Bulletin de la S. M. F.

Ky Fan

# Sur le comportement asymptotique des solutions d'équations linéaires aux différences finies du second ordre

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 70 (1942), p. 76-96

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1942__70__76_0>

# SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES DU SECOND ORDRE;

Par M. Ky Fan.

1. MM. J. Bitterlich-Willmann [1], D. Caligo [2] et O. Haupt [3] ont récemment traité des asymptotes des intégrales d'une équation différentielle linéaire. Le but de notre présente Note est de montrer que des procédés analogues à ceux de M. Haupt peuvent être utilisés pour étudier celles des solutions d'une équation linéaire aux différences finies qui vérifient une certaine propriété asymptotique. Nous nous contenterons ici de nous borner aux équations du second ordre pour une première recherche.

Étant donnée une équation linéaire aux différences finies du second ordre

$$(1) \qquad \Delta^2 y(n) + g(n)\Delta y(n) + f(n)y(n) = h(n) \quad [4],$$

nous envisageons ses solutions $y(n)$ telles que

$$(2) \qquad \lim_{n \to +\infty} [y(n) - n\Delta y(n)] \text{ existe} \quad [5],$$

---

(1) J. Bitterlich-Willmann, *Ueber die Asymptoten der Lösungen einer Differentialgleichung* (*Monatsh. f. Math. u. Phys.*, t. 50, 1941, p. 35-39).

(2) D. Caligo, *Comportamento asintotico degli integrali dell'equazione* $y''(x) + A(x)y(x) = 0$, *nella ipotesi* $\lim_{x \to +\infty} A(x) = 0$ (*Boll. Unione Mat. Italiana*, ser. II, Anno III, 1941, p. 286-295).

(3) O. Haupt, *Ueber Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Asymptoten* (*Math. Zeitschr.*, t. 48, 1942, p. 212-220); *Ueber das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen* (*Math. Zeitschr.*, t. 48, 1942, p. 289-292).

(4) Toutes les fonctions considérées ici sont supposées définies seulement pour les valeurs entières positives de l'argument. En outre, nous adoptons les notations habituelles

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n), \qquad \Delta^2 y(n) = y(n+2) - 2y(n+1) + y(n).$$

(5) C'est-à-dire que la limite existe et est *finie*.

ou bien telles que

$$(3)\quad \lim_{n\to+\infty} [y(n) - n\Delta y(n)] \text{ existe} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{y(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \Delta y(n) = 0,$$

ou bien telles que

$$(4)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{y(n)}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \Delta y(n) \text{ existent et soient égales.}$$

Les conditions (2) et (3) sont analogues aux conditions suivantes pour les solutions d'équations différentielles :

$$\lim_{x\to+\infty} [y(x) - xy'(x)] \text{ existe,}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [y(x) - xy'(x)] \text{ existe} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0;$$

conditions qui expriment respectivement l'existence d'une asymptote ou celle d'une asymptote parallèle à l'axe des abscisses.

Nous donnerons des conditions suffisantes pour que toute solution de l'équation (1) satisfasse à la condition (2) ou à la condition (4). Nous donnerons aussi une condition suffisante pour que l'équation (1) possède une infinité de solutions vérifiant la condition (3).

Nous remercions ici bien vivement M. M. Fréchet à qui nous avons communiqué notre manuscrit et à qui nous devons de précieux conseils.

**2.** Observons d'abord que la condition (4) est une conséquence de (2). En effet, si la condition (2) est remplie, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y(k) - k\Delta y(k)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{y(k)}{k} - \frac{y(k+1)}{k+1}\right]$$

est convergente et par conséquent la limite de $\frac{y(n)}{n}$ existe, quand $n \to +\infty$. En appliquant encore une fois (2), on voit alors que $\lim_{n\to+\infty} \Delta y(n)$ existe aussi et que ces deux limites sont égales.

On remarque aussi que la condition (4) équivaut à la suivante

$$(5)\quad \lim_{n\to+\infty} \Delta y(n) \text{ existe.}$$

Ceci résulte immédiatement de l'égalité suivante :

$$\frac{y(n)}{n} = \frac{\Delta y(1) + \Delta y(2) + \ldots + \Delta y(n-1)}{n} + \frac{y(1)}{n}.$$

Lemme 1. — *Pour qu'une fonction $y(n)$ (définie pour tous les entiers positifs $n$) satisfasse à la condition (2), il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\varphi(n)$ et une constante A telles que*

(6) $$\lim_{n \to +\infty} \varphi(n) \textit{ existe}$$

*et*

(7) $$y(n) = n\left(A + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\right).$$

*Démonstration.* — La condition est évidemment suffisante, car on a, pour une fonction $y(n)$ de la forme (7),

$$y(n) - n\Delta y(n) = \varphi(n).$$

Inversement, si une fonction $y(n)$ vérifie la condition (2), $y(n)$ peut être représentée sous la forme (7) en prenant

$$\varphi(n) = y(n) - n\Delta y(n) \quad \text{et} \quad A = \lim_{n \to +\infty} \frac{y(n)}{n}.$$

C. Q. F. D.

En particulier, pour qu'une fonction $y(n)$ satisfasse à la condition (3), il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\varphi(n)$ vérifiant (6) et telle que

(8) $$y(n) = n\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k(k+1)}.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(n)$ existe, il est évident que le second membre de (8) tend vers la même limite que $\varphi(n) = y(n) - n\Delta y(n)$, quand $n \to +\infty$. Donc, la condition (3) équivaut à la suivante :

(9) $$\lim_{n \to +\infty} y(n) \text{ existe} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} n\Delta y(n) = 0.$$

