JEAN DIEUDONNÉ

Les déterminants sur un corps non commutatif

Bulletin de la S. M. F., tome 71 (1943), p. 27-45
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1943__71__27_0>

LES DÉTERMINANTS SUR UN CORPS NON COMMUTATIF;

PAR M. JEAN DIEUDONNÉ.

INTRODUCTION.

On sait que la plupart des résultats de l'Algèbre linéaire classique gardent leur validité lorsque les espaces vectoriels qu'on envisage ont pour corps des scalaires un corps *non commutatif* quelconque (¹). Toutefois, il est une partie de la théorie où la commutativité du corps semble jouer un rôle essentiel : c'est la théorie des déterminants. Diverses tentatives ont été faites pour étendre cette théorie au cas des corps non commutatifs, surtout en ce qui concerne la résolution des systèmes d'équations linéaires; mais aucune d'entre elles n'est parvenue à une généralisation satisfaisante des propriétés essentielles des déterminants (²). Parmi ces propriétés, il en est une qui domine toutes les autres : c'est le

---

(¹) *Voir* par exemple B. L. van der WAERDEN, *Moderne Algebra*, t. II, 2ᵉ éd., Berlin, 1940, paragraphe 107.

(²) *Voir* en particulier A. HEYTING, *Math. Annalen*, t. 98, 1927, p. 465 et O. ORE, *Ann. of Math.*, t. 32, 1931, p. 463. Le but poursuivi par ces auteurs est de donner un procédé régulier de formation de certaines expressions, fonctions des coefficients d'une matrice carrée, permettant de reconnaître si cette matrice est ou non régulière, et de calculer les solutions d'un système d'équations dont la matrice est régulière. Mais les « désignants » que Heyting introduit à cet effet dépendent entre autres de l'ordre des colonnes (une permutation paire en change en général la valeur); quant aux déterminants de Ore, ils ne sont définis qu'à une « équivalence » près, mais cette relation d'équivalence ne comprend en fait que deux classes : celle des matrices régulières et celle des matrices singulières; la définition de Ore ne saurait donc être considérée comme une généralisation convenable des déterminants sur un corps commutatif, puisque deux matrices régulières sur un tel corps peuvent avoir en général des déterminants inégaux.

Signalons aussi une autre généralisation, due à E. H. Moore (*voir* E. H. MOORE and W. BARNARD, *General Analysis*, t. I, Philadelphia, 1935), mais qui ne s'applique qu'à des corps non commutatifs très particuliers et à des matrices d'un type spécial. Lorsque le corps des scalaires est le *corps des quaternions*, cette généralisation se rattache à une définition antérieure des déterminants sur le corps des quaternions, due à E. STUDY (*Acta Math.*, t. 42, 1920, p. 1).

fait que, si $\Delta(A)$ est le déterminant d'une matrice carrée A, on a $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$ pour deux matrices inversibles quelconques de même ordre A et B; on peut en effet *caractériser* $\Delta(A)$ par cette propriété et le fait d'être un polynome non constant et du plus petit degré possible par rapport aux éléments de A ([3]). On est donc amené à chercher si, dans le cas où le corps des scalaires K est non commutatif, il existe encore des fonctions $\Delta(A)$ ayant la propriété précédente, c'est-à-dire définissant une *représentation* du groupe $M_n(K)$ des matrices carrées inversibles d'ordre n à éléments dans K, sur un groupe *abélien*. Cela conduit à déterminer le *groupe des commutateurs* C_n de $M_n(K)$, et l'on constate alors que le groupe quotient $M_n(K)/C_n$ est *indépendant de* n; c'est cette propriété générale qui, lorsque K est commutatif, entraîne l'existence des déterminants ordinaires.

L'étude des groupes $M_n(K)$ et C_n n'offre pas de difficultés particulières, car les méthodes classiques restent valables lorsque K est commutatif ([4]) s'étendent sans peine au cas général. C'est dire que le présent travail ne saurait prétendre à une bien grande originalité; son but sera atteint s'il montre un peu plus clairement comment la notion de déterminant, ce « deus ex machina » de l'Algèbre classique, vient, après tant d'autres, se ranger à son tour sous l'égide de la théorie des groupes.

I.

1. Soient K un corps quelconque (commutatif ou non), E un espace vectoriel à gauche sur K, ayant n dimensions [isomorphe au groupe additif produit K^n, muni de la loi de composition externe $\lambda(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n)$]. Nous désignerons par $GL_n(K)$ le groupe des automorphismes de E. Lorsqu'on choisit une *base* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de E, tout endomorphisme u de E est entièrement déterminé par la donnée des n éléments $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$, donc par la matrice carrée $A = (\alpha_{ij})$ à éléments

([3]) K. Hensel, *J. de Crelle*, t. 159, 1928, p. 246.

([4]) L'idée première de ces méthodes remonte à C. Jordan; elles ont été développées et étendues par Burnside et Dickson. *Voir* L. E. Dickson, *Linear groups*, Leipzig, 1901, p. 75-88.

dans K; si l'on identifie un élément $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ de E avec la matrice à une ligne formée des ξ_i, l'élément $u(x)$ est identifié avec la matrice produit $x.A$. Au groupe $GL_n(K)$ correspond ainsi le groupe $M_n(K)$ des matrices carrées inversibles d'ordre n, à éléments dans K, cette correspondance étant un isomorphisme de l'un des groupes sur l'opposé de l'autre; l'étude de l'un de ces groupes équivaut donc à l'étude de l'autre.

