

# BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LUCAS

## Sur les développements en séries

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 6 (1878), p. 57-68

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1878\\_\\_6\\_\\_57\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__57_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur les développements en séries; par M. ÉDOUARD LUCAS.*

L'étude des nombres de Bernoulli est importante : 1° dans le Calcul des différences et des sommes, où ces nombres se présentent comme coefficients des puissances de  $x$  dans la somme des puissances semblables des  $x$  premiers nombres entiers; 2° dans le Calcul différentiel, où ces nombres se présentent comme coefficients des puissances de la variable dans les développements en séries; 3° dans le Calcul intégral, comme valeurs d'intégrales définies; 4° dans l'Arithmétique supérieure, et principalement dans la théorie des résidus potentiels, aussi bien que dans celle de l'équation indéterminée

$$x^p + y^p = z^p,$$

ainsi que l'ont montré Cauchy, Genocchi et Kummer.

Nous avons montré précédemment le grand avantage obtenu par l'emploi du calcul symbolique pour le calcul de ces nombres <sup>(1)</sup>,

---

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, septembre 1876.

et des nombres entiers qui proviennent du théorème de Staudt <sup>(1)</sup>, pour le calcul des sommes des puissances semblables des nombres inférieurs et premiers à un nombre donné <sup>(2)</sup>, pour le calcul des coefficients des sommes successives <sup>(3)</sup>.

Nous allons faire voir que l'application du calcul symbolique permet de simplifier la théorie des développements en séries et de généraliser des théorèmes bien connus, tels que ceux de Stirling et de Boole.

1. Soient  $f_{1,n}$  le coefficient de  $\frac{x^n}{n!}$  dans le développement de  $u = f(x)$  en série convergente, et  $f_{p,n}$  le coefficient de  $\frac{x^n}{n!}$  dans le développement de  $u^p$ ; on a les formules symboliques

$$u = e^{f x} = f_{1,0} + f_{1,1} \frac{x}{1} + f_{1,2} \frac{x^2}{2!} + f_{1,3} \frac{x^3}{3!} + \dots + f_{1,n} \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

$$u^p = e^{p f x} = f_{p,0} + f_{p,1} \frac{x}{1} + f_{p,2} \frac{x^2}{2!} + f_{p,3} \frac{x^3}{3!} + \dots + f_{p,n} \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Nous dirons que les coefficients  $f_{p,n}$  sont d'ordre  $p$  et de rang  $n$ ; mais  $n$  sera toujours entier positif, et  $p$  quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire. Nous supposons, de plus,

$$f_{1,0} = 1, \quad f_{p,0} = 1, \quad f_{0,0} = 1, \quad f_{0,p} = 0,$$

et nous rappellerons qu'il faut toujours tenir compte de l'exposant zéro.

On peut calculer les coefficients d'ordre  $p$  au moyen des coefficients du premier ordre; en effet, on a la formule

$$(1) \quad f_{p,n} = [f'_1 + f''_1 + f'''_1 + \dots + f^{(p)}_1]^n,$$

dans le développement de laquelle on remplace les exposants de  $f'_1, f''_1, \dots, f^{(p)}_1$  par des seconds indices, et l'on supprime ensuite les accents.

En particulier, si l'on désigne par  $p_n, q_n, r_n, \dots$  les nombres des arrangements de  $p, q, r, \dots$  objets  $n$  à  $n$ , les développements

(1) *Annali di Matematica pura ed applicata*, Milano, 1877.

(2) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, avril 1877.

(3) *The Messenger of Mathematics*, Cambridge, octobre 1877.

symboliques

$$(1+x)^p = e^{px}, \quad (1+x)^q = e^{qx}, \quad (1+x)^r = e^{rx}, \quad \dots$$

donnent, par multiplication,

$$[p+q+r+\dots]_n = [p+q+r+\dots]^n;$$

c'est la formule du polynôme des factorielles.

D'autre part, si  $f(x) = e^x$ , on a

$$f_{1,n} = 1, \quad f_{p,n} = p^n,$$

ce qui est exact. La formule (1) exprime le coefficient d'ordre  $p$  et de rang  $n$  en fonction des  $n$  premiers coefficients du premier ordre.

On a aussi la relation

$$(2) \quad f_{p,n} = (f_{p-1} + f_1)^n,$$

et, plus généralement, pour

$$p = \lambda + \mu + \nu + \dots$$

la formule

$$(3) \quad f_{p,n} = (f_\lambda + f_\mu + f_\nu + \dots)^n,$$

et aussi, pour  $n$  différent de zéro,

$$(4) \quad 0 = (f_p + f_{-p})^n;$$

cette dernière formule donne la relation entre les coefficients d'ordres égaux et de signes contraires. Nous observerons d'ailleurs que les relations (2) et (4) donnent lieu à des déterminants qui expriment  $f_{p,n}$  en fonction des  $f_{p-1}$  et des  $f_1$ , ou en fonction des  $f_{-p}$ , et inversement.