Dans la représentation (7), nous avons vu

$$\text{(10)} \qquad A = \lim_{n \to +\infty} \frac{y(n)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \Delta y(n),$$

$$\text{(11)} \qquad \Delta y(n) = \frac{y(n) - \varphi(n)}{n}.$$

On tire facilement de (11) et (7)

$$\text{(12)} \qquad \Delta^2 y(n) = \frac{-\Delta \varphi(n)}{n+1}.$$

Si l'on pose maintenant

$$\text{(13)} \qquad c = A + \sum_{k=a}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k(k+1)},$$

$a$ étant un entier positif, la représentation (7) deviendra

$$\text{(14)} \qquad y(n) = n\left(c - \sum_{k=a}^{n-1} \frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\right) \qquad (n > a);$$

$$\text{(15)} \qquad y(a) = ac.$$

### I. — Solutions telles que $\lim_{n \to +\infty} [y(n) - n\Delta y(n)]$ existe.

3. En nous servant des relations précédentes entre $y(n)$ et $\varphi(n)$, nous pouvons aisément établir le lemme suivant :

Lemme 2. — *Si $\varphi(n)$ est une fonction (définie pour $n \geqq a$) satisfaisant aux équations suivantes :*

$$\text{(16)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(n) + \sum_{j=a}^{n-1} g(j)\varphi(j) \\ &\quad + \sum_{j=a}^{n-1} \big(jg(j) + j^2 f(j)\big)\left(\sum_{k=a}^{j-1} \frac{\varphi(k)}{k(k+1)} - c\right) = c_1 - \sum_{j=a}^{n-1} jh(j) \\ &\qquad (n > a) \ [1], \end{aligned} \right.$$

$$\text{(17)} \qquad \varphi(a) = c_1;$$

[1] On convient de poser $\sum_{k=a}^{j-1} \frac{\varphi(k)}{k(k+1)} = 0$ pour $j = a$.

*alors la fonction $y(n)$ définie par* (14), (15) *est une solution de l'équation*

$$(18) \qquad \Delta^2 y(n) + \frac{n}{n+1} g(n) \Delta y(n) + \frac{n}{n+1} f(n) y(n) = \frac{n}{n+1} h(n)$$
$$(n \geqq a).$$

*Si, en outre,*

$$(6) \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi(n) \textit{ existe,}$$

*cette solution $y(n)$ de* (18) *vérifie la condition* (2).

*Réciproquement, si une fonction $y(n)$* (*définie pour $n \geqq a$*) *vérifie les relations* (14), (15) *et* (18), *la fonction $\varphi(n)$ satisfait aux conditions* (16) *et* (17). *Si, de plus, $y(n)$ vérifie* (2), *$\varphi(n)$ satisfait à* (6).

D'après (11), (15) et (17), on a l'égalité

$$\Delta y(a) = \frac{ac - c_1}{a}.$$

4. Étant données les constantes $c$, $c_1$, les relations (16), (17) déterminent successivement les valeurs de $\varphi(n)$ pour $n \geqq a$. Nous allons voir que sous certaines hypothèses, la fonction $\varphi(n)$ ainsi déterminée vérifie la condition (6). Ceci peut être exprimé dans les termes suivants.

LEMME 3. — *Supposons que les séries*

$$(19) \qquad \sum |r(n)| = \sum |ng(n) + n^2 f(n)|, \qquad \sum |g(n)|, \qquad \sum nh(n)$$

*soient convergentes. Alors, pour $a$ assez grand* [1], *l'équation* (16) *admet, quelles que soient les constantes $c$ et $c_1$, une solution $\varphi(n)$* (*définie pour $n \geqq a$*) *qui vérifie les conditions* (17) *et* (6).

*Démonstration.* — D'après l'hypothèse,

$$G(a) = \sum_{n=a}^{\infty} |g(n)| \qquad \text{et} \qquad F(a) = \sum_{n=a}^{\infty} |r(n)|$$

[1] Plus précisément, il suffit que $a$ soit assez grand pour qu'on ait l'inégalité (20).

existent pour tout entier $a > 0$ et

$$\lim_{a \to +\infty} G(a) = \lim_{a \to +\infty} F(a) = 0.$$

On peut donc choisir $a$ assez grand pour qu'on ait

$$G(a) + F(a) \leqq \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Nous laissons dès maintenant $a$ fixe et écrivons (16), (17) sous la forme

$$\varphi(n) = J(n;\, \varphi) + H(n;\, c,\, c_1) \quad (n \geqq a), \tag{21}$$

avec

$$\begin{cases} J(n;\, \varphi) = -\sum_{j=a}^{n-1} g(j)\,\varphi(j) - \sum_{j=a}^{n-1}\left(r(j)\sum_{k=a}^{j-1}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\right) & (n > a), \\ J(a;\, \varphi) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(n;\, c,\, c_1) = c_1 + c\sum_{j=a}^{n-1} r(j) - \sum_{j=a}^{n-1} jh(j), & (n > a), \\ H(a;\, c,\, c_1) = c_1. \end{cases}$$

D'après (20), on voit aisément le fait suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Si l'on a} & |\varphi(n)| \leqq p & \text{pour } n \geqq a, \\ \text{on a} & |J(n;\, \varphi)| \leqq \dfrac{p}{2} & \text{pour } n \geqq a. \end{array}\right. \tag{22}$$

Posons maintenant pour $n \geqq a$

$$\varphi_0(n) = 1; \quad \varphi_\nu(n) = J(n;\, \varphi_{\nu-1}) + H(n;\, c,\, c_1) \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{23}$$