2. Nous commencerons par déterminer un *système de générateurs* du groupe $M_n(K)$, suivant la méthode de Jordan, Burnside et Dickson qui s'étend presque textuellement du cas commutatif au cas non commutatif; rappelons-la brièvement ([5]). On désigne par $B_{ij}(\lambda)$ (pour $i \neq j$) la matrice qui correspond à l'automorphisme u défini par $u(e_k) = e_k$ pour $k \neq j$, $u(e_j) = \lambda e_i + e_j$; elle a donc ses éléments diagonaux égaux à 1, l'élément λ dans la case intersection de la $i^{\text{ième}}$ colonne et de la $j^{\text{ième}}$ ligne, et 0 partout ailleurs. Si A est une matrice carrée quelconque, $B_{ij}(\lambda)A$ est la matrice obtenue en ajoutant à la $j^{\text{ième}}$ ligne de A la $i^{\text{ième}}$ ligne multipliée *à gauche* par λ; $AB_{ij}(\lambda)$ est la matrice obtenue en ajoutant à la $i^{\text{ième}}$ colonne de A la $j^{\text{ième}}$ colonne multipliée *à droite* par λ. La matrice $P_{ij} = B_{ij}(1)B_{ji}(-1)B_{ij}(1)$ est donc telle que $P_{ij}A$ soit obtenue en remplaçant dans A la $j^{\text{ième}}$ ligne par la $i^{\text{ième}}$, et la $i^{\text{ième}}$ par la $j^{\text{ième}}$ changée de signe; de même AP_{ij} s'obtient en remplaçant dans A la $i^{\text{ième}}$ colonne par la $j^{\text{ième}}$ et la $j^{\text{ième}}$ par la $i^{\text{ième}}$ changée de signe.

Soit alors $A = (\alpha_{ij})$ une matrice quelconque de $M_n(K)$; un au moins des éléments de la première colonne est $\neq 0$; en multipliant au besoin A à gauche par une matrice P_{ij}, on peut supposer que $\alpha_{21} \neq 0$; multipliant ensuite à gauche par une matrice $B_{21}(\lambda)$ convenable, on obtient une matrice (β_{ij}) où $\beta_{11} = 1$; en retranchant alors des multiples convenables de la première ligne de chacune des autres lignes, on obtient une matrice (γ_{ij}) où $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{i1} = 0$ pour $i \neq 1$. Dans la deuxième colonne, il y a certainement un élément $\gamma_{i2} \neq 0$ avec $i \neq 1$, sans quoi la matrice ne serait pas régulière; si $n > 2$, par de nouvelles multiplications à gauche par

---

([5]) *Cf.* Dickson, *loc. cit.*, p. 78.

des $B_{ij}(\lambda)$ d'indice $i \neq 1$, on peut donc obtenir une matrice (δ_{ij}) ayant même première colonne que (γ_{ij}), et où en outre $\delta_{22} = 1$, $\delta_{i2} = 0$ pour $i \neq 2$. De proche en proche, il est clair qu'on arrive finalement à une matrice diagonale (μ_{ij}), avec $\mu_{ii} = 1$ pour $1 \leqq i \leqq n-1$, $\mu_{nn} = \mu \neq 0$ quelconque; si l'on désigne par $D(\mu)$ cette dernière matrice, on a démontré la relation $A = BD(\mu)$, où B est une matrice appartenant au *sous-groupe* C_n *engendré par les* $B_{ij}(\lambda)$ [comme $B_{ij}^{-1}(\lambda) = B_{ij}(-\lambda)$, la matrice B est d'ailleurs un produit de matrices $B_{ij}(\lambda)$].

3. Nous allons étudier le sous-groupe C_n qui vient ainsi de s'introduire. En premier lieu, c'est un *sous-groupe distingué*; pour voir que $AB_{ij}(\lambda)A^{-1}$ appartient à C_n pour toute matrice A de M_n, il suffit évidemment, d'après la forme qu'on vient de donner aux matrices de M_n, de considérer le cas où $A = D(\mu)$; or, on vérifie aussitôt qu'on a

$$(1)\qquad \begin{cases} D(\mu)B_{ij}(\lambda)D^{-1}(\mu) = B_{ij}(\lambda) & \text{si } i \neq n \text{ et } j \neq n, \\ D(\mu)B_{in}(\lambda)D^{-1}(\mu) = B_{in}(\mu\lambda), & \\ D(\mu)B_{nj}(\lambda)D^{-1}(\mu) = B_{nj}(\lambda\mu^{-1}); & \end{cases}$$

ce qui établit la proposition.

4. Si l'on repasse au groupe des automorphismes $GL_n(K)$, on peut donner du groupe C_n une interprétation plus géométrique. En effet, soit u l'automorphisme correspondant à $B_{ij}(\lambda)$; il transforme les coordonnées d'un point $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ suivant les formules $\xi'_k = \xi_k$ si $k \neq i$, et $\xi'_i = \xi_i + \xi_j \lambda$ (si l'on pose $u(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi'_k e_k$); autrement dit, il laisse invariant tous les points de l'hyperplan H (sous-espace à $n-1$ dimensions) engendré par les e_k d'indice $\neq j$ (c'est-à-dire l'hyperplan d'équation $\xi_j = 0$). Soit F l'espace projectif (à gauche) à $n-1$ dimensions correspondant à E; si l'on prend pour hyperplan à l'infini l'hyperplan projectif correspondant à H, l'automorphisme correspondant à u transforme, dans F, les coordonnées $\zeta_k = \xi_j^{-1} \xi_k$ d'un point du complémentaire de l'hyperplan à l'infini (complémentaire identifié à un espace vectoriel à $n-1$ dimensions), suivant les formules : $\zeta'_k = \zeta_k$

pour $k \neq i$, $\zeta'_i = \zeta_i + \lambda$; autrement dit, cet automorphisme de F est une *translation*. Réciproquement, soit u un automorphisme de E laissant invariants tous les points d'un hyperplan H, et tel que, dans l'espace projectif F, où l'on a pris pour hyperplan à l'infini H, il corresponde à u une translation; nous dirons qu'un tel automorphisme est une *transvection*; il est facile de voir que la matrice B correspondant à une transvection u (distincte de l'application identique et rapportée à une base quelconque) est de la forme $AB_{21}(1)A^{-1}$. En effet, prenons une base (e'_i) de E telle que les e'_i d'indice $\neq 1$ forment une base de H; l'hypothèse entraîne que les coordonnées d'un point relatives à cette base sont transformées par u suivant les formules $\xi'_1 = \xi_1$, $\xi'_i = \xi_i + \xi_1\alpha_i$ pour $i \neq 1$; autrement dit, on a $u(e'_i) = e'_i$ pour $i \neq 1$, $u(e'_1) = e'_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i e'_i$; par hypothèse, $\sum_{i=2}^{n} \alpha_i e'_i \neq 0$; si l'on désigne ce vecteur par e_2, et par e_i $(3 \leq i \leq n)$ $n-2$ autres vecteurs formant avec e_2 une base de H, la matrice de u rapporté à la base formée de e'_1 et des $e_i (i \neq 1)$ n'est autre que $B_{21}(1)$, ce qui établit la proposition.

