BULLETIN DE LA S. M. F.

F. GONSETH

La méthode axiomatique

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 43-63 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__S43_0>

Réun. intern. Math. (1937, Paris)
Bull. Soc. math. France.
Suppl. 1939, p. 43 à 63.

LA MÉTHODE AXIOMATIQUE

Par M. F. GONSETH.

Mon exposé va comprendre trois parties :

I. Absence et nécessité d'une Méthode en mathématiques (critique).
II. Recherche d'une Méthode (historique).
III. Esquisse d'une Méthode.

I. — Absence et nécessité d'une Méthode.

1. La méthode, dont j'ai l'intention de vous entretenir, n'est pas une méthode pour traiter telle ou telle catégorie de problèmes posés de façon bien précise, mais bien la Méthode même — avec un M — de la pensée mathématique, formulant, commentant et critiquant les règles et les normes des démarches intellectuelles du mathématicien.

Je sais, par expérience, que certains mathématiciens parmi les meilleurs se sentent violemment heurtés par le seul énoncé de pareilles intentions. Et que, s'ils cédaient à leur premier mouvement, ce serait pour déclarer :

« Cela me suffit ! A supposer qu'elle ait un sens, la question que vous prétendez agiter n'appartient pas aux mathématiques. C'est une de ces questions qui ne comportent pas de réponse dont la vérité se contrôle, et sur lesquelles le mathématicien n'est pas tenu de se faire une opinion. »

Cette fin de non recevoir témoigne d'un point de vue si entier qu'on est tenté de répondre avec une égale vivacité :

« C'est donc que la Méthode authentique de la pensée mathématique a été complètement et définitivement mise au point. Oserais-je demander quand, par qui, et dans quel ouvrage ? »

Mais ces questions ne rencontreront, le plus souvent, qu'une sincère incompréhension : « Qu'est-ce que cette Méthode de la pensée mathématique ? Et quel besoin en avons-nous ? Le mathématicien a-t-il besoin qu'on lui explique ce qui lui est permis et ce qui lui est défendu ? N'en a-t-il pas la connaissance immédiate et intuitive ? La preuve n'en est-elle pas fournie par l'accord qui ne manque jamais de s'établir entre les bons esprits mathématiques, aussi bien sur les évidences, sur lesquelles les démonstrations se fondent, et qu'il est légitime d'invoquer, que sur l'authenticité de la démonstration elle-même.

« Cet accord s'établit parce que les démarches et les aboutissements du raisonnement mathématique sont contrôlables. Il n'y a pas de meilleur critère de l'authentique et du régulier.

« Cet accord cesserait du moment où les questions philosophiques auraient droit d'entrée en territoire mathématique. »

2. Mesdames et Messieurs ! Permettez à mon exposé de faire ses premiers pas en montrant que tous les points de cette dernière déclaration peuvent être contestés avec la plus entière sincérité.

Quant aux évidences, tout d'abord ! J'appellerai *doctrine de l'évidence* le point de vue méthodique selon lequel il existe des idées claires et distinctes dont l'esprit s'empare immédiatement et totalement, et des propositions évidentes par elles-mêmes, c'est-à-dire dont la vérité s'impose avec nécessité à tout esprit sain et éclairé. Chacun sait qu'elle était à la base de la méthode scientifique de Descartes. Il est peut-être moins connu qu'elle est encore expressément reconnue par certaines écoles de logiciens. C'est d'ailleurs une de ces idées générales qui continuent à hanter le pays un peu fantomatique des Fondements, et dont on ne sait plus exactement s'il est encore légitime ou non de les accueillir.

Or, je m'étonne de l'indifférence avec laquelle bon nombre de mathématiciens passent sur le fait suivant : que la doctrine de l'évidence, de par sa nature même, est une de ces vues théoriques qu'un seul exemple contraire suffit à réfuter. Or, ce n'est pas une fois, mais cent, et peut-être mille fois, qu'on l'a vue mise en défaut, à propos des parallèles, du continu, des limites, des ensembles, etc.

Que représente l'accord des contemporains en face du témoignage de l'Histoire, qui ne laisse aucun doute sur les profondes variations du sentiment de l'évidence depuis les anciens jusqu'à nous? Chacun le sait : *la crise de l'évidence* est ouverte depuis la découverte des géométries non euclidiennes, et les théories relativistes n'ont fait que la souligner. Chacun le sait : comment expliquer que le monde mathématique s'en montre si peu inquiet, et qu'on continue avec sérénité à invoquer l'évidence comme le dernier fondement du vrai.

3. En même temps que par l'évidence, le mathématicien justifie souvent ses propositions de départ par l'*intuition*, par l'intuition du nombre, par exemple, ou par l'intuition de l'espace. Parmi les fort nombreuses significations plus ou moins vagues du mot intuition, qui toutes donneraient lieu à des remarques analogues, je ne veux prendre pour exemple que celle à laquelle je viens de faire allusion : l'intuition de l'espace.

Dans la façon dont on la fait intervenir se cache une doctrine assez curieuse. Ayant saisi que l'espace dit sensible, est une certaine représentation que nous nous faisons du monde dit physique, et qu'il n'est pas identique à l'espace abstrait dit géométrique, le mathématicien s'imagine volontiers être en possession d'un sens spécial qui lui révèle la structure de l'abstrait à partir de la représentation du sensible : ce sens subtil, c'est l'intuition géométrique. C'est là une doctrine philosophico-psychologique dont il est commode de faire un acte de foi, mais qui peut, en principe, être aussi bien mise en doute que n'importe quelle autre doctrine sur les fondements de la connaissance. Il n'est pas nécessaire de l'analyser longtemps pour y découvrir une variété du réalisme naïf qui posait simplement le réel adéquat à l'idéal.

