BULLETIN DE LA S. M. F.

LUCIEN HIBBERT

Les équations du problème des fluctuations économiques et de l'interdépendance des marches, d'après M. B. Chait

Bulletin de la S. M. F., tome 69 (1941), p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1941__69__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LES ÉQUATIONS DU PROBLÈME DES FLUCTUATIONS ÉCONOMIQUES ET DE L'INTERDÉPENDANCE DES MARCHÉS, D'APRÈS M. B. CHAIT;

PAR M. LUCIEN HIBBERT.

Introduction.

Pour le chimiste, connaître un édifice moléculaire complexe, c'est le refaire en partant des molécules ou des atomes des corps qu'il appelle simples; en d'autres mots, c'est faire la synthèse qui est le terme ultime de son analyse.

M. Chait, dans son livre « Les Fluctuations économiques et l'Interdépendance des Marchés », *introduit l'idée de synthèse dans l'étude des phénomènes économiques.*

M. Chait distingue d'abord le marché comme unité fondamentale des milieux économiques, et caractérise le marché par son flux d'entrée, son flux de sortie, et sa réserve. Il groupe les marchés en filières de divers types. Au moyen d'une analyse poussée, il arrive à formuler les équations des divers types de filières, *et ainsi, par le marché et son groupement en réseaux de marchés ou filières, il fait une véritable synthèse du fonctionnement des milieux économiques.*

Les équations des filières s'expriment d'ailleurs simplement par l'intermédiaire d'opérateurs différentiels. A chaque marché, qu'il soit intermédiaire, périphérique ou final, correspond un opérateur; dans cet opérateur entrent les constantes caractérisant le marché en question, et ces constantes peuvent être déterminées par la voie statistique.

Dans toute filière, il y a une liaison entre le marché périphérique et le marché final, et c'est cette liaison entre le marché final et le marché périphérique à l'aide des opérateurs différentiels qui a conduit M. Chait à formuler une loi économique d'une très grande importance : *la loi de divergence*.

Mais cette loi contient deux inconnues ; le flux du marché final et ses dérivées jusqu'à un certain ordre, et le flux du marché périphérique. Il fallait donc trouver une deuxième équation où figurent les deux inconnues. L'analyse du bénéfice, que l'auteur introduit sous la forme du bénéfice moteur, fournit la deuxième équation qui était nécessaire.

Une filière de marchés étant donnée, l'on peut alors établir pour le mouvement de tous les marchés d'une telle filière une équation différentielle par rapport au flux du marché final et contenant seulement des constantes statistiquement définissables.

Le résultat capital auquel M. Chait est arrivé, est donc celui-ci : *le flux du marché final de toute filière dépend d'une équation différentielle, dont les coefficients sont des constantes, que l'on peut connaître. Dans la pratique, à toute filière donnée, l'on fait correspondre une filière théorique. L'on aboutit de la sorte pour le flux final à une fonction par rapport au temps, et c'est cette fonction que l'on compare à la variation par rapport à t du flux réel final.* Désormais la prévision économique pour les filières devient scientifiquement possible.

L'idée du cycle, si chère aux Économistes, est dans la structure même des équations de M. Chait, étant donné que les racines imaginaires de l'équation caractéristique de toute équation différentielle linéaire entraînent pour l'équation différentielle elle-même des solutions périodiques.

Et enfin, conclusion digne d'être retenue, *les équations de M. Chait sont les plus maniables de toutes les équations de l'analyse mathématique; ce sont des équations différentielles à coefficients constants.*

Notre exposé va comporter deux parties. Dans la première, nous définissons les diverses espèces de biens économiques, les marchés, leurs modalités d'organisation en filières. Nous établissons ensuite les équations des divers types de filières en utilisant les opérateurs différentiels; *et nous arrivons à la loi fondamen-*

tale de M. Chait, ou loi de divergence des marchés. Nous terminons par l'examen de quelques cas simples, illustrant la portée de la loi de divergence.

La deuxième partie suit l'exposé de M. Chait dans l'étude des mouvements des marchés et des réseaux. L'auteur est amené à introduire deux nouvelles équations : l'équation du bénéfice, et celle qui lie le bénéfice à la production du marché final. L'équation d'une filière, jointe aux deux équations précédentes, calculées pour la même filière, constitue un système différentiel parfaitement résoluble. Enfin, nous faisons suivre l'établissement du système différentiel d'une application simple, où se révèlent deux paramètres importants, fonctions des paramètres qui définissent la filière : le coefficient économique du bien final, et la réagibilité de l'entrepreneur.

Première Partie.

1. Définitions essentielles. — Par définitions essentielles, nous entendons les définitions des termes fondamentaux utilisés par M. Chait dans le cours de son travail.

Parmi ces termes, il y a lieu de détacher les biens économiques, auxquels l'auteur donne un sens tout à fait spécial; le marché, et son organisation en filières de divers types; le flux d'un marché. Nous mettons bien en relief les filières de marchés, parce que ces filières sont l'image des milieux économiques étudiés par M. Chait, et à partir desquels il aboutit à une interprétation satisfaisante des phénomènes économiques du monde réel.

A. Bien. — Un bien est un produit qui peut être consommé ou utilisé, ou encore servir de moyen de production.

Exemple. — Le pain est un bien de consommation; une automobile est un bien d'usage; une machine-outil est un bien de production.

1. *Bien final.* — Un produit fini, envisagé à l'instant même de sa consommation, un objet d'usage ou un moyen de production considéré au moment de son utilisation effective.

2. *Bien non final.* — Un produit fini dont la consommation ou l'utilisation est différée; ou un produit non fini.

B. **Marché.** — Le marché est le lieu d'écoulement des biens. Tout marché comporte un flux d'entrée, un flux de sortie et un stock qui est la différence cumulative des deux flux.

1. *Marché périphérique.* — C'est le marché des matières premières dans la production d'un bien quelconque.

2. *Marché final.* — C'est le dernier marché, ou le marché du bien final,

3. *Marché non final.* — Tout marché intermédiaire entre le marché périphérique et le marché final, ou entre un marché final et un autre marché final.