En vertu de la convergence des séries (19), on voit que

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_\nu(n) \text{ existe} \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Dès lors, si l'on pose

$$\psi_\nu(n) = \varphi_\nu(n) - \varphi_{\nu-1}(n), \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots); \qquad (n \geqq a),$$

les limites

$$\lim_{n \to +\infty} \psi_\nu(n) \quad \text{existent} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

et

$$\text{borne sup.}_{n \geqq a} |\psi_\nu(n)| = p_\nu \quad \text{est finie} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Comme $J(n;\ \varphi)$ est linéaire en $\varphi$, nous avons

$$\psi_\nu(n) = J(n;\ \psi_{\nu-1}).$$

Il en résulte donc, en vertu de (22),

$$p_\nu \leqq \frac{p_1}{2^{\nu-1}}, \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots).$$

Et par conséquent, la série $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(n)$ est uniformément convergente (c'est-à-dire que la convergence est uniforme par rapport à $n$).

Or,

$$\varphi_\nu(n) = \varphi_0(n) + \sum_{j=1}^{\nu} \psi_j(n) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

donc

$$\varphi(n) = \lim_{\nu \to +\infty} \varphi_\nu(n) \quad \text{existe et} \quad = \varphi_0(n) + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(n).$$

On voit, d'après (23), que $\varphi(n)$ est une solution de l'équation (21). Autrement dit, $\varphi(n)$ est une solution de (16) et vérifie (17). De plus, comme la série $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(n)$ est uniformément convergente et $\lim_{n \to +\infty} \psi_j(n)$ existe pour chaque valeur de $j$, $\varphi(n)$ satisfait bien à la condition (6).

C. Q. F. D.

5. En combinant les lemmes **2**, **3**, on arrive au résultat suivant :

Supposons que les séries (19) soient convergentes et que $a$ soit un entier positif assez grand pour que l'inégalité (20) ait lieu. Alors, quelles que soient les constantes $C$, $C_1$, l'équation (18) admet une solution $y(n)$ (et une seule) (définie pour $n \geqq a$) qui vérifie les conditions (2) et

$$y(a) = C, \qquad \Delta y(a) = C_1.$$

*Sous l'hypothèse de la convergence des séries* (19), *on peut même affirmer que toute solution de l'équation* (18) *vérifie la* *condition* (2). En effet, si $y_0(n)$ est une solution de (18), considérons un entier $a$ assez grand pour qu'on ait (20). Soient $y_0(a) = C$, $\Delta y_0(a) = C_1$. D'après le résultat précédent, il existe une solution $y(n)$ de (18) telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} [y(n) - n\,\Delta y(n)]$ existe et $y(a) = C$, $\Delta y(a) = C_1$. Comme $y(a) = y_0(a)$, $\Delta y(a) = \Delta y_0(a)$, on a nécessairement $y(n) = y_0(n)$ pour $n \geqq a$. Donc,

$$\lim_{n \to +\infty} [y_0(n) - n\,\Delta y_0(n)] \quad \text{existe.}$$

Théorème I. — *Étant donnée l'équation linéaire aux différences finies*

$$\text{(1)} \qquad \Delta^2 y(n) + g(n)\,\Delta y(n) + f(n) y(n) = h(n) \qquad (n > 0),$$

*supposons que les séries*

$$\text{(19)} \qquad \sum |ng(n) + n^2 f(n)|, \quad \sum |g(n)|, \quad \sum nh(n)$$

*soient convergentes. Alors, la limite*

$$\text{(2)} \qquad \lim_{n \to +\infty} [y(n) - n\,\Delta y(n)] \quad \textit{existe,}$$

*quelle que soit la solution* $y(n)$ *de* (1).

*Démonstration.* — En posant

$$g_1(n) = \frac{n+1}{n} g(n), \qquad f_1(n) = \frac{n+1}{n} f(n), \qquad h_1(n) = \frac{n+1}{n} h(n),$$

l'équation (1) devient

$$\text{(24)} \qquad \Delta^2 y(n) + \frac{n}{n+1} g_1(n)\,\Delta y(n) + \frac{n}{n+1} f_1(n) y(n) = \frac{n}{n+1} h_1(n).$$

D'après la convergence des séries (19), les séries

$$\sum |ng_1(n) + n^2 f_1(n)|, \quad \sum |g_1(n)|, \quad \sum nh_1(n)$$

sont aussi convergentes. Dès lors, d'après ce qui précède, toute solution de (24) vérifie la condition (2). C'est-à-dire que toute solution de (1) vérifie (2).

C. Q. F. D.

**II. — Solutions telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} y(n)$ existe et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Delta y(n) = 0$.**

6. Nous allons maintenant prouver le lemme suivant :

Lemme 4. — *Supposons que les séries* $\sum |g(n)|$, $\sum nh(n)$ *soient convergentes et que la série* $\sum r(n) = \sum [ng(n) + n^2 f(n)]$ *soit non convergente. Supposons en outre que* $r(n)$ *reste* $\geqq 0$ *ou reste* $\leqq 0$ *pour* $n$ *assez grand. Alors, si* $y(n)$ *est une solution de* (18) *vérifiant la condition* (2), *on a nécessairement*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \Delta y(n) = 0. \tag{25}$$

*Démonstration.* — Puisque $y(n)$ vérifie la condition (2), $y(n)$ est, d'après le lemme 1, de la forme (14), où $c$ satisfait à la relation (15) et où $\varphi(n)$ vérifie la condition (6). En prenant $c_1 = a[c - \Delta y(a)]$, on voit, d'après le lemme 2, que $\varphi(n)$ vérifie la relation de récurrence (16).