Or, ces vues réalistes trop sommaires ont été démenties par l'expérience scientifique. Le jour où il est devenu patent que la nature ne nous présente aucune réalisation parfaite de nos concepts abstraits; que, par exemple, ni le fil le plus ténu, ni l'arête la mieux aiguisée, ni le rayon de lumière le plus mince, ne fournissent une authentique réalisation de l'idée de la droite géométrique; ce jour-là, *la doctrine de l'intuition* a été gravement mise en échec.

En un mot : en même temps que les vues atomistiques pénétraient dans la Science, *la crise de l'intuition* s'ouvrait. Il est à peine besoin de remarquer avec quelle impitoyable netteté elle se trouve aujourd'hui soulignée par la physique quantique.

4. Un troisième fondement de la certitude mathématique, c'est la *définition explicite* créant le concept à définir par l'énumération de ses propriétés *essentielles*.

Est-ce par hasard que le mot essentiel vient de se présenter, ou est-ce pour faire une discrète allusion à la vieille logique qui opérait avec les essences et les universaux ? En effet, derrière la croyance à la création totale d'un être abstrait par la définition, il y a encore une fois, informulée il est vrai, mais agissante, une doctrine préalable qui n'est pas très éloignée de ce qu'on appelait autrefois la doctrine de l'école. Évidemment, ce n'est pas sur des définitions telles que celles du cercle ou du triangle qu'on en apercevra les faiblesses. Mais qu'on étende le procédé au delà du champ d'application classique, et les résultats sont loin de rester aussi satisfaisants. Ainsi, par exemple, on s'accorde à penser que la définition suivante de l'ensemble Cantorien :

« L'ensemble est la totalité réunissant tous les objets possédant un attribut bien déterminé, par lequel ils puissent être reconnus pour éléments de cet ensemble »,

porte en germe les antinomies bien connues de l'ensemble de tous les ensembles, ou de l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme élément, par exemple. Quelle conclusion faut-il en tirer ? Aucune, diront les uns, quant à ce que vous nommez le domaine classique des mathématiques, où nulle expérience fâcheuse ne nous attend. Et quant à la théorie des ensembles, qu'on n'en accepte les conclusions qu'avec prudence, en attendant d'avoir découvert le vice caché de la définition précédente.

Le malheur, c'est que nous n'avons aucune règle méthodique pour circonscrire le domaine classique, et que nous ne possédons aucun critère méthodique qui nous permette de décréter que la définition en question n'est pas régulière.

Ce qui est mis en cause par les antinomies, ce n'est pas la sécurité de l'arithmétique, par exemple. Il s'agit à la fois de plus et de moins : il s'agit d'une question de méthode. Tant que je n'aurai pas trouvé le moyen d'opérer le tri entre les définitions qui peuvent donner lieu à une antinomie et celles qui ne le feront jamais, je n'ai désormais plus le droit de prétendre que la définition telle qu'on la pratique est un procédé correct en soi. J'ai perdu la faculté de l'employer sans restrictions et sans précautions, sur lesquelles d'ailleurs la lumière est loin d'être faite. C'est pourquoi il me semble de simple honnêteté de constater que :

La rencontre des antinomies de la théorie des ensembles a inauguré *la crise de la définition* comme procédé méthodique.

5. Venons-en à la démonstration. Est-il vrai que l'on s'entende toujours sur ce qui peut être considéré comme une authentique démonstration ? Encore une fois, on pourrait invoquer le témoignage de l'histoire qui nous montrerait que le sentiment de la rigueur a varié au moins autant que celui de l'évidence. Évidemment, il y a des domaines particulièrement à l'abri, où l'on raisonne aujourd'hui comme l'on raisonnait il y a 2000 ans. Évidemment encore, il n'est pas question de porter le doute sur telle ou telle démonstration dont on ne saurait contester la validité sans mettre en question la mathématique elle-même comme discipline; ce qui serait absurde. Encore une fois, il s'agit d'autre chose, d'une question de méthode dans laquelle mille réussites ne comptent pas en face d'un seul échec. N'arriverait-il qu'une fois que l'opinion du monde mathématicien se trouvât divisée sur une démonstration particulière, les uns la reconnaissant comme régulière, les autres niant son authenticité : du point de vue méthodique, ce seul cas suffirait pour que l'idée de démonstration en soit atteinte. En l'absence de critères formulés, il n'y a que l'infaillibilité reconnue qui puisse être opposée au doute systématique.

Or, cet exemple critique ne peut-il pas être aperçu, entre autres, dans la démonstration de Zermelo du fait que tout ensemble ordonné peut être bien ordonné ? En relisant la dispute célèbre sur cet objet, on s'aperçoit que c'est non seulement la légitimité de l'axiome du choix qui est mise en doute, mais aussi la façon dont il est mis en œuvre (Borel).

D'ailleurs, je reviendrai, de façon encore plus convaincante, dans ma seconde partie, sur la *crise de l'idée de démonstration* qui s'est ouverte ces dernières décades.

6. Dans cette énumération, d'ailleurs incomplète, de notions fondamentales touchées par une crise d'évolution, le terme ultime est enfin l'idée du vrai absolu et sans condition.

Celle-ci avait été déjà sensiblement touchée par l'ébranlement des doctrines de l'évidence et de l'intuition. Mais sa vraie crise s'est ouverte avec la dispute entre les intuitionnistes et les formalistes, dispute sur laquelle il me faudra revenir. A cet endroit, je me bornerai à rappeler en quels termes virulents Brouwer qualifie l'application, jusqu'ici incontestée, de la règle du tiers exclu dans la logique des classes ouvertes.

Il est incontestable que la formalisation de la logique intuitionniste, telle que Heyting l'a présentée, porte dans la logique des questions semblables à celles que la constitution d'une base axiomatique a portées dans la géométrie. Comme à cette dernière occasion le problème de l'espace euclidien, c'est maintenant le *problème du vrai traditionnel* qui se trouve posé.