C. **Différenciation.** — 1. *Différenciation verticale.* — Les marchés forment une suite verticale, étapes dans la transformation et dans la distribution d'un bien au cours de son élaboration progressive depuis l'état brut jusqu'à l'état de bien final.

2. *Différenciation horizontale.* — Plusieurs marchés sont rattachés directement à un même marché.

D. **Filière de marchés.** — Toute suite de marchés liés deux à deux.

1. *Filière directe.* — Une suite de marchés, en différenciation verticale, depuis le marché périphérique jusqu'au marché final, en passant par les marchés intermédiaires.

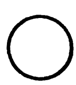
2. *Filière mixte.* — Une suite composée aussi bien de marchés intermédiaires ou non finaux, que de marchés finaux.

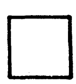
3. *Filière déviée.* — Une suite de marchés finaux dont le bien final de chacun sert à la fabrication ou à la distribution du bien final du suivant.

E. **Valence.** — 1. *Marché monovalent.* — Il comporte un seul débouché direct.

2. *Marché polyvalent.* — Il comporte deux ou plusieurs débouchés directs.

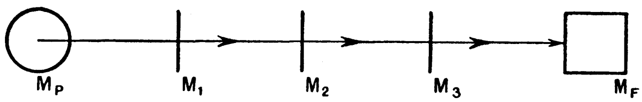
F. **Schémas.** — Signes représentatifs.


Marché périphérique.

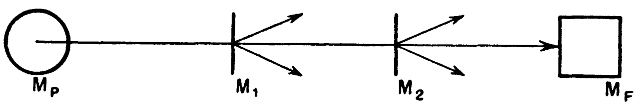

Marché final.


Marché intermédiaire ou non final.

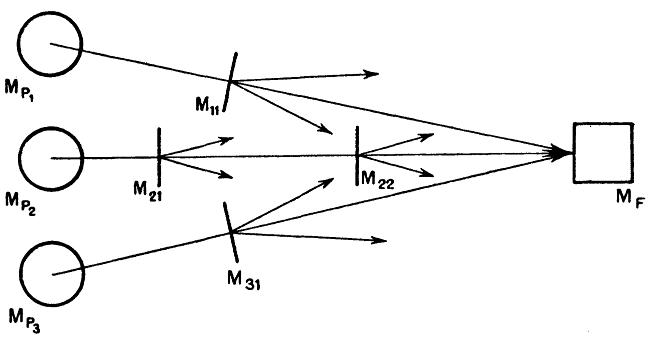
1. *Schéma d'une filière directe à marchés monovalents.*



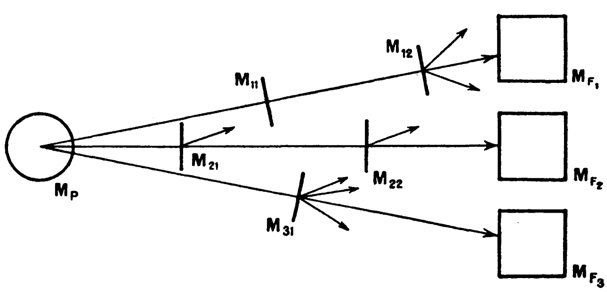
2. *Schéma d'une filière directe à marchés polyvalents.*



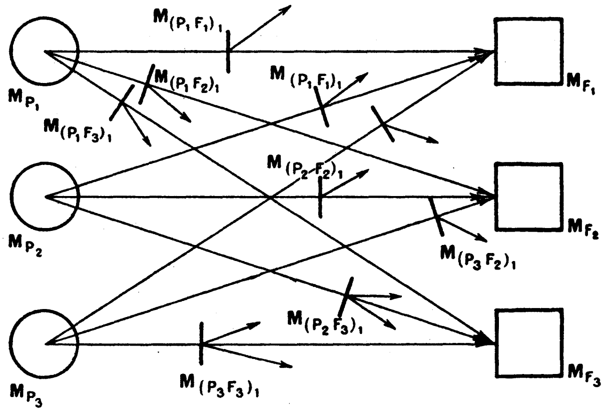
3. *Réseau convergent à polyvalence.*



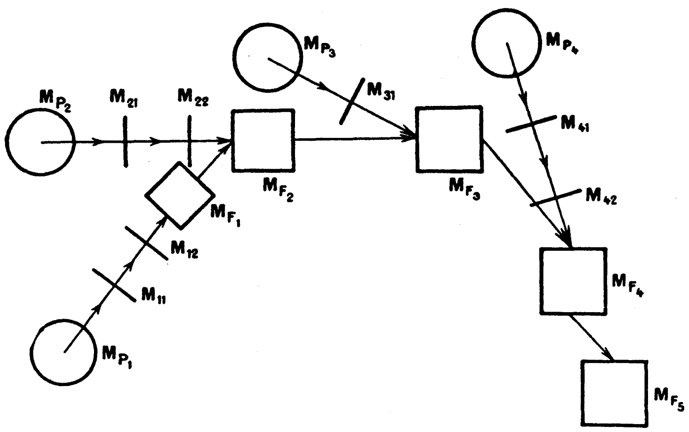
4. *Réseau divergent à polyvalence.*



5. *Réseau mixte à polyvalence.*



6. *Filière déviée.*



G. Flux. — 1. *Flux d'entrée d'un marché.* — C'est la quantité d'un bien entrant dans le marché par unité de temps.

2. *Flux de sortie d'un marché.* — C'est la quantité d'un bien sortant d'un marché par unité de temps.

Comme on le voit, l'auteur distingue le bien final et le bien non final. Cette dernière classe comprend à peu près tous les biens, sauf les biens complètement achevés du point de vue industriel, et de ce fait consommables immédiatement, et qui sont spécifiquement de la catégorie du bien final. Ainsi une voiture automobile achevée, mais encore à l'usine, est un bien non final, tandis que la même voiture livrée au distributeur devient un bien final.