Le calcul des  $f_p$ , pour  $p$  entier et positif, s'effectue plus avantageusement de la manière suivante. On a l'identité

$$(e^{1,x})^p = e^{1,x}$$

et, en prenant les dérivées des logarithmes des deux membres,

$$\frac{pf_1 e^{1,x}}{e^{1,x}} = \frac{f_p e^{1,x}}{e^{1,x}}.$$

En identifiant les coefficients de  $\frac{x^n}{n!}$ , on en déduit la relation

$$(5) \quad p f_1 (f_1 + f_p)^n = f_p (f_1 + f_p)^n,$$

qui exprime  $f_{p,n+1}$  en fonction des  $n$  premiers coefficients d'ordre  $p$  et des  $n + 1$  premiers coefficients du premier ordre; on peut en déduire  $f_{p,n+1}$  par un déterminant ne contenant que les  $f_1$ .

2. On a les développements bien connus

$$(6) \quad u = \frac{x}{e^x - 1} = e^{B_1 x},$$

$$(7) \quad S_{n-1}(x) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \dots + (x-1)^{n-1} = \frac{(x + B_1)^n - B_1^n}{n},$$

dans lesquelles on remplace les exposants de  $B_1$  par des *seconds* indices, et  $B_{1,n}$  par le nombre de Bernoulli correspondant pris avec un signe et un indice convenables; ces nombres se calculent par la relation générale

$$(8) \quad F(x + B_1 + 1) - F(x + B_1) = F'(x),$$

$F$  désignant une fonction quelconque. La formule (8) contient toutes les relations connues pour le calcul des nombres bernoulliens et un grand nombre d'autres. On tire immédiatement de la formule (7)

$$\frac{dS_n(x)}{dx} = n S_{n-1}(x) + B_n \quad (1).$$

Cela posé, on a, pour les nombres bernoulliens d'ordre négatif,

$$e^{B_{-p} x} = \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)^p,$$

et par suite, en égalant les coefficients de  $\frac{x^n}{n!}$ ,

$$B_{-p,n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} \\ \times \left[ p^{p+n} - \frac{p}{1} (p-1)^{p+n} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} (p-2)^{p+n} - \dots \right],$$

---

(1) J. BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 352, n° 351.

ou, par une formule connue du calcul des différences,

$$(9) \quad B_{-p,n} = \frac{\Delta^p 0^{p+n}}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)};$$

on a, en particulier,

$$B_{-1,n} = \frac{1}{n+1}, \quad B_{-2,n} = \frac{2^{n+2} - 2}{(n+1)(n+2)}.$$

On peut obtenir les nombres de Bernoulli d'ordre positif par la méthode suivante : j'ai donné (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, septembre 1876) la formule

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^p F(x_1, x_2, \dots, x_p)}{dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_p} \\ = \Delta_{x_1=1, x_2=1, \dots, x_p=1}^p F[x_1 + B'_1, x_2 + B''_1, \dots, x_p + B_1^{(p)}], \end{array} \right.$$

dans le développement de laquelle on remplace les exposants de  $B'_1, B''_1, \dots$  par des seconds indices, et l'on supprime les accents; par conséquent, si l'on pose

$$F(x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n,$$

on obtient, en faisant ensuite  $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ ,

$$(11) \quad (B_p + p)^n - \frac{p}{1} (B_p + p - 1)^n + \frac{p(p-1)}{1.2} (B_p + p - 2)^n \pm \dots \pm B_p^n = 0,$$

ou symboliquement

$$(12) \quad \Delta^p B_p^n = 0;$$

cette dernière peut s'écrire, en ordonnant suivant les seconds indices de  $B_p$ , sous la forme

$$(13) \quad (B_p + \Delta^p 0)^n = 0,$$

dans laquelle on remplace les puissances de  $B_p$  par des seconds indices et les puissances  $\alpha$  de  $\Delta^p 0$  par  $\Delta^p 0^\alpha$ ; celle-ci donne lieu à un déterminant; d'ailleurs on a encore

$$(14) \quad (B_p + B_{-p})^n = 0,$$

et l'on remplacera les  $B_{-p}$  par la formule (9).