7. Il ne serait pas difficile de continuer encore ce petit jeu de massacre, en passant en revue les autres notions fondamentales, telles que celles du possible, du nécessaire, de l'arbitraire, etc. De toutes ces notions dites primitives, il n'en est pas une dont le développement naturel des mathématiques n'ait remanié, souvent profondément, le sens. Pas une pour laquelle les vues traditionnelles n'aient été mises en défaut.

C'est donc un pressant devoir de réviser les positions initiales, d'examiner d'un esprit critique la doctrine préalable qui semblait si claire et si inébranlable qu'il paraissait superflu de la formuler. Or, si cet esprit critique sait se soustraire tout d'abord à la pression formidable qu'exerce sur lui l'immense succès de la pensée mathématique et l'existence en fait inébranlée de l'énorme édifice mathématique, ce qui le frappe tout d'abord, c'est une certaine *indigence méthodique*. Les positions méthodiques initiales, que nous avons nommées doctrine de l'évidence, doctrine de l'intuition, doctrine de la définition, etc., ne lui apparaissent pas comme les différentes faces d'une doctrine cohérente, mais bien plutôt comme des vestiges plus ou moins disparates de points de vues démodés ou remaniés. Dans l'idée du vrai, c'est Platon qui dure, dans la définition c'est Aristote; dans l'évidence, c'est le renouveau cartésien qui commence à vieillir. En un mot, ce qui le frappe, *c'est l'absence d'une Méthode autonome et consciemment acceptée.*

II. — Recherche d'une Méthode.

S'il est vrai qu'une Doctrine des vérités élémentaires soit devenue nécessaire, n'a-t-on rien fait pour la dégager ? Au contraire ! L'amorce d'une doctrine de ce genre peut être aperçue dans la plupart des efforts de mise au point dont l'histoire des mathématiques a gardé le souvenir, depuis la première crise de l'irrationnel du temps des Pythagoriciens jusqu'à nos jours.

C'est maintenant de ce point de vue, sous l'angle de la recherche de la méthode authentique, que je m'en vais vous rappeler sommairement quelques faits.

Revenons à la crise de l'évidence. Si l'on admet, par exemple, que le postulat des parallèles puisse être remplacé par un postulat qui le contredise, et que ces deux postulats puissent subsister l'un à côté de l'autre, il est clair que l'un et l'autre perdent leur évidence, et que pour édifier la géométrie, il faut trouver un nouveau principe méthodique.

On a cru le trouver en serrant de plus près la méthode même d'Euclide.

On met en tête de la théorie un certain nombre de concepts primitifs, dont tous les autres concepts pourront être obtenus par une définition explicite et nominale, et un certain nombre de propositions, les axiomes, dont toutes les autres propositions pourront être logiquement déduites.

La pureté de la méthode exigera le renoncement à tout nouvel appel à l'évidence, une fois la base axiomatique posée, c'est-à-dire une fois les concepts primitifs et les axiomes acceptés.

Cette façon de faire est la première variante de la méthode axiomatique. (Selon Weyl c'est à cela, et uniquement à cela que se réduit la méthode axiomatique, si l'on fait abstraction de certaines exigences supplémentaires, qui tiennent déjà d'une esthétique spéciale, concernant l'indépendance mutuelle des axiomes, par exemple.)

Aussitôt formulé, ce principe méthodique développe ses exigences.

Les axiomes, aussi bien ceux de l'ancienne géométrie que des nouvelles, ne trouvent plus leur justification ni dans l'évidence, ni dans l'intuition. De quel ordre est alors leur nécessité ?

Ce sont, dit Poincaré, de simples définitions pour les êtres mathématiques qui y figurent. Et pourquoi les choisir plutôt que d'autres ? Par commodité.

Il est vrai que cette position méthodique, qu'on a appelée le nominalisme de Poincaré, ne se rapporte qu'à l'édification axiomatique de la géométrie. Pour ce qui concerne les concepts primitifs et les propositions de base de l'arithmétique, loin de faire appel à notre libre arbitre, Poincaré fait au contraire appel à la nécessité kantienne des jugements synthétiques *a priori*. Il l'a répété à maintes reprises, en particulier pour le raisonnement de n à $n+1$.

A partir de cette position ambiguë, Poincaré a toute sa vie cherché à combler la brèche ouverte par la défaillance des doctrines de l'évidence et de l'intuition. Mais sans y parvenir de façon convaincante.

9. La méthode axiomatique pose, en effet, encore d'autres exigences qui ne permettent pas de s'arrêter définitivement sur les propositions précédentes.

Pour que les axiomes puissent opérer leur œuvre implicite de définition, il faut que les êtres à définir y entrent vierges de signification *a priori*; que ce soient donc des éléments de nature indéterminée dont les axiomes sont seuls à fixer les propriétés.

Les axiomes ne peuvent d'ailleurs que postuler certaines relations, dont ils fixent également les propriétés à accepter. Comment satisfaire à ces exigences ? Comment tenir compte également du fait qu'un système d'axiomes ainsi compris peut comporter plus d'une réalisation, ce que les modèles euclidiens des géométries non euclidiennes, par exemple, mettent clairement en lumière ?

On y parvient en se représentant les relations posées par les axiomes comme des relations purement logiques. Le point de vue correspondant est alors celui de l'axiomatique dite hilbertienne.

Le passage du point de vue de Poincaré à celui de Hilbert a d'assez graves conséquences. La différence que le premier maintenait entre les axiomes géométriques et les axiomes arithmétiques doit tomber.

La géométrie analytique et la géométrie à la mode d'Euclide sont, en effet, deux réalisations des mêmes relations logiques. Du point de vue de leur structure logique, elles sont équivalentes. D'où ressort la nécessité méthodique d'établir l'ensemble des mathématiques sur une base axiomatique.