Comme les biens qu'ils distribuent, les marchés sont également divisés en deux classes : le marché non final et le marché final. Toutefois il est nécessaire d'introduire la notion de marché périphérique : c'est le marché en relations avec les sources de matières premières.

Les marchés s'organisent verticalement en filières à l'image des processus naturels de la production. La filière peut comporter des marchés différenciés chacun horizontalement; le réseau des marchés résulte de la juxtaposition des filières.

Un autre aspect du groupement des marchés en vue de la production apparaît dans la division en marchés monovalents et en marchés polyvalents.

Le marché monovalent comprend un seul débouché, tandis que le marché polyvalent en a plusieurs. La monovalence est le cas particulier, et la polyvalence le cas général; le marché du ciment est pratiquement monovalent; celui de l'acier est polyvalent.

La notion de flux est la clef de voûte de toute la théorie de M. Chait. Le flux est l'élément de liaison entre les différents marchés; c'est l'inconnue dont la connaissance en tout lieu et à tout instant donne l'interprétation des phénomènes qui se passent dans les édifices économiques.

2. Les lois de consommation des marchés. — En partant des notions qui viennent d'être établies, M. Chait explique le mécanisme des réactions des marchés les uns sur les autres. Son analyse prend la forme mathématique, elle aboutit à la loi de consommation et du marché final et du marché non final.

Bien que l'analyse qui permet de formuler ces deux lois soit en apparence compliquée, l'expression mathématique des deux lois est simple.

Nous allons le montrer; rappelons toutefois que le marché, qui est un lieu d'écoulement des biens, comporte deux flux : un flux d'entrée et un flux de sortie, et un stock qui résulte de la différence cumulative de ces deux flux.

A. Loi de consommation du marché final. — Soit M_{F_i} un marché final. Nous allons procéder à l'analyse de son activité.

1. *Flux d'entretien.* — Appelons A_i la quantité en consommation et N_i la durée de cette consommation; la consommation par unité de temps est :

$$z_i = \text{flux d'entretien} = \frac{A_i}{N_i}. \tag{1}$$

Et la consommation dans l'intervalle $[t_1 \rightarrow t_2]$ s'exprime par l'intégrale :

$$\text{(2)} \qquad \text{Consommation} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{A_i}{N_i}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} z_i\, dt.$$

2. *Stock du flux d'entretien.* — Soit S_{e_i} ce stock par unité de temps; dans l'intervalle $[t_1 \rightarrow t_2]$, ce stock sera :

$$\text{(3)} \qquad \text{Stock} = \Big| S_{ei} \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

On admet que le stock d'entretien est proportionnel au flux d'entretien :

$$\text{(4)} \qquad S_{ei} = a_i z_i,$$

où a_i est une constante statistique; il vient de là par conséquent :

$$\text{(5)} \qquad \text{Stock d'entretien} = \Big| a_i z_i \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

3. *Flux d'extension.* — Le taux d'accroissement de la quantité en consommation est :

$$\frac{\Delta A_i}{\Delta T} = A_i';$$

pendant le temps,

$$[t_1 \rightarrow t_2],$$

cet accroissement est :

$$\text{(6)} \qquad \text{Flux d'extension} = \int_{t_1}^{t_2} A_i'\, dt = \int_{t_1}^{t_2} [N_i z_i]' + dt,$$

puisque $A_i = N_i z_i$, $A_i' = [N_i z_i]'$.

4. *Flux d'extension de la réserve.* — Il faut d'abord calculer la réserve de la quantité en consommation; on pense que cette réserve est proportionnelle à A_i :

$$\text{(7)} \qquad \text{Réserve de la consommation} = r_i A_i,$$

r_i étant un coefficient statistique.

Le flux d'extension de la réserve sera, dans ces conditions :

$$\text{(8)} \qquad \text{Flux d'extension de la réserve} = \int_{t_1}^{t^2} (r_i A_i)'\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (r_i N_i z_i)'\, dt.$$

5. *Stock du flux d'extension et du flux d'extension de la réserve.* — Nous désignons ce stock par S_{r_i} et on le suppose proportionnel, avec le même coefficient de proportionnalité que pour le stock d'entretien, à la somme des deux flux qu'il est appelé à soutenir; donc :

Stock du flux d'extension et du flux d'extension de la réserve :

$$(9) \qquad \left| S_{ri} \right|_{t_1}^{t_2} = \left[a_i (N_i z_i)' + a_i (r_i N_i z_i)' \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Si nous appelons z_{i+1} le flux d'entrée du marché M_{F_i} et z_i son flux de sortie, nous aurons de toute évidence l'égalité :

$$(10) \qquad \int_{t_1}^{t} z_{i+1}\, dt = \int_{t_1}^{t} z_i\, dt + (a_i z_i)_{t_1}^{t} + \int_{t_1}^{t} [(N_i z_i)' + (r_i N_i z_i)']\, dt \\ + [a_i (N_i z_i)' + a_i (r_i N_i z_i)'],$$

et, en dérivant par rapport à t :

$$(11) \qquad z_{i+1} = z_i + (a_i z_i)' + [(N_i z_i)' + (r_i N_i z_i)'] + [a_i (N_i z_i)' + a_i (r_i N_i z_i)']$$

ou

$$(12) \qquad z_{i+1} = z_i + [a_i + N_i(1 + r_i)]\, z_i' + [a_i N_i (1 + r_i)]\, z_i''.$$

Posons :

$$(13) \qquad B_i = a_i + N_i(1 + r_i), \qquad C_i = a_i N_i (1 + r_i),$$

il vient :

$$(14) \qquad z_{i+1} = z_i + B_i z_i' + C_i z_i'',$$

et sous la forme d'un opérateur :

$$(15) \qquad z_{i+1} = [1 + B_i D + C_i D^2]\, z_i.$$

La lettre D *désigne la dérivée première par rapport au temps, tandis que* D^2 *désigne la dérivée seconde par rapport à la même variable.*

Les grandeurs B_i *et* C_i *sont l'une* B_i, *le module du marché* M_{F_i}, *l'autre le module dérivé du même marché. Elles dépendent des trois constantes statistiques* a_i, N_i, r_i :

N_i, *durée de consommation du bien* A_i;
a_i, *coefficient de proportionnalité du stock au flux;*
r_i, *coefficient de réserve du bien en consommation.*

B. Loi de consommation du marché non final. — Soit M_i le marché non-final; l'analyse de son activité donne :

1. *Flux de sortie.* — Soit z_i la quantité de marchandises que le marché non final fournit par unité de temps au marché immédiatement voisin; z_i est le flux de sortie du marché non final.