On peut donc dire que le sous-groupe distingué C_n est *engendré par les transvections de* E. Ce qui précède montre en outre que, si un sous-groupe *distingué* de M_n contient *une* transvection distincte de l'application identique, il contient *toutes* les transvections, et par suite le groupe C_n.

5. Nous allons voir maintenant que *le groupe quotient* M_n/C_n *est abélien*, autrement dit, que C_n *contient le groupe des commutateurs de* M_n. D'après la forme canonique donnée au n° 2 pour les matrices de M_n, il suffit de prouver que $D(\lambda)D(\mu) = D(\lambda\mu)$ et $D(\mu)D(\lambda) = D(\mu\lambda)$ appartiennent à la même classe mod. C_n. On peut visiblement se borner à faire la démonstration dans le cas $n = 2$. Or, par le procédé du n° 2, la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ donne successivement les matrices (équivalentes mod. C_n) : $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}$; mais $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont équivalentes, donc il en est de même de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu\lambda \end{pmatrix}$.

Le résultat que nous venons d'obtenir peut se préciser de la manière suivante : *sauf dans le cas où* $n = 2$ *et où* K *est le corps à deux éléments*, C_n *est le groupe des commutateurs de* $M_n(K)$. Considérons en effet une représentation $X \to \theta(X)$ de $M_n(K)$ sur un groupe *abélien* Γ; nous allons montrer que, sauf dans le cas d'exception indiqué, $\theta(B)$ est l'élément neutre de Γ pour toute matrice B correspondant à une transvection distincte de l'application identique. Remarquons d'abord (n° 4) que toutes ces matrices sont de la forme $AB_{21}(1)A^{-1}$, donc, en vertu de la commutativité de Γ, $\theta(B)$ a la même valeur σ pour toutes ces matrices; cela étant, si K n'est pas réduit à deux éléments, il existe dans K deux éléments (distincts ou non) λ, μ non nuls et tels que $\lambda + \mu \neq 0$; comme $B_{21}(\lambda)B_{21}(\mu) = B_{21}(\lambda + \mu)$, on a $\sigma^2 = \sigma$, ce qui établit la proposition dans ce cas. Le raisonnement ne s'applique plus lorsque K est le corps à deux éléments; mais le groupe C_n est alors identique à $M_n(K)$, puisque la seule matrice $D(\lambda)$ est la matrice unité; or, pour $n > 2$, C_n est un groupe *simple* (*voir* n° 13), donc identique à son propre groupe des commutateurs. Reste le cas où, K étant le corps à deux éléments, on a $n = 2$: ce cas est effectivement un cas d'exception, car $M_n(K) = C_n$ est alors un groupe résoluble, donc distinct de son groupe des commutateurs ([6]).

6. Dans ce qui précède, nous avons implicitement supposé $n > 1$. Pour $n = 1$, le groupe $M_n(K)$ se réduit au groupe multiplicatif K^* des éléments $\neq 0$ du corps K; nous désignerons par C le *groupe des commutateurs* du groupe K^* (si K est commutatif, C se réduit à l'élément unité 1 de K). Avec ces notations, nous pouvons énoncer le théorème général suivant, qui doit être regardé comme l'origine de la notion de *déterminant* lorsque K est commutatif.

Théorème 1. — *Le groupe quotient* $M_n(K)/C_n$ *est isomorphe au groupe* K^*/C *quel que soit* $n > 1$.

Pour démontrer ce théorème, nous définirons une représentation $X \to \Delta_n(X)$ du groupe $M_n(K)$ *sur* le groupe K^*/C, telle

---

([6]) *Voir* Dickson, *loc. cit.*, p. 86.

que $\Delta_n(X)$ ne soit égal à l'élément neutre de K^*/C que pour les matrices X appartenant à C_n; par passage au quotient, il en résultera bien un isomorphisme de $M_n(K)/C_n$ sur K^*/C.

Soit φ la représentation canonique du groupe $M_1(K) = K^*$ qui, à tout élément $\xi \neq 0$ de K, fait correspondre sa classe (mod. C). Pour $n = 1$, nous prendrons $\Delta_1(x) = \varphi(x)$, et nous définirons ensuite $\Delta_n(X)$ par récurrence sur n.

Soit donc $X = (\xi_{ij})$ une matrice quelconque de $M_n(K)$; étant donné un élément non nul ξ_{i1} de la première colonne (un tel élément existe nécessairement, X étant inversible), retranchons des lignes d'indice $\neq i$ de X des multiples convenables (à gauche) de la ligne d'indice i, de sorte que dans la première colonne de la nouvelle matrice X_1, tous les éléments soient nuls à l'exception de ξ_{i1}; si alors X' est la matrice d'ordre $n-1$ formée des lignes d'indice $\neq i$ de X_1, X' est une matrice régulière; nous poserons $\Delta_n(X) = \varphi[(-1)^{i+1}\xi_{i1}]\,\Delta_{n-1}(X')$.

Il nous faut évidemment prouver tout d'abord que :

1° la définition de $\Delta_n(X)$ est indépendante du choix de l'élément $\xi_{i1} \neq 0$ de la première colonne de X (lorsqu'il existe plus d'un élément ayant cette propriété).

Nous démontrerons cette propriété en même temps que les suivantes :

2° $\Delta_n(X)$ ne change pas si l'on multiplie à gauche X par une matrice $B_{ij}(\lambda)$;

3° si l'on multiplie (à gauche) une ligne de X par un élément $\mu \neq 0$ de K, $\Delta_n(X)$ est multiplié par $\varphi(\mu)$.

Procédons par récurrence sur n; pour simplifier l'écriture, nous ferons le raisonnement pour $n = 3$, mais on verra immédiatement qu'il est général.