Dans la relation (16), le terme $\varphi(n)$ converge vers une limite quand $n \to +\infty$. Les termes $\sum\limits_{j=a}^{n-1} g(j)\varphi(j)$ et $\sum\limits_{j=a}^{n-1} jh(j)$ convergent également quand $n \to +\infty$, d'après notre hypothèse. Il en résulte donc que la série

$$\sum_{n=a}^{\infty} r(n)\frac{y(n)}{n} = \sum_{n=a}^{\infty}\left[r(n)\left(c - \sum_{k=a}^{n-1}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\right)\right]$$

est convergente.

Comme $y(n)$ vérifie (2), la limite

$$A = \lim_{n\to+\infty} \frac{y(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \Delta y(n)$$

existe. Il s'agit de montrer que $A = 0$. Si $A$ n'était pas zéro, $\frac{y(n)}{n}$ serait constamment $> 0$ ou constamment $< 0$ pour $n$ assez grand. Mais $r(n)$ reste $\geqq 0$ ou reste $\leqq 0$ pour $n$ assez grand, $r(n)\frac{y(n)}{n}$

resterait donc $\geqq 0$ ou resterait $\leqq 0$ pour $n$ assez grand. Par conséquent, la série $\sum r(n)\frac{y(n)}{n}$ serait non seulement convergente, mais aussi absolument convergente. Alors, comme on a

$$\sum r(n) = \frac{1}{A}\sum r(n)\frac{y(n)}{n}\,\frac{nA}{y(n)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{nA}{y(n)} = 1,$$

la série $\sum r(n)$ serait convergente, contrairement à notre hypothèse. On a donc $A = 0$. C. Q. F. D.

Comme nous l'avons vu au n° 2, la condition (3) équivaut à la condition (9). Du lemme 4 découle donc immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2. — *Étant donnée l'équation linéaire aux différences finies*

$$\Delta^2 y(n) + g(n)\Delta y(n) + f(n)y(n) = h(n), \tag{1}$$

*supposons que les séries* $\sum |g(n)|$, $\sum nh(n)$ *soient convergentes et que* $\sum r(n) = \sum [ng(n) + n^2 f(n)]$ *soit non convergente. Supposons en outre que* $r(n)$ *reste* $\geqq 0$ *ou reste* $\leqq 0$ *pour* $n$ *assez grand. Alors, pour toute solution* $y(n)$ *de* (1) *vérifiant la condition* (2), *s'il en existe, on a nécessairement*

$$\lim_{n \to +\infty} y(n) \text{ existe et } \lim_{n \to +\infty} n\,\Delta y(n) = 0. \tag{9}$$

D'une façon analogue, on peut démontrer la proposition suivante :

*Si* $\sum |r(n)| = \sum |ng(n) + n^2 f(n)|$ *et* $\sum nh(n)$ *sont convergentes et si* $\sum g(n)$ *est non convergente, mais* $g(n)$ *reste* $\geqq 0$ *ou reste* $\leqq 0$ *pour* $n$ *assez grand, alors, pour toute solution* $y(n)$ *de* (1) *vérifiant* (2), *s'il en existe, on a nécessairement*

$$\lim_{n \to +\infty} [y(n) - n\,\Delta y(n)] = 0.$$

**7.** Cherchons à présent une condition suffisante pour que l'équation (1) possède une solution vérifiant la condition (9). En partant de la formule (8), on démontre d'abord facilement, par un simple calcul, le lemme suivant :

**Lemme 5.** — *Si* $\varphi(n)$ *est une fonction vérifiant les conditions* (17), (6) *et*

$$(26)\qquad \varphi(n) = -\sum_{j=a}^{n-1} g(j)\varphi(j) + \sum_{j=a}^{n-1}\left(r(j)\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\right) + c_1 - \sum_{j=a}^{n-1} jh(j) \qquad (n > a);$$

*alors la fonction* $y(n)$ *définie par* (8) *est une solution de l'équation* (18) *vérifiant la condition* (9).

*Inversement, si une fonction* $y(n)$ *satisfait aux relations* (8), (18) *et* (9), *la fonction* $\varphi(n)$ *vérifie les conditions* (17), (6) *et* (26).

En employant un raisonnement analogue à celui du nº 4, on peut démontrer :

**Lemme 6.** — *Supposons que les séries* $\sum |g(n)|$, $\sum |nf(n)|$ *et* $\sum nh(n)$ *soient convergentes. Soit a un entier positif assez grand pour qu'on ait*

$$(27)\qquad \sum_{n=a}^{\infty} |g(n)| + \sum_{n=a}^{\infty} |g(n) + nf(n)| \leq \frac{1}{2}.$$

*Alors, quelle que soit la constante* $c_1$, *l'équation* (26) *admet une solution* $\varphi(n)$ *vérifiant les conditions* (17) *et* (6).

De là on peut tirer le lemme suivant :

**Lemme 7.** — *Étant donnée l'équation linéaire aux différences finies* (18), *supposons que les séries* $\sum |g(n)|$, $\sum |nf(n)|$ *et* $\sum nh(n)$ *soient convergentes. Supposons en outre que a soit assez grand pour que l'inégalité* (27) *ait lieu. Alors, quelle que soit la constante* $c_1$, *l'équation* (18) *posssède une solution* $y(n)$ *et une seule qui vérifie* (9) *et*

$$y(a) - a\,\Delta y(a) = c_1.$$

*Démonstration.* — L'existence d'une telle solution résulte directement des lemmes 5 et 6. Reste à montrer l'unicité de la solution.