Dans l'intervalle $[t_1 \to t_2]$, le marché M_i livre donc :

$$\int_{t_1}^{t_2} z_i\, dt = \Big[\text{flux de sortie par unité de temps}\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{16}$$

2. *Stock de consommation.*

$$\text{Stock} = \Big| S_i \Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{17}$$

3. *Flux d'entrée.*

$$\text{Flux d'entrée} = \int_{t_1}^{t_2} z_{i+1}\, dt. \tag{18}$$

4. *Loi de consommation du marché* M_i,

$$\int_{t_1}^{t_2} z_{i+1}\, dt = \Big| S_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} z_i\, dt. \tag{19}$$

En dérivant par rapport à t_2, on trouve :

$$z_{i+1} = z_i + S'_i, \tag{20}$$

et comme $S_i = a_i z_i$,

$$z_{i+1} = z_i + a_i z'_i = (1 + a_i D)\, z_i, \tag{21}$$

où D est le symbole de dérivation.

C. Résumé. — Posons :

$$\begin{cases} L_i = 1 + B_i D + C_i D^2, \\ l_i = 1 + a_i D. \end{cases} \tag{22}$$

Nous obtenons pour les deux lois de consommation les deux formes suivantes :

$$\begin{cases} z_{i+1} = L_i z_i & \text{(marché final)}, \\ z_{i+1} = l_i z_i & \text{(marché non final)}. \end{cases} \tag{23}$$

Ainsi, grâce à l'introduction des opérateurs L_i et l_i, qui sont des symboles désignant un ensemble précis d'opérations analytiques, et qui comportent dans leur structure des constantes liées au mécanisme de fonctionnement des marchés auxquels ils se rapportent, M. Chait est parvenu à caractériser en fonction du temps l'évolution de chaque marché étudié.

Dans L_i les constantes B_i et C_i (15) sont les constantes de structure de l'opérateur. Elles dépendent exclusivement du marché final étudié ; à chaque marché final ou non final, il correspond un et seul opérateur, et réciproquement.

3. Les équations des filières. — Les équations des filières conduisent à la loi de divergence des marchés. Appliquons, en effet, la loi de consommation à deux marchés formant une filière. On trouve une relation entre le flux d'entrée du premier marché et le flux d'entrée du deuxième marché. C'est cette relation qui exprime la divergence des flux des deux marchés.

En répétant le même raisonnement pour tous les marchés contigus dont la chaîne forme une filière quelconque, l'on aboutit à une expression liant le flux d'entrée du premier marché de la filière au flux de sortie du dernier marché de la même filière, ou au flux d'entrée ou de sortie d'un marché intermédiaire quelconque de la filière. L'on a ainsi une expression analytique entre deux flux appartenant soit à des marchés contigus, soit à des marchés séparés par plusieurs autres. Cette expression joue un rôle capital dans la théorie de M. Chait; elle exprime la loi de divergence des marchés.

A. Filière directe monovalente. — Il y a un marché final M_{F_i} et des marchés non finaux M_{i+1}, M_{i+2}, ..., M_{p-1} M_p en nombre égal à $(p-i)$. On a :

$$(24)\qquad \begin{cases} z_{i+1} = L_i z_i, \\ z_{i+2} = l_{i+1} z_{i+1}, \\ z_p \;\; = l_{i(p-1)} z_{p-1}. \end{cases}$$

Appelons K_i le multiplicateur qui, joint à z_i, donne la fraction de z_i, qu'il faut faire entrer dans le second membre de :

$$z_{i+1} = L_i z_i,$$

afin de trouver dans le premier membre une unité z_{i+1} et une seule; de même appelons k_i le même coefficient pour l'équation :

$$z_{i+1} = l_i z_i;$$

dans ces conditions, les équations de la filière directe deviennent :

$$(25)\qquad \begin{cases} z_{i+1} = L_i(K_i z_i), \\ z_{i+2} = l_i(k_{i+1} z_{i+1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_p \;\; = l_p(k_{p-1} z_{p-1}), \end{cases}$$

ou

$$(26)\qquad z_p = l_p\Big[k_{p-1}\Big[l_{p-1}\Big[k_{p-2}\dots L_i[K_i z_i]\dots\Big]\Big]\Big],$$

l_p, l_{p-1}, ..., L_i désignant les opérateurs déjà définis.

Filière directe à deux marchés. — Soient M_{F_1} et M_2 les deux marchés :

$$(27)\quad \begin{cases} z_2 = L_1[K_1 z_1], \\ z_2 = [1 + B_1 D + C_1 D^2] K_1 z_1, \\ z_2 = K_1 z_1 + B_1 K_1 z'_1 + C_1 K_1 z''_1. \end{cases}$$

Filière directe à trois marchés. — Aux marchés M_{F_1} et M_2, nous ajoutons le marché M_3.