Soit donc

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

une matrice inversible d'ordre 3, et supposons par exemple que $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$. Si l'on calcule $\Delta_3(X)$ à partir de l'élément a_1, on forme la matrice

$$X'=\begin{pmatrix} b_2-a_2a_1^{-1}\,b_1 & c_2-a_2a_1^{-1}\,c_1 \\ b_3-a_3a_1^{-1}\,b_1 & c_3-a_3a_1^{-1}\,c_1 \end{pmatrix}$$

puis le produit $\varphi(a_1)\Delta_2(X')$; si l'on calcule $\Delta_3(X)$ à partir de a_2, on forme la matrice

$$X''=\begin{pmatrix} b_1-a_1a_2^{-1}\,b_2 & c_1-a_1a_2^{-1}\,c_2 \\ b_3-a_3a_2^{-1}\,b_2 & c_3-a_3a_2^{-1}\,c_2 \end{pmatrix}$$

puis le produit $\varphi(-a_2)\Delta_2(X'')$. Or, on peut écrire

$$X''=\begin{pmatrix} -a_1a_2^{-1}(b_2-a_2a_1^{-1}\,b_1) & -a_1a_2^{-1}(c_2-a_2a_1^{-1}\,c_1) \\ b_3-a_3a_1^{-1}b_1-a_3a_2^{-1}(b_2-a_2a_1^{-1}b_1) & c_3-a_3a_1^{-1}c_1-a_3a_2^{-1}(c_2-a_2a_1^{-1}c_1) \end{pmatrix},$$

et sous cette forme, on voit que X'' s'obtient en retranchant de la deuxième ligne de X' la première multipliée par $a_3a_2^{-1}$, puis en multipliant la première ligne par $-a_1a_2^{-1}$; d'après les propriétés 2° et 3°, appliquées pour $n=2$, on a

$$\Delta_2(X'')=\varphi(-a_1a_2^{-1})\,\Delta_2(X'),$$

et

$$\varphi(-a_1a_2^{-1})=\varphi(a_1)\varphi(-a_2)^{-1};$$

les deux expressions obtenues pour $\Delta_3(X)$ sont bien égales.

Pour établir pour X la propriété 2°, supposons pour fixer les idées que $a_1\neq 0$; comme

$$b_2+\lambda b_1-(a_2+\lambda a_1)a_1^{-1}\,b_1=b_2-a_2a_1^{-1}\,b_1,$$

la matrice X' ne change pas si l'on ajoute à une ligne de X d'indice $\neq 1$ un multiple quelconque de la première ligne. Si l'on ajoute à une ligne de X d'indice $i\neq 1$ un multiple d'une autre ligne d'indice $j\neq 1$, la matrice X' subit la même opération. donc, d'après la propriété 2° appliquée pour $n=2$, $\Delta_2(X')$ ne change pas, non plus que $\Delta_3(X)$. Enfin, supposons qu'on ajoute à la première ligne de X un multiple d'une des autres; si $a_2=a_3=0$, a_1 et la matrice X' restent inchangés après cette opération. donc aussi $\Delta_3(X)$; si au contraire $a_2\neq 0$ par exemple, il suffit de calculer $\Delta_3(X)$ à partir de a_2 au lieu de a_1, et d'appliquer les résultats précédents, pour voir que $\Delta_3(X)$ reste encore inaltéré. La propriété 2° est donc démontrée dans tous les cas.

Enfin, si l'on multiplie la première ligne de X par μ (à gauche), a_1 est remplacé par μa_1, la matrice X' est inchangée, $\Delta_3(X)$ est multiplié par $\varphi(\mu)$. Si l'on multiplie par μ une autre ligne de X, une ligne de la matrice X' est multipliée par μ, a_1 reste inchangé, donc $\Delta_3(X)$ est encore multiplié par $\varphi(\mu)$; la propriété 3° est établie dans tous les cas.

La démonstration du théorème s'achève maintenant aisément. En effet, si la matrice X est mise sous la forme $BD(\mu)$, où $B \in C_n$ (n° 2), on a $\Delta_n(X) = \Delta_n[D(\mu)]$ d'après la propriété 2°; mais le calcul de $\Delta_n[D(\mu)]$ est immédiat et donne $\varphi(\mu)$. On a donc

$$\Delta_n[D(\lambda)D(\mu)] = \Delta_n[D(\lambda)]\Delta_n[D(\mu)],$$

d'où, en vertu de (¹),

$$\Delta_n(XY) = \Delta_n(X)\Delta_n(Y),$$

Δ_n est bien une *représentation* de $M_n(K)$ dans K^*/C; elle applique $M_n(K)$ *sur* K^*/C, puisque μ peut prendre toutes les valeurs $\neq 0$ dans K; enfin, $\Delta_n(X)$ ne peut être l'élément neutre que si μ est un élément du groupe des commutateurs C de K^*; mais dans ce cas, on a vu (n° 5) que $D(\mu)$ appartient au groupe C_n, donc aussi X.

7. Lorsque K est commutatif, le groupe C est réduit à l'élément unité de K, et l'on peut identifier le groupe quotient K^*/C à K^* lui-même; $\Delta_n(X)$ n'est autre alors que le *déterminant* de X au sens ordinaire; dans le cas général, nous dirons encore que $\Delta_n(X)$ est le *déterminant* de X; ce n'est plus un élément du corps K, mais du groupe abélien K^*/C, et ce groupe n'est pas nécessairement isomorphe à un sous-groupe de K^*.

Toutes les propriétés des déterminants sur les corps commutatifs, où n'intervient que la *multiplication* des déterminants (ou des déterminants et des éléments du corps) se généralisent aisément au cas non commutatif [7]. Nous avons déjà démontré deux

(¹) Si l'on ne suppose pas connue la propriété d'un déterminant d'être fonction linéaire des éléments de chacune de ses lignes, dans le cas commutatif, on peut aisément la déduire de la définition générale donnée ci-dessus : il suffit de raisonner par récurrence sur n, en « développant » le déterminant suivant un élément d'une ligne distincte de celle pour laquelle on veut établir la proposition.

On notera que le « développement » que nous avons défini dans la démonstration du théorème 1 fournit en même temps un procédé régulier pour vérifier si de ces propriétés dans le cours de la démonstration du théorème 1 (propriétés 2° et 3°); on en déduit tout d'abord que si l'on échange deux lignes de la matrice X, $\Delta_n(X)$ est multiplié par $\varphi(-1)$, car cela revient à multiplier X à gauche par une matrice P_{ij} qui appartient au groupe C_n, puis à changer le signe d'une ligne.