3. Le calcul des  $B_p$  se fait plus rapidement par le procédé suivant : si l'on élimine  $e^x$  entre  $u^p$  et sa dérivée, on a l'équation

$$x \frac{du^p}{dx} = p(1-x)u^p - pu^{p+1};$$

donc, en égalant les coefficients de  $x^n$ , on trouve

$$(15) \quad p B_{p+1,n} = (p-n) B_{p,n} - pn B_{p,n-1}.$$

On a, en particulier, pour  $p = 1$ ,

$$(16) \quad B_{2,n} = (1-n) B_{1,n} - n B_{1,n-1},$$

et, pour  $q > 1$ , selon que  $n$  est *pair* ou *impair*,

$$B_{2,2q} = (1-2q) B_{1,2q}, \quad B_{2,2q+1} = -(1+2q) B_{1,2q}.$$

Pour  $p = 2$ , on a encore

$$2 B_{3,n} = (2-n) B_{2,n} - 2n B_{2,n-1},$$

et, en remplaçant les  $B_{2,n}$  en fonction des  $B_{1,n}$ ,

$$(17) \quad 2 B_{3,n} = (n-1)(n-2) B_{1,n} + 3n(n-2) B_{1,n-1} + 2n(n-1) B_{1,n-2}.$$

Pour obtenir une formule plus générale, nous changerons  $n$  en  $n-1$  dans la relation (15); nous avons ainsi

$$\begin{aligned} p B_{p+1,n} &= (p-n) B_{p,n} - pn B_{p,n-1}, \\ p B_{p+1,n-1} &= (p-n+1) B_{p,n-1} - p(n-1) B_{p,n-2}. \end{aligned}$$

Multiplions les deux termes de cette dernière par  $(p+1)n$  et ceux de la précédente par  $p-n+1$ , et retranchons; nous obtenons, en tenant compte de la formule (15),

$$\begin{aligned} (p+1)p B_{p+2,n} &= (p-n+1)(p-n) B_{p,n} \\ &\quad - (p-n+1)(2p+1)n B_{p,n-1} \\ &\quad + p(p+1)n(n-1) B_{p,n-2}. \end{aligned}$$

On obtiendra de même

$$\begin{aligned} (p+2)(p+1)p B_{p+3,n} &= (p-n+2)(p-n+1)(p-n) B_{p,n} \\ &\quad - (p-n+2)(p-n+1) \left[ p + \overline{p+1} + \overline{p+2} \right] n B_{p,n-1} \\ &\quad + (p-n+2) [p(p+1) + p(p+2) + (p+1)(p+2)] n(n-1) B_{p,n-2} \\ &\quad - p(p+1)(p+2)n(n-1)(n-2) B_{p,n-3}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Pour  $p = 1$ ,

$$1.2.3B_{1,n} = (-1)^3 n(n-1)(n-2)(n-3) \\ \times \left( \frac{B_{1,n}}{n} + 6 \frac{B_{1,n-1}}{n-1} + 11 \frac{B_{1,n-2}}{n-2} + 6 \frac{B_{1,n-3}}{n-3} \right);$$

on a, en général, la formule symbolique

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} 1.2.3\dots p B_{p+1,n} \\ = (-1)^p n(n-1)(n-2)\dots(n-p) \beta^{n-p} (1+\beta)(2+\beta)\dots(p+\beta), \end{array} \right.$$

dans le développement de laquelle on remplace les exposants de  $\beta$  par des indices, et faisant ensuite

$$\beta_q = \frac{B_{1,q}}{q}.$$

On vérifie cette formule *a posteriori*; elle exprime les nombres bernoulliens d'ordre  $p + 1$  en fonction linéaire de  $p + 1$  nombres bernoulliens consécutifs du premier ordre.

4. Nous indiquerons encore les relations des nombres de Bernoulli des divers ordres avec d'autres fonctions numériques. Posons dans la formule (15)

$$(19) \quad B_{p+1,n} = (-1)^n \frac{A_{p,n}}{C_{p,n}}, \quad C_{p,n} = \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{1.2\dots n},$$

nous obtenons

$$(20) \quad A_{p,n} = A_{p-1,n} + p A_{p-1,n-1}.$$

C'est la relation qui existe entre les sommes des produits  $n$  à  $n$  des  $p$  premiers nombres entiers, et, puisque les conditions initiales sont les mêmes, les quantités  $A_{p,n}$  sont égales à ces sommes. On a d'ailleurs, plus généralement,

$$(21) \quad A_{p+q-1}^n = A_{p-1}^{n-q} (A_{p-1} + p) (A_{p-1} + p + 1) \dots (A_{p-1} + p + q - 1),$$

en remplaçant les exposants de  $A_{p-1}$  par des seconds indices.