Arrêtons-nous un instant, pour apprécier la solution apportée aux problèmes de l'évidence et de l'intuition. On peut la caractériser d'un mot : On s'est retiré de l'évidence et de l'intuition pour se mettre à l'abri dans le logique pur. On a cherché à éviter le problème mal aisé à résoudre des relations des mathématiques avec le monde sensible, en espérant pouvoir s'en tirer par certaines mesures de police intérieure. En même temps, n'a-t-on pas réussi à fonder l'autonomie complète du raisonnement mathématique, en face du monde extérieur ? Le développement de la question ne devait pas confirmer ces espérances.

10. Mais, avant de continuer, examinons si la doctrine hilbertienne de l'axiomatisation ne permet pas aussi de résoudre la crise de la définition. Rappelons que c'est justement dans le but de soustraire la théorie des ensembles aux antinomies auxquelles nous avons fait allusion que Zermelo en fit un exposé axiomatique.

Or, si l'on réfléchit précisément à ce qui sort de la machine à définir que doit représenter un système d'axiomes, on voit surgir une difficulté nouvelle, aussi grave qu'inattendue.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de géométrie. Une des classes d'éléments que nous avons supposés capables d'entrer dans certaines relations purement logiques, est, supposons-le, la classe des droites. Rien ne m'empêche de leur donner ce nom. Mais rien ne m'oblige, ni même ne m'autorise à les considérer comme identiques aux droites dont la géométrie au sens ordinaire s'occupe. Pour désigner le rapport d'un genre tout à fait spécial existant entre certains concepts et certaines relations géométriques d'une part, les éléments logiques et les relations purement logiques que l'on peut en abstraire, d'autre part, nous avons déjà employé le mot de réalisation : dans notre exemple, les droites géométriques sont une réalisation de la classe des éléments logiques auxquels nous avons donné le même nom.

Toute l'expérience mathématique démontre qu'il existe une correspondance des plus étroites entre l'abstrait et ses réalisations. Quelle est la position en quelque sorte traditionnelle des mathématiques sur ce point ? Bien entendu, on chercherait en vain dans la littérature reconnue un passage formulant explicitement la doctrine universellement acceptée. L'usage fait ici loi. Or on imagine une sorte d'équivalence infaillible entre l'abstrait et la réalisation, selon laquelle il suffit de saisir l'un pour posséder l'autre. Cette pratique équivaut à un point de doctrine.

Or, c'est encore une fois une doctrine qui, à l'examen, révèle des insuffisances frappantes.

Bornons-nous à raisonner dans le cadre de la géométrie. On commence à s'accorder pour envisager la géométrie comme un des premiers chapitres, comme un chapitre particulièrement bien réussi, de la physique des corps rigides. Or dans le cadre méthodique de la physique, quelle forme le problème des relations de l'abstrait à la réalisation va-t-il prendre ? On le retrouve presque tel quel dans le problème des relations des lois naturelles observées aux lois naturelles correspondantes déduites à partir d'une théorie. Ce seul rapprochement fait entrevoir que la position traditionnelle du mathématicien est trop étroite, et que les domaines annexes ne peuvent l'accueillir telle quelle. De toutes façons, comme position de doctrine, elle préjuge la solution d'un problème de la connaissance d'une façon qui perd son évidence, si l'on s'éloigne du domaine des mathématiques classiques. Praticable sans inconvénient, semble-t-il, dans ce domaine elle devient bientôt absurde si l'on cherche à l'étendre à tout le champ de la pensée abstraite et théorique, sans qu'on sache indiquer les frontières au delà desquelles naît le danger.

En d'autres termes : Sur ce point comme sur tant d'autres, règne la même insécurité méthodique, que la sécurité pratique dont jouit, à juste titre semble-t-il le mathématicien, ne fait que souligner.

11. Mais laissons ce point de côté. Du moins la situation est-elle complètement éclaircie sur le plan de l'abstrait ?

Il est clair qu'ici, un assemblage complètement arbitraire de concepts primitifs et d'axiomes n'est pas, de droit, une base axiomatique acceptable. Il ne faut pas, par exemple, que deux axiomes se contredisent. Plus généralement, il ne faut pas que la déduction à partir d'une base axiomatique rencontre de contradiction.

Comment distinguer entre les systèmes contradictoires et ceux qui ne le sont pas ? Il semble que, pour que le procédé d'axiomatisation hilbertien puisse être accepté comme une méthode définitive, il doive se compléter de critères permettant de distinguer si une base axiomatique est, ou non, contradictoire. Ou du moins faudrait-il faire voir que les systèmes axiomatiques à partir desquels tout l'édifice mathétique doit être rebâti n'impliquent pas contradiction. C'est ce qu'on appelle le problème de la non-contradiction.

Remarquons que les exigences méthodiques, à elles seules, y conduisent avec nécessité. Tant que ce problème restera en suspens, la méthode axiomatique hilbertienne n'aura pas trouvé sa clef de voûte.

Les premières tentatives de Hilbert pour parachever sa doctrine sur ce point n'ayant pas réussi de façon convaincante, le problème avait été mis en veilleuse, jusqu'au moment où la critique intuitionniste devait lui rendre toute son acuité et toute son actualité.

L'intuitionniste mettant en cause bon nombre de résultats considérés jusque-là comme acquis authentiquement, Hilbert entreprit de répondre avec éclat en mettant à jamais les mathématiques à l'abri de la critique, c'est-à-dire en fournissant la démonstration manquant encore de la non-contradiction.

Ce qui suivit représente un bien curieux épisode mathématico-philosophique. Je me permets de dire philosophique, car, à mon avis, toute la question tourne autour d'un point de méthode, qui s'évoque par la question : Qu'est-ce au fond qu'une démonstration ?