Si $y_1(n)$ et $y_2(n)$ sont deux solutions de (18) vérifiant les conditions complémentaires mentionnées ci-dessus, posons pour $n \geqq a$

$$\varphi_j(n) = y_j(n) - n\,\Delta y_j(n) \qquad (j = 1, 2).$$

On voit alors que $\varphi_1(n)$ et $\varphi_2(n)$ satisfont à la même équation (26). On a donc pour $d(n) = \varphi_1(n) - \varphi_2(n)$,

$$d(n) = J_1(n;\, d) \qquad (n \geqq a), \tag{28}$$

où

$$\begin{cases} J_1(n;\, d) = -\displaystyle\sum_{j=a}^{n-1} g(j)\,d(j) + \sum_{j=a}^{n-1}\left(r(j)\sum_{k=j}^{\infty}\frac{d(k)}{k(k+1)}\right) & (n > a); \\ J_1(a;\, d) = 0. \end{cases}$$

Comme $\varphi_1(n)$ et $\varphi_2(n)$ satisfont à la condition (6),

$$M = \underset{n \geqq a}{\text{borne sup.}}\, |d(n)| \quad \text{est finie.}$$

D'autre part, on a, en vertu de (27),

$$|J_1(n;\, d)| \leqq \frac{M}{2},$$

et par suite, en tenant compte de (28), $0 \leqq M \leqq \frac{M}{2}$. Il vient donc $M = 0$. C'est-à-dire que $d(n) = 0$ et $\varphi_1(n) = \varphi_2(n)$, d'où $y_1(n) = y_2(n)$. C. Q. F. D.

Le dernier lemme nous conduit immédiatement au théorème suivant :

Théorème 3. — *Étant donnée l'équation linéaire aux différences finies*

$$\Delta^2 y(n) + g(n)\,\Delta y(n) + f(n)\,y(n) = h(n), \tag{1}$$

*si les séries* $\sum |g(n)|$, $\sum |nf(n)|$ *et* $\sum nh(n)$ *sont convergentes, l'équation* (1) *admet une infinité de solutions* $y(n)$ *telles que*

$$\lim_{n \to +\infty} y(n) \quad \textit{existe et} \quad \lim_{n \to +\infty} n\,\Delta y(n) = 0. \tag{9}$$

*Si, de plus, a est un entier positif suffisamment grand pour qu'on ait*

$$(29) \qquad \sum_{n=a}^{\infty} |g(n)| + \sum_{n=a}^{\infty} |g(n) + nf(n)| \leqq \frac{1}{4},$$

*alors, quelle que soit la constante $c_1$, il existe une solution $y(n)$ de* (1) *et une seule qui vérifie* (9) *et*

$$(30) \qquad y(a) - a\Delta y(a) = c_1.$$

En combinant les théorèmes **2**, **3**, on obtient aussitôt la proposition suivante :

*Sous les hypothèses du théorème* 3, *supposons en outre que la série $\sum r(n) = \sum [ng(n) + n^2 f(n)]$ soit non convergente et que $r(n)$ reste $\geqq 0$ ou reste $\leqq 0$ pour $n$ suffisamment grand. Si a est un entier positif assez grand pour que l'inégalité* (29) *soit remplie, alors, quelle que soit la constante $c_1$, l'équation* (1) *admet une solution unique $y(n)$ vérifiant* (2) *et* (30). *Et cette solution satisfait nécessairement à la condition* (9).

Comme une conséquence immédiate du théorème 3, nous avons le résultat suivant concernant les solutions d'une équation aux différences finies du premier ordre :

*Si les séries $\sum |g(n)|$ et $\sum nh(n)$ sont convergentes, l'équation du premier ordre*

$$(31) \qquad \Delta y(n) + g(n) y(n) = h(n)$$

*admet une infinité de solutions $y(n)$ telles que la série $\sum y(n)$ soit convergente et que* $\lim_{n \to +\infty} ny(n) = 0$.

En effet, en posant $z(n) = y(1) + y(2) + \ldots + y(n)$, l'équation (31) devient $\Delta^2 z(n-1) + g(n)\Delta z(n-1) = h(n)$. En appliquant le théorème 3 à cette dernière équation, on tire aussitôt la conclusion annoncée.

**8.** La solution générale de l'équation (1) peut s'obtenir à partir de trois solutions fondamentales. Soit $b$ un entier positif quelconque. Si $u(n)$ est la solution de l'équation homogène.

$$\Delta^2 y(n) + g(n)\Delta y(n) + f(n)y(n) = 0 \tag{32}$$

telle que $u(b) = 0$, $\Delta u(b) = 1$; et si $v(n)$ est la solution de cette même équation telle que $v(b) = 1$, $\Delta v(b) = 0$; et enfin si $w(n)$ est la solution de l'équation non homogène (1) déterminée par $w(b) = \Delta w(b) = 0$; la solution générale de (1) est donnée par

$$y(n) = u(n)\Delta y(b) + v(n)y(b) + w(n) \qquad (n \geqq b). \tag{33}$$

En donnant à $y(b)$, $\Delta y(b)$ des valeurs arbitrairement choisies, on obtient de (33) toutes les solutions de (1).

M. Fréchet avait bien voulu s'intéresser à cet article en manuscrit. La lecture du théorème 3 lui a donné l'idée de le compléter par une proposition dont on va trouver ici l'énoncé et la démonstration qu'il a eu l'obligeance de nous communiquer.

Théorème 4. — *Sous les hypothèses du théorème* 3, *supposons en outre qu'aucun des deux cas exceptionnels suivants ne se produise :*

Premier cas exceptionnel. — *Toutes les solutions de* (1) *vérifient la condition* (9).