Pour avoir les propriétés analogues concernant les *colonnes* de X, remarquons d'abord qu'ajouter à une colonne un multiple (à droite) d'une autre, revient à multiplier X à droite par une matrice $B_{ij}(\lambda)$, ce qui ne change pas $\Delta_n(X)$. De même, multiplier à droite la colonne d'indice j par μ revient à multiplier X à droite par la matrice diagonale (α_{ii}) telle que $\alpha_{ii}=1$ pour $i\neq j$, $\alpha_{jj}=\mu$, et le déterminant de cette matrice diagonale est bien évidemment $\varphi(\mu)$; comme ci-dessus, on en conclut aussi que l'échange de deux colonnes revient à multiplier le déterminant par $\varphi(-1)$.

De ces propriétés, on déduit la possibilité de calculer $\Delta_n(X)$ par une méthode analogue à celle de la démonstration du théorème 1, mais en procédant « par colonnes » au lieu de procéder « par lignes » (c'est-à-dire en retranchant des multiples à droite d'une colonne déterminée de toutes les autres colonnes, de manière à obtenir une ligne dont tous les éléments sauf un soient nuls). Cette remarque, lorsque le corps K est commutatif, redonne l'égalité du déterminant d'une matrice et de celui de la matrice *transposée* (obtenue « par échange des lignes et des colonnes ») : cette propriété, qui d'ordinaire apparaît comme un pur résultat de calcul, tire donc son origine, en dernière analyse, du fait que le groupe C_n est *distingué*; cela permet en effet d'écrire, pour $B\in C_n$, $BD(\mu)=D(\mu)B'$, avec $B'\in C_n$, et prouve que si, en procédant comme au n° 2, mais « par colonnes » au lieu de « par lignes », on ramène une matrice $A=BD(\mu)$ à la forme $D(\mu')B''$ (avec $B''\in C_n$), $D(\mu)$ et $D(\mu')$ sont congrus mod C_n.

---

une matrice est régulière ou non; pour une matrice singulière, la récurrence conduira à un certain moment à une matrice carrée d'ordre $\leq n$ dans laquelle la première colonne ne contient que des zéros. On peut encore étendre la définition du déterminant aux matrices singulières, en adjoignant au groupe K^*/C un élément noté o, avec les conventions $o.\sigma=\sigma.o=o$ pour tout élément σ de K^*/C, et $o.o=o$, et en convenant que $\Delta_n(A)=o$ pour toute matrice singulière; il est clair que la propriété multiplicative $\Delta_n(AB)=\Delta_n(A)\,\Delta_n(B)$ est alors conservée, puisque le produit de deux matrices ne peut être une matrice régulière que si chacune d'elles est régulière.

Comme autre propriété « multiplicative » des déterminants, citons encore la suivante : si une matrice d'ordre n est de la forme $\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ où X est une matrice carrée d'ordre p, Z une matrice carrée d'ordre $n-p$, son déterminant est égal à $\Delta_p(X)\,\Delta_{n-p}(Z)$: on le voit aussitôt en « développant » par rapport à un élément $\neq 0$ de la première colonne, et en raisonnant par récurrence.

De cette propriété, on déduit cette fois un « développement » qui est l'analogue de la règle de Laplace, comme le « développement » de $\Delta_n(X)$ dans le théorème 1 était l'analogue du « développement suivant une ligne » d'un déterminant ordinaire. En effet, considérons une matrice de la forme $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, où X est une matrice d'ordre p, T une matrice carrée d'ordre $n-p$, et supposons que X soit inversible. On a alors

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -ZX^{-1} & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & T-ZX^{-1}Y \end{pmatrix}$$

(I_p matrice unité d'ordre p, I_{n-p} matrice unité d'ordre $n-p$) ; en prenant les déterminants, on a donc

$$\Delta_n \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \Delta_p(X)\,\Delta_{n-p}(T - ZX^{-1}Y).$$

8. Voyons maintenant comment on peut généraliser les formules de Cramer donnant la solution d'un système de n équations linéaires à n inconnues. Considérons un tel système

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_{ij} = \beta_j \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

et supposons que la matrice $A = (\alpha_{ij})$ de ce système soit inversible. Remplaçons dans A la ligne d'indice i, formée des α_{ij} ($1 \leqq j \leqq n$) par la ligne formée des β_j ($1 \leqq j \leqq n$) ; on obtient ainsi une matrice carrée A_i ; mais, si (ξ_i) est une solution de (2), il résulte de ce système d'équations que A_i s'obtient en multipliant à gauche dans A la ligne d'indice i par ξ_i, puis en lui ajoutant chacune des lignes d'indice $k \neq i$, multipliée à gauche par ξ_k ; la matrice A_i est donc congrue (mod. C_n) à la matrice obtenue en multipliant à gauche par ξ_i la ligne d'indice i de A; si $\xi_i \neq 0$, la matrice A_i est donc inversible, et en prenant les déterminants, on a

$$\Delta_n(A_i) = \varphi(\xi_i)\Delta_n(A). \tag{3}$$

Si au contraire $\xi_i = 0$, A_i est de rang $< n$. On en conclut que, réciproquement, le calcul des matrices A_i donne d'une part les indices i tels que $\xi_i = 0$, qui sont ceux pour lesquels A_i est singulière ([8]); et, pour les autres indices, la formule (3) donne, non la valeur des ξ_i, mais leur classe $\varphi(\xi_i)$ dans le groupe quotient K^*/C. Lorsque K est commutatif, on retrouve bien les formules de Cramer.