Il s'agit, en effet, d'établir l'excellence de la démonstration classique, en général, par une nouvelle démonstration. Mais si le doute est permis quant aux premières, pourquoi ne s'attacherait-il pas à cette dernière ? La discussion préalable est donc inévitable et portera sur la nature, sur l'idée même de la démonstration. Or ceci n'est plus une question orthodoxe. Ce n'est plus la simple mise en œuvre des moyens de preuves implicitement connus à partir d'une configuration initiale bien déterminée. Il s'agit au contraire d'une explicitation des moyens de la preuve, en général, du point de vue méthodique. Il s'agit en quelque sorte de découvrir et de proposer un modèle définitif et authentique de la démonstration.

En d'autres termes, la démonstration se trouve avoir besoin d'une critique, d'une théorie préalable pour que le sens authentique en soit fixé. Il y a là un moment d'une importance capitale à fixer ; c'est celui où le mathématicien, pour les besoins mêmes de son activité, doit revenir sur la signification des notions premières dont il se sert.

Le moment où le mathématicien est contraint, par les nécessités de sa propre méthode, non pas de faire appel à la philosophie, mais de se faire son propre philosophe. Le moment où, au sein des mathématiques orthodoxes, la question de la méthode de la pensée mathématique s'est trouvée expressément posée.

12. D'ailleurs, la doctrine préalable que propose Hilbert est fort conforme au plus orthodoxe génie mathématique. A l'aide d'une formalisation dont la logistique a fourni le modèle, toutes les hypothèses de la démonstration doivent être mises en formules, l'ensemble de celles-ci pouvant être appelé la configuration symbolique initiale. C'est sur celle-ci que l'activité démonstrative va s'exercer. Comment ? Les règles orthodoxes de la démonstration, après la formalisation totalitaire, ont pris la forme de règles pratiques selon lesquelles les symboles sont à manier, à déplacer, à remplacer l'un par l'autre, etc.

Ces règles contiennent toutes les opérations licites sur les symboles. Et démontrer, c'est transformer la configuration initiale en une configuration finale, en appliquant ces règles à l'exclusion de toutes autres.

Et quant au reste, c'est-à-dire quant à savoir si telle configuration répond à tel modèle, et si j'applique les règles de façon conforme, l'évidence et l'intuition en décideront.

En un mot, grâce à la formalisation, le monde des idées mathématiques est projeté sur un monde-miniature concret de symboles, dans lequel un certain jeu avec ces symboles remplace les démarches primitives de la démonstration. Voilà une brusque rentrée en scène, par la petite porte, de l'évidence et de l'intuition dont on croyait avoir pris solennellement congé.

C'est à la doctrine que je viens d'évoquer sommairement que s'attache le nom de formalisme. Elle ne fait d'ailleurs que conférer une valeur méthodique à des procédés courants, en exigeant une formalisation systématique et simultanée de la totalité des mathématiques. Il n'est pas à contester que la formalisation soit un des procédés fondamentaux par lesquels la pensée mathématique progresse. On peut cependant observer que saisir l'abstrait par son symbole n'est que la réplique de saisir la réalité dans l'abstrait, procédé qui nous avait paru faire le fond de la définition implicite par les axiomes. Ces deux procédés se répondent et se complètent l'un l'autre. Toute méthode doit certainement souligner leur importance méthodique. Mais tout autre chose est d'accepter le formalisme comme justification dernière de la démonstration. Car, en tant que doctrine, il commence par poser comme un fait une certaine équivalence absolue entre le symbole et le symbolisé. Le moins qu'on puisse objecter, c'est que cette façon de procéder tranche sans l'avoir suffisamment examiné le problème des relations du concret à l'abstrait.

13. On peut présenter au formalisme pris comme méthode des mathématiques d'autres objections de principe qui ne laissent aucun doute sur son insuffisance. Nous ne nous y arrêterons pas, car une expérience mathématique bien conduite a tranché le débat. Gödel a, en effet, montré selon les règles ordinaires de la démonstration, que les systèmes formalisés ne sont pas à l'abri de certains paradoxes, qui remettent tout le point de vue en question. La grandiose tentative d'Hilbert finit par s'enliser dans une Crise de l'idée même de démonstration.

Est-ce à dire que cette voie soit d'ores et déjà reconnue comme impraticable ? Pas du tout. Gentzen a déjà proposé certaines modifications des règles fixant le licite et l'illicite dans le jeu des symboles, modifications qui permettraient de reprendre en main la démonstration de l'absence de contradiction.

Mais, dès maintenant, nous sommes suffisamment avertis par l'expérience pour ne plus pouvoir accepter de proposition de ce genre sans en exiger une justification. Si l'idée orthodoxe de la démonstration n'a plus été jugée claire par elle-même, et si les moyens imaginés pour la soutenir se sont révélés inefficaces, où trouverai-je la garantie que les nouveaux fondements qu'on me propose ne nous décevront pas à leur tour ? Fera-t-on appel à une intuition interne, dernier refuge du vrai ? Comment se défendre alors contre les doctrines intuitionnistes qui invoquent à leur profit l'intuition du nombre et de ce qu'il est licite et illicite de faire dans la suite des nombres.

14. Ne nous arrêtons pas au caractère, semble-t-il, assez décevant du résultat de tant d'efforts et de tant de recherches. Essayons plutôt en les ramassant dans un coup d'œil, d'apercevoir à quelles intentions communes ils répondaient et quel but commun ils poursuivaient.