Nous avons les deux équations :

$$(28)\quad \begin{cases} z_2 = L_1[K_1 z_1], \\ z_3 = l_2[k_2 z_2], \end{cases}$$

ou

$$(29)\quad \begin{cases} z_2 = K_1 z_1 + B_1 K_1 z'_1 + C_1 K_1 z''_1, \\ z_3 = [z_2 + a_2 z'_2] k_2, \\ z_3 = K_1 k_2 z_1 + B_1 K_1 k_2 z'_1 + C_1 K_1 k_2 z''_2 \\ \qquad + a_2 K_1 k_2 z'_1 + a_2 B_1 K_1 k_2 z''_1 + a_2 C_1 K_1 k_2 z'''_1, \\ z_3 = K_1 k_2 z_1 + [B_1 K_1 k_2 + a_2 K_1 k_2] z'_1 \\ \qquad + [C_1 K_1 k_2 + a_2 B_1 K_1 k_2] z''_1 + a_2 C_1 K_1 k_2 z'''_1, \\ z_3 = K_1 k_2 [z_1 + (B_1 + a_2) z'_1 + (C_1 + a_2 B_1) z''_1 + a_2 C_1 z'''_1]. \end{cases}$$

B. **Filière déviée monovalente.** — Tous les marchés sont des marchés finaux M_{F_i}, $M_{F_{i+1}}$, ..., M_{F_p} ; on trouve :

$$(30)\quad \begin{cases} z_{i+1} = L_i[K_i z_i], \\ z_{i+2} = L_{i+1}[K_{i+1} z_{i+1}], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_p \;\; = L_{p-1}[K_{p-1} z_{p-1}]. \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$(31)\quad z_p = L_{p-1} K_{p-1} L_{p-2} \dots L_i K_i z_i \dots.$$

Filière déviée à trois marchés. — Soient M_{F_1}, M_{F_2}, M_{F_3} les trois marchés :

$$(32)\quad \begin{cases} z_2 = [1 + B_1 D + C_1 D^2] K_1 z_1, \\ z_3 = [1 + B_2 D + C_2 D^2] K_2 z_2, \\ z_2 = K_1[z_1 + B_1 z'_1 + C_1 z''_1], \\ z_3 = K_2[z_2 + B_2 z'_2 + C_2 z''_2], \\ z_3 = K_1 K_2[z_1 + B_1 z'_1 + C_1 z''_1 + B_2(z'_1 + B_1 z''_1 + C_1 z'''_1) + C_2 z''_1 + B_1 z'''_1 + C_1 z^{\text{IV}}_1], \\ z_3 = K_1 K_2[z_1 + (B_1 + B_2) z'_1 + (C_1 + B_1 B_2 + C_2) z''_1 + (B_2 C_1 + C_2 B_1) z'''_1 + C_1 C_2 z^{\text{IV}}_1]. \end{cases}$$

C. Filière mixte monovalente. — La filière mixte se compose à la fois de marchés finaux et de marchés non finaux se succédant dans un ordre quelconque.

L'équation d'une telle filière est de la forme :

$$z_p = L_{p-1}\left[K_{p-1}\, l_{p-2}\left[k_{p-2} L_{p-3}\left[K_{p-3} \ldots l_{i+1}\left[k_{i+1} L_i[K_i z_i]\right]\right]\right]\right]. \tag{33}$$

D. Filière directe polyvalente. — Appelons v_i la valence du débouché M_{F_i} dans la production de M_{i+1} ; v_{i+1} la valence du débouché M_{i+1} dans la production de M_{i+2} ; et v_{p-1} la valence du débouché M_{p-1} dans la production M_p. L'équation de la filière polyvalente s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} z_{i+1} = v_i L_i[K_i z_i], \\ z_{i+2} = v_{i+1}\, l_{i+1}[k_{i+1} z_{i+1}], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_p \;\;= v_{p-1}\, l_{p-1}[k_{p-1} z_{p-1}], \end{array}\right. \tag{34}$$

ou

$$z_p = v_i \ldots V_{p-1}\, l_{p-1}\, k_{p-1}\left[l_{p-2} k_{p-2}\left[\ldots L_i[K_i z_i]\ldots\right]\right]. \tag{35}$$

Toutes les équations des filières arrivent donc au même résultat, qui consiste, pour une filière, à exprimer le flux d'un marché quelconque de la filière en fonction du flux d'un autre marché placé plus bas que lui dans la même filière. C'est le rapport de ces deux flux qui joue pour M. Chait un rôle capital; l'auteur donne à ce rapport la forme commode du produit des opérateurs qui à partir de z_i permet de déterminer z_p. Cette forme d'ailleurs illustre bien la notion de la divergence des flux, puisqu'elle montre toute la succession des opérations analytiques, algébriques et différentielles, qu'il faut faire subir à z_i pour obtenir z_p.

Le rapport $\left(\frac{z_p}{z_i}\right)$, en général fonction du temps, a une valeur distincte pour chaque valeur de t. L'ensemble de ces valeurs, quand t varie, exprime la loi de divergence.

Nous allons étudier maintenant quelques exemples numériques.

4. Exemples numériques.

A. Rapport entre le flux d'entrée (la demande) et le flux de sortie (la consommation) d'un marché quelconque.

1. *Le marché est un marché non final.*

$$z_{i+1} = l_i z_i, \tag{23}$$

$$l_i = 1 + a_i D, \tag{22}$$

$$\frac{z_{i+1}}{z_i} = \text{Divergence.}$$

L'on suppose que : 1° les modules des marchés restent invariables; 2° le flux de sortie z_t varie linéairement par rapport à t, en prenant la forme:

$$z_t = K_0 + Kt, \tag{36}$$

où K_0 et K sont des constantes.

Donc :

$$z'_t = K, \qquad \frac{z_{t+1}}{z_t} = 1 + \frac{a_t K}{K_0 + Kt} = 1 + \frac{a_t}{\frac{K_0}{K} + t}, \tag{37}$$

et au bout de la première unité de temps :

$$\frac{z_{t+1}}{z} = 1 + \frac{a_t}{\frac{K_0}{K} + 1}.$$

Faisons $K_0 = 1$,

$$[z_t]_{t=0} = K_0 = 1, \qquad [z'_1]_t = K = 0,1,$$

$$\frac{z_{t+1}}{z_t} = 1 + \frac{a_t}{11};$$

au cas où l'on stocke pour six mois, $a_t = 0,5$:

$$\frac{z_{t+1}}{z_t} = 1 + \frac{0,5}{11} = 1,045. \tag{38}$$

C'est-à-dire que, pour la première année, la demande du marché non final va surpasser de 4,50 la consommation, qui, elle, aura augmenté de 10 pour 100.