9. Le théorème 1 contient implicitement la réponse à la question posée dans l'Introduction, savoir la détermination de toutes les représentations $X \to \theta(X)$ du groupe $M_n(K)$ sur un groupe *abélien* Γ (tout au moins si l'on n'est pas dans le cas d'exception où $n = 2$ et où K est le corps à deux éléments). En effet, le groupe des commutateurs de $M_n(K)$ étant alors C_n, la valeur de $\theta(X)$ doit être la même pour toutes les matrices d'une même classe (mod. C_n); or ces matrices sont précisément celles pour lesquelles $x = \Delta_n(X)$ a la même valeur; si l'on pose $\omega(x) = \theta(X)$ pour toutes ces matrices, ω est une représentation du groupe quotient K^*/C sur Γ. Autrement dit, Γ doit être isomorphe à un groupe quotient du groupe abélien K^*/C, et toute représentation de $M_n(K)$ sur Γ est de la forme $X \to \omega[\Delta_n(X)]$, où ω est une représentation de K^*/C sur Γ. La question est donc ramenée à la détermination des groupes quotients du groupe abélien K^*/C (identifié à K^* dans le cas commutatif) et des automorphismes de ces groupes quotients.

10. Le déterminant $\Delta_n(X)$ est naturellement le même pour deux matrices *semblables* X et AXA^{-1}; comme à un automorphisme u de E correspondent précisément deux matrices semblables, quand on le rapporte à deux bases distinctes de E, on

---

([8]) Si l'on étend la définition des déterminants aux matrices singulières [*voir* Note ([7])], et si l'on étend de même la définition de φ en posant $\varphi(0) = 0$, la formule (3) est valable pour tous les indices i.

voit que le déterminant d'une quelconque de ces matrices ne dépend que de u, autrement dit, est un *invariant* de l'automorphisme u. Plus généralement, si X est une matrice correspondant à u, rapportée à une certaine base, le déterminant $\Delta_n(\lambda I_n - X)$, où λ appartient au *centre* de K, ne dépend que de u et de λ (« déterminant caractéristique » de la matrice X). Il serait intéressant de déterminer si l'identité $\Delta_n(\lambda I_n - X) = \Delta_n(\lambda I_n - Y)$ pour tout λ du centre de K entraîne que X et Y sont semblables ([9]).

11. La considération du déterminant $\Delta_n(X)$ d'une matrice X à éléments dans un corps non commutatif serait dénuée d'intérêt si ce déterminant était toujours identique à l'élément neutre du groupe K^*/C, c'est-à-dire (d'après le théorème 1) si ce groupe lui-même se réduisait à un seul élément, ce qui correspondrait au cas où $C = K^*$. Nos connaissances sur les corps non commutatifs généraux sont trop insuffisantes actuellement pour nous permettre d'écarter *a priori* cette éventualité; mais elle ne peut en tout cas se produire lorsque K est de *rang fini* m par rapport à son centre Z. En effet, si $N(\lambda)$ désigne la *norme* d'un élément $\lambda \in K$ dans la représentation régulière de K relative à Z [c'est-à-dire le déterminant (au sens ordinaire) de la matrice carrée d'ordre m à éléments dans Z qui correspond à λ dans cette représentation], l'application $\lambda \to N(\lambda)$ est une représentation du groupe K^* dans le groupe abélien Z^* des éléments $\neq 0$ du corps commutatif Z; on a pour $\alpha \in Z$, $N(\alpha\lambda) = \alpha^m N(\lambda)$, et comme Z n'est pas un corps fini, α^m n'est pas égal à 1 pour tout $\alpha \in Z$; donc la représentation $\lambda \to N(\lambda)$ applique K^* sur un groupe abélien A non réduit à un élément, et

---

([9]) Lorsque $n = 1$ et que K est le corps des quaternions, la relation

$$\varphi(\lambda - \alpha) = \varphi(\lambda - \beta)$$

pour tout λ réel entraîne bien que α et β sont des quaternions semblables (c'est-à-dire qu'il existe γ inversible tel que $\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$); c'est ce qu'on voit aisément en remarquant (*voir* n° 11) que l'identité précédente équivaut à

$$N(\lambda - \alpha) = N(\lambda - \beta),$$

où $N(\xi)$ désigne la norme du quaternion ξ; on en déduit en effet que les quaternions α et β ont même partie scalaire et même norme, ce qui entraîne qu'ils sont semblables d'après les propriétés classiques des quaternions.

comme ce groupe est nécessairement isomorphe à un sous-groupe de K^*/C, ce dernier n'est pas non plus réduit à un élément.

Il serait intéressant de savoir dans quels cas le groupe A est isomorphe à K^*/C, c'est-à-dire dans quels cas le groupe des commutateurs C est identique au *groupe des éléments de norme* 1. Cette circonstance se présente en tout cas lorsque K est le *corps des quaternions* sur le corps des nombres réels [ou plus généralement sur un corps ordonné pythagoricien ([10]) quelconque]; tout quaternion de norme 1 est alors, non seulement un élément du groupe C, mais un *commutateur* $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, comme le montre la décomposition classique d'une rotation dans l'espace à trois dimensions, en un produit de deux retournements. L'application $\lambda \rightarrow N(\lambda)$ est alors une représentation de K^* sur le groupe multiplicatif R_+^* des nombres réels > 0; il en est de même de toute application de la forme $\lambda \rightarrow [N(\lambda)]^r$, où r est un nombre réel $\neq 0$ quelconque. Comme, par passage au quotient, chacune de ces représentations fournit un isomorphisme de K^*/C sur le groupe R_+^*, on peut, dans tout ce qui précède, la substituer à la représentation canonique $\varphi(\lambda)$: ce qui a l'avantage de définir le déterminant d'une matrice dont les éléments sont des quaternions, comme un nombre réel > 0, et non plus comme un élément d'un groupe abstrait ainsi que dans le cas général. Le choix du nombre r est évidemment arbitraire; comme, pour un quaternion

$$\lambda = a + bj + ck + dl,$$

on a, dans la représentation régulière,

$$N(\lambda) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2,$$

il paraît assez indiqué de prendre $r = 1/4$, ce qui fournit la longueur $\|\lambda\|$ du vecteur représentatif du quaternion λ dans l'espace à quatre dimensions; on pourra donc appeler déterminant de la matrice A le nombre réel > 0 qu'on obtient en substituant partout $\|\lambda\|$ à $\varphi(\lambda)$ dans les procédés de calcul indiqués ci-dessus ([11]).

([10]) Rappelons qu'un corps commutatif est dit *pythagoricien* lorsque toute somme de carrés est elle-même un carré dans ce corps.