S'il m'était possible de mettre en parallèle avec les péripéties de la méthode axiomatique, celles de la logistique tendant à embrasser tout le champ mathématique par les moyens de la définition explicite complétée par la déduction formalisée, et finissant par se heurter à des difficultés au fond analogues à celles que rencontre la méthode axiomatique, s'il m'était possible de placer la théorie des ensembles sous le même jour, d'évoquer les célèbres disputes sur le prédicable ou sur le constructible, vous ne pourriez manquer de conclure que la pensée mathématique a lentement glissé hors des positions méthodiques traditionnelles, et qu'elle recherche une nouvelle position méthodique où la crise des fondements trouverait sa solution naturelle. *Toutes ces tentatives semblent appeler la méthode, devenue nécessaire, des sciences mathématiques.*

III. — Esquisse d'une Méthode.

15. Ainsi donc, dira-t-on maintenant, la recherche de la Méthode n'a pas abouti ! Bien au contraire ! répondrons-nous. Tous les éléments essentiels en ont été découverts. Il suffit de vouloir s'en servir, pour opérer une nouvelle synthèse.

16. Il faut d'abord être au clair sur ce qu'on peut exiger d'une Méthode, dans une discipline comme les Mathématiques. C'est tout d'abord d'énumérer toutes les règles dont la pratique de la discipline ne doit pas s'écarter, de formuler authentiquement « la loi écrite ».

Mais lorsqu'on s'est rendu compte que les règles finissent toujours par s'ancrer dans un certain nombre d'idées primitives, telles que celles de l'évident, de l'intuitif, de l'arbitraire, du possible, du nécessaire, etc., on comprend que le rôle de la Méthode doit être aussi de normaliser l'emploi de ces notions premières qui informent toutes les autres.

La Méthode cartésienne nous en fournit déjà l'exemple. A côté des Regulæ, elle fait encore intervenir, comme élément essentiel, l'idée de la lumière naturelle de l'esprit, sans laquelle ce dernier ne serait pas capable de voir les évidences.

En un mot, la Méthode doit présider, comme principe ordinateur, au jeu des idées fondamentales, à leur accord, à leur opposition, à leur mise en relation ou, ce qui dit tout en un mot, à leur interprétation.

On trouvera peut-être paradoxale, au premier moment, cette volonté de dégager par la raison une méthode que l'on acceptera consciemment et qui sera capable de provoquer une espèce de mutation de l'interprétation des notions primitives. Mais, à la réflexion, on s'aperçoit que c'est là un pouvoir propre à la réflexion même. Aussi vrai que $2+2=4$, la critique de la pensée est capable d'exercer une influence sur le déroulement et le contenu de la pensée. Il n'est finalement aucune de nos notions que la critique ne sache atteindre, si primitive soit-elle, pourvu que nous en ayons pris conscience. Car, pour ainsi dire par définition, le domaine naturel où la critique s'exerce est tout le champ de la conscience.

Il n'y a donc rien que de très normal à entreprendre cette révision des principes fondamentaux de notre activité intellectuelle.

17. Toutefois, avant de déloger la pensée mathématique de son assise traditionnelle, ne conviendrait-il pas d'indiquer le point de vue d'où il sera possible de porter un jugement qui l'atteigne, et de distinguer en quoi elle est susceptible de pécher.

La chose est toute simple. Le point de vue d'où la pensée mathématique peut être, de droit, appréciée, c'est celui de l'expérience scientifique elle-même, dans son intégrité, dont l'expérience mathématique forme un moment des plus importants, mais un moment seulement.

Si, pour reprendre un lieu commun, l'exploration de l'espace physique nous révèle que nous ne sommes en mesure, ni de construire, ni d'indiquer aucune réalisation adéquate de la droite idéale, c'est là un fait qui ne peut pas être récusé. Prétendre qu'il n'intéresse pas la géométrie rationnelle, c'est se placer à un point de vue singulièrement superficiel et conventionnel.

Si, de façon analogue, l'exploration du monde atomique fait soupçonner que le schème de l'espace-temps, aussi bien du point de vue des représentations intuitives que de celui des descriptions théoriques, ne se prête pas fidèlement à une reproduction intelligible des phénomènes, notre premier mouvement peut être de déclarer que nos vues sur la nature des abstraits géométriques n'ont point à en tenir compte. Mais si l'on ne veut pas se satisfaire d'une affirmation gratuite, si l'on recherche la justification « de méthode » d'un jugement aussi catégorique, il apparaît bientôt que les vues traditionnelles sur l'évidence ou le nécessaire dont nous avons déjà parlé en forment l'unique garantie. L'analyse objective des fondements de la géométrie nous ramène, au contraire, constamment devant le problème des rapports de la structure du monde objectif à la structure de notre intuition, et des rapports de celle-ci aux schèmes abstraits.

En un mot : l'expérience mathématique ne saurait être soustraite aux influences de l'expérience dans les sciences annexes.

L'erreur d'une certaine mentalité mathématique, c'est de ne pas accepter qu'on la juge, sinon de son propre point de vue. C'est de croire qu'à elle seule, par le truchement de ses notions primitives, elle a pu trancher presque sans y prendre garde le problème qui, par ailleurs, reste en suspens sur tout le front de la recherche scientifique : *celui des rapports du concret à l'abstrait.*

18. Les idées qui permettent d'intégrer l'expérience mathématique dans la perspective d'ensemble de la connaissance actuelle sont fort simples. Ce sont celles de *schéma*, de *correspondance schématique* et d'*abstraction par schématisation.* Nous allons en dire quelques mots. Je m'excuse de faire appel, pour m'expliquer, à l'exemple le plus banal qui soit : à une carte géographique. Une carte géographique est un schéma descriptif, dont je vais me permettre de vous rappeler certains caractères. Nous offre-t-elle une description parfaitement fidèle? Certainement pas! Nous n'y trouvons ni les arbres de la forêt, ni la blancheur de la route, ni tous les capricieux méandres de la rivière. Non seulement la carte renonce à tout décrire, mais la description qu'elle nous donne est *simplifiée*, *sommaire*.

Les villes, les routes, les sommets de montagnes ne sont indiqués que par des signes conventionnels, par des symboles qu'il faut savoir interpréter.

Si la carte ne mentionne pas tout, rien n'empêche de la compléter sur tel ou tel point : elle est toujours *inachevée*.