2. *Le marché est un marché final.*

$$z_{t+1} = L_t z_t, \tag{23}$$

$$L_t = 1 + B_t D + C_t D^2; \tag{22}$$

$$\text{Divergence} = \frac{z_{t+1}}{z_t} = 1 + [a_t + N_t(1 + r_t)] D + a_t N_t [1 + r_t] D^2;$$

on pose :

$$z_t = K_0 + Kt,$$

d'où :

$$\frac{z_{t+1}}{z_t} = 1 + [a_t + N_t(1 + r_t)] \frac{K}{K_0 + Kt}. \tag{39}$$

Et l'on fait les hypothèses suivantes :

$K_0 = 1$; $K = 0,1$; $a_i = 0,25$, la durée de consommation étant supposée de trois mois; $N_i =$ durée d'usure $= 5$ années; $r_i =$ réserve de matériel $= 0,1$ ou 10 pour 100; il vient :

$$\frac{z_{i+1}}{z_i} = 1 + [0,25 + 5 \times 1,1] \times \frac{0,1}{1 + 0,1\,t} = 1 + [0,25 + 5,5] \times \frac{1}{11} = 1,52,$$

au bout de la première année.

Comme il s'agit d'un marché de transport en commun, la demande de matériel, au bout de l'année, dépassera de 52 *pour* 100 *l'indice du trafic déjà accru de* 10 *pour* 100.

B. Filière directe a monovalence.

(27) $$z_p = K_{p-1} \ldots k_{i+1} K_i\, l_{p-1} \ldots l_{i+1} L_i(z_i) \ldots,$$

faisons :

$$k_{p-1} = \ldots = k_{i+1} = K_i = 1;$$
$$z_p = 1_{p-1} \ldots l_{i+1} L_i(z_i);$$

ou

(40) $$z_p = (1 + a_{p-1} D) \ldots (1 + a_{i+1} D)\,(1 + B_i D + C_i D^2)\, z_i.$$

Mais :

$$z_i = K_0 + Kt, \qquad z'_i = K, \qquad z''_i = 0, \qquad z'''_i = 0, \qquad \ldots;$$

(41) $$z_p = z_i + \left[B_i + \sum_{i+1}^{p-1} a_i \right] K,$$

(42) $$z_p = K_0 + Kt + \left[B_i + \sum_{i+1}^{p-1} a_i \right] K.$$

Dans le cas de deux marchés solidaires : celui du commerce de détail (M_1) d'un bien final et celui de son industrie (M_2), en prenant pour les stocks fonctionnels : $a_1 = a_2 = 0,5$, et pour N_i, $N_i = 0,5$, on trouve en l'absence de réserves, $r_i = 0$:

$$B_1 = a_1 + N_1 = 0,5 + = 1,$$
$$z_2(0) = K_0 + \qquad [1 + 0,5]\,K = K_0 + 2,5\,K,$$
$$z_2(1) = K_0 + K + [1 + 0,5]\,K = K_0 + 2,5\,K,$$
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{K_0 + 2,5\,K}{K_0 + K}.$$

C. FILIÈRE DÉVIÉE.

(31) $$z_p = K_{p-1} \dots K_i L_{p-1} \dots L_i z_i, \qquad K_{p-1} = \dots = K_i = 1,$$

(43) $$z_p = L_{p-1} \dots L_i(z_i),$$

(44) $$z_p = [1 + B_{p-1} D + C_{p-1} D^2] \dots [1 + B_i D + C_i D^2] (z_i),$$

mais :

$$z_i = K_0 + K t,$$

il vient :

(45) $$z_p = K_0 + K t + K \sum_i^{p-1} B_i.$$

Un exemple serait celui où M_1, marché final, est un marché d'automobiles, et M_2 également marché final, marché des machines-outils. Les constantes sont

$$M_1 [a_1 = 0{,}25,\ N_1 = 5,\ r_1 = 0{,}1],$$
$$M_2 [a_2 = 0{,}25,\ N_2 = 5,\ r_2 = 0{,}1].$$

D. FILIÈRE MIXTE.

On trouve :

$$z_p = K_0 + K t + K \left[\sum_i B_i + \sum_i a_i \right],$$

B_i pour les marchés finaux,

a_i pour les marchés non finaux.

Deuxième Partie.

5. **L'équation du bénéfice β.** — Le bénéfice β est la différence entre le coût et le prix de vente.

En suivant M. Chait nous supposons que le prix de vente et le coût pour un marché final sont des fonctions des flux de ce marché, du marché périphérique et des marchés intermédiaires; nous avons ainsi les deux fonctions :

$$v = \text{prix de vente} = V(z_i \dots z_p),$$
$$p = \text{coût} \qquad = C(z_i \dots z_p).$$

Nous ne savons rien de ces fonctions; en première analyse nous les supposons des polynomes :

$$v = P_1(z_i \dots z_p),$$
$$p = P_2(z_i \dots z_p),$$

de degré p_1 et p_2 par rapport aux flux $z_1, z_2, \dots, z_p$.

Nous tirons de là :

$$\beta_{M_1} = \text{bénéfice de } M_1 = P_1 - P_2.$$

Toutefois la relation précédente est encore d'une application difficile; des considérations pratiques et des observations statistiques amènent M. Chait à une très importante simplification. Il justifie en effet par un raisonnement satisfaisant, que l'on peut faire l'hypothèse que P_1 et P_2 sont des polynomes du premier degré en $(z_1, z_2, \dots, z_p)$.

C'est-à-dire :

$$v = v_0 + \Sigma v_i z_i,$$
$$p = p_0 + \Sigma p_i z_i,$$
$$\beta = v - p = (v_0 - p_0) + \Sigma (v_i - p_i) z_i. \tag{46}$$

Dans les équations précédentes v_0 et p_0 représentent ce qui est fixe dans l'évaluation de v et de p. Ainsi p_0 signifie la part fixe de frais de production, et v_0 représente les revenus affectés invariablement par un groupe de consommateurs à l'acquisition du produit pour lequel v est calculé.