([11]) Le déterminant réel ainsi défini n'est pas une fonction linéaire des éléments d'une de ses lignes; mais il possède la propriété de *convexité* suivante : si la ligne d'indice i de la matrice A est formée des éléments $\alpha_{ij} = \beta_{ij} + \gamma_{ij}$, et

II.

12. Nous avons vu au n° 9 comment la détermination des représentations du groupe $M_n(K)$ sur un groupe *abélien* se ramenait à l'étude de la structure du groupe K^*/C. On peut chercher, plus généralement, à déterminer les représentations de $M_n(K)$ sur un groupe *quelconque*; cela revient à déterminer les groupes quotients de $M_n(K)$, ou encore ses sous-groupes *distingués*. En fait, nous allons voir qu'on ne peut obtenir ainsi aucun résultat essentiellement nouveau.

Remarquons d'abord que le *centre* Z_n du groupe $M_n(K)$ est formé des *homothéties centrales* $x \to \gamma x$ de E, γ parcourant l'ensemble des éléments $\neq 0$ du centre Z du corps K : c'est ce qu'on vérifie immédiatement ([12]) en écrivant les conditions pour qu'une matrice soit permutable avec chacune des $B_{ij}(\lambda)$.

THÉORÈME 2. — *Pour $n > 2$, tout sous-groupe distingué de* $M_n(K)$, *non contenu dans le centre* Z_n, *contient le groupe des commutateurs* C_n. *Il en est de même pour $n = 2$, lorsque le centre de* K *a plus de trois éléments.*

D'après le n° 4, il suffit de prouver que, si un sous-groupe distingué G de $M_n(K)$ est distinct de Z_n, il contient une *transvec-*

---

si l'on désigne par B (resp. C) la matrice obtenue en remplaçant dans A la ligne d'indice i par la ligne formée des β_{ij} (resp. γ_{ij}), on a

$$\Delta_n(A) \leqq \Delta_n(B) + \Delta_n(C).$$

On le démontre aisément par récurrence sur n, en développant par rapport à une ligne d'indice $\neq i$.

Si l'on remplace $\varphi(\lambda)$ par $\| \lambda \|^r$ (r nombre réel quelconque), l'expression obtenue n'est autre que $(\Delta_n(A))^r$; c'est en effet une fonction de $\Delta_n(A)$ de la forme $\omega(\Delta_n(A))$, où ω est une représentation du groupe R_+^* sur lui-même (n° 9); d'autre part, on voit sans peine que ω est *continue*, et par suite est de la forme $x \to x^s$ (s exposant réel quelconque); en prenant pour A une matrice diagonale, on voit enfin que $s = r$. Un raisonnement analogue prouve que le déterminant défini par Study (*loc. cit.*) n'est autre que $(\Delta_n(A))^2$, autrement dit, correspond au cas où l'on remplace $\varphi(\lambda)$ par $\| \lambda \|^2$ dans le « développement » du théorème 1. Au lieu d'utiliser des considérations de continuité, on peut d'ailleurs démontrer ces résultats par récurrence sur n.

([12]) *Cf.* DICKSON, *loc. cit.*, p. 79.

tion non réduite à l'application identique. Nous distinguerons deux cas suivant que $n \geqq 3$ ou $n = 2$.

1° $n \geqq 3$. — Nous allons suivre, pour l'essentiel, la méthode de Jordan, Burnside et Dickson [13] en utilisant seulement un langage plus géométrique; nous raisonnerons donc sur le groupe $GL_n(K)$ des automorphismes de E. La démonstration procède en deux étapes :

a. On montre en premier lieu que G contient un automorphisme w non réduit à l'automorphisme identique, et *laissant invariant un hyperplan* H. En effet, soit u un automorphisme appartenant à G, mais n'appartenant pas au centre; il existe donc une transvection v non permutable avec u. L'automorphisme $w = v^{-1} u^{-1} v u$ appartient à G et n'est pas l'automorphisme identique; or, une transvection v est caractérisée par le fait que, pour tout $x \in E$, $v(x) = x + \rho_x a$, où a est un vecteur fixe et $x \rightarrow \rho_x$ une *forme linéaire* telle que $\rho_a = 0$; on en conclut immédiatement que, pour tout $x \in E$, $w(x) - x$ appartient au sous-espace à deux dimensions au plus W, engendré par a et $u^{-1}(a)$; tout hyperplan H contenant ce sous-espace est par suite invariant par w.

b. Si w est déjà une transvection, le théorème est démontré. Sinon, w ne peut pas être permutable avec toutes les transvections ayant H comme hyperplan de points invariants, comme on le constate aisément en prenant une base dont $n - 1$ vecteurs forment une base de H, et en se rappelant que $w(x) - x \in W$ quel que soit $x \in E$. Cela étant, soit t une transvection admettant H comme hyperplan de points invariants et non permutable avec w; $z = twt^{-1} w^{-1}$ appartient à G et n'est pas l'application identique; d'autre part, z est le produit de la transvection t et de la transvection $wt^{-1} w^{-1}$, qui ont *même* hyperplan de points invariants, puisque $w(H) = H$; il est clair alors que z est une *transvection* appartenant à G, ce qui achève la démonstration.

2° $n = 2$. — Rapportons ici E à une base fixe formée de deux vecteurs e_1, e_2; si u est un automorphisme tel que $u(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2$, $u(e_2) = \gamma e_1 + \delta e_2$, il correspond à u la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

---

[13] *Cf.* Dickson, *loc. cit.*, p. 83-85.

a. Supposons d'abord que G contienne un automorphisme u tel que $\beta = 0$; alors G contient aussi l'automorphisme correspondant à la matrice $A^{-1}B_{12}(\lambda)AB_{12}^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta^{-1}\lambda\alpha - \lambda & 1 \end{pmatrix}$, et qui est une transvection non réduite à l'automorphisme identique pourvu qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\delta^{-1}\lambda\alpha - \lambda \neq 0$, ce qui est toujours le cas sauf si $\alpha = \delta$ appartient au centre de K.