Sommaire, *symbolique*, *inachevé*, ce sont trois caractères essentiels de tout schéma.

Remarquons enfin que si les signes dont le cartographe se sert sont plus ou moins conventionnels, ils ne sont cependant pas arbitraires. La carte est la manifestation d'une technique spéciale, à laquelle bon nombre de connaissances préliminaires collaborent.

Ce que la carte prétend décrire, tel ou tel pays dans sa réalité propre, nous l'appellerons sa *signification extérieure*. Considérée en elle-même, comme objet autonome, elle possède aussi une certaine réalité propre : nous parlerons de sa *structure intrinsèque*.

Rien n'empêche d'examiner cette dernière pour elle-même, sans se soucier du sens qu'elle prend lorsqu'on la consulte en relation avec sa signification extérieure. Même ainsi envisagée comme un dessin sans intention, la carte pose maints problèmes (de géométrie, de topologie, de coloriage, etc.), qu'il peut être utile de résoudre. *En raisonnant ainsi intrinsèquement dans un schéma*, on le détourne de sa signification originelle : c'est souvent pour mieux se saisir de celle-ci.

19. Reportons ces quelques idées dans la géométrie. Commençons par distinguer les trois aspects sous lesquels celle-ci se présente. En voulant contrôler par des mesures topographiques (comme Gauss l'avait entrepris) que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits, on fait de la géométrie une *science naturelle et expérimentale*.

On peut suivre chez le petit enfant la genèse, la constitution progressive de la *représentation intuitive de l'espace*.

Telle qu'Euclide l'exposait 300 ans av. J.-C. la géométrie, enfin, était déjà une *science rationnelle*.

Fait peut-être inattendu, c'est sous cette dernière forme qu'elle se prête le plus facilement à l'intervention de la notion de correspondance schématique. Tout ce que l'on peut dire sur les rapports de l'abstrait géométrique à ses réalisations concrètes se résume fort bien en ces mots :

La géométrie (élémentaire) est un schéma d'idées, dont il faut chercher la signification extérieure dans une certaine structure naturelle du monde physique.

La structure intrinsèque de ce schéma, c'est sa structure logique. Elle apparaît dans la possibilité de l'édifier axiomatiquement. Expliquons-le par analogie avec la carte géographique. Une fois dressée, disions-nous, celle-ci se prête au raisonnement intrinsèque qui la prend pour objet dans sa réalité propre. De même, dresser le schéma géométrique, c'est concevoir, à partir du monde des phénomènes, un certain nombre d'idées simplificatrices, sommairement justes, en même temps que certaines relations, les axiomes, formes schématiques de certaines liaisons naturellement nécessaires. Raisonner intrinsèquement, c'est simplement expliciter les nécessités propres à ces idées simplificatrices, c'est dérouler la chaîne des conséquences « intrinsèquement nécessaires ». En un mot : raisonner intrinsèquement, c'est simplement raisonner logico-géométriquement, comme nous en avons l'habitude.

20. Je me rends bien compte de ce que ces explications trop hâtives peuvent avoir d'insuffisant. Je m'attends à ce que l'on m'objecte : « Ce ne sont là que des suggestions dont il faudrait encore établir le bien-fondé. Vous faites intervenir l'idée de schéma comme nouvelle idée primitive! Mais comment celle-ci vous est-elle, elle-même, donnée. Comment savez-vous qu'elle se montrera plus sûre que les idées primitives dont le mathématicien s'est contenté jusqu'ici? »

On ne peut répondre à ces légitimes objections que par une étude approfondie des fondements. C'est ce que je crois avoir fait dans mon Ouvrage : *Les Mathématiques et la Réalité*, non seulement en ce qui concerne la géométrie, mais sur tout le front des mathématiques et de la logique. Voici ce qu'après cette étude, je me crois en droit de répondre.

On a raison de penser qu'il est ridicule de vouloir fonder une philosophie mathématique sur une notion apportée du dehors, toute faite et toute prête, même si celle-ci devait être celle de concordance schématique entre l'abstrait et le concret. Mais c'est marquer une profonde incompréhension pour la tentative que j'esquisse, que de croire que c'est là sa dernière intention. Non seulement la notion de schéma n'entre pas définitivement constituée dans la *synthèse à faire*, non seulement elle ne représente qu'une suggestion à poursuivre, conçue tout d'abord elle-même sommairement, *grosso modo*. Non seulement il en est de même pour tous les termes employés, comme ceux de signification extérieure, de réalité en soi, de raisonnement intrinsèque, qui ne devaient avoir qu'une valeur suggestive, propre à une orientation préalable. Mais est-il besoin d'insister sur ce fait évident : Que les mots n'ont pas de signification par eux-mêmes! Qu'ils n'ont que la signification de leur emploi! Qu'ils ne sauraient contenir autre chose que ce que nous aurons *su concevoir*. Que le sens du mot « schéma » à partir de sa signification grossièrement ébauchée, sera fait du rôle que nous aurons su lui faire jouer; qu'il se fera par les processus mentaux dans lesquels nous l'aurons engagé.

J'y insiste, parce que c'est le point culminant, décisif de mon trop sommaire exposé : On n'exigera pas de la méthode axiomatique qu'elle réalise telle ou telle idée préconçue, encore inexistante, parce que encore impensée, de la concordance schématique. Au contraire, la méthode axiomatique, telle que deux millénaires d'efforts l'ont faite, doit s'incorporer l'*idée* « en devenir de schéma », et fournir la voie même de sa constitution.

C'est dans ce sens que nous disons :

La constitution de la géométrie en système axiomatique fournit le modèle même du processus d'abstraction par schématisation ;

la pensée, dans sa progression, constituant elle-même, par sa poussée autonome en accord avec la connaissance en devenir du réel, les normes de son activité;

la Méthode de la pensée mathématique transparaissant ainsi à travers les démarches mêmes de la pensée mathématisante.