Deuxième cas exceptionnel. — *Il existe un entier* $b > 0$ *tel que toutes les solutions de* (1) *vérifiant* (9) *prennent la même valeur pour* $n = b$.

*Alors, il existe une équation aux différences finies du premier ordre telle que l'ensemble de ses solutions soit identique à l'ensemble des solutions de* (1) *vérifiant la condition* (9) [1].

*Démonstration.* — Puisque l'équation (1) possède des solutions ne vérifiant pas (9), il y a deux cas possibles.

---

[1] Plus précisément, il existe une équation (36) du premier ordre qui possède les deux propriétés suivantes :

*a.* Toute solution de (1) vérifiant (9) est aussi une solution de (36).

*b.* Si $a$ est un entier positif assez grand pour qu'on ait (29), toute solution de (36) est aussi une solution de (1), *quand* $n \geqq a$. Et toute solution de (36) jouit de la propriété (9).

*Premier cas.* — L'équation (1) admet des solutions telles que la condition $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,\Delta y(n) = 0$ ne soit pas remplie.

Dans ce cas, on tire de (33)

$$(34)\quad \left\{ \begin{array}{l} n\,\Delta y(n) = [n\,\Delta u(n)]\,\Delta y(b) + [n\,\Delta v(n)]\,y(b) + [n\,\Delta w(n)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n \geqq b). \end{array} \right.$$

Si les trois crochets restent bornés, on peut former une suite de nombres entiers $n_1, n_2, \ldots$, supérieurs à $b$, tendant vers $+\infty$ et tels que les crochets aient respectivement des limites $\lambda, \mu, \nu$, quand $n$ tend vers $+\infty$ par cette suite. Comme il existe des solutions qui ne vérifient pas la condition $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,\Delta y(n) = 0$, on peut choisir $n_1, n_2, \ldots$ de façon que $\lambda, \mu, \nu$ soient non tous nuls. Alors, si $y(n)$ est une solution de (1) vérifiant (9) (une telle solution existe, d'après le théorème 3), on aura pour cette solution

$$(35)\qquad 0 = \lambda\,\Delta y(b) + \mu y(b) + \nu,$$

où $\lambda, \mu, \nu$ dépendent de $b$, mais non des valeurs de $y(b)$, $\Delta y(b)$ et ne sont pas tous trois nuls.

Quand les trois crochets de (34) ne restent pas tous trois bornés, on refait le raisonnement en divisant (34) par

$$\sqrt{[n\,\Delta u(n)]^2 + [n\,\Delta v(n)]^2 + [n\,\Delta w(n)]^2}.$$

On peut former une suite d'entiers $n_1, n_2, \ldots$, supérieurs à $b$, tendant vers $+\infty$ et tels que

$$\sqrt{[n\,\Delta u(n)]^2 + [n\,\Delta v(n)]^2 + [n\,\Delta w(n)]^2}$$

tende vers $+\infty$ et que les trois expressions

$$\frac{n\,\Delta u(n)}{\sqrt{[n\,\Delta u(n)]^2 + [n\,\Delta v(n)]^2 + [n\,\Delta w(n)]^2}},$$
$$\frac{n\,\Delta v(n)}{\sqrt{[n\,\Delta u(n)]^2 + [n\,\Delta v(n)]^2 + [n\,\Delta w(n)]^2}},$$
$$\frac{n\,\Delta w(n)}{\sqrt{[n\,\Delta u(n)]^2 + [n\,\Delta v(n)]^2 + [n\,\Delta w(n)]^2}}$$

tendent vers des limites $\lambda, \mu, \nu$. On a cette fois $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, les limites $\lambda, \mu, \nu$ sont donc non toutes nulles. Alors, on a encore une relation de la forme (35) vérifiée par toute solution de (1) vérifiant (9).

*Deuxième cas.* — Toute solution de (1) vérifie la condition

$$\lim_{n \to +\infty} n \Delta y(n) = 0.$$

Dans ce cas, au moins une solution de (1) est telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} y(n)$ n'existe pas, autrement on serait dans le premier cas exceptionnel.

On considère alors la relation (33), où $u(n)$, $v(n)$ et $w(n)$ ne peuvent pas tous converger à la fois.

Si $u(n)$, $v(n)$, $w(n)$ restent tous trois bornés, alors en passant à la limite par deux suites convenables de nombres entiers, on aura pour toute solution $y(n)$ de (1) vérifiant (9) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} y(n) &= \lambda' \Delta y(b) + \mu' y(b) + \nu' \\ &= \lambda'' \Delta y(b) + \mu'' y(b) + \nu'' \end{aligned}$$

et par suite

$$(\lambda' - \lambda'') \Delta y(b) + (\mu' - \mu'') y(b) + (\nu' - \nu'') = 0,$$

où $\lambda' - \lambda''$, $\mu' - \mu''$, $\nu' - \nu''$ ne sont pas tous nuls.

Si $u(n)$, $v(n)$ et $w(n)$ ne restent pas tous trois bornés, on refait le raisonnement en divisant (33) par $\sqrt{[u(n)]^2 + [v(n)]^2 + [w(n)]^2}$.

Ainsi, nous avons prouvé dans les deux cas que les solutions de (1) vérifiant (9) vérifient une équation linéaire aux différences finies

$$(36) \qquad \lambda(n) \Delta y(n) + \mu(n) y(n) + \nu(n) = 0.$$

Je dis maintenant que $\lambda(n) \neq 0$ quel que soit $n > 0$. En effet, si $\lambda(n)$ s'annulait pour $n = b$, on aurait, d'après (36),

$$y(b) = -\frac{\nu(b)}{\mu(b)}$$

pour toute solution $y(n)$ de (1) vérifiant (9), et alors on se trouverait dans le deuxième cas exceptionnel. Donc $\lambda(n) \neq 0$ quel que soit $n > 0$. L'équation (36) est bien ainsi du premier ordre.