On a encore

$$x + 1(x + 2)(x + 3)\dots(x + p) = x^p + A_{p,1}x^{p-1} + A_{p,2}x^{p-2} + \dots + A_{p,p},$$



et par conséquent

$$(22) \quad (x+1)(x+2)\dots(x+p) = (x - B_{p+1})^p.$$

En prenant  $r$  fois les différences, on a

$$(23) \quad \Delta^r (x - B_{p+1})^p = p(p-1)\dots(p-r+1)(x+r-1+B_{p-r+1})^{p-r},$$

et, en prenant  $r$  fois les sommes, on a

$$(24) \quad \frac{(x - B_{p+r+1})^r}{(\rho+1)(\rho+2)\dots(\rho+r)} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)} (x - B_r)^{r-1} = (S_r - B_{p+1})^p,$$

$S_{r,n}$  désignant la  $r^{\text{ième}}$  somme des puissances semblables  $n^{\text{ièmes}}$  des  $x$  premiers nombres, et  $S_{r,0}$  l'expression

$$S_{r,0} = \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+r-1)}{1 \cdot 2 \dots r}.$$

5. Les considérations exposées aux n<sup>os</sup> 2 et 3, pour les nombres de Bernoulli, s'appliquent encore aux coefficients des autres développements analogues, tels que <sup>(1)</sup>

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{P_1 x} = \frac{-2x}{e^x + 1} \quad \text{avec } F(x + P_1 + 2) - F(x + P_1) = 2F'(x) - 2F'(x+1), \\ e^{R_1 x} = \frac{x}{e^x - e^{-x}} \quad F(x + R_1 + 2) - F(x + R_1) = F'(x+1), \\ e^{E_1 x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad F(x + E_1 + 4) - F(x + E_1) = 2F(x+3) - 2F(x+1). \end{array} \right.$$

6. Eisenstein a donné un élégant théorème pour obtenir les coefficients  $f_{m,n}$  d'ordre  $m$  quelconque, lorsque l'on connaît ces coefficients pour toutes les valeurs entières et positives de  $m$  et de  $n$ . Soit encore

$$u = e^{f x} \quad \text{et} \quad f_{1,0} = 1,$$

on a

$$u^m = (1 + \overline{u-1})^m = 1 + m(u-1) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (u-1)^2 + \dots;$$

le coefficient de  $\frac{x^n}{n!}$  dans  $u^p$  est  $f_{p,n}$ , et, puisque  $f_{0,n}$  est nul, le

<sup>(1)</sup> *Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler (Annali di Matematica pura ed applicata)*, p. 23, Milano, 1877.

coefficient de  $\frac{x^n}{n!}$  dans  $(u-1)^p$  est donné par le développement de

$$(f_n - 1)^p,$$

dans lequel on remplace les exposants de  $f_n$  par des *premiers indices*; par conséquent, avec la même convention

$$f_{m,n} = mf_{1,n} + \frac{m(m-1)}{1.2} (f_n - 1)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} (f_n - 1)^3 + \dots \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} (f_n - 1)^n;$$

nous ne tenons pas compte des termes suivants qui ne contiennent pas  $x^n$ . Dans les seconds membres, le coefficient de  $f_{r,n}$  est

$$\frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots r} \left[ 1 - \frac{m-r}{1} + \frac{(m-r)(m-r-1)}{1.2} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-r} \frac{(m-r)\dots(m-n+1)}{1.2\dots(n-r)} \right];$$

mais, en désignant par

$$1, a, b, c, d, \dots, l, \dots, \\ 1, A, B, C, D, \dots, L, \dots$$

les lignes de rang  $q-1$  et  $q$  du triangle arithmétique, on a

$$A = 1 + a, \quad B = a + b, \quad C = b + c, \quad D = c + d, \quad \dots,$$

et aussi

$$1 - A + B - C + D - \dots \pm L = \pm l,$$

on a, par conséquent,

$$1 - q + \frac{q(q-1)}{1.2} - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} \\ + (-1)^s \frac{q(q-1)\dots(q-s+1)}{1.2\dots s} = (-1)^s \frac{(q-1)(q-2)\dots(q-s)}{1.2\dots s}.$$