Et l'on doit en dire autant de tous les termes que nous avons employés : En opposition avec sa signification extérieure, le schéma prend figure d'abstrait; en opposition avec le schéma, l'objet (extérieur) de ce dernier prend signification de concret. Abstrait et concret relatifs l'un à l'autre et dont l'opposition mutuelle fait partie de leur signification.

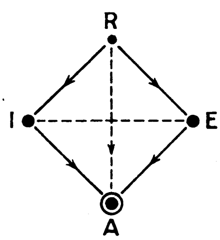
21. Ce que je viens de dire n'est que l'indication d'un changement, radical il est vrai, de point de vue, n'est que l'énoncé de l'idée dominatrice qui devra informer toutes les vues méthodiques. J'aurais

naturellement à indiquer maintenant comment s'organise dans le détail un système conceptuel qui s'en inspire. J'aurais en particulier à indiquer, tout d'abord dans le cadre restreint de la géométrie, comment les doctrines préalables traditionnelles de l'évidence, de l'intuition, de la définition nominale, etc., sont à remanier. Et à faire voir qu'elles sortent suffisamment renouvelées de cette refonte, pour que toutes les crises que nous avons commencé par énumérer puissent être considérées comme dénouées — au moins provisoirement. Je ne puis faire plus ici qu'invoquer mon étude, récemment parue : *Qu'est-ce que la logique?* et quelques-unes de ses conclusions :

Les représentations intuitives, y est-il dit, *sont des images schématiques conformes à nos fins. La connaissance a priori n'est qu'un ensemble orienté, ordonné, structuré de vues sommaires.*

La connaissance expérimentale ne se révèle pas de nature essentiellement différente : elle prolonge, complète, retouche la connaissance intuitive. La science recueille et relaie le bon sens, l'intuition commune.

Les rapports entre les abstraits, les connaissances expérimentales et intuitives relatives au même objet peuvent être sommairement représentées par le schéma suivant :



R y représente une réalité extérieure (qui n'est d'ailleurs pas donnée en soi). A est un abstrait schématiquement adéquat à R, et la flèche verticale signifie que le processus dont A est le terme est celui de l'abstraction par schématisation.

I est une connaissance intuitive, E une connaissance expérimentale. Les quatre flèches obliques signifient, à leur tour, que pour concevoir les rapports qu'elles évoquent, il faut, chaque fois d'une façon différente, prendre la relation de R à A comme modèle schématique : qu'on peut les envisager comme quatre réalisations de l'idée de concordance schématique.

22. On voit déjà, dans le cadre restreint de la Géométrie il est vrai, les idées fondamentales du concret et de l'abstrait, du réel et du rationnel, de l'intuitif et de l'expérimental s'organiser et s'ordonner en une nouvelle systématique.

On remarquera combien la façon dont la méthode axiomatique doit être interprétée a profondément varié. Au lieu de n'être qu'un simple regroupement de notions toute faites et données d'avance, et de relations déjà complètement déterminées, elle devient au contraire le modèle même du processus mental *sui generis* et irremplaçable, au terme duquel se trouvent ces abstraits sommairement adéquats à une réalité elle-même sommairement saisie, que nous avons nommés les abstraits par schématisation.

Autour de ce premier centre, peut maintenant s'opérer une cristallisation générale.

Avec quelque concentration d'esprit, il n'est pas très difficile de reconnaître que l'arithmétique peut être complètement repensée selon les mêmes voies méthodiques. La différence que faisait Poincaré entre l'intuition géométrique et l'intuition du nombre devient superflue.

Bien plus, la logique elle-même peut être conquise. L'axiomatisation soigneusement faite, selon la nouvelle interprétation, en fait apparaître distinctement les divers aspects, trop souvent confondus. Comme logique de l'existence, elle pourrait être appelée une Physique de l'objet quelconque : une Physique théorique une fois l'axiomatisation effectuée, une Physique expérimentale ou intuitive, avant le passage définitif à l'abstrait.

Comme logique du vrai, comme logique du possible, elle schématise d'autres faces de nos rapports avec le monde.

Saurons-nous retrouver le point de vue hilbertien? Sans aucune peine! Par une nouvelle abstraction axiomatique, qui prend les premiers abstraits comme concrets, et en dégage l'abstrait plus général des relations purement logiques. Cette axiomatisation est, en même temps, la charte de constitution du logique pur.

Saurons-nous intégrer le formalisme et la représentation par les symboles? De façon toute naturelle, la formalisation, dans le nouveau cadre méthodique, n'étant qu'un retour à une réalisation plus commodément maniable.

23. Ce que nous avons nommé l'idée dominatrice est donc capable d'informer la pensée mathématique dans toutes ses articulations. Elle

déborde également sur les domaines annexes. L'assimilation de la géométrie, de l'arithmétique et de la logique à certains chapitres de la physique trouve sa récompense en ceci : Que la relation, *en général*, entre l'expérimental et le théorique peut aussi être pensée sur le modèle de la concordance schématique entre un abstrait et un concret.

En psychologie, le même modèle peut rendre les mêmes services pour expliciter, par exemple, les rapports entre ce qu'on pourrait appeler les *catégories intuitives* de la causalité ou de l'analogie et les lois naturelles qui sont les *principes* de causalité ou d'analogie.

En sociologie, la méthode axiomatique ainsi comprise permet d'accéder aux concepts fondamentaux d'une économique rationnelle, etc.

24. En somme, en s'incorporant l'idée de correspondance schématique, et en tant que modèle en devenir du processus de la constitution des abstraits schématiques, non seulement la méthode axiomatique est susceptible de prendre figure de « Méthode de la pensée mathématique »; elle réintègre encore les mathématiques dans leur qualité de modèle des autres sciences.

F. Gonseth

(Zurich).