles que soient deux fonctions aléatoires* $X(t)$, $Y(t)$ *de* $\mathcal{F}$, *on a*

$$J[X + Y] = J[X] + J[Y].$$

(ii). *Soient* $X(t)$ *et* $X_k(t)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *des fonctions aléatoires de* $\mathcal{F}$. *Si la convergence* (19) *a lieu uniformément sur* (a, b), *la suite des variables aléatoires* $J[X_k]$ *converge en probabilité vers* $J[X]$.

(iii). *Si* $X(t)$ *est une fonction aléatoire de la forme* (20), *on a*

$$J[X] = J[A x(t)] = A \int_a^b x(t)\, dt,$$

où $\int_a^b x(t)\, dt$ *désigne l'intégrale de Riemann de la fonction certaine* $x(t)$.

Inversement, ces trois conditions (i)-(iii) caractérisent l'intégrale en probabilité pour les fonctions aléatoires de $\mathcal{F}$. Nous avons en effet le théorème que voici :

Théorème 7. — *Si l'on fait correspondre à chaque fonction aléatoire* $X(t)$ *de la famille* $\mathcal{F}$ *une variable aléatoire* $J[X]$ *de manière que les trois conditions ci-dessus* (i)-(iii) *soient vérifiées,* $J[X]$ *est nécessairement l'intégrale en probabilité de* $X(t)$ *sur* (a, b).

---

[1] La propriété (ii) n'est qu'un cas particulier du théorème 5, tandis que les propriétés (i) et (iii) sont évidentes.

Démonstration. — On peut toujours supposer $a = 0$, $b = 1$. Pour toute fonction aléatoire $X(t)$ continue en moyenne d'ordre 1 sur $(0, 1)$, la convergence

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M} \left| X(t) - \sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t) \right| = 0$$

a lieu uniformément sur $(0, 1)$ (théorème 3). En vertu de (*ii*), la suite des variables aléatoires

$$(21) \qquad J\left[\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t)\right] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

converge donc en probabilité vers $J[X]$.

D'autre part, on a, en vertu de (*i*) et (*iii*)

$$J\left[\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t)\right] = \sum_{m=0}^{n}\left(X\left(\frac{m}{n}\right) \int_0^1 \varphi_{m,n}(t)\, dt\right),$$

ou bien [1]

$$(22) \qquad J\left[\sum_{m=0}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) \varphi_{m,n}(t)\right] = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right) + \frac{X(0) - X(1)}{2n}.$$

Or, $X(t)$ étant continue en moyenne d'ordre 1, est intégrable en probabilité sur $(0, 1)$ (théorème 6); l'expression $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} X\left(\frac{m}{n}\right)$ converge en probabilité vers l'intégrale en probabilité de $X(t)$ sur $(0, 1)$. D'après (22), on voit alors que la suite des variables aléatoires (21) converge aussi en probabilité vers l'intégrale en probabilité de $X(t)$ sur $(0, 1)$. Ainsi, $J[X]$ est égale à l'intégrale en probabilité de $X(t)$ sur $(0, 1)$. C. Q. F. D.

(Manuscrit reçu le 5 juillet 1944).

---

[1] D'après la définition de $\varphi_{m,n}(t)$, on a $\int_0^1 \varphi_{m,n}(t)\, dt = \frac{1}{n}$ pour $0 < m < n$ et $= \frac{1}{2n}$ pour $m = 0, n$.