Reste à montrer que toute solution de (36) est une solution de (1) et vérifie la condition (9).

Prenons un entier $a > 0$ assez grand pour qu'on ait l'inégalité (29). On écrit, d'après (36),

$$(37)\quad -\frac{\lambda(a)}{a}[y(a)-a\Delta y(a)]+\left[\mu(a)+\frac{\lambda(a)}{a}\right]y(a)+\nu(a)=0.$$

Si $\mu(a)+\frac{\lambda(a)}{a}$ était nul, on aurait $y(a)-a\Delta y(a)=\frac{a\nu(a)}{\lambda(a)}$ pour toute solution $y(n)$ de (1) vérifiant (9), contrairement au théorème 3. Donc, $\mu(a)+\frac{\lambda(a)}{a}\neq 0$.

Soit maintenant $y_0(n)$ une solution de (36). En appliquant le théorème 3, il existe une solution $y_1(n)$ de (1) qui vérifie (9) et qui est telle que $y_1(a)-a\Delta y_1(a)=y_0(a)-a\Delta y_0(a)$. D'après ce qui précède, $y_1(n)$ est aussi une solution de (36). En vertu de (37) et de l'égalité $y_1(a)-a\Delta y_1(a)=y_0(a)-a\Delta y_0(a)$, on a $y_1(a)=y_0(a)$, puisque nous avons vu que $\mu(a)+\frac{\lambda(a)}{a}\neq 0$. Il vient donc $y_1(n)=y_0(n)$ pour $n \geqq a$. Et par conséquent $y_0(n)$ est une solution de (1) (pour $n \geqq a$) et vérifie la condition (9).

C. Q. F. D.

On tire du théorème 4 le fait suivant :

Théorème 5. — *Sous les hypothèses du théorème 4, si $a$ est un entier positif assez grand pour qu'on ait l'inégalité* (29), *alors, quelle que soit la constante $c$, l'équation* (1) *admet* (*pour $n \geqq a$*) *une solution unique $y(n)$ qui vérifie* (9) *et $y(a)=c$.*

9. Énonçons maintenant le théorème suivant :

Théorème 6. — *Supposons que $g(n)+nf(n)$ reste $\geqq 0$ ou reste $\leqq 0$ pour $n$ suffisamment grand. Si les séries $\sum |g(n)|$ et $\sum nh(n)$ sont convergentes et si la série $\sum nf(n)$ est non convergente, alors pour toute solution $y(n)$ de* (1) *vérifiant* (2), *s'il en existe, on a nécessairement*

$$\lim_{n\to+\infty} y(n)=0, \qquad \lim_{n\to+\infty} n\,\Delta y(n)=0.$$

*Démonstration.* — Quand les hypothèses du présent théorème sont vérifiées, il en est de même de celles du théorème 2. Donc, toute solution $y(n)$ de (1) vérifiant (2) vérifie nécessairement (9).

C'est-à-dire que $B = \lim_{n \to +\infty} y(n)$ existe et $\lim_{n \to +\infty} n\,\Delta y(n) = 0$. Il s'agit de montrer que $B = 0$.

Comme $y(n)$ satisfait à la condition (9), $y(n)$ est de la forme (8), où $\varphi(n)$ vérifie, d'après le lemme 5, la relation (26). D'après notre hypothèse, les termes $\varphi(n)$, $\sum_{j=a}^{n-1} g(j)\varphi(j)$ et $\sum_{j=a}^{n-1} jh(j)$ dans cette relation (26) tendent chacun vers une limite, quand $n \to +\infty$. Il en résulte donc que la série

$$\sum_{n=a}^{\infty}\left[\left(g(n)+nf(n)\right)y(n)\right] = \sum_{n=a}^{\infty}\left(r(n)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\right)$$

est convergente. Si $B = \lim_{n \to +\infty} y(n) \neq 0$, cette série serait non seulement convergente, mais aussi absolument convergente [puisque $g(n) + nf(n)$ reste $\geqq 0$ ou reste $\leqq 0$ pour $n$ assez grand]. Dès lors, comme on a

$$\sum\left(g(n)+nf(n)\right) = \frac{1}{B}\sum\left\{\left(g(n)+nf(n)\right)y(n)\frac{B}{y(n)}\right\}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty}\frac{B}{y(n)} = 1,$$

la série $\sum [g(n) + nf(n)]$ serait convergente. Et par suite la série $\sum nf(n)$ serait aussi convergente $\left[\text{puisque } \sum g(n) \text{ est convergente}\right]$, contrairement à notre hypothèse. Donc $B = 0$.

C. Q. F. D.

### III. — Solutions telles que $\lim_{n \to +\infty} \frac{y(n)}{n}$ et $\lim_{n \to +\infty} \Delta y(n)$ existent et soient égales.