6. **Équation du bénéfice moteur.** — Cependant pour l'étude du mouvement des réseaux, les équations trouvées jusqu'ici sont insuffisantes. Il faut, si l'on veut aboutir à une théorie complète d'une filière ou d'un réseau de marchés, avoir une équation finale bien déterminée, d'où le flux du marché final puisse être tiré en fonction du temps.

Cette exigence de la théorie, et la nécessité de ne pas trop s'éloigner des réalités pratiques de la vie économique, amènent M. Chait *à formuler l'hypothèse d'une liaison entre le flux du marché final, le bénéfice et les dérivées du bénéfice par rapport au temps.*

Le double souci de l'exactitude pratique et de la simplification des équations, de manière à pouvoir mener jusqu'au bout l'étude du mouvement des réseaux, a poussé l'auteur à donner la forme linéaire à cette liaison fonctionnelle entre le flux du marché final, la dérivée de ce flux, le bénéfice et les dérivées du bénéfice en nombre fini :

$$g\beta + \Sigma h_s \beta^{(s)} - z - uz' = 0.$$

Les constantes qui figurent dans cette équation ont toutes une signification statistique et fonctionnelle. Elles seront caractérisées au paragraphe suivant.

7. Les mouvements des réseaux.

A. Équation qui donne la production du marché M_{F_i} ou marché final, en fonction du bénéfice.

C'est l'équation :

$$[g\beta + \Sigma h_s \beta^{(s)} - z - uz']_{M_{F_i}} = 0, \tag{46}$$

β, marge du bénéfice;

g, réagibilité de l'entrepreneur par rapport au bénéfice unitaire; c'est la quantité de production correspondant à l'unité de profit qui est liée au fait psychologique de la tendance de l'entrepreneur à ajuster sur la marge des bénéfices, les extensions de ses installations et de sa production;

h_s, facteur de spéculation; c'est la production correspondant à l'unité de la $s^{\text{ième}}$ dérivée de β:

s, l'ordre de la spéculation directe;

u, facteur d'accélération de la production, donc son accroissement par unité de temps.

B. Équation du bénéfice β.

$$\left\{\begin{array}{l} v_{M_i} = \text{ prix de vente } = [v_0 + \Sigma v_k z_k]_{M_i}, \\ p_{M_i} = \text{prix de revient} = [p_0 + \Sigma p_k z_k]_{M_i}, \\ \beta_{M_i} = [v_0 - p_0]_{M_i} + [\Sigma (v_k - p_k) z_k]_{M_i}. \end{array}\right. \tag{47}$$

C. Système d'équations caractérisant un réseau a une filière polyvalente.

$$\left\{\begin{array}{l} [g\beta + \Sigma' h_s \beta^{(s)} - z - uz']_{M_{F_i}} = 0, \\ \beta_{M_{F_i}} = (v_0 - p_0)_{M_{F_i}} + [\Sigma (v_k - p_k) z_k]_{M_{F_i}}; \end{array}\right. \tag{48}$$

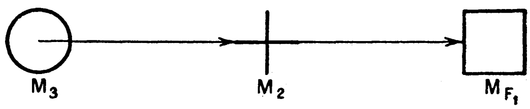
$$z_p = F(z_i).$$

D'où l'on tire l'équation différentielle qui permet de suivre de façon complète le mouvement du marché final M_{F_i}.

On aurait un ensemble de systèmes analogues pour un réseau divergent polyvalent, c'est-à-dire comprenant plusieurs filières divergentes au lieu d'une seule filière.

8. Un modèle simplifié.

Filière monovalente directe à trois marchés.



Équations.

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} & g\beta + \Sigma h_s \beta^{(s)} - z_1 - u z'_1 = 0, \\ & \beta = (v_0 - p_0) + \sum_{k=1}^{k=3} (v_k - p_k)\, z_k, \\ & z_3 = F(z_1). \end{aligned}\right.$$

Première équation. — On lui substitue l'équation :

$$(50)\qquad g_u(\beta - \beta_0) - z'_1 = 0;$$

β = marge de bénéfice;
β_0 = marge minimum;
z'_1 = vitesse d'accroissement du débit du marché final;
g_u = réagibilité de l'entrepreneur.

Deuxième équation. — On lui substitue la différence :

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} v - p &= v_0 - p_0 + v_1 z_1 - p_1 z_3, \\ v &= v_0 + v_1 z_1, \\ p &= p_0 + p_1 z_3, \\ \beta = v - p &= v_0 - p_0 + v_1 z_1 - p_1 z_3. \end{aligned}\right.$$

v_0, prix séculaire, ou partie fixe de v = prix de vente;
p_0, coût séculaire, ou partie fixe p = prix de revient;
v_1, prix cyclique, ou élasticité cyclique. Cette flexibilité est négative et très petite pour les biens agricoles de première nécessité; elle est positive et parfois élevée pour les biens de capitaux et de luxe;
p_1, coût cyclique, ou flexibilité du coût cyclique. Cette flexibilité est relativement faible, dans les industries très mécanisées où la part très élevée des charges fixes atténue fortement la sensibilité des frais par rapport aux variations du débit.

Troisième équation.

$$z_2 = \left\{ 1 + [a_1 + N_1(1 + r_1)]\, D + a_1 N_1 (1 + r_1)\, D^2 \right\} z_1,$$
$$z_3 = [1 + a_2 D]\, z_2,$$

où l'on a posé $k_1 = k_2 = 1$. On suppose N_1 négligeable, puisqu'il s'agit d'un bien de courte durée de consommation; il vient :

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_2 = [1 + a_1\, D]\, z_1, \\ z_3 = [1 + a_2\, D]\, z_2, \\ z_3 = 1 + a_2\, D z_1 + a_1 z'_1 = z_1 + (a_1 + a_2)\, z'_1 + a_1 a_2 z''_1\,; \end{array} \right.$$

et en posant :

$$a_1 = \alpha a_1,$$
$$(53) \quad z_3 = z_1 + a_1 (1 + \alpha)\, z'_1 + a_1^2 \alpha\, z''_1.$$

Système à résoudre.