b. Supposons maintenant que G contienne un automorphisme u tel que $\beta \neq 0$; on peut toujours supposer alors, en remplaçant A par $B_{12}(\lambda)AB_{12}^{-1}(\lambda)$, avec un λ convenable, qu'on a $\alpha = 0$. Cherchons un automorphisme v tel qu'on ait $u[v(e_1)] = \lambda e_1$, $v[u(e_1)] = \mu e_1$, λ et μ étant deux éléments $\neq 0$ arbitraires du *centre* de K. Un calcul sans difficulté prouve que v est bien déterminé et correspond à la matrice $\begin{pmatrix} -\lambda\gamma^{-1}\delta\beta^{-1} & \lambda\gamma^{-1} \\ \mu\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Cela étant, l'automorphisme $u^{-1}v^{-1}uv$ appartient à G, et il correspond à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda\mu^{-1} & 0 \\ \xi & \mu\lambda^{-1} \end{pmatrix}$, où ξ est un élément qu'il n'est pas nécessaire de préciser; si $\lambda^2 \neq \mu^2$, le raisonnement de *a* prouve que G contient une transvection non réduite à l'automorphisme identique.

c. On raisonnerait de même si l'on avait $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$; d'autre part si $\beta = \gamma = 0$, on peut toujours supposer que α et δ ne sont pas tous deux égaux à un même élément du centre, puisque G est supposé non contenu dans Z_2. On peut donc toujours conclure que G contient une transvection distincte de l'automorphisme identique, pourvu qu'il existe deux éléments $\neq 0$ du centre Z de K, dont les carrés soient distincts; or, c'est toujours le cas si Z est un corps ayant plus de trois éléments. La démonstration est ainsi achevée.

On observera que les cas où $n = 2$, et où K est commutatif et a deux ou trois éléments, sont effectivement des cas d'exception ([14]); lorsque K est non commutatif, mais de rang fini sur Z, Z est nécessairement un corps infini, donc le théorème 2 s'applique; les seuls autres cas d'exception possibles correspon-

---

([14]) *Voir* DICKSON, *loc. cit.*, p. 86.

draient donc à des corps de rang infini sur un centre ayant deux ou trois éléments; la théorie générale des corps de cette nature est actuellement trop peu développée pour qu'on puisse reconnaître si ces cas se présentent effectivement.

13. Il suffit de légères modifications à la démonstration précédente pour établir le théorème plus précis suivant :

THÉORÈME 3. — *Pour* $n > 2$, *tout sous-groupe distingué de* C_n, *distinct de* C_n, *est contenu dans* $C_n \cap Z_n$. *Il en est de même pour* $n = 2$, *pourvu que le centre du corps* K *ait un nombre d'éléments distinct de* 2, 3 *et* 5.

1° $n \geq 3$. — Le raisonnement du théorème 2 s'applique encore, pourvu qu'on démontre qu'un sous-groupe distingué de C_n est identique à C_n s'il contient une seule transvection distincte de l'automorphisme identique; or, le raisonnement du n° 4 et la formule (1) prouvent que toute transvection est de la forme $AB_{12}(\lambda)A^{-1}$, avec $A \in C_n$; tout revient par suite à établir que $B_{12}(\lambda)$ est conjugué à $B_{12}(1)$ *dans le groupe* C_n. Or, on constate facilement qu'on a $B_{12}(\lambda) = EB_{12}(1)E^{-1}$, où E est une matrice diagonale (α_{ij}) dans laquelle $\alpha_{11} = \lambda^{-1}$, $\alpha_{33} = \lambda$, $\alpha_{ii} = 1$ pour les autres indices; et l'on a bien $E \in C_n$.

2° $n = 2$. — Pour appliquer la partie b du raisonnement du théorème 2, il faut que l'automorphisme v appartienne à C_n; il en sera bien ainsi en prenant λ et μ tels que $\lambda\mu = 1$. La conclusion de la partie b est donc valable lorsqu'on peut déterminer λ dans le centre de K, de sorte que $\lambda^4 \neq 1$; cela est toujours possible quand le nombre des éléments de ce centre est distinct de 2, 3 et 5.

Les parties a et b du raisonnement du théorème 2 montrent alors que si G n'est pas contenu dans Z_2, G contient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-\lambda^4)\rho & 1 \end{pmatrix}$, où ρ est arbitraire dans K; par suite G contient toutes les matrices $B_{12}(\mu)$; il contient aussi les matrices $P_{21}B_{12}(\mu)P_{21}^{-1} = B_{21}(-\mu)$ quel que soit μ, puisque $P_{21} \in C_2$; donc G est bien identique à C_2.

Ici encore, les cas où K est commutatif et a deux ou trois éléments sont effectivement des cas d'exception; par contre, lorsque K est un corps commutatif à cinq éléments, on peut montrer que le théorème 3 est vrai ([15]).

14. Il est facile d'étendre l'étude que nous avons faite du groupe $GL_n(R)$ au groupe $GL(E)$ des automorphismes d'un espace vectoriel E à une *infinité* de dimensions sur un corps quelconque K. La première partie du raisonnement du théorème 2 prouve que tout sous-groupe distingué de $GL(E)$, non contenu dans le centre $Z(E)$ (qui est encore ici formé des homothéties centrales), contient le sous-groupe distingué $C(E)$ engendré par les transvections de E; de même, tout sous-groupe distingué de $C(E)$, distinct de $C(E)$, est contenu dans $Z(E)$. D'autre part, si $F(E)$ désigne le sous-groupe distingué de $GL(E)$ formé des automorphismes dont les points invariants forment un sous-espace de E dont un supplémentaire a un nombre *fini* de dimensions, les considérations de la première partie de ce travail montrent sans peine que $C(E)$ est le groupe des commutateurs de $F(E)$, et que le groupe quotient $F(E)/C(E)$ est isomorphe à K^*/C.

(Manuscrit reçu le 9 juin 1943.)

([15]) *Voir* DICKSON, *loc. cit.*, p. 85. La méthode que nous avons suivie dans la seconde partie des démonstrations des théorèmes 2 et 3 est une légère modification de celle de Dickson; elle permet, contrairement à cette dernière, d'établir le théorème 3 même lorsque K est un corps commutatif quelconque de caractéristique 2, ayant plus de deux éléments (*cf.* van der WAERDEN, *Gruppen von linearen Transformationen*, Berlin, 1935, p. 7). Ce dernier résultat a été également obtenu, par une autre méthode, par M. IWASAWA (*Proc. Imp. Acad. Japan*, t. 17, 1941, p. 57).