**10.** Envisageons maintenant les solutions jouissant de la propriété suivante :

$$(4) \qquad \lim_{n \to +\infty}\frac{y(n)}{n} = \lim_{n \to +\infty}\Delta y(n) \text{ existent.}$$

Nous avons vu que (4) équivaut à la propriété suivante :

$$(5) \qquad \lim_{n \to +\infty}\Delta y(n) \text{ existe.}$$

Toute fonction $y(n)$ est représentable sous la forme

$$y(n) = c + \sum_{k=a}^{n-1} \Phi(k) \qquad (n \geqq a) \quad (^1),$$

où

$$\Phi(n) = \Delta y(n), \qquad c = y(a).$$

Si la fonction $y(n)$ possède la propriété (5), la fonction $\Phi(n)$ vérifie la condition

(38) $$\lim_{n \to +\infty} \Phi(n) \text{ existe.}$$

Il suit de là que la recherche des solutions $y(n)$ (définies pour $n \geqq a$) de l'équation (1) vérifiant (5) et $y(a) = c$ équivaut à la résolution de l'équation

(39) $$\Phi(n) = -\sum_{j=a}^{n-1} g(j)\Phi(j) - \sum_{j=a}^{n-1}\left(f(j)\sum_{k=a}^{j-1}\Phi(k)\right) - c\sum_{j=a}^{n-1} f(j) + c_1 + \sum_{j=a}^{n-1} h(j) \qquad (n > a) \quad (^1)$$

avec les conditions auxiliaires (38) et

(40) $$\Phi(a) = c_1.$$

Nous pouvons écrire les équations (39), (40) sous la forme

(41) $$\Phi(n) = J_2(n;\Phi) + H_2(n; c, c_1) \qquad (n \geqq a),$$

avec

$$\begin{cases} J_2(n;\Phi) = -\sum_{j=a}^{n-1} g(j)\Phi(j) - \sum_{j=a}^{n-1}\left(f(j)\sum_{k=a}^{j-1}\Phi(k)\right) & (n > a), \\ J_2(a;\Phi) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_2(n; c, c_1) = -c\sum_{j=a}^{n-1} f(j) + c_1 + \sum_{j=a}^{n-1} h(j) & (n > a), \\ H_2(a; c, c_1) = c_1. \end{cases}$$

---

(1) On convient de poser $\sum_{k=a}^{n-1} \Phi(k) = 0$ pour $n = a$.

Si les séries $\sum |nf(n)|$, $\sum |g(n)|$ et $\sum h(n)$ sont convergentes et si $a$ est assez grand pour qu'on ait

$$(42) \qquad \sum_{n=a}^{\infty} |nf(n)| + \sum_{n=a}^{\infty} |g(n)| \leqq \frac{1}{2},$$

on peut démontrer, en procédant comme dans le n° 4, par approximations successives, que l'équation (41) admet, quelles que soient $c$, $c_1$, une solution $\Phi(n)$ vérifiant (38).

Nous arrivons ainsi au résultat suivant :

Supposons que les séries $\sum |nf(n)|$, $\sum |g(n)|$ et $\sum h(n)$ soient convergentes et que $a$ remplisse l'inégalité (42). Alors, quelles que soient les constantes $c$, $c_1$, l'équation (1) admet une solution $y(n)$ et une seule qui vérifie (5) et $y(a) = c$, $\Delta y(a) = c_1$.

Ce fait peut être exprimé dans les termes suivants :

THÉORÈME 7. — *Étant donnée l'équation linéaire aux différences finies*

$$(1) \qquad \Delta^2 y(n) + g(n)\Delta y(n) + f(n)y(n) = h(n),$$

*si les séries* $\sum |nf(n)|$, $\sum |g(n)|$ *et* $\sum h(n)$ *sont convergentes, les limites*

$$(4) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{y(n)}{n} \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} \Delta y(n) \quad \textit{existent et sont égales,}$$

*quelle que soit la solution* $y(n)$ *de* (1).

Comme un corollaire du théorème 7, nous avons la proposition suivante :

*Étant donnée l'équation linéaire aux différences finies du premier ordre*

$$(31) \qquad \Delta y(n) + g(n)y(n) = h(n),$$

*si les séries* $\sum |g(n)|$ *et* $\sum h(n)$ *sont convergentes, toute solution* $y(n)$ *de* (31) *tend vers une limite, quand* $n$ *tend vers* $+\infty$.

**11.** En utilisant la relation (39), on peut facilement démontrer, par un raisonnement analogue à celui des n$^{os}$ **6**, **9**, les propositions que voici :

*Si les séries* $\sum |nf(n)|$ *et* $\sum h(n)$ *sont convergentes et si* $\sum g(n)$ *est non convergente, mais* $g(n)$ *reste* $\geqq 0$ *ou reste* $\leqq 0$ *pour* $n$ *assez grand, alors, pour toute solution* $y(n)$ *de* (1) *vérifiant* (5), *s'il en existe, la condition* (25) *est nécessairement vérifiée.*

*Si* $\sum |g(n)|$, $\sum f(n)$ *et* $\sum h(n)$ *sont convergentes et si* $\sum nf(n)$ *est non convergente, mais* $f(n)$ *reste* $\geqq 0$ *ou reste* $\leqq 0$ *pour* $n$ *assez grand, alors pour toute solution* $y(n)$ *de* (1) *satisfaisant à la condition* (5), *s'il en existe, la condition* (25) *est nécessairement remplie.*

*Si les séries* $\sum |g(n)|$ *et* $\sum h(n)$ *sont convergentes et si la série* $\sum f(n)$ *est non convergente, mais* $f(n)$ *reste* $\geqq 0$ *ou reste* $\leqq 0$ *pour* $n$ *suffisamment grand, alors pour toute solution* $y(n)$ *de* (1) *telle que* $\lim\limits_{n \succ +\infty} y(n)$ *existe, s'il en existe, on a nécessairement* $\lim\limits_{n \succ +\infty} y(n) = 0$.

(Manuscrit reçu le 19 décembre 1942.)