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_u (\beta - \beta_0) - z'_1 = 0, \\ \beta = v_0 - p_0 + v_i z_i - p_1 z_3, \\ z_3 = z_1 + a_1 (1 + \alpha)\, z'_1 + a_1^2 \alpha z''_1. \end{array} \right.$$

Résolvante du système.

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_u(\beta - \beta_0) = z'_1 = g_u[v_0 - p_0 - \beta_0 + v_1 z_1 - p_1 z_1 - p_1 a_1 (1 + \alpha_1)\, z'_1 - p a_1^2 \alpha z''_1], \\ z'_1 = g_u[v_0 - p_0 - \beta_0] + (v_1 - p_1)\, g_u z_1 - p_1 g_u a_1 (1 + \alpha)\, z'_1 - p_1 g_u a_1^2 \alpha z''_1, \\ p_1 g_u a_1^2 \alpha z''_1 + [p_1 g_u a_1 (1 + \alpha) + 1]\, z' - (v_1 - p_1)\, g_u z_1 = g_u[v_0 - p_0 - \beta_0], \\ z''_1 + \dfrac{p_1 g_u a_1 (1 + \alpha) + 1}{p_1 g_u a_1^2 \alpha}\, z'_1 + - \dfrac{v_1 - p_1}{p_1 a_1^2 \alpha}\, z_1 = \dfrac{v_0 - p_0 - \beta_0}{p_1 a_1^2 \alpha}, \\ z''_1 + \dfrac{p_1 g_u a_1 (1 + \alpha) + 1}{p_1 g_u a_1^2 \alpha}\, z' \quad - \dfrac{\varpi - 1}{a_1^2 \alpha}\, z_1 = \dfrac{v_0 - p_0 - \beta_0}{p_1 a_1^2 \alpha}. \end{array} \right.$$

Discussion. — Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$(55) \quad \lambda = \frac{-[g_u p_1 a_1 (1 + \alpha) + 1] \pm \sqrt{[g_u p_1 a_1 (1 + \alpha) + 1]^2 + 4 g_u^2 p_1^2 a^2 \alpha (\varpi - 1)}}{2 g_u p_1 a^2 \alpha}.$$

Pour une solution stable, λ doit être un nombre complexe. La quantité sous le radical devant être négative, g_u la réagibilité de l'entrepreneur sera nécessairement comprise entre les racines de cette quantité, à savoir entre :

$$(55\,bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{u_1} = \dfrac{-(1 + \alpha) - 2\sqrt{\alpha(1 - \varpi)}}{p_1 a_1 [(1 - \alpha)^2 + 4 \alpha \varpi]}, \\ g_{u_2} = \dfrac{-(1 + \alpha) + 2\sqrt{\alpha(1 - \varpi)}}{p_1 a_1 [(1 - \alpha)^2 + 4 \alpha \varpi]}, \end{array} \right.$$

qui sont tous deux négatifs; g_u sera lui aussi négatif.

Or le schéma I_1 est basé sur un g_u positif, sur la tendance de l'entrepreneur du marché final de céder à l'optimisme et d'agrandir d'une manière continue le débit chaque fois qu'un bénéfice se déclare. I_1 est donc instable, puisque à la moindre cause qui l'en écarte, il a tendance de s'éloigner indéfiniment de sa position d'équilibre stationnaire caractérisé par β_0.

Si le coefficient économique ϖ est négatif et très grand, g_u devient positif, la détente du mécanisme I_1 se fait suivant une sinusoïde amortie. Sa période est :

$$(56) \qquad T = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{4\pi g_u p_1 a_1^2 \alpha}{[g_u p_1 a(1+\alpha)+1]^2 - 4 g_u^2 p_1^2 a_1 \alpha(1+\varpi)}},$$

et l'on trouve pour sa constante d'amortissement :

$$(57) \qquad \mu = \frac{g_u p_1 a_1(1+\alpha)+1}{2 g_u p_1 a_1^2 \alpha}.$$

Le coefficient économique du bien final ϖ et la réagibilité de l'entrepreneur g_u apparaissent comme deux éléments fondamentaux du dynamisme d'une filière de marchés.

Conclusion.

La théorie de M. Chait permet donc l'analyse complète de modèles économiques qui se rapprochent sensiblement de la réalité.

Dans l'exemple étudié d'après l'auteur, deux paramètres extrêmement importants se sont dégagés des développements analytiques : le coefficient économique du bien final ω et la réagibilité de l'entrepreneur g_u. Le coefficient économique $\omega = \frac{v_1}{p_1}$ joue un rôle fondamental dans la relation (55), pour la raison que c'est lui qui rend le radical positif ou négatif, et aussi dans (55 *bis*) pour déterminer les limites de variation de g_u, de telle sorte que le système reste stable. Le coefficient ω décide donc de la stabilité ou de l'instabilité du système étudié.

Les deux paramètres de ω : v_1 et p_1, proviennent des deux équations :

$$g_u(\beta - \beta_0) - \sigma' = 0,$$
$$\beta = v_0 - p_0 + v_1 z - p_i z_3,$$

que l'auteur a été amené à écrire sous la forme linéaire en vue de la conduite des calculs, mais qui sont parfaitement compatibles avec les nécessités pratiques des mouvements des marchés économiques.

Le Livre de M. Chait comporte l'étude de modèles bien plus compliqués que celui que nous avons considéré; mais nous avons voulu seulement montrer les grandes lignes de la théorie, en mettant bien en relief, d'une part les équations des filières qui conduisent à l'expression analytique de la loi de divergence, et d'autre part le système canonique complet des équations qui permettent d'étudier le flux final d'une filière en fonction du temps et d'un certain nombre de constantes dont la détermination relève nettement des méthodes de la statistique mathématique.

La théorie de M. Chait est une contribution remarquable à la Science de l'Économétrie, qui peut désormais jouer pour les phénomènes économiques, le rôle joué par la Physique mathématique pour les faits physiques expérimentaux.