Cette formule subsiste pour  $q$  quelconque, et, en faisant  $q = m-r$  et  $s = n-r$ , on en conclut que le coefficient de  $f_{r,n}$  est égal à

$$(-1)^{n-r} \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots r} \frac{(m-r-1)(m-r-2)\dots(m-n)}{1.2\dots(n-r)}$$

ou

$$(-1)^{n-r} \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots n} \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2\dots r} \frac{1}{m-r};$$

donc

$$f_{m,n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots n} \times \left[ (-1)^{n-1} \frac{n}{1} \frac{f_{1,n}}{m-1} + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{f_{2,n}}{m-2} + \dots + \frac{f_{n,n}}{m-n} \right],$$

et enfin

$$(26) \quad f_{m,n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots n} (\varphi-1)^n,$$

en remplaçant les exposants de  $\varphi$  par des indices, et posant

$$\varphi_r = \frac{f_{r,n}}{m-r}.$$

7. Herschel a donné, sous forme symbolique, le développement de  $\varphi(e^x)$  suivant les puissances de  $x$ ; on a, en effet,

$$(27) \quad \varphi(e^x) = e^{\varphi(1+\Delta)x},$$

en remplaçant dans le second membre les puissances de  $\varphi(1+\Delta)$  o par

$$\varphi(1+\Delta)o^n = \varphi(1)o^n + \varphi'(o) \frac{\Delta o^n}{1} + \varphi''(1) \frac{\Delta^2 o^n}{1.2} + \dots,$$

$\Delta^p o^n$  désignant, suivant l'usage, la  $p^{\text{ième}}$  différence de  $x^n$  pour  $x = o$ . Soit, par exemple,

$$\varphi(e^x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}, \quad \varphi(1+\Delta) = \frac{2+2\Delta}{2+\Delta^2};$$

on a, pour les nombres eulériens, la relation

$$(28) \quad E_n = (1+\Delta) \left( 1 - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^4}{2^2} - \frac{\Delta^6}{2^3} + \dots \right),$$

de laquelle on peut encore déduire la périodicité des résidus de  $E_n$  suivant un module premier.

8. Stirling et Boole ont donné d'autres développements en séries

qui sont des cas particuliers du suivant. Soit, en général,

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{F(x)}{Ae^{ax} + Be^{bx} + Ce^{cx} + \dots} \\ = a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + \dots + a_n \frac{x^n}{1.2 \dots n} + \dots \end{array} \right.$$

une fonction développée en série convergente suivant les puissances positives et entières de  $x$ ; en écrivant le second membre sous la forme symbolique  $e^{ax}$ , et en désignant par  $f(x)$  une fonction quelconque et par  $h$  l'accroissement de  $x$ , on a le développement

$$(30) \quad F(hf) = A e^{ahf(x+ah)} + B e^{ahf(x+\frac{2}{3}h)} + C e^{ahf(x+\frac{1}{3}h)} + \dots,$$

dans lequel on remplace  $h^0 f^0$  par  $f(x)$ ,  $h^n f^n$  par  $h^n \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ , et  $f^n(x + \alpha h)$  par  $\frac{d^n f(x + \alpha h)}{dx^n}$ .

En effet, soit  $f(x) = ge^{kx}$ , on a

$$\frac{d^n f(x + \alpha h)}{dx^n} = ge^{k(x+\alpha h)} h^n,$$

et par suite

$$\begin{aligned} F(hf) &= ge^{kx} F(hk), \\ A e^{ahf(x+ah)} &= ge^{kx} A^{ahk} e^{ahk}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A e^{ahf(x+ah)} + B e^{ahf(x+\frac{2}{3}h)} + C e^{ahf(x+\frac{1}{3}h)} + \dots \\ = ge^{kx} [A e^{ahk} + B e^{\frac{2}{3}ahk} + C e^{\frac{1}{3}ahk} + \dots] e^{ahk} = ge^{kx} F(hk). \end{aligned}$$

Ainsi le développement a lieu pour  $ge^{kx}$  quels que soient  $g$  et  $k$ ; il a donc lieu généralement.

En particulier, on déduit des développements

$$\frac{x}{e^x - 1} = e^{Bx}, \quad \frac{-2x}{e^x + 1} = e^{Px}, \quad \frac{x}{e^x - e^{-x}} = e^{Rx}, \quad \frac{2}{e^x + e^{-x}} = e^{Lx}$$

les formules

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} hf'(x) = e^{Bk f(x+h)} - e^{Bk f(x)}, \\ -2 hf'(x) = e^{Pk f(x+h)} + e^{Pk f(x)}, \\ hf'(x) = e^{Rk f(x+h)} - e^{Rk f(x-h)}, \\ 2 f(x) = e^{Ek f(x+h)} + e^{Ek f(x-h)}; \end{array} \right.$$

les deux premiers développements correspondent aux formules de Stirling et de Boole.

Au moyen du théorème d'Herschel, on peut présenter la formule (30) sous une autre forme. On observera d'ailleurs que ces considérations s'appliquent aux fonctions de plusieurs variables.

---